ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ ΣΤΟ QUANTUM

ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ

Ε. Ποια είναι η σημασία του θεωρήματος του Gödel για τα Μαθηματικά;

Α. Υποθέτω ότι αναφέρεστε στο πιο διάσημο από τα πολλά θεωρήματα του Gödel, το περίφημο *Θεώρημα Απληρότητας* που δημοσιεύτηκε το 1931. Θα ήθελα όμως να πάω λίγο πιο πίσω, και να πω πρώτα μερικά πράγματα για το *Θεώρημα Πληρότητας*, το αντικείμενο της Διδακτορικής Διατριβής του Gödel, που δημοσιεύτηκε ένα χρόνο πριν, το 1930. Υπάρχει μια επιφανειακή σύγκρουση ανάμεσα στα συμβατικά ονόματα αυτών των δύο θεωρημάτων, σαν ο Gödel να πήρε το Ντοκτορά του με κάποιο περιώνυμο θεώρημα, και μετά, ένα χρόνο αργότερα, να απέδειξε το αντίθετο! Στην πραγματικότητα, βέβαια, όχι μόνον δεν αντιτίθενται αυτά τα δύο βασικά θεωρήματα, αλλά, αντιθέτως, συμπληρώνουν το ένα το άλλο, και η εξήγηση του φαινομενικού παράδοξου είναι το κλειδί για τη σωστή κατανόηση και των δύο.

Τα θεωρήματα του Gödel αφορούν την πρωτοβάθμια (κατηγορηματική) λογική, και θέλω πρώτα να πω μερικά πράγματα γι' αυτή την τόσο βασική, μαθηματική δομή.

Μια πρωτοβάθμια γλώσσα L καθορίζεται από ένα *λεξιλόγιο* συμβόλων, τα οποία ονομάζουν τις βασικές σταθερές, συναρτήσεις και σχέσεις κάποιας θεωρίας, και οι *προτάσεις* της κατασκευάζονται από αυτά τα σύμβολα, και από μεταβλητές x, $y, \dots$;· το σύμβολο της ισότητας $=$· τους προτασιακούς συνδέσμους *άρνηση* $\neg$, *σύζευξη* &, *διάζευξη* $\vee$ και *συνεπαγωγή* $\rightarrow$· και τους ποσοδείκτες *για κάθε* $\forall$ και *υπάρχει* $\exists$. Η γλώσσα της αριθμοθεωρίας, για παράδειγμα, έχει σύμβολα 0, 1, $+$ και $\cdot$, και τυπική της πρόταση είναι η

$$(\forall x)[\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)[x = y + 1]],$$

που σημαίνει ότι «κάθε φυσικός αριθμός $x \neq 0$ είναι ο επόμενος κάποιου άλλου». Πιο ενδιαφέρουσα είναι η

$$(1) \quad (\forall x)(\exists y)[(\exists z)[(x + z) + 1 = y] \\ \& \ (\forall u)(\forall v)[y = u \cdot v \rightarrow (u = 1 \vee u = y)]],$$

που εκφράζει το γεγονός ότι «για κάθε αριθμό x, υπάρχει κάποιος άλλος y, μεγαλύτερος του x (εφόσον $x + z + 1 = y$ για κάποιο z), και ο οποίος διαιρείται (ακριβώς) μόνο από το 1 και από τον εαυτό του», με άλλα λόγια,

Η «συνέντευξη» αυτή δόθηκε στο Γιώργο Ευαγγελόπουλο, και δημοσιεύτηκε στο *Quantum*, Τόμος 4, Τεύχος 4, Ιούλιος-Αύγουστος 1997. Η εστιοσελίδα του *Quantum* είναι `http://www.katoptro.gr/quantum.htm`.

«υπάρχουν άπειρα πολλοί πρώτοι αριθμοί». Στην πραγματικότητα, σχεδόν κάθε πρόταση της κλασικής αριθμοθεωρίας μπορεί να εκφραστεί (με λίγη προσπάθεια) σ' αυτή την τόσο απλή, πρωτοβάθμια γλώσσα.

Πιο σημαντική είναι η πρωτοβάθμια γλώσσα της συνολοθεωρίας, που έχει μόνο ένα, διμελές σύμβολο $\in$, για τη σχέση του «ανήκειν», και στην οποία μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα κλασικά Μαθηματικά! Αυτό, βέβαια, δεν είναι προφανές, για την απόδειξή του πρέπει να απεικονίσουμε πιστά στον κόσμο των συνόλων όλες τις δομές των Μαθηματικών (τους φυσικούς, πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς, τις συναρτήσεις σ' αυτά τα σύνολα, κ.λπ.) και να επικαλεστούμε μερικά από τα βασικότερα μαθηματικά αποτελέσματα του περασμένου αιώνα· αλλά είναι γεγονός, και επομένως τα θεωρήματα του Gödel επηρεάζουν άμεσα όλα τα Μαθηματικά.

Είπα πιο πάνω ότι η πρόταση (1) εκφράζει το «θεώρημα του Ευκλείδη», ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι, φυσικοί αριθμοί, αλλά αυτό ισχύει μόνον αν επιλέξουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ως πεδίο κύμανσης των μεταβλητών και ερμηνεύσουμε τα σύμβολα 0, 1, + και $\cdot$ με τους φυσικούς αριθμούς 0 και 1, και τις συνηθισμένες πράξεις της αριθμητικής. Αυτό, όμως, δεν είναι υποχρεωτικό: θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις μεταβλητές σαν ονόματα τυχαίων (μη-αρνητικών) ρητών αριθμών και να ερμηνεύσουμε τα 0, 1, + και $\cdot$ ανάλογα, και τότε η (1) δεν αληθεύει πια, εφόσον δεν υπάρχουν «θετικά, πρώτα κλάσματα». Γενικά, μια *ερμηνεία* ή *δομή* M της τυχαίας πρωτοβάθμιας γλώσσας L προσδιορίζεται από ένα μηκενό σύνολο A_M, και μια ανάθεση συγκεκριμένων στοιχείων του A_M και συναρτήσεων και σχέσεων στο A_M στα σύμβολα της L, έτσι ώστε οι προτάσεις της L αποκτούν νόημα, και κάθε μια από αυτές *αληθεύει* ή *ψεύδεται* στην M.

Είναι σημαντικό και χαρακτηριστικό στοιχείο της Μαθηματικής Λογικής, γενικά, ότι διακρίνει αυτές τις δύο, ξεχωριστές και συμπληρωματικές απόψεις μιας γλώσσας L, είτε πρόκειται για πρωτοβάθμια γλώσσα, ή για φυσική γλώσσα (Ελληνικά ή Αγγλικά), ή, ακόμη, για γλώσσα προγραμματισμού: το *συντακτικό* της L προσδιορίζει τις «γραμματικά ορθές» εκφράσεις της γλώσσας, αυτές που επιδέχονται νόημα, και η *σημασιολογία* της L αναθέτει νόημα σ' αυτές τις εκφράσεις, για κάθε, δοσμένη ερμηνεία (λεξικό) του λεξιλογίου της L. Στην περίπτωση της πρωτοβάθμιας γλώσσας, το συντακτικό είναι πολύ απλό και η σημασιολογία καθορίζεται με τους απλούς κανόνες που υπολογίζουν την αληθοτιμή της κάθε πρότασης στο τυχαίο πρότυπο.

