ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ: ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΩΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

ΕΛΕΝΗ ΚΑΛΥΒΙΑΝΑΚΗ ΚΑΙ ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ

§1. Εισαγωγή. Ένα σύστημα συμβολισμών περιλαμβάνει πάντα δύο διακριτά μεταξύ τους μέρη: τα σύμβολα, δηλαδή τα σημαίνοντα και αυτά που συμβολίζουν, δηλαδή τα σημαινόμενα. Η συσχέτιση των δύο μερών αποτελεί ένα απαραίτητο συμπλήρωμα αν θέλουμε να κάνουμε χρήση του συστήματος των συμβολισμών. Ο όρος *σημασιολογία* (semantics), στην πιο γενική του εκδοχή, αναφέρεται ακριβώς σε αυτό: τη μελέτη της σχέσης μεταξύ των σημαινόντων και των σημαινομένων, τη σχέση μεταξύ των συμβόλων και αυτών που συμβολίζουν. Η φυσική γλώσσα είναι ίσως το πιο ενδιαφέρον σύστημα συμβολισμών με σημαίνοντα τις λέξεις και τις προτάσεις της και σημαινόμενα τον κόσμο που μας περιβάλλει και τις σκέψεις μας γι' αυτόν.

Η *τυπική σημασιολογία* (formal semantics) επιχειρεί να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στα σημαίνοντα και τα σημαινόμενα της φυσικής γλώσσας με αυστηρό τρόπο χρησιμοποιώντας μεθόδους της Μαθηματικής Λογικής. Το χαρακτηριστικό της στοιχείο είναι η απόδοση στις φράσεις της γλώσσας *νοήματος* (meaning) και όχι μόνο *αναφοράς* (reference) ή *αληθοτιμής*. Για παράδειγμα, οι φράσεις

`<<πρωτεύουσα της Ελλάδας>>` και `<<Αθήνα>>`

αναφέρονται (σήμερα) στην ίδια πόλη αλλά, προφανώς, δεν έχουν το ίδιο νόημα. Ο γνώστης της ελληνικής γλώσσας γνωρίζει το νόημα των λέξεων και προτάσεών της γι'αυτό και είναι σε θέση να επικοινωνήσει με άλλους γνώστες της. Φυσικά αυτό προϋποθέτει ότι, τουλάχιστον θεωρητικά, όλοι οι γνώστες μιας γλώσσας αποδίδουν το ίδιο νόημα στις γραμματικά ορθές εκφράσεις της.

Στο επόμενο εδάφιο θα περιγράψουμε συνοπτικά τις κλασικές θεωρίες σημασιολογίας, αρχίζοντας, βέβαια, με τις ιδέες του *Gottlob Frege* που θεμελίωσε τον κλάδο στο τελευταίο τέταρτο του 19ου αιώνα. Ο κύριος

Κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας, η Ελ. Καλυβιανάκη ήταν υποψήφια διδάκτωρ με επιβλέποντα καθηγητή τον καθ. Γ. Μοσχοβάκη και η διατριβή της συγχρηματοδοτήθηκε στα πλαίσια του ΕΠΕΑΕΚ από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και Εθνικούς Πόρους ([1]). Και οι δύο ευχαριστούν για τη φιλοξενία το Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Λογική, Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού».

στόχος μας στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας είναι να σκιαγραφήσουμε τη θεωρία *προσδιορισμού αναφοράς* (referential intension), που αποδίδει το νόημα μίας φράσης ως ένα «ιδεατό αλγόριθμο» που «υπολογίζει» την αναφορά της.

§2. Η εξέλιξη της τυπικής σημασιολογίας. Μετά τον Frege, σημαντικότερη είναι η συνεισφορά στη σημασιολογία των *Bertrand Russell*, *Rudolf Carnap* και *Richard Montague*. Στη σύντομη ιστορική αναδρομή που ακολουθεί θα περιοριστούμε στην αναφορά μας σε αυτούς.

2.1. Frege: σημασία και αναφορά. Χωρίς αμφιβολία, ο Frege είναι ο θεμελιωτής της σύγχρονης λογικής και ένας από τους σπουδαιότερους ερευνητές στη φιλοσοφία των μαθηματικών και τη φιλοσοφία της γλώσσας. Μεταξύ άλλων, προσπαθεί να οικοδομήσει μία τυπική (δηλαδή αυστηρά ορισμένη) συμβολική γλώσσα για την επιστήμη, και αυτό τον οδηγεί αναπότρεπτα στη μελέτη του ρόλου των συμβόλων.

Η πρώτη βασική αρχή που εισήγαγε ο Frege είναι ότι εκτός από αναφορά, τα σύμβολα έχουν και *σημασία* (στα γερμανικά *Sinn*, στα αγγλικά *sense*), όπως ονόμασε αυτό που τώρα καλούμε *νόημα*. Στο [4] λέει χαρακτηριστικά:[1]

> Μέσω ενός συμβόλου εκφράζουμε τη σημασία του και υποδηλώνουμε την αναφορά του.

Οι λέξεις της φυσικής γλώσσας ακολουθούν τον ίδιο κανόνα. Ένα όνομα υποδηλώνει την αναφορά του, δηλαδή το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται αλλά εκφράζει και τη σημασία του, δηλαδή «τον τρόπο παρουσίασής του». Αυτός είναι και ο μοναδικός «ορισμός» της σημασίας που δίνεται από τον Frege.

Η γνώση μίας φυσικής γλώσσας πιστοποιείται από τη γνώση των σημασιών των ονομάτων, και βέβαια κατ' επέκταση όλων των λέξεων της. Γιατί αυτό είναι αρκετό; Η σημασία είναι αυτή που προσδιορίζει την αναφορά και όχι αντίστροφα. Άλλωστε η αναφορά μπορεί να μην υπάρχει ή να μην είναι δυνατό να έχουμε άμεση αντίληψή της. Για παράδειγμα, η έκφραση

> «ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός»

έχει μία πολύ ξεκάθαρη σημασία – οποιοσδήποτε γνώστης της ελληνικής γλώσσας καταλαβαίνει τι σημαίνει· όμως δεν έχει αναφορά. Όπως επίσης καταλαβαίνουμε χωρίς πρόβλημα και την έκφραση

> «ο πιο ψηλός άνδρας που ζει σήμερα»

που σίγουρα αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο πρόσωπο αλλά με δυσκολία θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ποιο είναι αυτό.

Η δεύτερη σημαντική ιδέα του Frege είναι ότι αντιμετωπίζει τις προτάσεις της γλώσσας με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζει τα ονόματα· έτσι που

[1] Η μετάφραση στα ελληνικά του [4] έχει δημοσιευθεί στο [5].

μπορούμε να μιλάμε γενικά για *όρους* της φυσικής γλώσσας. Οι προτάσεις έχουν και αυτές σημασία, που είναι η «σκέψη» που εκφράζουν, και αναφορά, που είναι η *αληθοτιμή* τους, η Αλήθεια ή το Ψεύδος. Σύμφωνα με τον Frege, όλες οι αληθείς προτάσεις έχουν την ίδια αναφορά, και το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις ψευδείς.

Στο κλασικό παράδειγμα του Frege, τα ονόματα «Αποσπερίτης» και «Αυγερινός» υποδηλώνουν το ίδιο αντικείμενο του πραγματικού κόσμου: τον πλανήτη Αφροδίτη. Όμως, οι σημασίες τους πρέπει είναι διαφορετικές, επειδή οι *προτάσεις ταύτισης* (identity statements)

(1) «Ο Αποσπερίτης ταυτίζεται με τον Αυγερινό»

(2) «Ο Αποσπερίτης ταυτίζεται με τον Αποσπερίτη»

δεν έχουν την ίδια «γνωσιολογική αξία». Η πρόταση (2) είναι αληθής a priori, δεν είναι παρά μία ταυτολογία, ενώ η πρόταση (1) μας μεταδίδει μία σημαντική πληροφορία. Αν η μόνη σημασιολογική τιμή για τα σύμβολα ήταν η αναφορά τους, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το όνομα «Αποσπερίτης» με το όνομα «Αυγερινός», όπου εμφανίζεται, σε καθεμία από αυτές τις προτάσεις χωρίς να προκύπτει διαισθητική διαφορά μεταξύ τους.

Με τη σημερινή ορολογία, θα λέγαμε ότι οι προτάσεις αυτές δεν είναι *συνώνυμες* (synonymous). Μία θεωρία νοήματος οφείλει να είναι σε θέση να αποφαίνεται για τη συνωνυμία ή μη δύο προτάσεων και μάλιστα να δίνει απαντήσεις που να ικανοποιούν διαισθητικά τους γνώστες της γλώσσας. Μερικά από τα πιο ενδιαφέροντα παραδείγματα της σημασιολογίας, όπως το παραπάνω, ουσιαστικά αφορούν προβλήματα συνωνυμίας.

Σχετική με τη συνωνυμία είναι και η έννοια της *πιστής μετάφρασης*, που συνδέει δύο όρους σε διαφορετικές γλώσσες όταν έχουν το ίδιο νόημα. Κατά τον Frege, η (πιστή) μετάφραση ενός κειμένου πρέπει να «σέβεται» τη σημασία – δεν αρκεί να μείνει αναλλοίωτη η αναφορά ή η αληθοτιμή. Για παράδειγμα, δεν θα μεταφράσουμε από την ελληνική στην αγγλική γλώσσα

το «ο Αποσπερίτης είναι πλανήτης» ως «Venus is a planet»,

έστω και αν οι δύο αυτές προτάσεις έχουν την ίδια συντακτική δομή, έχουν την ίδια αληθοτιμή αλλά ακόμα και τα συστατικά τους μέρη έχουν την ίδια αναφορά.

