Το πρόβλημα της αντικειμενικής αλήθειας στη θεωρία συνόλων

Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης
UCLA και ΕΚΠΑ

ΜΙΘΕ, 14 Οκτωβρίου 2014

Η υπόθεση του συνεχούς CH (Cantor, 1870 - 1880)

- Για τυχαία σύνολα X, Y

$$X =_c Y \iff \text{τα } X \text{ και } Y \text{ είναι ισοπληθικά}$$
$$\iff \text{υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοιχία του } X \text{ με το } Y$$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών
  $\subset \mathbb{R} =$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{N} \neq_c \mathbb{R}$ (Cantor)

- (CH) $\boxed{\textit{Για κάθε άπειρο σύνολο } X \subseteq \mathbb{R}, \textit{ είτε } X =_c \mathbb{N} \textit{ ή } X =_c \mathbb{R}}$

  δηλαδή δεν υπάρχει πληθάριθμος ανάμεσα σ' αυτούς των $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$

- ZFC: τα κλασικά αξιώματα της Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων
  - Gödel 1938: *Η* CH *δεν μπορεί να αναιρεθεί στην* ZFC
  - Cohen 1963: *Η* CH *δεν μπορεί να αποδειχτεί στην* ZFC

★ Με ποιά έννοια έχει η CH αντικειμενική αληθοτιμή—αν έχει;

★ Και αν έχει, ποια είναι—αληθεύει ή όχι;

Η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής

- (FOL) Για κάθε ακολουθία $\vec{R} = (R_1, \ldots, R_k)$ ονομάτων για σχέσεις, η γλώσσα FOL($\vec{R}$) της πρωτοβάθμιας λογικής στο (λεξιλόγιο) $\vec{R}$ έχει μεταβλητές $v_0, v_1, \ldots$ και τα σύμβολα

$$R_1 \ \ldots R_k \ \ = \qquad \neg \ \& \ \vee \ \rightarrow \qquad \exists \ \forall \quad (\ ) \ ,$$

- Οι (τυπικές) προτάσεις της FOL($\vec{R}$) ερμηνεύονται σε πρωτοβάθμιες δομές $\mathbf{A} = (A, \overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_k)$,

$$\mathbf{A} \models \theta \iff \text{η } \theta \text{ αληθεύει στην } \mathbf{A}$$

- Για παράδειγμα, η πρωτοβάθμια γλώσσα της αριθμητικής FOL($\mathbf{N}$) έχει σταθερές $0, 1, S, P$ και ερμηνεύται (καταρχήν) στην καθιερωμένη (standard) δομή των φυσικών αριθμών

$$\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{S}, \overline{P})$$

όπου $\overline{0}(x) \iff x = 0$, $\overline{S}(x, y, z) \iff x + y = z$, κ.λπ.

★ *Η* FOL($\mathbf{N}$) *επίσης ερμηνεύεται σε τυχαίες δομές* $\mathbf{A} = (A, \underline{0}, \underline{1}, \underline{S}, \underline{P})$ όπου οι $\underline{0}, \underline{1}$ είναι μονομελείς και οι $\underline{S}, \underline{P}$ διμελείς

Λογική αλήθεια

★ Ορισμός: Η τυχαία πρόταση θ της $\mathsf{FOL}(R_1, \ldots, R_k)$ είναι λογικά αληθής (έγκυρη) αν αληθεύει σε κάθε δομή $\mathbf{A} = (A, \overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_k)$

- Με άλλα λόγια: η θ είναι έγκυρη αν αληθεύει μόνο με τη λογική, χωρίς αναφορά στο σύνολο A όπου κυμαίνονται οι μεταβλητές ή στις ερμηνείες των σταθερών $R_1, \ldots, R_k$

- Ο ορισμός δίνει εύλογη εξήγηση (explication) της λογικής αλήθειας

- *Σημαντικό στοιχείο αυτής της εξήγησης είναι η επιλογή της απλής, πρωτοβάθμιας γλώσσας*, που αρκεί για τα μαθηματικά

- Οι Frege και Dedekind πρότειναν «λογικές αποδείξεις» της ύπαρξης του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών—λανθασμένες!