Τελικά υπάρχει και η έννοια της *απόδειξης*, που δίνει «βεβαιότητα» στα Μαθηματικά και τα ξεχωρίζει από τις άλλες επιστήμες. Δεν μπορούμε να αποδείξουμε τα πάντα, βέβαια, πρέπει να ξεκινήσουμε από κάτι, και τυπικά ξεκινάμε με ένα σύνολο T *αξιωμάτων*, προτάσεων που αποδεχόμαστε για κάποιο λόγο — επειδή μας φαίνονται «προφανείς» σε κάποιο πρότυπο, π.χ., τα αξιώματα της επίπεδης Γεωμετρίας· επειδή εκφράζουν τους βασικούς νόμους κάποιας επιστήμης, π.χ., της Φυσικής ή των Οικονομικών· ή, απλά, επειδή έχουν ενδιαφέρον, όπως όταν οι προτάσεις του T εκφράζουν τις νόμιμες κινήσεις στο σκάκι. *Πρωτοβάθμια θεωρία* είναι, ακριβώς, ένα τέτοιο, τυχαίο σύνολο προτάσεων, και η τυχαία πρόταση θ είναι (τυπικό) *θεώρημα* της T, αν υπάρχει *απόδειξη* της θ από το T, δηλαδή κάποια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\theta_1, \dots, \theta_n$, όπου η θ είναι η τελευταία πρόταση θ_n και κάθε θ_i είτε είναι αξίωμα (μέλος του T) ή είναι το *συμπέρασμα* κάποιου *λογικού κανόνα*, του οποίου οι *υποθέσεις* προηγούνται της θ_i στην απόδειξη. Οι «λογικοί κανόνες» είναι ελάχιστοι, απλοί, και το αποτέλεσμα μιας αναζήτησης του ανθρώπινου γένους για τους «έγκυρους συλλογισμούς» που ξεκίνησε με τον Αριστοτέλη (ίσως ακόμη πιο πριν) και συμπληρώθηκε μόλις στο τέλος του περασμένου αιώνα. Για παράδειγμα, ένας από τους πλέον βασικούς κανόνες είναι ο εξής:

$$\text{από την } \theta \text{ και την } \theta \to \phi, \text{ συμπεραίνουμε την } \phi.$$

Αυτή η έννοια απόδειξης δεν είναι παρά η αυστηρή, πρωτοβάθμια εκδοχή της έννοιας που μάθαμε στην Ευκλείδειο Γεωμετρία, στα σχολεία. Προσφέρει στους μαθηματικούς μια σίγουρη μέθοδο να ελέγξουν (τουλάχιστον κατ' αρχήν) χωρίς περιθώριο λάθους, αν κάποια απόδειξη που προτείνεται είναι, όντως, σωστή: οι λογικοί κανόνες είναι αρκετά απλοί, ώστε η ακρίβεια κάθε επίκλησής τους ελέγχεται εύκολα, και επομένως η ορθότητα μιας τυχαίας απόδειξης μπορεί να ελεγχθεί τέλεια, «βήμα προς βήμα». Αυτήν τη βεβαιότητα με την οποία ελέγχουμε αποδείξεις επικαλούμαστε όταν μιλάμε για τη «βέβαιη γνώση» που απορρέει από τα Μαθηματικά.

Η τυχαία δομή M είναι *πρότυπο* (μοντέλο) της θεωρίας T αν κάθε αξίωμα της T αληθεύει στην M· και η τυχαία πρόταση θ είναι *λογικό συμπέρασμα* της T αν αληθεύει σε κάθε πρότυπο της T. Έτσι έχουμε δύο κλάσεις προτάσεων που συνάγονται από τα αξιώματα μιας θεωρίας T «μόνο με τη λογική», τα θεωρήματα της T, που συνάγονται συνδυαστικά, επειδή επιδέχονται αποδείξεις, και τα λογικά συμπεράσματα της T, που συνάγονται σημασιολογικά, επειδή αληθεύουν σε κάθε πρότυπο της T· η βασική ανακάλυψη του Gödel είναι ότι αυτές οι δύο κλάσεις συμπίπτουν:

Θεώρημα Πληρότητας του Gödel. *Η τυχαία πρωτοβάθμια πρόταση θ είναι θεώρημα της τυχαίας πρωτοβάθμιας θεωρίας T, τότε και μόνον αν η θ αληθεύει σε κάθε πρότυπο της T.*

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες είναι οι *έγκυρες προτάσεις* που είναι λογικά συμπεράσματα της «κενής θεωρίας», δηλαδή αληθεύουν σε κάθε δομή, ή (ισοδύναμα, από το Θεώρημα Πληρότητας) είναι «απόλυτα» θεωρήματα της Λογικής. Μπορούμε να πούμε ότι αυτές είναι οι «λογικές αλήθειες», οι προτάσεις που αληθεύουν ανεξάρτητα από την «πραγματικότητα», όπως αυτή απεικονίζεται σε μια πρωτοβάθμια δομή.

Το Θεώρημα Πληρότητας έχει πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε μαθηματικές θεωρίες, αλλά η πρωταρχική του σημασία βρίσκεται στο τι μας λέει για τα λογικά θεμέλια της επιστήμης. Προσωπικά, πιστεύω ότι έλυσε οριστικά και τελεσίδικα ένα πανάρχαιο ερώτημα της επιστήμης: *Τι ακολουθεί από τι, αναγκαστικά, μόνο με τη λογική*; Με άλλα λόγια, ποιες επιστημονικές προτάσεις (νόμους, θέσεις) πρέπει υποχρεωτικά να αποδεχτούμε, ως θέμα λογικής (και ανεξάρτητα του πως, πράγματι, είναι φτιαγμένος ο κόσμος μας), αν παραδεχτούμε πρώτα μερικούς, συγκεκριμένους νόμους; Το ερώτημα είναι προφανώς θεμελιακό, όχι μόνο για μαθηματικούς και φιλοσόφους (που θέλουν να κατανοήσουν τις έννοιες της «λογικής αλήθειας» και της «λογικής συνεπαγωγής»), αλλά και για επιστήμονες κάθε κλάδου, που θέλουν να διαχωρίσουν τους βασικούς νόμους της επιστήμης τους από τα λογικά τους συμπεράσματα.

Ε. Και το Θεώρημα Απληρότητας;

Α. Ας διατυπώσουμε πρώτα μια απλή εκδοχή αυτού του κορυφαίου θεωρήματος, για τη θεωρία ZFC (τη συνήθη, αξιωματική συνολοθεωρία) που είναι και πολύ κοντά στην αρχική διατύπωσή του.

Θεώρημα Απληρότητας του Gödel. *Αν η* ZFC *είναι σωστή για την αριθμητική, τότε δεν αποδείχνει όλες τις αριθμητικές αλήθειες.*

Για να ορίσουμε απλά την έννοια της «αριθμητικά σωστής» θεωρίας, ας ταυτίσουμε πρώτα την τυχαία *αριθμητική πρόταση* (δηλαδή πρόταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας της αριθμοθεωρίας) θ με την κλασική της μετάφραση θ_s στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων. Μια θεωρία T στη γλώσσα της συνολοθεωρίας είναι *σωστή για την αριθμητική*, αν κάθε αριθμητική πρόταση θ που είναι θεώρημα της T αληθεύει στην συνήθη δομή των φυσικών αριθμών. Έτσι ορισμένη, η υπόθεση του θεωρήματος είναι γενικά παραδεκτή στα Μαθηματικά· και απ' αυτήν, το Θεώρημα Απληρότητας συμπεραίνει ότι η ZFC δεν είναι «πλήρης», με την έννοια ότι κάποια αληθής αριθμητική πρόταση θ δεν είναι θεώρημα της ZFC—και, βέβαια, ούτε και η άρνησή της $\neg\theta$ είναι θεώρημα της ZFC, εφόσον η $\neg\theta$ ψεύδεται, και η ZFC είναι αριθμητικά σωστή. Ο Gödel, μάλιστα, κατασκεύασε μια συγκεκριμένη τέτοια «αναποκρίσιμη στην ZFC» πρόταση γ, που είναι *προφανώς αληθής* στη συνήθη δομή! (Πολύ περιληπτικά, η γ εκφράζει τη σκέψη ότι «δεν υπάρχει απόδειξη της γ»· το τρικ είναι να δείξουμε ότι μια τέτοια «αυτοαναφερόμενη» δήλωση μπορεί να εκφραστεί στην πρωτοβάθμια γλώσσα της αριθμοθεωρίας.)