Πώς προσδιορίζεται η τιμή αλήθειας μιας πρότασης από τη σημασία της; Ο Frege δεν ορίζει κάποια συγκεκριμένη διαδικασία – και, οπωσδήποτε, δεν μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο εφόσον δεν έχει δώσει αυστηρό ορισμό της σημασίας. Διατυπώνει όμως ένα περιορισμό για τη σημασία και την αναφορά που είναι πολύ κοντά στη διαίσθησή μας για τη γλώσσα και εκφράζει μια πολύ απλή ιδέα:

Αρχη της συνθεσης (compositionality principle). *Κάθε γραμματικά ορθός όρος A μιας γλώσσας παράγεται από συγκεκριμένα μέρη, έτσι που η* *σημασία και η αναφορά του A καθορίζονται αντίστοιχα από τις σημασίες και τις αναφορές που έχουν αυτά τα μέρη.*

Η σημασιολογία της γλώσσας λοιπόν «χτίζεται» από τα πιο απλά μέρη της στα πιο σύνθετα, όπως χτίζεται και το συντακτικό της. Ο Frege αναφέρει χαρακτηριστικά ([4]):

> Αν η υπόθεσή μας ότι η αναφορά μιας πρότασης είναι η τιμή αλήθειάς της είναι ορθή, αυτή η τελευταία πρέπει να μένει αναλλοίωτη όταν ένα μέρος της πρότασης αντικατασταθεί από μία έκφραση η οποία έχει την ίδια αναφορά.

Σε ανάλογα αποσπάσματα, με λιγότερο ίσως ξεκάθαρο τρόπο, φαίνεται και η αντίστοιχη αρχή της σύνθεσης για τη σημασία.

Συνοψίζοντας, ο Frege προσδίδει στους όρους της γλώσσας, εκτός από αναφορά, και σημασία η οποία (όπως και η αναφορά) υπόκειται στην Αρχή της Σύνθεσης. Οι προτάσεις της γλώσσας ταξινομούνται ως (ειδικοί) όροι, με σημασία τη σκέψη που εκφράζουν και αναφορά την αληθοτιμή τους. Η σημασία είναι η βασική έννοια τη σημασιολογίας: προσδιορίζει την αναφορά (όταν αυτή υπάρχει), και επιτρέπει το διαχωρισμό μεταξύ συνώνυμων όρων της ίδιας γλώσσας και την ορθότητα μιας μετάφρασης μεταξύ δύο όρων σε διαφορετικές γλώσσες.

Οι αρχές αυτές χαρακτηρίζουν τη *Φρεγκεανή σημασιολογία* (Fregean semantics) και έχουν γίνει με το πέρασμα του χρόνου σχεδόν καθολικά αποδεκτές: οι μεταγενέστεροι ερευνητές βασικά κατεργάζονται επεκτάσεις και εφαρμογές και (το κυριότερο) προτείνουν επεξηγήσεις ή αυστηρούς ορισμούς για την έννοια της *σημασίας* που ο Frege άφησε στη διαίσθησή μας.

Κάπως ιδιότυπη είναι η περίπτωση του Russell.

2.2. Russell: περιγραφές. Ο Bertrand Russell ήταν μεγάλος θαυμαστής του Frege και ο σημαντικότερος φιλόσοφος που έκανε γνωστό και συνέχισε το έργο του. Δεν παραδέχτηκε όμως την Αρχή της Σύνθεσης όπως εφαρμόζεται στα ονόματα και πρότεινε μια παραλλαγή της.

Στο κλασικό [12], ο Russell αναλύει το παράδειγμα για τον πλανήτη Αφροδίτη που αναφέραμε παραπάνω και υποστηρίζει (κατ' αρχάς) ότι οι *δηλωτικές φράσεις* (οι οποίες περιλαμβάνουν και τα ονόματα) *δεν έχουν νόημα από μόνες τους*: *μόνο οι προτάσεις έχουν νόημα*. Ειδικότερα, τα ονόματα είναι *περιγραφές* (descriptions)· το «Αποσπερίτης», για παράδειγμα, υποκαθιστά τη δηλωτική φράση

«το ουράνιο σώμα που εμφανίζεται πρώτο το βράδυ»,

της οποίας μπορεί να θεωρηθεί ως «σύντμηση». Τελικά, το νόημα των προτάσεων αναδεικνύεται με τη *συστηματική μεταγραφή* τους που απαλείφει τις δηλωτικές φράσεις που περιέχουν και φανερώνει τη *λογική μορφή* τους.

Στη σημασιολογία του Russell, η πρόταση (1) μεταγράφεται ως

> Υπάρχει ακριβώς ένα x το οποίο είναι ουράνιο σώμα και το x εμφανίζεται πρώτο το βράδυ και υπάρχει ακριβώς ένα y το οποίο είναι ουράνιο σώμα και το y εξαφανίζεται τελευταίο το πρωί και το x ταυτίζεται με το y.

Ανάλογα μπορεί να μεταγραφεί και η πρόταση (2) και αυτές οι μεταγραφές φανερώνουν τη μη συνωνυμία των προτάσεων αυτών ταύτισης, που δεν έχουν πια την ίδια λογική μορφή.

Χωρίς να μπούμε στις λεπτομέρειες αυτής της περίφημης *θεωρίας περιγραφών* (theory of descriptions) που υλοποιεί την απαλοιφή των δηλωτικών φράσεων από τις προτάσεις, μπορούμε να πούμε ότι σε αυτήν, το νόημα μιας πρότασης – το «*προτασιακό περιεχόμενο*» (proposition)[2] που εκφράζεται από την πρόταση – είναι βασικά η λογική της μορφή (όπως αυτή αποδίδεται από τον Russell).

2.3. Carnap: το πλαίσιο αναφοράς. Η πρώτη σημαντική προσφορά του Rudolf Carnap στο [3] είναι η εισαγωγή στη σημασιολογία της φυσικής γλώσσας μεθόδων από τη *συμβολική λογική*, πιο ξεκάθαρα από ότι είχε γίνει μέχρι τότε: το κομμάτι της φυσικής γλώσσας που θέλουμε να μελετήσουμε τυποποιείται αυστηρά και διαχωρίζεται ως *γλώσσα αντικείμενο* (object language) από τη *μεταγλώσσα* (metalanguage), τη μαθηματική θεωρία που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη του. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει την αυστηρή, μαθηματική ανάλυση της φυσικής γλώσσας και είναι σήμερα γενικά αποδεκτή στη σημασιολογία.

Επί της ουσίας, ο Carnap εισάγει τη συστηματική μελέτη του *πλαισίου αναφοράς* όπου ερμηνεύεται η γλώσσα. Την ιδέα αυτή συναντά κανείς και στον Frege, αλλά ο Carnap τη συστηματοποιεί πλέον ως *περιγραφή κατάστασης*[3] (state-description). Σε καθεμία από αυτές τις καταστάσεις μπορούμε να αποφανθούμε για την Αλήθεια ή το Ψεύδος όλων των προτάσεων που σχηματίζονται στη γλώσσα αντικείμενο. Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο πάντα μία πλήρης εικόνα του κόσμου που μας περιβάλλει, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι είναι και η πραγματική. Η αναφορά του ονόματος «Αποσπερίτης» δεν είναι απαραίτητα ο πλανήτης Αφροδίτη – μπορούμε να φανταστούμε ένα άλλο *πιθανό κόσμο* στον οποίο το ουράνιο σώμα που εμφανίζεται πρώτο κάθε βράδυ να είναι κάποιος άλλος πλανήτης. Ο Saul Kripke, αργότερα, θα εισαγάγει μια γενικότερη έννοια πιθανών κόσμων στη μαθηματική μελέτη της *Τροπικής Λογικής*.

Η αναφορά και το νόημα αποδίδονται από τον Carnap ως *extension* και *intension*[4] αντίστοιχα. Η αναφορά ενός ονόματος σε μία συγκεκριμένη κατάσταση είναι το αντικείμενο το οποίο υποδηλώνει – και ο προσδιορισμός «σε μία συγκεκριμένη κατάσταση» είναι πλέον απαραίτητος, εφόσον η αναφορά μπορεί να αλλάζει σε κάθε κατάσταση. Η αναφορά μιας πρότασης θ

[2] Αυτή η απόδοση του όρου proposition βρίσκεται στο [2].

[3] Για συντομία, θα αναφέρεται στη συνέχεια ως «κατάσταση».

[4] Ο όρος extension αποδίδεται συχνά στα ελληνικά ως *έκταση* ή *εύρος*. Ο πιο προβλη-

σε μία συγκεκριμένη κατάσταση είναι η τιμή αλήθειάς της, ενώ η *Carnap-σημασία* της θ είναι η συνάρτηση που μας δίνει την τιμή αλήθειας της θ σε κάθε κατάσταση.

Οι προτάσεις (1) και (2) δεν είναι συνώνυμες για τον Carnap, επειδή η Carnap-σημασία της πρότασης (2) είναι η σταθερή συνάρτηση που σε κάθε κατάσταση αποδίδει την τιμή Αλήθεια, ενώ η Carnap-σημασία της πρότασης (1) είναι μια συνάρτηση που σε μερικές (πιθανές) καταστάσεις παίρνει την τιμή Ψεύδος. (Και παρατηρούμε ότι ακριβώς αυτό το γεγονός δίνει και τη διαφορετική «γνωσιολογική αξία» της (1) κατά τον Frege.)

2.4. Montague: Τα Αγγλικά ως τυπική γλώσσα. Ο Richard Montague ξεκινά το [7] με την εξής προκλητική διακήρυξη:

> Απορρίπτω τον ισχυρισμό ότι υπάρχει σημαντική θεωρητική διαφορά μεταξύ τυπικών και φυσικών γλωσσών.

Για να υποστηρίξει αυτή τη θέση, θα επιχειρήσει να αναπτύξει μία τυπική σημασιολογία για την αγγλική γλώσσα στο πνεύμα του Carnap, όπως ακριβώς θα έκανε κανείς για μια οποιαδήποτε τυπική γλώσσα.