Θεώρημα Πληρότητας του Gödel. *Η τυχαία πρόταση θ της* $\mathsf{FOL}(\vec{R})$ *είναι έγκυρη αν και μόνον αν η θ είναι θεώρημα της πρωτοβάθμιας λογικής*

- Ταυτίζει την τυχαία με τη αιτιολογημένη λογική αλήθεια

Αριθμητική αλήθεια

• Στα κλασικά μαθηματικά, η αλήθεια στην καθιερωμένη δομή $\mathbf{N}$ θεωρείται αντικειμενική (καλά ορισμένη) έννοια

• Ορθό, αποδεικτικό σύστημα για την αριθμητική είναι το τυχαίο σύνολο $\mathcal{P}$ πεπερασμένων ακολουθιών από λέξεις (πεπερασμένες ακολουθίες) σε κάποιο πεπερασμένο αλφάβητο, τέτοιο που:

(1) Η σχέση $(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{P}$ είναι αποκρίσιμη, και

(2) αν $(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{P}$, τότε η φ_n είναι πρόταση της FOL($\mathbf{N}$) που αληθεύει στην καθιερωμένη δομή $\mathbf{N}$

Θεωρούμε την τυχαία $(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{P}$ ως απόδειξη στο $\mathcal{P}$ της πρότασης φ_n

Θεώρημα μη πληρότητας του Gödel. *Δεν υπάρχει ορθό αποδεικτικό σύστημα που να αποδεικνύει όλες τις αριθμητικές αλήθειες*

• Ειδικότερα: δεν υπάρχει τρόπος να ταυτίσουμε την τυχαία με κάποια αιτιολογημένη αριθμητική αλήθεια

Η ιστορία της θεωρίας συνόλων — λάϊτ

- Η θεωρία συνόλων ανακαλύφθηκε (δημιουργήθηκε;) από τους Frege και Cantor, ανεξάρτητα, στη δεκαετία 1870 – 1880
- Ο Frege θεωρούσε τα σύνολα ως έννοιες της λογικής και διατύπωσε αξιώματα γι' αυτά που ήταν φαινομενικά προφανή
  Ο Cantor εργάστηκε διαισθητικά και δεν διατύπωσε αξιώματα
- Βασικά και για τους δύο ήταν η σχέση του ανήκειν $x \in y$ και ο τελεστής του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$
- Το 1905 ο Russell ανακάλυψε το παράδοξο που φέρει το όνομά του, μια βασική αντίφαση στη θεωρία του Frege
  Αντιφάσεις σε μερικές από τις γενικές κατασκευές του Cantor ήταν προ πολλού γνωστές (ο Cantor, απλά τις απέφευγε)
- Το 1908 ο Zermelo διαμόρφωσε την αξιωματική θεωρία Z με 6 αξιώματα, ανάμεσα τους και το Αξίωμα Επιλογής
- ZFC $=$ Z $+$ Αξίωμα Αντικατάστασης $+$ Αξίωμα Θεμελίωσης
  που προστέθηκαν από τους Skolem και von Neumann ($\sim$ 1930)

Η θεωρία συνόλων ως «θεμελίωση» των μαθηματικών

- Καθιερωμένη δομή της Z του Zermelo είναι η $\mathbf{V}_Z = (V_Z, \in)$, όπου το V_Z κατασκευάζεται με διπλή αναδρομική επανάληψη του τελεστή $\mathcal{P}(x)$,

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n), \quad V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n, \quad V_{\omega+n+1} = \mathcal{P}(V_{\omega+n}),$$

$$\boxed{V_Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \ \cup \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\omega+n}}$$

- Όλα τα αντικείμενα των κλασικών μαθηματικών είναι μέλη του V_Z (δηλαδή έχουν πιστές απεικονίσεις στο V_Z)

  ...και όλα τα θεωρήματα των κλασικών μαθηματικών είναι θεωρήματα της Z—σχεδόν!

