

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΙΑ

ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ

*Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Καλιφόρνιας, Λος Άντζελες
και
Πανεπιστήμιο Αθηνών*

Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία
Ανοικτά Μαθήματα, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
©2015, Γιάννης Μοσχοβάκης, ynm@math.ucla.edu

Αφιερωμένο στη μνήμη του Νίκου Κριτικού

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Περί τίνος πρόκειται. Η **Θεωρία Συνόλων** είναι μια συναρπαστική, ζωντανή μαθηματική θεωρία, με τις δικές της βασικές έννοιες, θεμελιακά αποτελέσματα και προβλήματα, και με σημαντικές εφαρμογές σε άλλες μαθηματικές θεωρίες. Ξέχωρα απ' αυτά, η **Αξιωματική Συνολοθεωρία** θεωρείται από πολλούς ως **θεμελίωση των μαθηματικών**: εικάζεται ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πράγματι σύνολα, και ότι οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των λιτών, κομψών αξιωμάτων για τα σύνολα. Τίποτα τόσο απλοϊκό δεν μπορεί να είναι η πλήρης αλήθεια, αλλά οπωσδήποτε, στα σύγχρονα μαθηματικά το «να αποσαφηνίσεις» κάποια έννοια είναι συνώνυμο με το «να την ορίσεις στη συνολοθεωρία». Η θεωρία συνόλων είναι η επίσημη γλώσσα των μαθηματικών, όπως τα μαθηματικά είναι η επίσημη γλώσσα της επιστήμης.

Σαν όλους τους συγγραφείς εισαγωγικών, πρώτων βιβλίων για τα σύνολα, έχω κι εγώ προσπαθήσει να εξηγήσω και τις δύο αυτές απόψεις του κλάδου.

Από την «καθαρή» θεωρία συνόλων, οι Σημειώσεις αυτές καλύπτουν τα βασικά αποτελέσματα για «αφηρημένα σύνολα», το Αξίωμα Επιλογής, υπερπεπερασμένη αναδρομή, πληθικούς και διατακτικούς αριθμούς. Λιγότερο συνηθισμένο είναι το Κεφάλαιο **10** για «σημειοσύνολα», που περιέχει αποτελέσματα με εφαρμογές στην Ανάλυση και εισάγει τον αναγνώστη στο Πρόβλημα του Συνεχούς, κεντρική ερώτηση της συνολοθεωρίας από τα πρώτα της βήματα. Υπάρχει και κάποια καινοτομία στην ανάπτυξη της θεωρίας πληθαρικών, που εισάγονται νωρίς (κατά τον Cantor αλλά λίγο πονηρά), έτσι ώστε οι βασικοί τύποι της πληθικής αριθμητικής να μπορούν να διδαχθούν όσο πιο γρήγορα γίνεται. Το Παράρτημα **A** εξηγεί την «κατασκευή» των πραγματικών αριθμών εκτενέστερα απ' ό,τι συνηθίζεται στην εποχή μας και με κάποιες καινοτομίες στην πρόσβαση του προβλήματος και σε μερικές από τις λεπτομέρειες. Το τελευταίο Παράρτημα **B** αποτελεί μια κάπως εκκεντρική εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία **φυσικών προτύπων** διαφόρων αρχών της συνολοθεωρίας, μεταξύ των οποίων και η **Αρχή Αντιθεμελίωσης** του Aczel. Δεν απαιτεί γνώση της Λογικής, αλλά ο σοβαρός αναγνώστης του σίγουρα θ' αποφασίσει ότι πρέπει να μάθει Λογική.

Όσον αφορά τη συνολοθεωρία ως θεμελίωση των μαθηματικών, οι Σημειώσεις αυτές διαφέρουν από τα συνηθισμένα με δύο τρόπους. Καταρχήν έχω πάρει στα σοβαρά αυτό το «κάθε μαθηματικό αντικείμενο είναι σύνολο» (που βέβαια δεν είναι), κι έχω προσπαθήσει να του δώσω νόημα με την έννοια της **πιστής**