Στην πράξη, ο Montague επεκτείνει σε σημαντικό βαθμό τη μεθοδολογία που εισήγαγε ο Carnap με την τυποποίηση ενός μεγάλου τμήματος των Αγγλικών στο *λ-λογισμό με τύπους*, που τον αποκαλεί intensional logic, δηλαδή *λογική του νοήματος*. Οι (βασικές) αγγλικές λέξεις εισάγονται ως σταθερές και η γλώσσα επιτρέπει τη δημιουργία σύνθετων όρων με *εφαρμογή* (application) και *λ-αφαίρεση* (λ-abstraction). Η χρησιμοποίηση τύπων πηγάζει ουσιαστικά από την πολυπλοκότητα των συντακτικών κανόνων της φυσικής γλώσσας ενώ η επάρκεια της εφαρμογής και της λ-αφαίρεσης για την έκφραση όλων των περίπλοκων μηχανισμών της ανάγεται βασικά στον Frege και αποτελεί την τεχνική τελειοποίηση των ιδεών του.

Το νόημα στη γλώσσα του Montague ορίζεται ως Carnap-σημασία, αλλά οι καταστάσεις οι οποίες αποτελούν το πλαίσιο αναφοράς είναι πολύ πιο πλούσιες σε περιεχόμενο και δομή· δεν καθορίζουν πια μόνο ένα πιθανό κόσμο, αλλά και μια πληθώρα παραμέτρων όπως ο χρόνος, ο τόπος, ο ομιλητής κ.λ.π. Τα βασικά αυτά στοιχεία της θεωρίας του Montague θα ξεκαθαρίσουν στη συνέχεια που θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία επέκταση της γλώσσας του.

Από τη δημοσίευσή τους στη δεκαετία 1960–70 (και τη συγκέντρωσή τους στο [8] μετά τον πρώιμο θάνατό του), οι εργασίες του Montague έχουν επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό την έρευνα στη φιλοσοφία της γλώσσας και στη γλωσσολογία, όπου οι ιδέες του αποτελούν πια (κατά κάποιο τρόπο) την «ορθόδοξη» προσέγγιση στη σημασιολογία της φυσικής γλώσσας.

ματικός όρος intension αποδίδεται ως *ένταση* ή με το πιο γενικό, *νόημα ή σημασία*. Οι αποδόσεις αυτές δεν υιοθετήθηκαν στην παρούσα εργασία διότι θα προκαλούσαν σύγχυση. Αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση του όρου intension στη Λογική απαντάται για πρώτη φορά στα μέσα του 19ου αιώνα και από τότε θα χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό και με πολλές παραλλαγές νοήματος.

§3. Το νόημα ως ιδεατός αλγόριθμος. Ένα από τα προβλήματα της ερμηνείας του νοήματος ως Carnap-σημασία είναι ότι όλες τις αληθείς μαθηματικές προτάσεις αποδίδονται ως συνώνυμες· αντίστοιχα και όλες οι ψευδείς. Στο κύριο μέρος της εργασίας που ακολουθεί θα παρουσιάσουμε τη θεωρία του προσδιορισμού αναφοράς που (τουλάχιστον) αποφεύγει αυτό το πρόβλημα: δύο αληθείς μαθηματικές προτάσεις δεν είναι *αναφορικά συνώνυμες* παρά μόνο αν (διαισθητικά) *εκφράζουν την ίδια πληροφορία.* Η θεωρία του προσδιορισμού αναφοράς είναι στο πνεύμα του Frege εμπλουτίζοντας ταυτόχρονα τις ιδέες του Carnap και του Montague.

Το βασικό εργαλείο της θεωρίας είναι η τυπική γλώσσα $L^{\lambda}_{ar}(K)$ που επεκτείνει τον λ-λογισμό με τύπους του Montague. Σε αυτή τη γλώσσα, με τις μεθόδους (βασικά) που εισήγαγε ο Montague, μπορεί να *αποδοθεί πιστά* ένα μεγάλο κομμάτι της φυσικής γλώσσας. Για κάθε όρο A τύπου σ και κάθε ανάθεση τιμών g στις μεταβλητές, η *δηλωτική σημασιολογία* της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ προσδιορίζει ένα αντικείμενο $\mathrm{den}(A)(g)$ σε κάποιο συγκεκριμένο σύμπαν $\mathbb{T}_\sigma$ αντικειμένων τύπου σ, την *τιμή* (denotation) του A για την ανάθεση τιμών g· η *αλγοριθμική σημασιολογία* της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ παράλληλα καθορίζει για κάθε A έναν «ιδεατό αλγόριθμο» $\mathrm{int}(A)$, τον *προσδιορισμό αναφοράς* του A, που για κάθε g «υπολογίζει» την τιμή $\mathrm{den}(A)(g)$.

Με άλλα λόγια, θεωρούμε την $L^{\lambda}_{ar}(K)$ ως *γλώσσα προγραμματισμού*, έτσι που ο κάθε όρος A εκλαμβάνεται ως *πρόγραμμα* που εκφράζει κάποιον *αλγόριθμο* $\mathrm{int}(A)$ τον οποίο «ταυτίζουμε» με το νόημα του A. Αν, για παράδειγμα, θ είναι η πρόταση

> «κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή περιττός»,

τότε το νόημα $\mathrm{int}(A_\theta)$ του όρου A_θ, που αποδίδει την θ στην $L^{\lambda}_{ar}(K)$, «υπολογίζει» την αληθοτιμή της με το φυσικό τρόπο που εκφράζεται από τη θ, ελέγχοντας δηλαδή για κάθε n αν πράγματι ο n είναι άρτιος ή περιττός, και δίνοντας την τιμή Αλήθεια στο τέλος, μετά από έναν άπειρο «υπολογισμό». Ο $\mathrm{int}(A_\theta)$ δεν είναι, προφανώς, ένας συνηθισμένος αλγόριθμος· αλλά είναι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο που μπορεί να θεωρηθεί ως «ιδεατός αλγόριθμος» και που κωδικοποιεί ακριβώς την «πληροφορία» που περιέχει η θ.

Στη συνέχεια δίνουμε αυστηρούς ορισμούς γι' αυτές τις έννοιες.

3.1. Η γλώσσα $L^{\lambda}_{ar}(K)$. Οι *τύποι* (types) ορίζονται αναδρομικά: ο τύπος e χρησιμοποιείται για τα αντικείμενα, ο τύπος t για τις τιμές αλήθειας, και ο s για τις καταστάσεις, ενώ επιτρέπεται ο σχηματισμός οποιωνδήποτε τύπων συνάρτησης $(\sigma_1 \to \sigma_2)$. Έχουμε δηλαδή

$$\sigma :\equiv e \mid t \mid s \mid (\sigma_1 \to \sigma_2)$$

με τον συνηθισμένο τρόπο διατύπωσης αναδρομικών ορισμών στη λογική και την πληροφορική. Για τους τύπους συνάρτησης συχνά παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν αυτό δεν προκαλεί σύγχυση, π.χ.,[5]

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \equiv (\sigma_1 \to \sigma_2),$$
$$\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3) \equiv (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3)),$$
$$(\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_3 \equiv ((\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_3).$$

Για την ερμηνεία της γλώσσας υποθέτουμε ότι μας δίνονται ένα βασικό σύμπαν $\mathbb{T}_e$ αντικειμένων το οποίο περιλαμβάνει (τουλάχιστον) τρία διαφορετικά αντικείμενα $0, 1, er$, και ένα μη κενό σύνολο $\mathbb{T}_s$ καταστάσεων. Ξεκινώντας από αυτά, ορίζουμε για κάθε τύπο σ το σύνολο $\mathbb{T}_\sigma$ των στοιχείων τύπου σ με την ακόλουθη αναδρομή:

$$\mathbb{T}_t = \mathbb{T}_e,$$
$$\mathbb{T}_{(\sigma\to\tau)} = \text{το σύνολο όλων των συναρτήσεων } p : \mathbb{T}_\sigma \to \mathbb{T}_\tau.$$

Για τις εφαρμογές στη φυσική γλώσσα, το σύμπαν $\mathbb{T}_e$ περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς και όλα τα μαθηματικά αντικείμενα αλλά και τους ανθρώπους, τα πράγματα – γενικά τα αντικείμενα για τα οποία θέλουμε να μιλήσουμε. Τα αντικείμενα 1 και 0 αντιπροσωπεύουν την Αλήθεια και το Ψεύδος αντίστοιχα, ενώ το αντικείμενο er (error, λάθος) μας επιτρέπει να δίνουμε αναφορά σε όρους που αλλιώς δεν θα είχαν, για παράδειγμα τον «μεγαλύτερο φυσικό αριθμό». Μία κατάσταση s, διαισθητικά, αποτελεί ένα πλήρες πλαίσιο αναφοράς στο οποίο ερμηνεύονται οι όροι της γλώσσας.

Ιδιαίτερα σημαντικοί είναι οι τύποι

$$\widetilde{t} \equiv (s \to t), \quad \widetilde{e} \equiv (s \to e)$$

και τα αντίστοιχα σύνολα $\mathbb{T}_{\widetilde{t}}, \mathbb{T}_{\widetilde{e}}$. Οι συναρτήσεις στο $\mathbb{T}_{\widetilde{t}} = \mathbb{T}_{(s\to t)}$ είναι οι «Carnap-σημασίες», και αυτές στο $\mathbb{T}_{\widetilde{e}} = \mathbb{T}_{(s\to e)}$ τα αντικείμενα που ο Carnap ονόμασε *individual concepts*.