Αυτό το απλό γεγονός, ότι η αξιωματική συνολοθεωρία δεν μπορεί να αποδείξει όλες τις πρωτοβάθμιες αριθμητικές αλήθειες είναι, πράγματι, συγκλονιστικό, αφού όλα τα κλασικά θεωρήματα των Μαθηματικών συνάγονται από τα αξιώματά της! Επιπλέον, εκτός από το (κάπως τεχνητό) παράδειγμα γ του Gödel, τι άλλες προτάσεις στη γλώσσα της συνολοθεωρίας μπορεί να είναι αναποκρίσιμες στην ZFC; Μήπως ανάμεσα σ' αυτές βρίσκονται και μερικές από τις κλασικές, αναπόδεικτες εικασίες των Μαθηματικών; Το 1939, οχτώ χρόνια μετά από την απόδειξη του Θεωρήματος Απληρότητας, ο Gödel έδειξε ότι η ZFC δεν αποδείχνει την άρνηση της Υπόθεσης του Συνεχούς· και το 1963, είκοσι τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Paul Cohen έδειξε ότι ούτε η Υπόθεση του Συνεχούς είναι θεώρημα της ZFC, έτσι που το σημαντικότερο, ανοικτό πρόβλημα της συνολοθεωρίας μετατέθηκε έξω από τα όρια των κλασικών μαθηματικών, αναγκαστικά ανεπίλυτο με τις κλασικές μεθόδους. Στη συνέχεια, σχεδόν κάθε κρίσιμη ερώτηση για τα σύνολα που δεν είχε απαντηθεί πριν από το 1940 αποδείχτηκε αναποκρίσιμη στη ZFC, και η θεωρία συνόλων άλλαξε κατεύθυνση και προσανατολίστηκε στη μελέτη «ισχυρών αξιωμάτων», πέραν της ZFC. Μαζί με πολλούς άλλους, έχω και εγώ δουλέψει για ένα μεγάλο μέρος της ζωής μου σ' αυτό το πρόγραμμα, όπως το ίδιο έχει κάνει και ο μαθητής μου Κεχρής, που μίλησε γι' αυτό κάπως πιο συγκεκριμένα στη συνέντευξή του μαζί σας τον περασμένο Δεκέμβριο. Ώστε δεν υπάρχει ανάγκη να πω περισσότερα γι' αυτό.

Αξίζει, όμως, να διερευνήσουμε για λίγο τον πιο προφανή τόπο επέκτασης της ZFC, που μας υποδείχνει η απόδειξη του Gödel: εφόσον η γ αληθεύει, γιατί να μην την προσθέσουμε στα αξιώματα — μπορούμε, ίσως με αυτό τον τρόπο να κατασκευάσουμε μια πλήρη θεωρία; Δυστυχώς (ή ευτυχώς;) όχι: η απόδειξη του Gödel εφαρμόζεται στην επεκταθείσα θεωρία ZFC+γ και μας δίνει μια καινούρια πρόταση γ', που επίσης είναι προφανώς αληθής, αλλά που δεν είναι θεώρημα της ZFC+γ. Και ούτω καθεξής: η απόδειξη του Gödel (πολύ βασικότερη από τη διατύπωση του θεωρήματός του, όπως τόσο συχνά συμβαίνει στα Μαθηματικά) δείχνει αδιαμφισβήτητα ότι *κάθε σωστή για την αριθμητική, υπολογιστικά αξιωματική θεωρία T στη γλώσσα της συνολοθεωρίας δεν είναι πλήρης*, και συγκεκριμένα, ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε (κατευθείαν από τον ορισμό της T) κάποια αριθμητική πρόταση γ_T που αληθεύει, αλλά που δεν είναι θεώρημα της T. Για να ορίσουμε αυστηρά την έννοια της «υπολογιστικά αξιωματικής θεωρίας» χρειαζόμαστε μερικά από τη θεωρία υπολογισιμότητας, αλλά, οπωσδήποτε, καλύπτει κάθε επέκταση T της ZFC με πεπερασμένο αριθμό προτάσεων, και αυτό, από μόνο του, είναι αρκετά εντυπωσιακό.

Στο επόμενο βήμα εφαρμόζεται το Θεώρημα Πληρότητας, και εγγυάται ότι *υπάρχει κάποιο πρότυπο M_γ της* ZFC *στο οποίο η πρόταση γ του Gödel ψεύδεται*, επειδή, αν η γ αλήθευε σε κάθε πρότυπο της ZFC, τότε θα ήταν θεώρημα της ZFC. Αυτό το πρότυπο M_γ μας δίνει μια καινούρια, «ασυνήθη» (ιδιάζουσα) έννοια του «συνόλου», μια «επανερμηνεία» της γλώσσας της συνολοθεωρίας, με την οποία, από τη μια μεριά όλα τα θεωρήματα των κλασικών Μαθηματικών παραμένουν αληθή (επειδή είναι θεωρήματα της ZFC), και από την άλλη, η πρόταση γ του Gödel ψεύδεται. Πια είναι η δομή των φυσικών αριθμών στο M_γ; Πολύ παράξενη, ασυνήθιστη, και όμως αρκετά κοντά στην συνήθη δομή έτσι ώστε κάθε θεώρημα της κλασικής αριθμοθεωρίας να παραμένει αληθές. Ο μεγάλος, Νορβηγός μαθηματικός Skolem είχε αποδείξει ότι υπάρχουν τέτοια ασυνήθη πρότυπα πριν από τον Gödel, και με άλλο τρόπο, αλλά η απόδειξη του Gödel μας δίνει πληρέστερη εξήγηση γι' αυτό το κάπως απίθανο αποτέλεσμα.

Ελπίζω, ότι έπειτα απ' όλα αυτά, δεν είναι δύσκολο να δούμε τη σχέση ανάμεσα στα Θεωρήματα Πληρότητας και Απληρότητας, και την εξήγηση της φαινομενικής αντίθεσής τους: το πρόβλημα ανακύπτει επειδή χρησιμοποιούμε τη λέξη «πλήρης» με δύο διαφορετικές σημασίες στις διατυπώσεις αυτών των δύο θεωρημάτων. Για την ZFC, συνοπτικά, το Θεώρημα Πληρότητας εγγυάται ότι κάθε πρόταση θ που *αληθεύει σε κάθε πρότυπο της* ZFC είναι και θεώρημα της ZFC· ενώ το Θεώρημα Απληρότητας μας δίνει παραδείγματα προτάσεων που *αληθεύουν στο σύνηθες πρότυπο* της ZFC αλλά που δεν είναι θεωρήματα της ZFC.

Ε. Ποια η σημασία της «Θέσης Church-Turing», σύμφωνα με την οποία η έννοια της μηχανής Turing (ή κάποιας ισοδύναμης) στην πραγματικότητα ορίζει αυτό που εννοούμε στα Μαθηματικά όταν λέμε «αλγοριθμική» (ή «ενεργό», ή «αναδρομική» ή «μηχανική») διαδικασία;

Α. Η ερώτηση είναι πολύ σημαντική, και ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο την θέσατε μου δίνει την ευκαιρία να εξηγήσω (ή, τουλάχιστον, να εκφράσω τη γνώμη μου για) μερικά λεπτά θέματα που συνδέονται με την Θέση Church-Turing. Θα δεχτώ ως συνώνυμες (προσωρινά) όλες τις εκφράσεις που χρησιμοποιήσατε, «αλγοριθμική ή ... ή μηχανική διαδικασία», και θα προσθέσω σ' αυτές τους παραδοσιακούς όρους «υπολογιστική διαδικασία» και «αλγόριθμος» τις οποίες και προτιμώ.

Από την ιστορική άποψη, καταρχήν, ο Church και ο Turing εργάστηκαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο (το 1936, σημαδιακό χρόνο για τη Λογική), με τον ίδιο στόχο, να λύσουν το λεγόμενο Entscheidungsproblem του Hilbert («Entscheidung» θα πει «εξακρίβωση» ή «απόκριση»):

Το Entscheidungsproblem του Hilbert: *Υπάρχει υπολογιστική διαδικασία που να εξακριβώνει αν η τυχαία πρόταση θ της πρωτοβάθμιας λογικής είναι θεώρημα*, ή, ισοδύναμα από το Θεώρημα Πληρότητας, *αληθής σε κάθε δομή*;

Παρόμοιες ερωτήσεις, που απαιτούν κάποια «υπολογιστική διαδικασία» για την απάντησή τους, είχαν ανακύψει πολλές φορές στα Μαθηματικά, π.χ., το εξής, κλασικό παράδειγμα από την Άλγεβρα του 19ου αιώνα: *υπάρχει υπολογιστική διαδικασία που να εξακριβώνει αν το τυχαίο πολυώνυμο* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *με (θετικούς ή αρνητικούς) ακέραιους συντελεστές έχει πραγματική ρίζα*; Η απάντηση δίνεται από τον περίφημο *αλγόριθμο του Sturm*, που μάλιστα υπολογίζει (από τους δοσμένους συντελεστές $a_0, \ldots, a_n$) τον ακριβή αριθμό k πραγματικών ριζών του πολυώνυμου, $(0 \leq k \leq n)$, έτσι ώστε υπάρχει πραγματική ρίζα ακριβώς όταν $k > 0$. Υπήρχαν πολλά, τέτοια παραδείγματα, απ' όλους τους κλάδους των