απεικόνισης μαθηματικών αντικειμένων από **δομημένα σύνολα**. Η ιδέα είναι παλιά, αλλά ίσως αυτό να είναι το πρώτο εισαγωγικό βιβλίο που την αποδέχεται, προσπαθεί να την εξηγήσει και τη χρησιμοποιεί με συνέπεια. Οι φίλοι της θεωρίας κατηγοριών θα αναγνωρίσουν μερικές από τις βασικές έννοιές της, ξεδιάντροπα περιτυλιγμένες από μια παραδοσιακή, καθαρά συνολοθεωρητική πρόσβαση στο πρόβλημα θεμελίωσης όπου «κατηγορίες» δεν αναφέρονται πουθενά. Και κατά δεύτερο λόγο, η **θεωρία υπολογισμού** θεωρείται μέρος των μαθηματικών που «χρῆζουν θεμελίωσης», και τα σχετικά συνολοθεωρητικά αποτελέσματα καλύπτονται, μαζί με πολλά παραδείγματα. Η φιλοδοξία του βιβλίου είναι να εξηγήσει ό,τι για τα σύνολα πρέπει να μάθει κάθε σοβαρός φοιτητής και φοιτήτρια των μαθηματικών ή της θεωρητικής πληροφορικής.

Υπάρχουν πολλά ιστορικά σχόλια και περικοπές που σε μερικά μέρη δίνουν στις Σημειώσεις μια «λόγια» υφή που δεν τους αξίζει. Όλες οι περικοπές και οι περισσότερες παρατηρήσεις είναι από τις εξής δύο πολύτιμες συλλογές εργασιών, που ιδανικά θα πρέπει να είναι στη διάθεση του αναγνώστη.

Georg Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, μεταφρασμένο στα αγγλικά και με Εισαγωγή από τον Philip E. B. Jourdain, Dover Publications, New York.

Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, 1967.

Οδηγίες χρήσης. Περίπου το μισό βιβλίο μπορεί να καλυφθεί σ' ένα Τρίμηνο (δέκα βδομάδες), κάπως περισσότερο σ' ένα πλήρες Εξάμηνο. Τα Κεφάλαια **1 - 6** καλύπτουν τα βασικά και περιέχουν αρκετές λεπτομέρειες, έτσι ώστε ο σοβαρός φοιτητής να μπορεί να τα διαβάσει μόνος του, με λίγη βοήθεια. Για την επιτυχή χρήση αυτών των Σημειώσεων σε μάθημα είναι απαραίτητο αυτά τα βασικά να ξεπεραστούν γρήγορα: να παραλειφθεί το Κεφάλαιο **1**, που περιέχει κυρίως συμβολισμούς· περίπου μια βδομάδα για το Κεφάλαιο **2**, που εξηγεί τις θεμελιακές ιδέες του Cantor· και μετά «βήμα τροχάδην» μέσα από τα Κεφάλαια **3 - 6**, έτσι ώστε να φτάσει το μάθημα στη θεωρία καλά διατεταγμένων συνόλων του Κεφαλαίου **7** το πολύ την έκτη, αν είναι δυνατόν την πέμπτη βδομάδα. Από το Κεφάλαιο **7** και μετά, τα θεωρήματα γίνονται δυσκολότερα και η παρουσίασή τους πιο συνοπτική. Πόσα από την «πραγματική» συνολοθεωρία στα Κεφάλαια **7 - 12** μπορεί κανείς να καλύψει, εξαρτάται βέβαια από τους φοιτητές, το μήκος του μαθήματος, και πόσα θα παραλειφθούν. Αν οι φοιτητές είναι κυρίως της πληροφορικής, τότε το Κεφάλαιο **6** για Σταθερά Σημεία πρέπει να μελετηθεί πλήρως, με τα προβλήματά του, αλλά το Κεφάλαιο **10** για το χώρο Baire ίσως πρέπει να αφεθεί, όσο κι αν είναι κρίμα. Για φιλόδοξους αναλύστες, στο άλλο άκρο, το Κεφάλαιο **6** πρέπει να περικοπεί μετά το **6.27** (που κι αυτό είναι κρίμα), αλλά τουλάχιστον μια προσπάθεια πρέπει να γίνει να καλυφθεί μέρος του **10**. Στην ανάγκη, μπορούν να παραλειφθούν οι λεπτομέρειες για τις αριθμητικές πράξεις στο Κεφάλαιο **5**, ως επίσης και μερικά από τα ειδικότερα πορίσματα του Αξιώματος Επιλογής στο **9**. Κάπως απίθανο να βρεθεί χρόνος σε κανονικό μάθημα για τα Παραρτήματα (εγώ αφιερώνω μόνο μια διάλεξη για την κατασκευή

των πραγματικών αριθμών), αλλά ελπίζω ότι ίσως είναι χρήσιμα για Σεμινάρια ή ατομική μελέτη.