Το K της $L^\lambda_{ar}(K)$ είναι ένα δοσμένο σύνολο σταθερών με τύπους που απεικονίζουν στην τυπική γλώσσα απλές λέξεις της φυσικής γλώσσας — ονόματα (**Γιάννης**, **Μαρία**), ρήματα (**τρέχει**, **αγαπά**), αντωνυμίες (**αυτός**), κ.λ.π. Υποθέτουμε ότι για κάθε σταθερά c τύπου σ δίνεται ένα αντικείμενο $c \in \mathbb{T}_\sigma$. Η *δομή* ερμηνείας της $L^\lambda_{ar}(K)$ είναι η

$$\mathbf{U} = (\mathbb{T}_e, \mathbb{T}_s, \{c \mid \mathsf{c} \in K\}).$$

Μερικές από τις σταθερές φαίνονται στον πίνακα 1 μαζί με τους τύπους τους, που δεν είναι βέβαια αυθαίρετοι: η ανάθεση τύπων στις σταθερές πρέπει να συμφωνεί με τον τρόπο σύνταξης στη φυσική γλώσσα της λέξης

[5] Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\equiv$ για την σχέση ταυτότητας μεταξύ των συντακτικών αντικειμένων της $L^\lambda_{ar}(K)$ (τύπων και όρων). Το σύμβολο $=$ είναι το ίδιο ένα συντακτικό αντικείμενο της γλώσσας το οποίο υποδηλώνει τη σχέση ταυτότητας μεταξύ των αντικειμένων με τα οποία ερμηνεύονται οι όροι της γλώσσας.

Ονόματα	Γιάννης, Μαρία	:	$\widetilde{e}$
	Αποσπερίτης, Αυγερινός	:	$\widetilde{e}$
Αντωνυμίες	αυτός	:	$\widetilde{e}$
Ουσιαστικά	αδελφή	:	$\widetilde{e} \to \widetilde{e}$
Αμετάβατα ρήματα	τρέχει	:	$\widetilde{e} \to \widetilde{t}$
Μεταβατικά ρήματα	ταυτίζεται, αγαπά	:	$\widetilde{e} \times \widetilde{e} \to \widetilde{t}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1. Εμπειρικές σταθερές.

που αντιστοιχεί στη σταθερά. Έτσι το όνομα **Γιάννης** ερμηνεύεται από μια συνάρτηση

$$\textit{Γιάννης} : \mathbb{T}_s \to \mathbb{T}_e$$

που αντιστοιχεί σε κάθε κατάσταση s το μοναδικό αντικείμενο (πρόσωπο) *Γιάννης*(s) που καλείται «Γιάννης» στην κατάσταση s, αν υπάρχει, και το αντικείμενο er (λάθος) αν δεν υπάρχει μοναδικό τέτοιο πρόσωπο.

Ο τύπος των μεταβατικών ρημάτων είναι ειδική περίπτωση του

$$\sigma_1 \times \sigma_2 \to \tau \equiv \sigma_1 \to (\sigma_2 \to \tau),$$

που χρησιμοποιείται στο λ-ορισμό για συναρτήσεις δύο μεταβλητών: η τυχαία διμελής συνάρτηση

$$f : \mathbb{T}_{\sigma_1} \times \mathbb{T}_{\sigma_2} \to \mathbb{T}_\tau$$

«ταυτίζεται» με την μονομελή

$$\hat{f} : \mathbb{T}_{\sigma_1} \to (\mathbb{T}_{\sigma_2} \to \mathbb{T}_\tau)$$

όπου

$$\hat{f}(x)(y) = f(x,y)\cdot$$

έτσι το **αγαπά** ερμηνεύεται από τη συνάρτηση *αγαπά* $: \mathbb{T}_{\widetilde{e}} \times \mathbb{T}_{\widetilde{e}} \to \mathbb{T}_{\widetilde{t}}$, που ορίζεται ως

$$\textit{αγαπά}(x)(y)(s) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο/η } x(s) \text{ αγαπά τον/την } y(s) \\ & \text{στην κατάσταση } s, \\ 0, & \text{αν ο/η } x(s) \text{ δεν αγαπά τον/την } y(s) \\ & \text{στην κατάσταση } s, \\ er, & \text{αν } x(s) = er \text{ ή } y(s) = er. \end{cases}$$

Πέραν των σταθερών, η γλώσσα $L^\lambda_{ar}(K)$ έχει για κάθε τύπο σ δύο άπειρες ακολουθίες από μεταβλητές:

- τις *απλές μεταβλητές* (pure variables) $\mathsf{v}^\sigma_0, \mathsf{v}^\sigma_1, \ldots$, και

$$A :\equiv c \mid x \mid B(C) \mid \lambda(v)(B) \mid A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\}$$

c σταθερά τύπου σ, και (ως όρος) $c : \sigma$

x μεταβλητή οποιουδήποτε είδους τύπου σ, και (ως όρος) $x : \sigma$

$C : \sigma$, $B : (\sigma \to \tau)$, και $B(C) : \tau$

$B : \tau$, v είναι απλή μεταβλητή τύπου σ, και $\lambda(v)(B) : (\sigma \to \tau)$

$A_i : \sigma_i$, $n > 0$, για $i \leq n$, $p_1, \ldots, p_n$ είναι διαφορετικές θέσεις, $p_i : \sigma_i$,
το σύστημα $\{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\}$ είναι μη κυκλικό,
και A_0 where $\{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\} : \sigma_0$

Επίσης, (αναδρομικά) όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής v είναι δεσμευμένες στον όρο $\lambda(v)(B)$ και όλες οι εμφανίσεις των $p_1, \ldots, p_n$ είναι δεσμευμένες στον όρο A_0 where $\{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\}$. Όλες οι εμφανίσεις των μεταβλητών που δεν είναι δεσμευμένες όπως καθορίζεται παραπάνω θεωρούνται ελεύθερες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2. Όροι της $L^{\lambda}_{ar}(K)$.

- τις *μεταβλητές αναδρομής* (recursion variables) ή *θέσεις* (locations) $\mathsf{p}^{\sigma}_0, \mathsf{p}^{\sigma}_1, \ldots$

Η χρήση δύο διαφορετικών ειδών μεταβλητών παίζει σημαντικό ρόλο στη σύνταξη και κυρίως την αλγοριθμική σημασιολογία της γλώσσας $L^{\lambda}_{ar}(K)$, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Οι *όροι* (terms) της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ ορίζονται αναδρομικά, ξεκινώντας από τις μεταβλητές και τις σταθερές και χρησιμοποιώντας *εφαρμογή*, *λ-αφαίρεση* και (αμοιβαία) *μη κυκλική αναδρομή* (acyclic recursion). Ο ορισμός των όρων καθορίζει τις ελεύθερες και τις δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών σε κάθε όρο και του προσδίδει ένα τύπο. Συμβολικά,

$$A : \sigma \iff \text{ο όρος } A \text{ έχει τύπο } \sigma.$$

Οι κανόνες σχηματισμού των όρων συνοψίζονται στον πίνακα 2, με όλες τις απαραίτητες συνθήκες για τις μεταβλητές. Είναι ακριβώς οι κανόνες για τον λ-λογισμό εκτός από τη μη κυκλική αναδρομή η οποία χρειάζεται κάποια περαιτέρω εξήγηση.

Ένα σύστημα εξισώσεων $\{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\}$ είναι *μη κυκλικό* αν μπορούμε να προσδώσουμε ένα φυσικό αριθμό, το *βαθμό* ($\mathrm{rank}(p_i)$) σε κάθε μία μεταβλητή p_i, έτσι ώστε

$$\mathrm{rank}(p_i) > \mathrm{rank}(p_j) \implies \text{η } p_j \text{ εμφανίζεται ελεύθερη στον όρο } A_i.$$

Η προφανής ιδέα είναι ότι η μεταβλητή p_i έχει μεγαλύτερο βαθμό από την p_j αν η τιμή της «εξαρτάται» (ή θα μπορούσε να «εξαρτάται») από την τιμή της p_j. Τα μη κυκλικά συστήματα εκφράζουν «τετριμμένα» συστήματα αναδρομικών ορισμών τα οποία καταλήγουν σε λύση σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Ως παραδείγματα όρων, θεωρούμε τις αποδόσεις στην $L^{\lambda}_{ar}(K)$ των παρακάτω απλών προτάσεων της φυσικής γλώσσας:

«Ο Γιάννης τρέχει» <u>αποδίδεται</u> $\mathsf{τρέχει}(\mathsf{Γιάννης})$.

(3) «Ο Γιάννης αγαπά την αδελφή της Μαρίας»

<u>αποδίδεται</u> $\mathsf{αγαπά}(\mathsf{Γιάννης}, \mathsf{αδελφή}(\mathsf{Μαρία}))$.

Ένα παράδειγμα μη κυκλικής αναδρομής είναι ο όρος

$$\mathsf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}, p_2 := \mathsf{αδελφή}(p_3), p_3 := \mathsf{Μαρία}\}\cdot$$

ο οποίος διαβάζεται ως

Αν p_1 είναι ο Γιάννης, p_3 είναι η Μαρία και p_2 είναι η αδελφή του/της p_3,

τότε ο/η p_1 αγαπά τον/την p_2,

δηλαδή ό,τι (διαισθητικά) εκφράζει και η πρόταση «Ο Γιάννης αγαπά την αδελφή της Μαρίας». Όπως είδαμε, η πρόταση αυτή αποδίδεται ως

$$\mathsf{αγαπά}(\mathsf{Γιάννης}, \mathsf{αδελφή}(\mathsf{Μαρία})),$$

και πράγματι, θα φανεί παρακάτω ότι οι δύο αυτοί όροι της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ είναι συνώνυμοι.