Μαθηματικών, αλλά όλα είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό: η απάντηση ήταν πάντα θετική, σε κάθε περίπτωση όπου το πρόβλημα είχε λυθεί, και η λύση συνίστατο στην περιγραφή κάποιας συγκεκριμένης διαδικασίας α, και την απόδειξη ότι η α παράγει το ζητούμενο αντικείμενο. Η «υπολογιστικότητα» της α δεν είχε ποτέ αμφισβητηθεί, ήταν πάντα προφανής: ο αλγόριθμος του Sturm, π.χ., μια όμορφη παραλλαγή του κλασικού, Ευκλείδειου αλγορίθμου (που υπολογίζει τον μέγιστο, κοινό διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών) βασικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά «επαναληπτική διαίρεση πολυώνυμων»· όσο περίπλοκη κι' αν είναι η «τακτοποίηση» αυτών των διαιρέσεων, κι' όσο έξυπνη η απόδειξη ότι οδηγούν στο ζητούμενο, δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι η διαδικασία είναι «υπολογιστική» — τόσο που η ερώτηση της «υπολογιστικότητάς» της δεν ανακύπτει καν. Έτσι δεν είχε δημιουργηθεί η ανάγκη να δοθεί αυστηρός ορισμός του «αλγορίθμου», αρκούσαν οι λεπτομερείς περιγραφές συγκεκριμένων αλγορίθμων. Η περίπτωση του Entscheidungsproblem ήταν όμως διαφορετική, επειδή, γενικά, όλοι πίστευαν ότι είχε *αρνητική απάντηση*· και για να δώσουμε αυστηρή απόδειξη ότι *δεν υπάρχει αλγόριθμος* που να υπολογίζει κάποια, συγκεκριμένη, συνάρτηση, πρέπει, προφανώς, να δώσουμε πρώτα έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας του «αλγορίθμου».

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα κάπως πιο προσεκτικά, έστω S^* το σύνολο από πεπερασμένες ακολουθίες ή (απλούστερα) *λέξεις* από κάποιο πεπερασμένο σύνολο S, π.χ., το Ελληνικό ή το Λατινικό αλφάβητο, ή ακόμη το (μεγαλύτερο) σύνολο από 256 «χαρακτήρες» που χρησιμοποιούμε τώρα στον προγραμματισμό. Ανάμεσα στις λέξεις του S^* βρίσκουμε τις προτάσεις της τυχαίας πρωτοβάθμιας γλώσσας, αλλά, επίσης, και τους ακέραιους (στο δεκαδικό σύστημα, με $+$ ή $-$ στην κεφαλή), τα πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, κ.λπ. Με αναφορά σε κάποια, συγκεκριμένη έννοια *αλγορίθμου στο* S^*, καλούμε την τυχαία συνάρτηση $f : S^* \to S^*$ *υπολογίσιμη* αν κάποιος αλγόριθμος την υπολογίζει, και το τυχαίο σύνολο $A \subseteq S^*$ *αποκρίσιμο* αν η «χαρακτηριστική συνάρτησή» του χ_A είναι υπολογίσιμη, όπου

$$\chi_A(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \theta \text{ είναι μέλος του } A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{2}$$

Το Entsheidungsproblem είναι το πρόβλημα *αποκρισιμότητας* του συνόλου έγκυρων πρωτοβάθμιων προτάσεων.

Μπήκα στις λεπτομέρειες, επειδή το ιστορικό πλαίσιο έχει πάντα ενδιαφέρον (έτσι τουλάχιστον πιστεύω), αλλά και πιο συγκεκριμένα, επειδή συχνά λέγεται ότι οι Church και Turing ξεκίνησαν ακριβώς με αυτό που μόλις είπα ότι είναι το ζητούμενο, δηλαδή με έναν αυστηρό ορισμό του «αλγορίθμου». Δεν έχουν όμως ακριβώς έτσι τα πράγματα· οι Church και Turing όρισαν κατευθείαν την κλάση των *υπολογίσιμων συναρτήσεων* (στο S^*), αυτών για τις οποίες *υπάρχει αλγόριθμος που τις υπολογίζει*, παρακάμπτοντας τον ορισμό της έννοιας του αλγορίθμου.

Συνοπτικά, ο Turing όρισε πρώτα ένα σύνολο (αφηρημένων) «μηχανών», αυτών που σήμερα φέρουν το όνομά του, οι οποίες δρουν πάνω στις λέξεις από κάποιο αλφάβητο και (μερικές φορές, όταν ο υπολογισμός τους «συγκλίνει») αποδίδουν κάποια λέξη ως «τιμή». Πολλοί από τους αναγνώστες του Quantum θα ξέρουν τον αυστηρό ορισμό, αλλά, οπωσδήποτε, αυτό έχει μόνο ιστορικό ενδιαφέρον σήμερα· χωρίς να χάσουμε τίποτα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έννοια της μηχανής Turing με έναν PC της εποχής μας, που υλοποιεί κάποιο συγκεκριμένο πρόγραμμα και έχει τη δυνατότητα να απαιτήσει επιπρόσθετη (εξωτερική) μνήμη χωρίς περιορισμό κατά τη διάρκεια του υπολογισμού. Χωρίς να ξέρει τίποτα γι' αυτές τις τόσο προσφιλείς μηχανές (και αυτό είναι, πράγματι, αξιοθαύμαστο), ο Turing υποστήριξε πολύ εύγλωττα ότι

> κάθε υπολογιστική διαδικασία μπορεί να προσομοιωθεί από μια μηχανή Turing·

και απ' αυτό συμπέρανε την διάσημη

Θέση Church-Turing. *Η τυχαία συνάρτηση $f : S^* \to S^*$ στις λέξεις από κάποιο, πεπερασμένο σύνολο S, είναι υπολογίσιμη* (από κάποιον αλγόριθμο) *τότε και μόνον αν η f είναι υπολογίσιμη από κάποια μηχανή Turing.*

Μετά έδειξε ότι η συνάρτηση (2) δεν υπολογίζεται από καμιά μηχανή Turing, και, επομένως, δεν υπολογίζεται από κανέναν αλγόριθμο (από τη Θέση), και η απάντηση στο Entsheidungsproblem είναι αρνητική. Ο Church έκανε κάτι παρόμοιο, χρησιμοποιώντας λ-όρους αντί για μηχανές Turing, και με λιγότερη ευγλωττία, επειδή οι λ-όροι δεν είναι πολύ φιλικά αντικείμενα.

Πιστεύω ότι έχω πια θέσει το πλαίσιο για δύο από τις παρατηρήσεις που ήθελα να κάνω για την Θέση Church-Turing.

Η πρώτη είναι ότι ποτέ δεν επικαλούμαστε την Θέση Church-Turing για να αποδείξουμε ότι κάποια, συγκεκριμένη συνάρτηση είναι υπολογίσιμη — γι' αυτό το σκοπό, αρκεί ο προσδιορισμός μιας συγκεκριμένης διαδικασίας α που αποδίδει το ζητούμενο και που είναι «προφανώς» υπολογιστική.