Εφόσον μαθήματα συνολοθεωρίας δεν διδάσκονται συχνά και σπάνια καλύπτουν όσα πρέπει, προσπάθησα ιδιαίτερα να γράψω αυτές τις Σημειώσεις έτσι που να είναι κατάλληλες για ατομική μελέτη, από τον ικανό και σοβαρό φοιτητή. Υπάρχουν πολλές, απλές **Ασκήσεις**, που ελέγχουν την κατανόηση καινούριων εννοιών αμέσως μετά την εισαγωγή τους. Στο μάθημα παρουσιάζω μερικές απ' αυτές, για παραδείγματα, και αναθέτω τις υπόλοιπες στους φοιτητές. Τα **Προβλήματα** στο τέλος κάθε κεφαλαίου είναι ποικίλης δυσκολίας, και μερικά απ' αυτά καλύπτουν επιπρόσθετη ύλη. Όπως συνηθίζεται, τα πιο δύσκολα από τα προβλήματα σημαδεύονται μ' έναν *.

Ευχαριστίες. Ευχαριστώ το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών για την ευκαιρία που μου έδωσε να διδάξω Συνολοθεωρία στην Αθήνα το Χειμώνα του 1990· τη Δήμητρα Κίτσιου και τον Στράτο Πάσχο για την πάλη τους με διάφορους υπολογιστές και εκτυπωτές του Πολυτεχνείου το 1990 όταν τυπώσαμε την πρώτη προκαταρκτική έκδοση· και ιδιαίτερα τον Θανάση Τσαρπαλιά που συνήθως διδάσκει το μάθημα Συνολοθεωρίας στο Πανεπιστήμιο, που χρησιμοποίησε τη δεύτερη προκαταρκτική έκδοση αυτών των Σημειώσεων το Χειμώνα του 1992 και που μου πρόσφερε πληθώρα χρήσιμων συμβουλών για το περιεχόμενο, τις ασκήσεις και την ελληνική ορολογία. Είμαι ευγνώμων στους συναδέλφους και φίλους στο UCLA και το Caltech (κέντρα έρευνας στη συνολοθεωρία) από τους οποίους έχω μάθει ό,τι ξέρω για τον κλάδο. Και είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στη γυναίκα μου Joan Rand Moschovakis και το φοιτητή μου Darren Kessner που διάβασαν μεγάλα μέρη από το κείμενο, έλυσαν τα περισσότερα Προβλήματα και διόρθωσαν πολλά από τα λάθη μου.

Το βιβλίο γράφηκε σχεδόν ταυτόχρονα στα ελληνικά και στα αγγλικά, με τη μαγεία του δίγλωσσου L^AT_EX¹ και σαν ακριβής αντικατοπτρισμός της προσωπικής μου μοίρας. Το αφιερώνω στον αείμνηστο Καθηγητή Νίκο Κριτικό για τα αξέχαστα απογεύματα που πέρασα μαζί του το Χειμώνα και την Άνοιξη του 1973 προσπαθώντας να μάθω με την πολύτιμη βοήθειά του πώς να μιλώ και να γράφω μαθηματικά στη μητρική μου γλώσσα. Λίγες ώρες με το Νίκο Κριτικό, να κατεβάζει τα Λεξικά (από τα γερμανικά στα ελληνικά, από τα λατινικά στα γερμανικά) για να βρει ακριβώς την τέλεια μετάφραση κάποιου όρου, σου μάθαιναν περισσότερα για την αγάπη της επιστήμης και της γλώσσας απ' ό,τι χρόνια τυπικών μεταπτυχιακών σπουδών. Θέλω επίσης να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στο φίλο Τάκη Κουφόπουλο, που διάβασε προσεκτικά και κριτικά την προκαταρκτική έκδοση αυτού του βιβλίου, διόρθωσε τα χειρότερα γλωσσικά

¹Οι Έλληνες μαθηματικοί έχουμε μεγάλη υποχρέωση στον Silvio Levy, που προγραμματίσει τόσο όμορφα τα Ελληνικά «απλά» στο METAFONT έτσι που να μπορούμε να χρησιμοποιούμε το T_EX του Knuth και το L^AT_EX του L^Ampport για τη στοιχειοθέτηση ελληνικών μαθηματικών κειμένων. Όσοι ενδιαφέρονται για το πακέτο (δημοσίων, ελεύθερων) προγραμμάτων με το οποίο στοιχειοθέτησα την ελληνική έκδοση αυτού του βιβλίου μπορούν να μου γράψουν για περισσότερες πληροφορίες, αν γίνεται ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση ynm@math.ucla.edu.

μου αμαρτήματα και πρότεινε μια σειρά αλλαγών που βελτίωσαν σημαντικά το τελειωμένο έργο.