3.2. Δηλωτική σημασιολογία της $L^{\lambda}_{ar}(K)$. Με *ανάθεση τιμών* (assignment) εννοούμε μια τυχαία συνάρτηση g που συσχετίζει με κάθε μεταβλητή x τύπου σ, απλή ή αναδρομής, ένα αντικείμενο $g(x) \in \mathbb{T}_\sigma$. Για κάθε μεταβλητή x τύπου σ και $a \in \mathbb{T}_\sigma$, ορίζουμε την *ενημέρωση* $g\{x := a\}$ της g για την ανάθεση $x := a$ με το προφανές[6]

$$g\{x := a\}(y) = \begin{cases} a, & \text{αν } y \equiv x, \\ g(y), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η *υποδήλωση* (τιμή, αναφορά, denotation) ενός όρου για μια δοσμένη ανάθεση τιμών ορίζεται αναδρομικά:

(D1) $\mathrm{den}(x)(g) = g(x), \quad \mathrm{den}(\mathsf{c})(g) = c.$
(D2) $\mathrm{den}(A(B))(g) = \mathrm{den}(A)(g)(\mathrm{den}(B)(g)).$

[6]Η πράξη αυτή επεκτείνεται κατά προφανή τρόπο και στην περίπτωση παράλληλων ενημερώσεων:

$$g\{x := a, y := b\} = g\{x := a\}\{y := b\},$$
$$g\{x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n\} = g\{x_1 := a_1\} \dots \{x_n := a_n\}.$$

(D3) $\mathrm{den}(\lambda(v)(B))(g) = h$, όπου, για όλα τα t, $h(t) = \mathrm{den}(B)(g\{v := t\})$.

(D4) $\mathrm{den}(A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\})(g)$
$$= \mathrm{den}(A_0)(g\{p_1 := \overline{p}_1, \dots, p_n := \overline{p}_n\}),$$
όπου οι τιμές $\overline{p}_i$ ορίζονται για $i = 1, \dots, n$ με αναδρομή στο βαθμό $\mathrm{rank}(p_i)$:
$$\overline{p}_i = \mathrm{den}(A_i(g\{p_{k_1} := \overline{p}_{k_1}, \dots, p_{k_m} := \overline{p}_{k_m}\})),$$
όπου $p_{k_1}, \dots, p_{k_m}$ είναι οι μεταβλητές με βαθμούς χαμηλότερους από αυτόν της p_i.

Για παράδειγμα, η αναφορά του όρου
$$A \equiv \textbf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textbf{Γιάννης}, p_2 := \textbf{αδελφή}(p_3), p_3 := \textbf{Μαρία}\}.$$
είναι μία συνάρτηση η οποία σε κάθε κατάσταση δίνει μία αληθοτιμή και την υπολογίζουμε σε στάδια ως εξής:

Στάδιο 1: $\overline{p}_1 :=$ *Γιάννης*, $\overline{p}_3 :=$ *Μαρία*.
Στάδιο 2: $\overline{p}_2 :=$ *αδελφή*$(\overline{p}_3) =$ *αδελφή(Μαρία)*.
Στάδιο 3: $\mathrm{den}(A) :=$ *αγαπά*$(\overline{p}_1, \overline{p}_2) =$ *αγαπά(Γιάννης,αδελφή(Μαρία))*
$=$ η τιμή αλήθειας της πρότασης
«Ο Γιάννης αγαπά την αδελφή της Μαρίας».

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχτεί ότι *για κάθε όρο A της $L^{\lambda}_{ar}(K)$, υπάρχει κάποιος όρος B του κλασικού λ-λογισμού* (δηλαδή χωρίς μη-κυκλική αναδρομή) *με την ίδια αναφορά*, δηλαδή έτσι που για κάθε ανάθεση g,
$$\mathrm{den}(A)(g) = \mathrm{den}(B)(g).$$
Όμως η μη κυκλική αναδρομή είναι καταλυτική για την αλγοριθμική σημασιολογία της $L^{\lambda}_{ar}(K)$. Άλλωστε θα δειχτεί στο εδάφιο 3.5 ότι υπάρχουν όροι που δεν είναι συνώνυμοι με κανέναν όρο του λ-λογισμού.

3.3. Κανονική μορφή όρων. Βασικό στοιχείο της θεωρίας προσδιορισμού αναφοράς είναι μία δυαδική σχέση *αναγωγής* (reduction) μεταξύ όρων ($\Rightarrow$), η οποία διαισθητικά εκφράζεται ως
$$A \Rightarrow B \iff A \equiv_c B \quad (A \text{ συμπίπτει με } B)$$
ή οι A και B έχουν το ίδιο νόημα
και ο B εκφράζει αυτό το νόημα «πιο απλά».

Δύο όροι *συμπίπτουν* ($A \equiv_c B$, to be congruent) αν ο ένας μπορεί να παραχθεί από τον άλλο με αλφαβητικές αλλαγές των δεσμευμένων μεταβλητών του και με την αναδιάταξη των αναθέσεων μέσα στην μη κυκλική αναδρομή. Στην ουσία, οι διαφορές ανάμεσα σε όρους που συμπίπτουν είναι συντακτικές, δεν επηρεάζουν το νόημα των όρων, και επομένως, σε ό,τι αφορά στη θεωρία νοήματος που αναπτύσσουμε εδώ, δύο συμπίπτοντες όροι ταυτίζονται.

Η περιγραφή της αναγωγής διαχωρίζει δύο περιπτώσεις επειδή η θεωρία δεν αποδίδει νόημα στις μεταβλητές και σε κάποιους όρους («άμεσους») που (cong) Αν $A \equiv_c B$, τότε $A \Rightarrow B$

(trans) Αν $A \Rightarrow B$ και $B \Rightarrow C$, τότε $A \Rightarrow C$

(rep1) Αν $A \Rightarrow A'$ και $B \Rightarrow B'$, τότε $A(B) \Rightarrow A'(B')$

(rep2) Αν $A \Rightarrow B$, τότε $\lambda(u)(A) \Rightarrow \lambda(u)(B)$

(rep3) Αν $A_i \Rightarrow B_i$ για $i = 0, \dots, n$, τότε

$$A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \Rightarrow B_0 \textsf{ where } \{p_1 := B_1, \dots, p_n := B_n\}$$

(head) $$\Big(A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}\Big) \textsf{ where } \{q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m\}$$
$$\Rightarrow A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n, q_1 := B_1, \dots, q_1 := B_m\}$$

(B-S) $$A_0 \textsf{ where } \{p := \Big(B_0 \textsf{ where } \{q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m\}\Big), p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$$
$$\Rightarrow A_0 \textsf{ where } \{p := B_0, q_1 := B_1, \dots, q_m := B_m, p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$$

(recap) $$\Big(A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}\Big)(B) \Rightarrow A_0(B) \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}$$

(ap) $A(B) \Rightarrow A(b) \textsf{ where } \{b := B\}$ $\boxed{(B \text{ όχι άμεσος})}$

(λ-rule) $$\lambda(u)\Big(A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\}\Big) \Rightarrow \lambda(u)A_0' \textsf{ where } \{p_1' := \lambda(u)A_1', \dots, p_n' := \lambda(u)A_n'\}$$

όπου για $i = 1, \dots, m$, η p_i' είναι καινούργια μεταβλητή αναδρομής και

$$A_i' :\equiv A_i\{p_1 :\equiv p_1'(u), \dots, p_n :\equiv p_n'(u)\}.$$

Πίνακας 3. Ο λογισμός της αναγωγής

ουσιαστικά δρουν ως «γενικευμένες μεταβλητές», ενώ η σχέση της αναγωγής μπορεί να ισχύει χωρίς περιορισμούς.[7]

Η σχέση αναγωγής μεταξύ όρων ορίζεται από τους κανόνες στον πίνακα 3. Όπως έχουμε πει, η θεωρία που αναπτύσσουμε εκλαμβάνει κάθε όρο A της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ ως «πρόγραμμα», και το νόημα (τον προσδιορισμό αναφοράς) $\mathrm{int}(A)$ ως ιδεατό αλγόριθμο που εκφράζεται από τον A και υπολογίζει την τιμή $\mathrm{den}(A)(g)$ για κάθε ανάθεση τιμών g. Απ' αυτή τη σκοπιά, οι κανόνες αναγωγής αντιστοιχούν σε *μετασχηματισμούς προγραμμάτων* (program transformations) που σέβονται τον προσδιορισμό αναφοράς και κάνουν μερικά βήματα προς την υλοποίησή του· στις γλώσσες προγραμματισμού, η

[7]Βλέπε σχετικά και το εδάφιο 3.5.

ανάλογη διεργασία είναι γνωστή ως *μερική υλοποίηση* (partial evaluation). Για παράδειγμα, ο κανόνας (ap) εκφράζει απλά την εξής διαισθητική ιδέα: για να υπολογίσουμε την τιμή του $A(B)$ για κάποια ανάθεση τιμών g, υπολογίζουμε πρώτα την τιμή $\mathrm{den}(B)(g)$ (όταν αυτή δεν δίδεται άμεσα) και μετά υπολογίζουμε την τιμή του $A(b)$ για την ανάθεση $g\{b := \mathrm{den}(B)(g)\}$. Στο [11] επεξηγείται αναλυτικά η σκοπιμότητα του κάθε κανόνα καθώς και οι περιορισμοί που τον συνοδεύουν. Εδώ θα κάνουμε μόνο μία σύντομη αναφορά σ' αυτούς τους περιορισμούς, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια της «αμεσότητας» που είναι καθοριστική.

Κατ' αρχάς, έχουμε τους εξής περιορισμούς στους αντίστοιχους κανόνες:

(head) Οι μεταβλητές αναδρομής $p_1, \dots, p_n$ δεν εμφανίζονται στους όρους $B_1, \dots, B_m$.
(B-S) Οι μεταβλητές αναδρομής $q_1, \dots, q_m$ δεν εμφανίζονται στους όρους $A_0, \dots, A_n$.
(recap) Οι μεταβλητές αναδρομής $p_1, \dots, p_n$ δεν εμφανίζονται στον όρο B.

Εδώ το ζητούμενο είναι προφανές: οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών αναδρομής να μη γίνουν δεσμευμένες μετά την εφαρμογή του αντίστοιχου κανόνα.

Άμεσοι όροι. Για τον κανόνα (ap) έχουμε τον εξής περιορισμό:

(ap) Ο όρος B να μην είναι άμεσος και η μεταβλητή b να είναι νέα.