Ένας δεύτερος, ουσιαστικός περιορισμός των μηχανών Turing και των λ-όρων είναι ότι εκφράζουν μόνο *συμβολικούς υπολογισμούς*, δηλαδή το θεμελιακό κίνητρο για τον ορισμό τους είναι το ότι δρουν στο σύνολο των λέξεων. Μερικοί ισχυρίζονται ότι *όλοι οι υπολογισμοί είναι συμβολικοί υπολογισμοί*, και ίσως το σλόγκαν πράγματι να ισχύει για τους υπολογισμούς αληθινών, υλικών μηχανών, αλλά σίγουρα δεν είναι αυτό που εννοούν οι μαθηματικοί όταν μιλάνε για «αλγορίθμους». Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του Sturm συνήθως ορίζεται στη κλάση πολυώνυμων με τυχαίους *πραγματικούς* συντελεστές, και τίποτα στην περιγραφή του ή στην ανάλυση του *πώς* εφαρμόζεται δεν απαιτεί οι συντελεστές να είναι ακέραιοι ή ρητοί. Αν θελήσουμε να τον *υλοποιήσουμε* σε κάποιον αληθινό υπολογιστή ή κάποια ιδεώδη μηχανή Turing, τότε, βέβαια, πρέπει να προσεγγίσουμε τους πραγματικούς συντελεστές του δοσμένου πολυώνυμου με ρητούς, και να επιλέξουμε συγκεκριμένες, συμβολικές παραστάσεις αυτών των ρητών· αλλά, υπάρχουν πολλοί τρόποι να κάνουμε αυτές τις επιλογές, και κανένας απ' αυτούς δεν είναι ουσιαστικό στοιχείο του *αλγορίθμου του Strum*. Πιστεύω ότι είναι πιο χρήσιμο να δεχτούμε ότι ο *αλγόριθμος του Sturm* είναι συγκεκριμένο, αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο που επιδέχεται πολλές *υλοποιήσεις* σε διάφορα πρότυπα υπολογισμού, από το να αναγνωρίσουμε πολλούς «αλγορίθμους Sturm» με διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες. Απ' αυτή τη σκοπιά, ο αλγόριθμος του Sturm δρα κατευθείαν σε τυχαία, πραγματικά πολυώνυμα, οι (πολλές και ποικίλες) υλοποιήσεις του δρουν σε συμβολικές προσεγγίσεις πραγματικών πολυώνυμων, και η σχέση ανάμεσα στον αφηρημένο αλγόριθμο και τις υλοποιήσεις του είναι πρόβλημα για μελέτη, πρόβλημα στο οποίο ο ικανός προγραμματιστής θα αφιερώσει ικανό χρόνο.

Μέχρι τώρα, δεν υπάρχει ακόμη ένας γενικά αποδεκτός, αυστηρός ορισμός της έννοιας του αλγορίθμου στα Μαθηματικά ή την Πληροφορική, ανάλογος των ορισμών «πραγματικού αριθμού», «στοχαστικής μεταβλητής», κ.λπ., και αυτό παρά την τεράστια πρόοδο που έχει επιτευχθεί στη μελέτη των αλγορίθμων τα πρόσφατα χρόνια. Αυτό δεν είναι, ίσως, τόσο παράδοξο όσο ακούγεται· π.χ., ο λογισμός αναπτύχθηκε δραματικά για κάπου 200 χρόνια πριν να θεμελιωθεί ικανοποιητικά με αυστηρούς ορισμούς των πραγματικών αριθμών, ορίων, παράγωγων, κ.λπ. Οι μαθηματικοί δεν έψαξαν για τέτοιους ορισμούς μέχρις ότου η θεωρία έφτασε σε τέτοιο σημείο ανάπτυξης που μπορούσε να τους χρησιμοποιήσει — και, μάλιστα, τους χρειάζονταν. Πιστεύω, όμως, ότι και η Θεωρητική Πληροφορική έχει φτάσει πια στο ανάλογο σημείο της ανάπτυξής της, που να μπορεί να χρησιμοποιήσει και να χρειάζεται μια αυστηρή και εύχρηστη θεωρία αλγορίθμων. Πάντοτε συνιστώ αυτή την περιοχή έρευνας, και, όπως ίσως γνωρίζετε, δουλεύω και γω σ' αυτό το θέμα τα τελευταία χρόνια.

Ε. Θέλετε να πείτε κάτι για την εργασία σας πάνω στους αναδρομικούς αλγορίθμους;

Α. Ίσως μπορέσω να εισάγω μερικές από τις βασικές ιδέες μ' ένα απλό παράδειγμα, από τη δουλειά του Stephen Kleene, ενός από τους πρωτοπόρους της θεωρίας αναδρομής. Θέτουμε

$$R(m,n) \iff m \leq n \text{ και οι } n, n+2 \text{ είναι και οι δύο πρώτοι αριθμοί,}$$

και θεωρούμε το σύστημα *αναδρομικών εξισώσεων*

$$\begin{aligned} f(m) &= g(m,0) \\ g(m,n) &= \text{αν } R(m,n) \text{ τότε } 0 \text{ αλλιώς } g(m,n+1)+1. \end{aligned} \tag{3}$$

Είναι προφανές πως μπορούμε απ' αυτές τις εξισώσεις να παράγουμε οδηγίες για τον υπολογισμό της τιμής $f(m)$, για τυχαίο m. Για παράδειγμα, αν $m = 7$, προφανώς

$$\neg R(7,0), \neg R(7,1), \ldots, \neg R(7,9), \neg R(7,10), \text{ αλλά } R(7,11).$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις και εφαρμόζοντας επανειλημμένα την εξίσωση για τη συνάρτηση g, υπολογίζουμε διαδοχικά τις τιμές

$$g(7,0) = g(7,1) + 1 = \cdots = g(7,10) + 10 = g(7,11) + 11 = 0 + 11 = 11,$$

και επομένως, $f(7) = g(7,0) = 11$. Δεν είναι δύσκολο να δώσουμε γενικό, αυστηρό ορισμό αυτής της «αναδρομικής διαδικασίας», και να δείξουμε ότι, για κάθε m, υπολογίζει την τιμή

$$\begin{aligned} f(m) = {} & \text{ο ελάχιστος } n \geq m \text{ τέτοιος ώστε} \\ & \text{οι } n \text{ και } n+2 \text{ να είναι πρώτοι αριθμοί,} \end{aligned}$$

αν υπάρχει κάποιος $n \geq m$ που να είναι το πρώτο μέλος «ζεύγους διδύμων πρώτων», ενώ, στη αντίθετη περίπτωση, η διαδικασία δεν συγκλίνει (εξακολουθεί επ' άπειρον). Αυτή, η δεύτερη περίπτωση μάλλον δεν ανακύπτει, εφόσον οι αριθμοθεωροί (γενικά) πιστεύουν την λεγομένη *Εικασία των Διδύμων Πρώτων*, ότι, δηλαδή, υπάρχουν άπειρα το πλήθος ζεύγη διδύμων πρώτων· αν όμως, παρ' ελπίδα, κάνουν λάθος, τότε η f που υπολογίζεται από αυτή τη διαδικασία είναι *μερική συνάρτηση*, με πεδίο ορισμού το αρχικό διάστημα των φυσικών που είναι μικρότεροι κάποιου ζεύγους διδύμων πρώτων. Είναι, μάλιστα, εύκολο να δείξουμε ότι *αν η Εικασία των Διδύμων Πρώτων ψεύδεται, τότε δεν υπάρχει ζεύγος f, g* (ολικά ορισμένων) *συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς που να ικανοποιούν το σύστημα* (3).

Μέχρι στιγμής, έχω αναφερθεί σε δύο από τις βασικές ιδέες της *Θεωρίας Αναδρομικών Εξισώσεων*: ότι αναδρομικές εξισώσεις (όπως αυτές στο (3)) πρέπει να ερμηνεύονται ως εξισώσεις ανάμεσα σε μερικές συναρτήσεις (αλλιώς μπορεί να μην επιδέχονται λύση), και ότι παράγουν οδηγίες για υπολογισμούς, έτσι που μπορούμε να πούμε ότι *ορίζουν αλγορίθμους*. Υπάρχει, όμως, ένα και μοναδικό αντικείμενο που (προφανώς) ορίζεται από το σύστημα (3), και αυτό είναι το ζεύγος *συναρτησιακών*

$$(4) \qquad \begin{aligned} \phi(m,f,g) &= g(m,0) \\ \psi(m,n,f,g) &= \text{αν } R(m,n) \text{ τότε } 0 \text{ αλλιώς } g(m,n+1)+1, \end{aligned}$$

όπου τώρα θεωρούμε τις f και g ως μεταβλητές που κυμαίνονται πάνω στις μερικές συναρτήσεις· και, πάλι προφανώς, από αυτό το ζεύγος μπορούμε να παράγουμε κάθε αντικείμενο που καθορίζεται από το σύστημα, όπως οι υπολογισμοί που περιγράψαμε πιο πάνω. Έπεται ότι αυτό το ζεύγος είναι καλός υποψήφιος για την απεικόνιση του *αλγορίθμου του Kleene* που «παράγει» το (3).

Γενικά, πρέπει να θεωρήσουμε πεπερασμένα συστήματα συναρτησιακών που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες, έτσι που να παράγουν υπολογισμό της «κανονικής τους λύσης», που είναι κάποια μερική συνάρτηση. Τέτοια συστήματα καλώ *αναδρομείς*, και ο ισχυρισμός είναι ότι απεικονίζουν πιστά τους «αλγορίθμους», όπως οι τομές Dedekind απεικονίζουν τους πραγματικούς αριθμούς και οι μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο πιθανοτήτων απεικονίζουν τις στοχαστικές μεταβλητές.