Santa Monica, California

Ιανουάριος 1993

Για τη 2η έκδοση. Οι πιο σημαντικές αλλαγές που έχω κάνει είναι ίσως σε μικρά πράγματα, που (ελπίζω) κάνουν το βιβλίο πιο εύκολο, και για το δάσκαλο και για το μαθητή: απλουστευμένες αποδείξεις, συμβολισμός και ορολογία, μερικά καινούρια διαγράμματα, καλύτερη διατύπωση μερικών αποτελεσμάτων (ιδιαίτερα αυτών που δικαιολογούν *αναδρομικούς ορισμούς* και *επαγωγικές αποδείξεις*) έτσι που να διευκολύνονται οι εφαρμογές τους, και (ίσως πιο σημαντικά), η διόρθωση λαθών, τυπογραφικών και άλλων. Για την ανακάλυψη αυτών των λαθών και πολλές χρήσιμες υποδείξεις είμαι ευγνώμων στους φίλους και συνάδελφους Serge Bozon, Joel Hamkins, Peter Hinman, Aki Kanamori, Joan Moschovakis, Larry Moss, Γιάννη Παναγιωτόπουλο, Θανάση Τσαρπαλιά, και πάρα πολλούς φοιτητές.

Ανάμεσα στις πιο σημαντικές αλλαγές σ' αυτή την έκδοση είναι οι εξής:

— Η απόδειξη του *Θεωρήματος του Suslin* στο Κεφάλαιο **10**, που (γενικότερα) έχει βελτιωθεί σημαντικά

— Μια καλύτερη (πιστεύω) ανάπτυξη της θεωρίας διατακτικών αριθμών στο Κεφάλαιο **12**, και την πρόσθεση νέου υλικού σ' αυτό το Κεφάλαιο, που τώρα περιλαμβάνει τα βασικά αποτελέσματα της διατακτικής αριθμητικής.

— Λύσεις όλων των ασκήσεων στα Κεφάλαια **1 – 12**, κατόπιν λαϊκής επιταγής. Αυτό αφαιρεί από τον διδάσκοντα τις πιο προφανείς, εύκολες αναθέσεις ασκήσεων, και έτσι έχω προσθέσει αρκετά, καινούρια εύκολα προβλήματα.

Είμαι ευγνώμων στο Θάνο Τσουάνα για τη διόρθωση της Αγγλικής 2ης έκδοσης (*Notes on Set Theory*, Springer, 2006) και τη μετάφραση στα Ελληνικά του καινούριου υλικού.

Παλαιό Φάληρο, Μάρτιος 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	v
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
Προβλήματα για το Κεφάλαιο 1, 5.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΙΣΟΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑ	7
Απαριθμητή ένωση απαριθμητών, 9. Οι πραγματικοί αριθμοί αναπαρίθητοι, 11. $A <_c \mathcal{P}(A)$, 15. Θεώρημα Schröder-Bernstein, 16. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 2, 18.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ ΑΞΙΩΜΑΤΑ	21
Το παράδοξο του Russell, 23. Αξιώματα (I) – (VI), 26. Αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές, 29. Κλάσεις, 30. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 3, 33.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΣΥΝΟΛΑ;	37
Διατεταγμένα ζεύγη, 38. Ξένη ένωση, 39. Σχέσεις, 40. Σχέσεις ισοδυναμίας, 41. Συναρτήσεις, 43. Πληθικοί αριθμοί, 47. Δομημένα σύνολα, χώροι, 49. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 4, 51.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	57
Συστήματα Peano, 57. Ύπαρξη των φυσικών αριθμών, 58. Μοναδικότητα φυσικών αριθμών, 58. Θεώρημα Αναδρομής, 59. Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, 64. Αρχή του Περιστερεώνα, 69. Λέξεις, 71. Αναδρομή σε Λέξεις, 73. Το συνεχές, 74. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 5, 74.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ	79
Μερικά διατεταγμένοι χώροι, 79. Μερικές συναρτήσεις, 82. Επαγωγικοί χώροι, 83. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου, 86. Περί τοπολογίας, 88. Γραφή- ματα, 92. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 6, 92. Ρεύματα, 94. Η τοπολογία του Scott, 97. Κατευθυνόμενα πλήρεις χώροι, 98.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΚΑΛΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ	99
Υπερπεπερασμένη επαγωγή, 104. Υπερπεπερασμένη αναδρομή, 106. Λήμμα Επα- νάληψης, 106. Συγκρισιμότητα καλά διατεταγμένων χώρων, 110. Καλή θεμελίωση	