Η μεταβλητή είναι νέα όταν είναι διαφορετική από αυτές που εμφανίζονται στους όρους A ή B. Οι *άμεσοι* (immediate) όροι ορίζονται ως εξής

$$X :\equiv x \mid p(v_1, \dots, v_n) \mid \lambda(u_1, \dots, u_m)(p(v_1, \dots, v_n)),$$

όπου x είναι οποιουδήποτε είδους μεταβλητή, p είναι μεταβλητή αναδρομής, και οι v_i, u_j είναι απλές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο όρος $\mathsf{p}_3^{(\sigma\to\tau)}(\mathsf{v}_1^\sigma)$ είναι άμεσος, ενώ ο $\mathsf{v}_3^{(\sigma\to\tau)}(\mathsf{v}_1^\sigma)$ δεν είναι.

Η βασική ιδέα είναι ότι η τιμή $\mathrm{den}(X)(g)$ ενός άμεσου όρου δίνεται «άμεσα» – σε χρόνο μηδέν και χωρίς κανέναν υπολογισμό ή τη μεσολάβηση νοήματος. Ο περιορισμός του κανόνα (ap) σε μη άμεσους όρους B πηγάζει από την «αλγοριθμική» απόδοση του νοήματος, και, ούτως ή άλλως, χωρίς αυτόν δεν ισχύουν τα βασικά θεωρήματα Κανονικής Μορφής και Σύνθεσης που θα εκθέσουμε στη συνέχεια. Είναι όμως, αναμφίβολα, η σημαντικότερη παρέκκλιση του προσδιορισμού αναφοράς από τη σημασία του Frege, ο οποίος φαίνεται να λέει ξεκάθαρα ότι όλοι οι όροι έχουν σημασία.[8]

Το κεντρικό μαθηματικό αποτέλεσμα της θεωρίας είναι το επόμενο

[8] Από την άλλη μεριά, δεν γνωρίζουμε κάποιο συγκεκριμένο απόσπασμα όπου ο Frege να αναφέρεται στο νόημα μεταβλητών.

Θεωρημα Κανονικης Μορφης. *Για κάθε όρο A, υπάρχει ένας μοναδικός μέχρι σύμπτωσης, μη αναγώγιμος όρος*

$$\mathrm{cf}(A) \equiv A \text{ ή } \mathrm{cf}(A) \equiv A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\},$$

τέτοιος ώστε $A \Rightarrow \mathrm{cf}(A)$.

Για λόγους ομοιομορφίας, θεωρούμε ότι για κάθε όρο A, η κανονική μορφή του A είναι

$$\mathrm{cf}(A) \equiv A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} \qquad (n \geq 0),$$

όπου, για κάθε όρο A, η έκφραση A where $\{\}$ ταυτίζεται με τον όρο A, δηλαδή

$$A \equiv A \text{ where } \{\}.$$

Ένας όρος B είναι *μη αναγώγιμος* (irreducible) αν δεν «ενεργοποιεί» καμία αναγωγή εκτός από την τετριμμένη (cong), δηλαδή αν για κάθε C,

$$\text{αν } B \Rightarrow C, \text{ τότε } B \equiv_c C\cdot$$

και το «μοναδικός μέχρις σύμπτωσης» στο θεώρημα σημαίνει ότι για κάθε μη αναγώγιμο B,

$$\text{αν } A \Rightarrow B, \text{ τότε } B \equiv_c \mathrm{cf}(A).$$

Συμβολικά, γράφουμε

$$\begin{aligned} A \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} B &\iff \mathrm{cf}(A) \equiv_c B \\ &\iff A \Rightarrow B \text{ και ο } B \text{ είναι μη αναγώγιμος.} \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε την κανονική μορφή του όρου που προκύπτει από την πρόταση (3):

«Ο Γιάννης αγαπά την αδελφή της Μαρίας»

$$\begin{aligned} &\underline{\text{αποδίδεται}}\ \mathsf{αγαπά(Γιάννης,\ αδελφή(Μαρία))} \\ &\qquad\qquad \equiv \mathsf{αγαπά(Γιάννης)(αδελφή(Μαρία))} \end{aligned}$$

$$\mathsf{αγαπά(Γιάννης)} \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \mathsf{αγαπά}(p_1) \text{ where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}\} \qquad \text{(ap)}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{αγαπά(Γιάννης)(αδελφή(Μαρία))} \\ &\quad \Rightarrow \Big(\mathsf{αγαπά}(p_1) \text{ where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}\}\Big)(\mathsf{αδελφή(Μαρία)}) && \text{(rep1)} \\ &\quad \Rightarrow \mathsf{αγαπά}(p_1)(\mathsf{αδελφή(Μαρία)}) \text{ where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}\} && \text{(recap)} \\ &\quad \Rightarrow \Big(\mathsf{αγαπά}(p_1)(p_2) \text{ where } \{p_2 := \mathsf{αδελφή(Μαρία)}\}\Big) \\ &\qquad\qquad \text{where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}\} && \text{(ap)} \\ &\quad \Rightarrow \mathsf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \mathsf{Γιάννης}, \\ &\qquad\qquad p_2 := \mathsf{αδελφή(Μαρία)}\} && \text{(head), (cong)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \textsf{αγαπά}(p_1, p_2) \textsf{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης},$$
$$p_2 := \Big(\textsf{αδελφή}(p_3) \textsf{ where } \{p_3 := \textsf{Μαρία}\}\Big)\} \quad \text{(ap)}$$
$$\Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \textsf{αγαπά}(p_1, p_2) \textsf{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης},$$
$$p_2 := \textsf{αδελφή}(p_3), p_3 := \textsf{Μαρία}\} \quad \text{(B-S)}$$

3.4. Το νόημα ως ιδεατός αλγόριθμος. Έστω ένας μη-άμεσος όρος A με κανονική μορφή

$$\mathrm{cf}(A) \equiv A_0 \textsf{ where } \{p_1 := A_1, \dots , p_n := A_n\} \qquad (n \geq 0).$$

Για $i = 0, \dots , n$ και για τυχαία ανάθεση τιμών g στις μεταβλητές, θέτουμε

$$\alpha_i(g, d_1, \dots , d_n) = \mathrm{den}(A_i)(g\{p_1 := d_1\}, \dots , \{p_n := d_n\}).$$

Ο προσδιορισμός αναφοράς του A, $\mathrm{int}(A)$, είναι το άνυσμα των συναρτήσεων

$$\mathrm{int}(A) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots , \alpha_n),$$

που είναι ειδική περίπτωση *αναδρομέα* (recursor) σύμφωνα με τον γενικό ορισμό αυτών των μαθηματικών αντικειμένων στα [9], [10]. Σ' αυτές τις εργασίες υποστηρίζεται ότι οι αναδρομείς κωδικοποιούν με φυσικό τρόπο όλες τις ιδιότητες των αλγορίθμων που είναι ανεξάρτητες από τις υλοποιήσεις τους· και απ' αυτό έπεται ότι κάθε αλγόριθμος μπορεί να «ταυτιστεί» με έναν αναδρομέα στη συνολοθεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών, με τον ίδιο τρόπο που οι πραγματικοί αριθμοί «ταυτίζονται» με τομές Dedekind.

Σε ό,τι αφορά στην παρουσίαση της θεωρίας εδώ, αρκεί να πούμε ότι με αυτό τον ορισμό ο προσδιορισμός αναφοράς ενός όρου A είναι διαισθητικά ένας ιδεατός αλγόριθμος αλλά ταυτόχρονα ένα σαφώς ορισμένο μαθηματικό αντικείμενο που προσδιορίζει για κάθε ανάθεση τιμών g την αναφορά $\mathrm{den}(A)(g)$. Δηλαδή, είτε η φιλοσοφική θέση ότι «οι αλγόριθμοι είναι αναδρομείς» αληθεύει είτε όχι, η ανάθεση σε κάθε όρο A του προσδιορισμού αναφοράς $\mathrm{int}(A)$ προσφέρει ένα αυστηρό, μαθηματικό πρότυπο της βασικής εικόνας του Frege

$$A \mapsto \mathrm{int}(A) \mapsto \mathrm{den}(A)$$

που συνδέει κάθε (μη άμεσο) όρο με το νόημα και την αναφορά του.

Ξεκινώντας λοιπόν από ένα μη-άμεσο όρο A της γλώσσας $L^{\lambda}_{ar}(K)$, τον μετασχηματίζουμε και φτάνουμε σε μία μορφή $\mathrm{cf}(A)$ στην οποία οι όροι $A_0, \dots , A_n$ ουσιαστικά είναι τα βασικά στοιχεία, οι συνθήκες αλήθειας που καθορίζουν την αναφορά του $\mathrm{den}(A)$. Ο προσδιορισμός αναφοράς που προκύπτει στη συνέχεια κωδικοποιεί όχι μόνο αυτά τα βασικά στοιχεία αλλά και τον τρόπο υπολογισμού της αναφοράς από αυτά.

3.5. Αναφορική συνωνυμία. Οι όροι A και B είναι *αναφορικά συνώνυμοι* αν είτε συμπίπτουν είτε είναι μη-άμεσοι και οι αντίστοιχοι προσδιορισμοί αναφοράς $\mathrm{int}(A)$ και $\mathrm{int}(B)$ είναι *ισομορφικοί* ως αναδρομείς, που βασικά σημαίνει ότι τα αντίστοιχα ανύσματα διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά με την οποία τα μέρη τους απαριθμούνται. Για τις εφαρμογές αυτής της έννοιας ισομορφισμού αναδρομέων στη θεωρία αναφορικής συνωνυμίας αρκεί το εξής θεώρημα, που συνάγεται εύκολα από τους αυστηρούς ορισμούς:

Θεωρημα Συνωνυμιας. *Δύο όροι A, B είναι αναφορικά συνώνυμοι (referentially synonymous, $A \approx B$) αν και μόνο αν*

$$A \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \ldots, p_n := A_n\},$$
$$B \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} B_0 \text{ where } \{p_1 := B_1, \ldots, p_n := B_n\},$$

για $n \geq 0$ και για κατάλληλους όρους $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$, έτσι ώστε

$$\text{για κάθε } g, \quad \mathrm{den}(A_i)(g) = \mathrm{den}(B_i)(g) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ειδικότερα, $A \approx \mathrm{cf}(A)$, και αν $\mathrm{cf}(A) \equiv_c \mathrm{cf}(B)$, τότε $A \approx B$.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της αναφορικής συνωνυμίας είναι ο αποτελεσματικός υπολογισμός των κανονικών μορφών: η ερώτηση αν ο A είναι αναφορικά συνώνυμος με τον B ή όχι ανάγεται στην επαλήθευση συγκεκριμένων αναφορικών ταυτοτήτων ανάμεσα σε ανάγωγους όρους, που για πολλά παραδείγματα είναι προφανής. Επιπλέον, η αναφορική συνωνυμία αναδεικνύει λεπτές διαφορές νοήματος μεταξύ όρων. Ο συνδυασμός των δύο αυτών ιδιοτήτων την καθιστά ένα χρήσιμο εργαλείο για την εξέταση της (διαισθητικής) συνωνυμίας προτάσεων της γλώσσας.