Στην πράξη, αυτή η προσέγγιση ταυτίζει τη θεωρία αλγορίθμων με τη θεωρία αναδρομικών εξισώσεων, της οποίας η υφή θυμίζει πολύ την κλασική θεωρία διαφορικών εξισώσεων. Και στις δύο περιπτώσεις, π.χ., αρχίζουμε με βασικά θεωρήματα ύπαρξης λύσεων· παράγουμε ιδιότητες των λύσεων από τη μορφή των εξισώσεων· και μελετούμε και συγκρίνουμε υπολογιστικούς μεθόδους λύσης. Οι «αναδρομείς» αντιστοιχούν στους «διαφορικούς τελεστές», και οι «υλοποιήσεις» στα «σχήματα» της αριθμητικής ανάλυσης για τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Πρέπει, βέβαια, να τονίσω ότι μιλάω πρωταρχικά για μια αναλογία εννοιών και όχι για μια κοινή θεωρία αναδρομικών και διαφορικών εξισώσεων, αλλά, έστω ως αναλογία, είναι πολύ χρήσιμη, ιδιαίτερα όπως μας προτρέπει να ξεκαθαρίσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες έννοιες της θεωρίας αλγορίθμων, και (ιδιαίτερα) τη σχέση ανάμεσα στους αλγορίθμους, τις υλοποιήσεις τους και τις μερικές συναρτήσεις που υπολογίζουν.

Ε. Ποια η βοήθεια που μπορεί να προσφέρει η σύγχρονη, Μαθηματική Λογική στην μελέτη (επαναδιατύπωση ή επανεπεξεργασία) σημαντικών φιλοσοφικών ερωτημάτων που τέθηκαν ήδη στο παρελθόν;

Α. Πολλοί από τους θεμελιωτές της σύγχρονης Μαθηματικής Λογικής ήταν φιλόσοφοι, όπως ο Frege και ο Russell, και οι μαθηματικοί ανάμεσά τους (ο Hilbert, ο Skolem, ο Gödel) είχαν όλοι φιλοσοφική παιδεία και βαθιά, φιλοσοφικά ενδιαφέροντα. Δεν υπάρχει λοιπόν αμφιβολία για το χρέος που έχει η Λογική στη Φιλοσοφία. Από την άλλη μεριά, η Λογική έχει επίσης ασκήσει τεράστια επίδραση στη Φιλοσοφία του αιώνα μας, ιδιαίτερα στη Φιλοσοφία της Επιστήμης, και (βεβαίως) στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Οι κυριότερές της προσφορές, πιστεύω, είναι η έννοια της *τυπικής* (δηλαδή αυστηρά ορισμένης) *γλώσσας*, που προσφέρει ιδεώδη, μαθηματικά πρότυπα για μικρά κομμάτια της φυσικής γλώσσας, και η έμφαση στην ανάγκη να διαχωρίσουμε το *συντακτικό* από τη *σημασιολογία* μιας γλώσσας. Η υιοθεσία και εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας στη μελέτη της γλώσσας ρίχνει φως σε πολλά, κλασικά προβλήματα της Φιλοσοφίας, και εξηγεί εύκολα μερικά φαινομενικά παράδοξα.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη μελέτη της *αναγκαιότητας*, που συνήθως καλείται *τροπική λογική*: πια η διαφορά σε νόημα ανάμεσα στις προτάσεις «ο άνθρωπος είναι θνητός» και «ο άνθρωπος είναι αναγκαστικά θνητός»; Τέτοια προβλήματα έχουν μελετηθεί από φιλοσόφους από τα αρχαία χρόνια, αλλά η πρόοδος είναι δύσκολη, και ακόμη δυσκολότερο είναι να εξηγήσεις ακριβώς τι προσφέρει για τη λύση του προβλήματος κάποια συγκεκριμένη θεωρία, χωρίς να «τοποθετηθείς» (κατά κάποιο τρόπο) «έξω» από τη φυσική γλώσσα και να θεωρήσεις εναλλακτικές ερμηνείες της. Ο Kripke, στο τέλος της δεκαετίας του 50, δημιούργησε ακριβώς μια τέτοια, αυστηρή θεωρία για ένα μικρό κομμάτι της φυσικής γλώσσας, συγκεκριμένα την επέκταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας με τον τροπικό τελεστή που εκφράζει την «αναγκαιότητα»· όρισε την «αλήθεια» και το «ψεύδος» για τροπικές προτάσεις στις κατάλληλες δομές· και απέδειξε ένα *Θεώρημα Πληρότητας* για την Τροπική Λογική που επεκτείνει το Θεώρημα Πληρότητας της Πρωτοβάθμιας Λογικής. Αυτή η λογική ανάλυση της αναγκαιότητας δεν απάντησε (και δεν μπορούσε, με κανένα τρόπο να απαντήσει) τα βασικά, αρχαία, φιλοσοφικά ερωτήματα, έτσι που ακόμη δεν γνωρίζουμε, σίγουρα, αν είμαστε απλά «θνητοί» ή «αναγκαστικά θνητοί»· έριξε όμως φως στο τι ακριβώς σημαίνουν αυτά τα ερωτήματα, και ιδιαίτερα ξεκαθάρισε την έννοια της «λογικής αλήθειας» για τροπικές προτάσεις. Είναι σημαντικό εδώ να τονίσουμε ότι η θεμελιακή ιδέα των «ενδεχομένων κόσμων» στην οποία στήριξε ο Kripke την ανάλυσή του είχε ήδη εισαχθεί στη Φιλοσοφία από τον Leibnitz, και ήταν από τότε αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης, ιδιαίτερα από τον Carnap στον αιώνα μας. Αυτό που επέτρεψε στον Kripke να προχωρήσει στο θέμα τόσο πιο πολύ από τον Carnap, ήταν ακριβώς η εφαρμογή μεθόδων από τη Μαθηματική Λογική, και ιδιαίτερα ο καθαρός διαχωρισμός του συντακτικού από τη σημασιολογία και η αναζήτηση του κατάλληλου Θεωρήματος Πληρότητας. (Πρέπει να προσθέσω εδώ, ότι μετά από αυτή την εργασία της νεότητάς του, ο Kripke εξελίχτηκε σε έναν από τους κορυφαίους φιλοσόφους της εποχής μας, με προσφορές που είναι πιο παραδοσιακά φιλοσοφικές και λιγότερο εξαρτημένες από τη Λογική.)

Ένας άλλος κλάδος της Φιλοσοφίας στον οποίο η Λογική μπορεί να προσφέρει πολλά είναι η *θεωρία σημασίας*. Κατά τον Frege, οι προτάσεις έχουν και *σημασία* εκτός από την *αληθοτιμή* τους: για παράδειγμα, οι «$1 + 1 = 2$» και «υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι αριθμοί» είναι και οι δύο αληθείς, αλλά δεν «σημαίνουν» το ίδιο πράγμα — κανένας μαθητής δεν θα κομπάσει ότι «επιτέλους κατάλαβε γιατί $1 + 1 = 2$», ενώ μερικοί, ίσως, νιώθουν ιδιαίτερη ικανοποίηση όταν καταλάβουν την απόδειξη της δεύτερης πρότασης. Αλλά τι αντικείμενα είναι αυτές οι «σημασίες», και με ποιους κανόνες αναθέτουμε σε κάθε πρόταση τη (μοναδική) σημασία της; Ο Frege δεν επιχείρησε να δώσει αυστηρές απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα, αλλά τα εξερεύνησε εκτενώς και διατύπωσε διάφορους νόμους που διέπουν τις σημασίες, ανάμεσά τους και τον εξής:

> *Η πιστή μετάφραση από μια γλώσσα σε άλλη πρέπει να σέβεται τη σημασία των προτάσεων.*

Με ερέθισε αυτή η πρόταση όταν την πρωτοδιάβασα, ίσως επειδή είμαι δίγλωσσος, και η συνεχής μετάφραση από τα Ελληνικά στα Αγγλικά και πίσω πάλι είναι καθημερινό μου πρόβλημα. Πως θα εκφράσεις στα Αγγλικά το ακριβές νόημα της τυχαίας Ελληνικής πρότασης θ — και, κατ' αρχήν, είναι αυτό δυνατό; Για παράδειγμα, θεωρείστε την επόμενη πρόταση από μια εργασία που τελικά έγραψα σ' αυτό το θέμα:

(A) Ο Νιάρχος και ο Ωνάσσης ήταν μπατζανάκηδες.