του \leq_o , 111. Θεώρημα Hartogs, 111. Θεώρημα Σταθερού Σημείου, 113. Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου, 114. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 7, 115.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΠΙΛΟΓΕΣ 121

Αξίωμα Επιλογής, 121. Ισοδύναμα του \mathbf{AC} , 124. Αρχή Μεγιστικής Αλυσίδας, 126. Το Λήμμα του Zorn, 126. Αρχή Απαριθμητής Επιλογής, \mathbf{AC}_N , 127. Αξίωμα (VII) Εξαρτημένων Επιλογών, \mathbf{DC} , 127. Η αξιωματική θεωρία \mathbf{ZDC} , 130. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας, 130. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 8, 132.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΕΠΟΜΕΝΑ 135

Δέντρα, 136. Λήμμα του König, 137. Θεώρημα Βεντάλιας, 137. Καλή θεμελίωση του \leq_c , 138. Άριστες διατάξεις, 139. Θεώρημα του König, 143. Ομοτελικότητα, κανονικοί και ιδιάζοντες πληθάρημοι, 144. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 9, 145.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Ο ΧΩΡΟΣ BAIRE 151

Πληθικότητα τέλειων σημειοσυνόλων, 155. Θεώρημα Cantor-Bendixson, 156. Ιδιότητα \mathbf{P} , 157. Αναλυτικά σημειοσύνολα, 157. Θεώρημα Τέλειου Συνόλου, 161. Σύνολα Borel, 164. Το Θεώρημα Διαχωρισμού, 166. Θεώρημα του Suslin, 167. Αντιπαράδειγμα για τη γενική ιδιότητα \mathbf{P} , 168. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας, 169. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10, 171. Borel ισομορφισμοί, 172.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11. ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ 175

Αξίωμα Αντικατάστασης (VIII), 176. Η θεωρία \mathbf{ZFDC} , 176. Θεώρημα Εδραιωμένης Αναδρομής, 178. Μεταβατικές κλάσεις, 179. Βασικό Λήμμα Κλειστότητας, 181. Τα εδραιωμένα, αγνά, κληρονομικά πεπερασμένα σύνολα, 182. Κόσμοι του Zermelo, 183. Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo, 184. Εδραιωμένα σύνολα, 185. Αρχή Θεμελίωσης, 187. Η αξιωματική θεωρία \mathbf{ZFC} (Zermelo-Fraenkel με επιλογή), 187. \mathbf{ZFDC} -κόσμοι, 189. Η κλάση \mathcal{V} του von Neumann, 189. Λήμμα Συμπίεσης του Mostowski, 189. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας, 191. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11, 191.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12. ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 195

Διατακτικοί αριθμοί, 196. Ο ελάχιστος άπειρος διατακτικός ω , 197. Χαρακτηρισμός διατακτικών αριθμών, 200. Διατακτική αναδρομή, 203. Διατακτική πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, 204. Πληθάρημοι του von Neumann, 205. Ο τελεστής \aleph_α , 207. Η συσσωρευμένη ιεραρχία, 208. Προβλήματα για το Κεφάλαιο 12, 212. Ο τελεστής \beth_α , 216. Ισχυρά απρόσιτοι πληθάρημοι, 218. Πληθάρημοι κατά τον Frege, 218. Πηλίκα συνθηκών ισοδυναμίας, 219.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 221

Σχέσεις ομοιότητας, 221. Σώματα, 223. Διατεταγμένα σώματα, 224. Μοναδικότητα των ρητών αριθμών, 225. Ύπαρξη των ρητών αριθμών, 226. Αριθμήσιμοι, πυκνοί, γραμμικοί χώροι, 230. Ιδιότητα του Αρχιμήδη, 232. Αρχή του Κιβωτισμού, 236. Τομές Dedekind, 239. Ύπαρξη των πραγματικών αριθμών, 240. Μοναδικότητα των πραγματικών αριθμών, 243. Προβλήματα για το Κεφάλαιο Α, 246.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

xi

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΑ	247
Κόσμοι συνόλων, 250. Προτάσεις και σχετικοποιήσεις, 251. Κόσμοι του Rieger, 255. Θεώρημα του Rieger, 255. Αρχή Αντιθεμελίωσης, AFA , 261. Προσομοιώσεις, 262. Ο αντιθεμελιωμένος κόσμος, 265. Θεώρημα του Aczel, 266. Προβλήματα για το Κεφάλαιο Β, 269.	
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1 - 12	273