Το θεώρημα συνεπάγεται αμέσως πολλές, απλές αναφορικές συνωνυμίες, όπως η

$$\textsf{αγαπά}(\textsf{Γιάννης}, \textsf{αδελφή}(\textsf{Μαρία}))$$
$$\approx \textsf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης}, p_2 := \textsf{αδελφή}(p_3), p_3 := \textsf{Μαρία}\}$$

που ισχύει επειδή ο όρος στα δεξιά είναι η κανονική μορφή του όρου στα αριστερά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, γενικά,

$$\text{αν } A \Rightarrow B, \text{ τότε } A \approx B\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $A \Rightarrow B$, τότε από τον κανόνα (trans) $A \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} B$, αφού $B \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \mathrm{cf}(B)$, και επομένως, από τη μοναδικότητα της κανονικής μορφής, $\mathrm{cf}(A) \equiv_c \mathrm{cf}(B)$. Σε πολλές περιπτώσεις αυτή η παρατήρηση αρκεί για να επαληθεύσουμε απλές συνωνυμίες.

Ως παράδειγμα απόδειξης μη-συνωνυμίας, θεωρούμε τις προτάσεις (1) και (2):

«Ο Αποσπερίτης ταυτίζεται με τον Αυγερινό»

$\underline{\text{αποδίδεται}}$ $\textsf{ταυτίζεται}(\textsf{Αποσπερίτης})(\textsf{Αυγερινός})$

$$\Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \textsf{ταυτίζεται}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Αποσπερίτης}, p_2 := \textsf{Αυγερινός}\}.$$

Ανάλογα, έχουμε:

«Ο Αποσπερίτης ταυτίζεται με τον Αποσπερίτη»

$\underline{\text{αποδίδεται}}$ $\textsf{ταυτίζεται(Αποσπερίτης)(Αποσπερίτης)}$

$$\Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \textsf{ταυτίζεται}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Αποσπερίτης}, p_2 := \textsf{Αποσπερίτης}\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$\mathrm{den}(\textsf{Αποσπερίτης}) = \text{Αποσπερίτης} \neq \text{Αυγερινός} = \mathrm{den}(\textsf{Αυγερινός})$$

αφού οι συναρτήσεις Αποσπερίτης : $\widetilde{e}$ και Αυγερινός : $\widetilde{e}$ δεν έχουν τις ίδιες τιμές για όλες τις καταστάσεις s, και απ' αυτό και το Θεώρημα Συνωνυμίας, συνάγεται εύκολα ότι

$$\textsf{ταυτίζεται(Αποσπερίτης)(Αυγερινός)} \not\approx \textsf{ταυτίζεται(Αποσπερίτης)(Αποσπερίτης)}.$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχουν όροι της $L^{\lambda}_{ar}(K)$ οι οποίοι δεν είναι συνώνυμοι με κανένα όρο του λ-λογισμού.

«Ο Γιάννης αγαπά την αδελφή του»

$\underline{\text{αποδίδεται}}$ $\textsf{αγαπά(Γιάννης,αδελφή(δική του))}$

$$\Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \textsf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης}, p_2 := \textsf{αδελφή}(p_1)\}$$

Στην πραγματικότητα, παραλείπεται εδώ για λόγους συντομίας ένα στάδιο συντακτικού μετασχηματισμού (co-indexing) στον οποίο εισάγεται μία δεσμευμένη μεταβλητή p_1 η οποία ταυτίζει τις αναφορές των όρων «**δική του**» και «**Γιάννης**».

Στην περίπτωση της γλώσσας του λ-λογισμού χωρίς τη μη-κυκλική αναδρομή, ο μετασχηματισμός αυτός αποδίδει την παραπάνω πρόταση της φυσικής γλώσσας με τον όρο

$$\lambda(v)\big(\textsf{αγαπά}(v, \textsf{αδελφή}(v))\big)(\textsf{Γιάννης})$$
$$\Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \lambda(v)(\textsf{αγαπά}(v, p_2(v)))(p_1) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης}, p_2 := \lambda(v)\textsf{αδελφή}(v)\}$$

Είναι φανερό ότι

$$\mathrm{den}(\textsf{αδελφή}(p_1)) \neq \mathrm{den}(\lambda(v)\textsf{αδελφή}(v))$$

αφού οι δύο εκφράσεις είναι διαφορετικού τύπου κι επομένως,

$$\textsf{αγαπά(Γιάννης,αδελφή(δική του))} \not\approx \lambda(v)\big(\textsf{αγαπά}(v, \textsf{αδελφή}(v))\big)(\textsf{Γιάννης}).$$

Μπορεί να αποδειχτεί γενικότερα ότι μία μεταβλητή αναδρομής δεν μπορεί να εμφανίζεται σε περισσότερα από ένα μέρη της κανονικής μορφής ενός όρου του λ-λογισμού. Δηλαδή, ο όρος

$$\textbf{αγαπά}(p_1, p_2) \text{ where } \{p_1 := \textbf{Γιάννης}, p_2 := \textbf{αδελφή}(p_1)\}$$

δεν είναι αναφορικά συνώνυμος με κανένα όρο του λ-λογισμού. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η γλώσσα $L^{\lambda}_{ar}(K)$ έχει ενδεχομένως μεγαλύτερες δυνατότητες πιστότητας και ακρίβειας στην απόδοση της φυσικής γλώσσας.

Το τελευταίο γενικό αποτέλεσμα που θα διατυπώσουμε εκφράζει αυστηρά την Αρχή Σύνθεσης του Frege:

Θεωρημα Συνθεσης. *Για όλους τους όρους A, B, C και κάθε μεταβλητή x ίδιου τύπου με τους B και C, έχουμε*

$$\text{αν } B \approx C, \text{ τότε } A\{x :\equiv B\} \approx A\{x :\equiv C\},$$

εφόσον η αντικατάσταση είναι ελεύθερη.[9]

Στο εδάφιο 3.4, ορίσαμε τον προσδιορισμό αναφοράς ενός όρου A μόνο για μη άμεσους όρους. Με τη βοήθεια του θεωρήματος σύνθεσης, θα εξηγήσουμε γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε το αντικείμενο $\mathrm{int}(x)$ για μια μεταβλητή x παρόλο που η μεταβλητή έχει κανονική μορφή η οποία ορίζει ένα (τετριμμένο) ακυκλικό αναδρομέα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία σταθερά $\mathsf{id} : \widetilde{e} \to \widetilde{e}$ για την οποία ισχύει

$$\mathsf{id}(x) = x \qquad (x \in \mathbb{T}_{\widetilde{e}}).$$

Αυτό σημαίνει ότι οι όροι $\mathsf{id}(x)$ και x είναι και οι δύο ανάγωγοι και για οποιαδήποτε ανάθεση τιμών g, ισχύει ότι

$$\mathrm{den}(\mathsf{id}(x))(g) = \mathrm{den}(x)(g),$$

δηλαδή οι όροι αυτοί είναι αναφορικά συνώνυμοι. Όμως για αυτούς τους όρους δεν ισχύει το θέωρημα σύνθεσης. Πράγματι, για τυχαίο f,

$$\mathsf{f}(\mathsf{id}(x)) \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \mathsf{f}(p) \text{ where } \{p := \mathsf{id}(x)\}$$

και

$$\mathsf{f}(x) \Longrightarrow_{\mathrm{cf}} \mathsf{f}(x) \text{ where } \{\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\mathsf{f}(\mathsf{id}(x)) \not\approx \mathsf{f}(x)$.

Στη θεωρία προσδιορισμού αναφοράς, οι μεταβλητές (και γενικότερα, οι άμεσοι όροι) συμπεριφέρονται σαν το 0 στην αριθμητική των κλασμάτων: δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί κάποια συμβατική (τετριμμένη) τιμή στο $\frac{1}{0}$ και ταυτόχρονα να συνεχίζουν να ισχύουν οι συνήθεις κανόνες της αριθμητικής.

[9] Η αντικατάσταση $A\{x :\equiv B\}$ δεν είναι ελεύθερη αν κάποια ελεύθερη μεταβλητή των όρων A, B δεν είναι ελεύθερη στον όρο που προκύπτει μετά την αντικατάσταση.

§4. Το νόημα σε συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς. Η γλώσσα χρησιμοποιείται στο γραπτό και στον προφορικό λόγο πάντα μέσα σε ένα πλαίσιο αναφοράς.

Στην τυπική σημασιολογία το πλαίσιο αυτό εκφράζεται ως «κατάσταση» γι'αυτό και αν θ είναι μία πρόταση της φυσικής γλώσσας, ο όρος A_θ με τον οποίο αποδίδεται στην $L^\lambda_{ar}(K)$ είναι τύπου $\widetilde{t}$. Ορίζουμε μία *εκφορά* (utterance) στη γλώσσα $L^\lambda_{ar}(K)$ το ζεύγος (A, a) όπου A είναι ένας όρος $A : \widetilde{t}$ και το a είναι μία κατάσταση. Εισάγουμε στη γλώσσα μία παράμετρο $\overline{a}$ για κάθε κατάσταση a έτσι ώστε μπορούμε να ταυτίσουμε μία εκφορά (A, a) με τον όρο $A(\overline{a}) : t$. Στην περίπτωση του όρου A_θ που αποδίδει μία πρόταση θ της φυσικής γλώσσας, ο προσδιορισμός αναφοράς του $A_\theta(\overline{a})$ είναι το νόημα αυτής της πρότασης θ στο πλαίσιο αναφοράς που κωδικοποιεί η κατάσταση a.