Πως θα το πεις αυτό στα Αγγλικά, που δεν έχουν ξεχωριστές λέξεις για τις διαφορετικές συγγένειες ανάμεσα σε «γυναικάδελφους» — «μπατζανάκης», «γαμπρός», «κουνιάδος»; Το εύκολο «Niarchos and Onassis were brothers-in-law» δεν αποδίδει τη σημασία της (A) σωστά, επειδή θα μπορούσε να σημαίνει ότι ο Νιάρχος ήταν παντρεμένος με την αδελφή του Ωνάσση, που δεν αληθεύει. Οι περισσότεροι δίγλωσσοι ομιλητές θα δέχονταν την πρόταση

(B) The wives of Niarchos and Onassis were sisters

ως πιστή μετάφραση της (A), αλλά η επικρατούσα θεωρία μετάφρασης μας αρνείται αυτή την επιλογή: επειδή η *γραμματική δομή* της (B) είναι δραματικά διαφορετική από αυτήν της (A), και κατά τη θεωρία *η πιστή μετάφραση σέβεται την γραμματική δομή των προτάσεων*. Έπεται, μάλιστα, από αυτή τη θεωρία ότι η (A) *δεν επιδέχεται πιστή μετάφραση στα Αγγλικά*, που είναι προφανώς κουτό — σαν οι Εγγλέζοι και οι Αμερικάνοι να μην μπορούν να εκφράσουν στη γλώσσα τους ακριβώς τη συγγένεια που συνέδεε τους δύο μεγαλοεφοπλιστές.

Εγώ πρότεινα να ταυτίσουμε τη σημασία μιας πρότασης θ με τη *διαδικασία* α *που πρέπει να εκτελέσουμε για να υπολογίσουμε την αληθοτιμή της* θ. Ως φιλοσοφική άποψη για τη φυσική γλώσσα, η πρόταση συνεπάγεται ότι παρά τη διαφορετική τους δομή, η Ελληνική (A) και η Αγγλική (B) έχουν την ίδια σημασία, επειδή θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία για να μάθουμε αν αληθεύουν: θα ψάξουμε στα διάφορα αρχεία να δούμε αν οι γυναίκες του Νιάρχου και του Ωνάσση ήταν, πράγματι, αδελφές. Έχει κάποια αληθοφάνεια η άποψη, και (επιφανειακά) δεν διαφέρει πολύ από πολλές, παλαιότερες ερμηνείες του Frege — αλλά δεν είναι και δυνατόν να τη συγκρίνουμε με άλλες απόψεις χωρίς αυστηρό ορισμό της έννοιας της «διαδικασίας», που, προφανώς, είναι η ουσία της. Είχα, όμως, στη διάθεσή μου, ένα συγκεκριμένο, τέτοιο αυστηρό ορισμό, τουλάχιστον για τα κομμάτια της φυσικής γλώσσας για τα οποία έχουμε ακριβή συντακτικό και σημασιολογία: σ' αυτές τις περιπτώσεις, έπεται από τη γενική θεωρία αλγορίθμων για την οποία μίλησα πιο πάνω, ότι για κάθε δομή M, μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε πρόταση θ έναν (ιδεώδη) αλγόριθμο α (τεχνικά έναν «αναδρομέα») που υπολογίζει την αληθοτιμή της θ στη δομή M, και αυτόν τον α καλώ «τη σημασία της θ στην M».

Ανεξάρτητα από τη φιλοσοφική αξία της θεωρίας, αυτή η πρόταση έχει το πλεονέκτημα κάθε μαθηματικής απεικόνισης έννοιας: μπορούμε να υπολογίσουμε «σημασίες» σε συγκεκριμένες δομές, και να διερευνήσουμε αν δύο προτάσεις είναι «συνώνυμες», αν, δηλαδή, έχουν την ίδια σημασία. Το κύριο μαθηματικό αποτέλεσμα είναι *η αποκρισιμότητα της συνωνυμίας*, για μια ευρεία κλάση από γλώσσες και δομές: μπορούμε, υπολογιστικά να εξακριβώσουμε αν οι τυχαίες προτάσεις θ και η *έχουν την ίδια σημασία*, ακόμη και στην περίπτωση που δεν έχουμε ιδέα αν οι θ και η αληθεύουν ή ψεύδονται! Ο Frege το θεωρούσε αυτό αναγκαία ιδιότητα της «σημασίας», και έτσι μας δίνει κάποια ικανοποίηση να το αποδείξουμε αυστηρά, έστω για τα μικρά κομμάτια της φυσικής γλώσσας στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία αλγορίθμων

Η μελέτη της Φιλοσοφίας είναι πολλές φορές απογοητευτική για ένα μαθηματικό, επειδή έχουμε μάθει να ψάχνουμε για αυστηρούς ορισμούς και αδιάτρητες αποδείξεις, και μερικές από τις καλύτερες φιλοσοφικές ιδέες μας φαίνονται ασαφείς. Πρέπει, όμως, να ομολογήσω ότι έχω βρει μεγάλη ικανοποίηση στην ανάγνωση (ιδιαίτερα) της Φιλοσοφίας της Γλώσσας και των Μαθηματικών, και στην προσπάθεια να δω αν η Μαθηματική Λογική μπορεί να με βοηθήσει να καταλάβω καλύτερα τα βασικά τους προβλήματα. Τη συνιστώ σε νέους μαθηματικούς, τουλάχιστον ως χόμπι!

Ε. Από πόσο νωρίς νομίζετε ότι θάπρεπε να αρχίζει η διδασκαλία της Μαθηματικής Λογικής στα σχολεία, και πια μορφή θάπρεπε να πάρει αυτή;

Α. Πιστεύω ότι το πιο σημαντικό πράγμα είναι να διδάξουμε τη μαθηματική μεθοδολογία των *αυστηρών ορισμών που ακολουθούνται από σωστές αποδείξεις*, όσο πιο νωρίς είναι δυνατόν, και οπωσδήποτε στο Λύκειο. Ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, π.χ., μπορεί να διατυπωθεί και να αποδειχτεί με πλήρη αυστηρότητα στο Δημοτικό, και η απόδειξη είναι θαυμάσιο παράδειγμα της *εις άτοπον απαγωγής*, όπως κάποτε λέγαμε. Το ίδιο ισχύει και για την απόδειξη της απειρότητας του συνόλου των πρώτων, κατευθείαν από τον Ευκλείδη. Αποδείξεις με τη «μέθοδο της επαγωγής» είναι πιο δύσκολες, αλλά πιστεύω ότι είναι απαραίτητο να διδαχθούν καλά στο Λύκειο, τουλάχιστον στους μαθητές που ετοιμάζονται για περαιτέρω εκπαίδευση στις επιστήμες.

Όσο για τη Λογική, ως ξεχωριστό μάθημα, παλιά ανησυχούσα ότι είναι τόσο πιο αφηρημένη από τα Μαθηματικά —αυτή η ιδέα του να δεις τη γλώσσα απέξω και να μελετήσεις «προτάσεις» και «αποδείξεις» ως μαθηματικά αντικείμενα— που ίσως να είναι καλύτερο να αναβάλουμε τη μελέτη της μέχρι το Πανεπιστήμιο. Έχω όμως κάπως αλλάξει γνώμη πρόσφατα, μετά την εισαγωγή της Πληροφορικής στα σχολεία. Οι Γλώσσες Προγραμματισμού προσφέρουν θαυμάσια παραδείγματα γλωσσικών δομών με αυστηρά διαχωρισμένο συντακτικό και σημασιολογία, και ο μαθητής πρέπει να καταλάβει κάτι από τη σχέση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο για να μπορέσει να γράψει προγράμματα που «τρέχουν» και κάνουν (ελπίζουμε) αυτό που θέλουμε. (Αυτό που κάνουν, ο *υπολογισμός*, είναι η πρωταρχική τους «τιμή».) Επίσης μπορούμε να βρούμε στον Προγραμματισμό πολλά παραδείγματα διαισθητικών αποδείξεων, όπως αυτά, από τα Μαθηματικά, στα οποία αναφέρθηκα πιο πάνω: μπορεί ο μαθητής να αποδείξει (ίσως με τη διερεύνηση περιπτώσεων) ότι το πρόγραμμά του, όντως, θα τυπώσει τους πρώτους 100 πρώτους αριθμούς; Πολλές, τέτοιες απλές ιδιότητες προγραμμάτων χρειάζονται επαγωγή για την απόδειξή τους, και επομένως αυτό μας προσφέρει μια ευκαιρία. Επιπλέον, οι προτασιακοί σύνδεσμοι είναι ενσωματωμένοι σε κάθε Γλώσσα Προγραμματισμού. Ίσως, λοιπόν, μπορούμε επιλέξουμε μερικές από τις απλούστερες, βασικές ιδέες από τη Πρωτοβάθμια Λογική και να τις διδάξουμε κι' αυτές ως μέρος της Πληροφορικής — άλλωστε, οι τυπικές αποδείξεις δεν διαφέρουν και τόσο πολύ από προγράμματα. Πρέπει όμως να ομολογήσω, ότι δεν έχω πείρα διδασκαλίας στα σχολεία, και οι δάσκαλοι που πάνε καθημερινά στα χαρακώματα μάλλον έχουν διαυγέστερη ιδέα του τι είναι εφικτό — αρκεί να ξέρουν κάτι από τη Λογική, και υποστηρίζω ένθερμα τη διδασκαλία Λογικής σ' αυτούς που διδάσκουν ή ετοιμάζονται να διδάξουν Μαθηματικά και Πληροφορική στη Μέση Εκπαίδευση.