Οι παράμετροι λειτουργούν ως μεταβλητές για τις οποίες η τιμή για κάθε ανάθεση τιμών είναι καθορισμένη. Αυτό σημαίνει ότι αν

$$\mathrm{cf}(A) \equiv A_0 \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : \widetilde{t}$$

τότε, σύμφωνα με τον κανόνα (recap),

$$\mathrm{cf}(A(\overline{a})) \equiv A_0(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := A_1, \dots, p_n := A_n\} : t$$

Για παράδειγμα, σε μία συγκεκριμένη κατάσταση a, η κανονική μορφή της πρότασης (3), είναι

$$\textsf{αγαπά}(p_1, p_2)(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Γιάννης}, p_2 := \textsf{αδελφή}(p_3), p_3 := \textsf{Μαρία}\}$$

Ο υπολογισμός της αναφοράς του παραπάνω όρου, όπως φαίνεται στο εδάφιο 3.2, μόνο στο τρίτο στάδιο θα λάβει υπόψιν του τη συγκεκριμένη κατάσταση a. Για να υπολογιστεί η αναφορά του, δεν αρκεί η αναφορά του όρου **αδελφή(Μαρία)** να υπολογιστεί στη συγκεκριμένη κατάσταση αλλά πρέπει να υπολογιστεί σε όλες τις δυνατές καταστάσεις της δομής ερμηνείας.

4.1. Ένα παράδοξο. Η σημασιολογική μελέτη των προτάσεων στις οποίες εκφράζουμε τη στάση μας, τις απόψεις μας για άλλες προτάσεις (propositional attitudes) δημιουργεί, όπως είναι γνωστό, πολλά προβλήματα και αποτελεί ένα ζητούμενο για όλες τις προτεινόμενες θεωρίες νοήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι προτάσεις που εισάγονται από φράσεις όπως «Πιστεύω ότι».

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την αναφορική συνωνυμία για να δείξουμε τον τρόπο που η θεωρία προσδιορισμού αναφοράς απαντά σε ένα γνωστό παράδοξο σημασιολογίας που έχει να κάνει με τέτοιες προτάσεις. Η ιδέα στην οποία βασίζεται είναι απλή και τη βρίσκει κανείς ήδη στο Frege. Σε μία συγκεκριμένη κατάσταση a, αν ένας άνθρωπος έχει την έλλογη πεποίθηση ότι ισχύει μία πρόταση θ_1 στην a (δηλαδή ο προσδιορισμός αναφοράς του $A_{\theta_1}(\overline{a})$ παίρνει την τιμή Αλήθεια), ενώ δεν πιστεύει αντίστοιχα ότι ισχύει μία πρόταση θ_2 στην a, τότε οι όροι $A_{\theta_1}(\overline{a})$ και $A_{\theta_2}(\overline{a})$ δεν μπορεί να είναι συνώνυμοι. Ο προσδιορισμός «σε μία συγκεκριμένη κατάσταση» εδώ είναι απαραίτητος – όταν πιστεύουμε κάτι το πιστεύουμε πάντα όπως ερμηνεύεται σε ένα πλαίσιο αναφοράς και όχι ανεξαρτήτως αυτού.

Το παράδοξο αυτό εμφανίζεται σε πολλές παραλλαγές (για παράδειγμα στο [12]) αλλά αυτή που ακολουθεί βρίσκεται στο [13].

> Ας υποθέσουμε ότι σε μία τελετή κατά την οποία ο συγγραφέας του βιβλίου «Waverley» υπογράφει αντίτυπά του, ένας έξυπνα μεταμφιεσμένος Sir Walter Scott υπογράφει το αντίτυπο του βασιλιά του Ηνωμένου Βασιλείου, Γεωργίου IV. Ο βασιλιάς, ξεγελασμένος από τη μεταμφίεση του Scott, συμπεραίνει ότι το «Waverley» γράφτηκε από κάποιον άλλο. Δηλώνει λοιπόν με ειλικρίνεια ότι
>
> Αυτός δεν είναι ο Scott,
>
> δείχνοντας το μεταμφιεσμένο συγγραφέα.

Στη συγκεκριμένη κατάσταση όμως, η λέξη «αυτός» έχει την ίδια αναφορά με τη λέξη «Scott», οπότε αντικαθιστώντας τη, η παραπάνω εκφορά μοιάζει να είναι συνώνυμη με την πρόταση

Ο Scott δεν είναι ο Scott.

Αλλά βέβαια ο βασιλιάς Γεώργιος IV σίγουρα δεν πιστεύει ότι ο Scott δεν είναι ο εαυτός του!

Έστω $\overline{a}$ η κατάσταση που περιγράφεται παραπάνω.

«Αυτός είναι ο Scott»

$$\underline{\text{αποδίδεται}}\ \textsf{\textbf{ταυτίζεται(αυτός,Scott)}}(\overline{a})$$
$$\Longrightarrow_{\text{cf}} \textsf{\textbf{ταυτίζεται}}(p_1,p_2)(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := \textsf{\textbf{αυτός}}, p_2 := \textsf{Scott}\}$$

«Ο Scott είναι ο Scott»

$$\underline{\text{αποδίδεται}}\ \textsf{\textbf{ταυτίζεται(Scott,Scott)}}(\overline{a})$$
$$\Longrightarrow_{\text{cf}} \textsf{\textbf{ταυτίζεται}}(p_1,p_2)(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Scott}, p_2 := \textsf{Scott}\}$$

Είναι προφανές ότι στα πλαίσια της θεωρίας προσδιορισμού αναφοράς, οι δύο προτάσεις δεν είναι συνώνυμες.

$$\textsf{\textbf{ταυτίζεται}}(p_1,p_2)(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := \textsf{\textbf{αυτός}}, p_2 := \textsf{Scott}\}$$
$$\not\approx \textsf{\textbf{ταυτίζεται}}(p_1,p_2)(\overline{a}) \text{ where } \{p_1 := \textsf{Scott}, p_2 := \textsf{Scott}\}$$

απλά επειδή

$$\mathrm{den}(\textsf{\textbf{αυτός}}) \neq \mathrm{den}(\textsf{Scott}).$$

Πράγματι, η συνάρτηση $\mathrm{den}(\textsf{\textbf{αυτός}}) : \widetilde{e}$ σε κάθε κατάσταση a παίρνει τιμή την αναφορά της αντωνυμίας "αυτός" και είναι προφανές ότι υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες η αναφορά της αντωνυμίας "αυτός" δεν ταυτίζεται με την αναφορά του ονόματος "Scott".

Το αποτέλεσμα αυτό αναδεικνύει μια ενδιαφέρουσα πλευρά της θεωρίας προσδιορισμού αναφοράς – ο ιδεατός αλγόριθμος κατά τον υπολογισμό της αναφοράς μιας πρότασης σε μία κατάσταση χρησιμοποιεί την αναφορά των βασικών στοιχείων της πρότασης και όχι μόνο την τιμή της αναφοράς τους σε αυτή την κατάσταση. Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί τη θεωρία αυτή από τον Montague καθώς και από ανάλογες προσεγγίσεις στη θεωρία νοήματος επιτρέποντας μια πιο λεπτή διάκριση συνωνυμίας σε επίπεδο «τοπικού» νοήματος των προτάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ελενη Καλυβιανακη, *Αλγοριθμική σημασιολογία για φυσικές γλώσσες*, Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2007.

[2] Γιαννης Στεφανου, *Μία Φρεγκεανή άποψη για τις δεικτικές εκφράσεις*, Δευκαλιων, vol. 21 (2003), no. 2, pp. 241–271.

[3] Rudolf Carnap, **Meaning and Necessity, A Study in Semantics and Modal Logic**, second ed., The University of Chicago Press, 1956.

[4] Gottlob Frege, *Über Sinn und Bedeutung*, **Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik**, (1892), αγγλική μετάφραση στο [6].

[5] ———, *Νόημα και Αναφορά*, Δευκαλιων, vol. 17 (1977), pp. 19–37.

[6] Peter Geach and Max Black (editors), **Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege**, second ed., Blackwell, 1960.

[7] Richard Montague, *English as a formal language*, **Linguaggi nella società e nella tecnica** (Bruno Visentini et al., editor), Milan, Edizioni di Comunità, 1970, ανατύπωση στο [8], pp. 189–224.

[8] ———, **Formal Philosophy: Selected papers by Richard Montague**, Richmond H. Thomason (editor), Yale Universiy Press, 1974.

[9] Yiannis N. Moschovakis, *On founding the theory of algorithms*, **Truth in mathematics** (H. G. Dales and G. Oliveri, editors), Clarendon Press, Oxford, 1998, pp. 71–104.

[10] ———, *What is an algorithm?*, **Mathematics unlimited – 2001 and beyond** (B. Engquist and W. Schmid, editors), Springer, 2001, pp. 929–936.

[11] ———, *A logical calculus of meaning and synonymy*, **Linguistics and Philosophy**, vol. 29 (2006), pp. 27–89.

[12] Bertrand Russell, *On denoting*, **Mind**, (1905), no. 14, pp. 479–493.

[13] Nathan Salmon and Scott Soames (editors), **Propositions and attitudes**, Oxford University Press, 1988.

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ, ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ (ΜΠΛΑ)
E-mail: ekalyv@math.uoa.gr

ΜΠΛΑ,
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
και
DEPARTMENT OF MATHMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LOS ANGELES, CA, USA
E-mail: ymos@math.uoa.gr