Ε. Γνωρίζοντας το εκπαιδευτικό σύστημα τόσον της Ελλάδας όσο και των ΗΠΑ, σε ποια συμπεράσματα καταλήγετε όσον αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών;

Α. Για την Πρωτοβάθμια και Μέση Εκπαίδευση, δυστυχώς δεν ξέρω σχεδόν τίποτα για τη σημερινή πραγματικότητα στην Ελλάδα, και μόνο λίγα για την Αμερική: εκεί η κάθε πόλη και η κάθε κοινότητα μπορούν να έχουν (και συχνά έχουν) την ξεχωριστή, «δική τους» φιλοσοφία για το πως πρέπει να διδάσκονται τα Μαθηματικά στα σχολεία, και έτσι είναι κάπως δύσκολο να βγάλει κανείς γενικά συμπεράσματα. Θα κάνω, όμως, μια παρατήρηση για τη γενική διαμόρφωση του διάλογου για την παιδεία, που δεν διαφέρει πολύ από τη μία χώρα στην άλλη.

Το «καυτό» θέμα είναι αν πρέπει να δώσουμε έμφαση στην *κατανόηση* ή την *αποστήθιση*, και, έτσι διατυπωμένη, η ερώτηση έχει βέβαια προφανή απάντηση: κανείς δεν θα σηκώσει παντιέρα στην υπεράσπιση της «αποστήθισης». Έτσι βρίσκουμε στην Αμερική μαθητές του Λυκείου (και του Πανεπιστημίου) που προσπαθούν με όλη την καλή θέληση να «κατανοήσουν» το σοβαρό, φυλετικό πρόβλημα εκείνης της χώρας, χωρίς να έχουν «αποστηθίσει» το αν ο πόλεμος της ανεξαρτησίας της Αμερικής έγινε *πριν* ή *μετά* τον εμφύλιο πόλεμο — πράγμα κάπως δύσκολο, αφού η αναβολή της λύσης του προβλήματος της δουλείας στη σύνταξη του συντάγματος των ΗΠΑ ήταν, οπωσδήποτε, μια από τις κυριότερες αιτίες του εμφύλιου πολέμου δύο γενεές μετά, και της διαιώνισης του φυλετικού προβλήματος. Πιο κοντά στο θέμα μας, βρίσκουμε μαθητές (και στα δικά μας, πιστεύω), που προσπαθούν να «κατανοήσουν» την τριγωνομετρία χωρίς να ξέρουν απλούς αλγεβρικούς τύπους, ή το λογισμό χωρίς επαρκή γνώση της τριγωνομετρίας. (Κάποτε στα φροντιστήρια μας υποχρέωναν να αποστηθίσουμε πάνω από εκατό τριγωνομετρικούς τύπους· είμαι περίεργος με πόσους παραγεμίζουν τα παιδιά σήμερα.)

Η πραγματική ένταση, κατά τη γνώμη μου, είναι ανάμεσα στη *διδασκαλία* και την *προπόνηση*· η πρώτη σκοπεύει στη *μάθηση*, που χρειάζεται και τα δύο, κατανόηση και αποστήθιση (ίσως σε ίσα και συνδεόμενα μέρη), ενώ η δεύτερη προετοιμάζει τους «μαθητές» για συγκεκριμένους διαγωνισμούς, όπου η επιτυχία εξαρτάται κατά μεγάλο μέρος από τη γνώση της δομής των ερωτήσεων που συνήθως μπαίνουν και πολλά άλλα, κάπως άσχετα με την πραγματική παιδεία. Δεν θέλω να πάρω θέση στο επίμαχο πρόβλημα των πανελληνίων εξετάσεων, ούτε και να υποβαθμίσω την προπόνηση — έχει κι' αυτή το ρόλο της να παίξει στη σωστή διδασκαλία. Αλλά είναι, πιστεύω, σημαντικό να διαχωρίσουμε το πρόβλημα της προετοιμασίας των μαθητών για συγκεκριμένους διαγωνισμούς από την *παιδεία*, με την κλασική της έννοια, και, ως δάσκαλοι, να μην υποβαθμίσουμε τη μάθηση στο βωμό της «διαγωνισμομανίας».

Ε. Μετά από τη μακρά σας σταδιοδρομία στις Η.Π.Α. αποφασίσατε να μοιράζετε από φέτος το χρόνο σας ανάμεσα στο UCLA και το Πανεπιστήμιο Αθηνών. Είστε, μάλιστα, από τα ιδρυτικά μέλη του καινούριου **Μεταπτυχιακού Προγράμματος στη Θεωρία Λογικής, Αλγορίθμων και Υπολογισμού** που μόλις ξεκίνησε. Ποιοί λόγοι σας ώθησαν σ' αυτή την απόφαση και σε τι ελπίζετε, τι στοχεύετε με το καινούριο πρόγραμμα;

Α. Κάθε μετανάστης έχει μια φιλοδοξία να γυρίσει κάποτε και να προσφέρει κάτι στην Ελλάδα (ίσως μόνον ή κατά κύριο λόγο για την προσωπική του ικανοποίηση, ποιός ξέρει), όπως επίσης και να βρεθεί πάλι στο φυσικό του περιβάλλον, να μιλήσει τη γλώσσα του, έστω κουτσά, έπειτα από χρόνια αχρηστίας. Δεν νομίζω να διαφέρω σ' αυτά από τα εκατομμύρια Ελλήνων που έχουν μεταναστεύσει από τους αρχαιότατους χρόνους, ούτε και έχω τίποτα πρωτότυπο να πω για την «ψυχή» ή την ψυχολογία του μετανάστη.

Για το καιρούριο μας Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα, έχω μεγάλες φιλοδοξίες: το επιστημονικό αντικείμενό του, η «Μαθηματική» και «Λογική» βάση της Πληροφορικής, ας το πούμε, είναι (πιστεύω) εξαιρετικά ενδιαφέρον· υπάρχουν πολλοί, διακεκριμμένοι Έλληνες επιστήμονες (στην Ελλάδα και το εξωτερικό) που το δουλεύουν· υπάρχουν ικανότατοι φοιτητές που ενδιαφέρονται· και ο σκοπός μας είναι να φτειάξουμε σιγά-σιγά ένα κέντρο έρευνας και εκπαίδευσης στον κλάδο που να τιμά την πατρίδα μας και να βοηθήσει την ανάπτυξη της Πληροφορικής στην Ελλάδα. Το Πρόγραμμα στηρίζεται από έξι Τμήματα που εκπροσωπούν τρία ιδρύματα, και ελπίζω, με τον καιρό, να βρούμε υλική υποστήριξη (ιδιαίτερα για υποτροφίες φοιτητών) και έξω από το χώρο της εκπαίδευσης, στην Ελληνική βιομηχανία.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LOS ANGELES, CA 90095-1555, USA
and
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ, 15784 ΖΩΓΡΑΦΟΥ
E-mail: ynm@math.ucla.edu

Quantum interview, Volume 4, Issue 4, July-August 1997.