- Καθιερωμένη δομή της ZFC είναι η $\mathbf{V} = (V, \in)$, όπου η κλάση $V = \bigcup_\xi V_\xi$ ορίζεται με επανάληψη του $\mathcal{P}(x)$ σε όλους τους διατακτικούς αριθμούς

- Τα επιπρόσθετα δύο αξιώματα της ZFC είναι απαραίτητα για την «ανώτερη θεωρία συνόλων», π.χ. το σύνολο $V_Z = V_{\omega+\omega}$

  ...όπως και για μερικά, πρόσφατα (>1975) «κλασικά» θεωρήματα

Το πρόβλημα με τις προτάσεις ανεξάρτητες της ZFC

Η ZFC είναι

- σταθερή, από τη δεκαετία του '30, δεν έχει αλλάξει καθόλου
- στιβαρή: δεν έχει ποτέ κινδυνέψει από πιθανοφανείς ασυνέπειες
- η αναγνωρισμένη lingua franca για τα κλασικά μαθηματικά — τουλάχιστον κατ' αρχήν

• Υπάρχουν πολλές μαθηματικές εικασίες (πέραν της CH) που είναι ανεξάρτητες της ZFC, δεν αποφασίζονται από τα αξιώματα της· μερικοί ισχυρίζονται ότι (ίσως και μόνο γι' αυτό το λόγο), τουλάχιστον κάποιες απ' αυτές τις εικασίες δεν είναι αντικειμενικά αληθείς ή ψευδείς

★ Άλλοι αναζητούν και προσπαθούν να δικαιολογήσουν ισχυρά αξιώματα (πέραν της ZFC) που αποφασίζουν τέτοιες εικασίες

• Αυτό το ερευνητικό πρόγραμμα ανάμεσα στη συνολοθεωρία και τη φιλοσοφία των μαθηματικών προτάθηκε από τον Gödel το 1947

Στο υπόλοιπο:

• Θα διατυπώσω ορισμένες ανεξάρτητες από την ZFC εικασίες που έχουν λογική πολυπλοκότητα πολύ μικρότερη της CH

★ Θα εξιστορήσω (περιληπτικά) πώς βρέθηκαν στην περίοδο 1960 – 1990 ισχυρά αξιώματα που αποδεικνύουν αυτές τις εικασίες, και πώς αυτά «έχουν δικαιολογηθεί», τουλάχιστον τόσο που πολλοί ερευνητές τα θεωρούν τώρα αντικειμενικά αληθή

• Θα περιγράψω (περιληπτικά) τις σημερινές κατευθύνσεις στο ερευνητικό πρόγραμμα του Gödel

Αριθμητικές δομές ανώτερου βαθμού

Τα σύνολα της απλής θεωρίας τύπων ορίζονται με την αναδρομή

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{N}, \quad \mathbb{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathbb{T}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{T}_1), \quad \ldots$$

και για τις αντίστοιχες δομές (απλοποιώντας το συμβολισμό, και επιτρέποντας περισσότερα από ένα βασικό σύνολο), θέτουμε

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{N} = (\mathbb{T}_0 : 0, 1, +, \cdot),$$

$$\mathbf{N}^{(2)} = (\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1 : 0, 1, +, \cdot, \in)$$ η δομή της ανάλυσης

$$\mathbf{N}^{(3)} = (\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : 0, 1, +, \cdot, \in) \quad \ldots$$

• Η $\mathbf{N}^{(1)}$ είναι ισοδύναμη σε έκφραση με την $(V_\omega, \in)$, η $\mathbf{N}^{(2)}$ με την $(V_{\omega+1}, \in)$, η $\mathbf{N}^{(3)}$ με την $(V_{\omega+2}, \in)$, κ.λπ.

★ *Η Υπόθεση του Συνεχούς* (CH) *εκφράζεται από πρόταση της τριτοβάθμιας αριθμητικής* $\mathbf{N}^{(3)}$
(και δεν είναι ισοδύναμη στην ZFC με πρόταση της ανάλυσης $\mathbf{N}^{(2)}$)

★ *Πολλά θεωρήματα και εικασίες από τα κλασικά μαθηματικά* (ιδιαίτερα την ανάλυση) *εκφράζονται από προτάσεις της* $\mathbf{N}^{(2)}$

Προβολικά σύνολα (και σχέσεις και συναρτήσεις)

- Η δομή $\mathbf{N}^{(2)}$ της ανάλυσης «περιέχει» το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών και το χώρο $\mathcal{N}$ (Baire) όλων των ακολουθιών $\alpha = (k_0, k_1, \ldots)$ από φυσικούς

- Τα σύνολα (και σχέσεις και συναρτήσεις) στα $\mathbb{R}$ και $\mathcal{N}$ που ορίζονται (με παραμέτρους) στην $\mathbf{N}^{(2)}$ καλούνται προβολικά

  …ταξινομούνται σε μια ιεραρχία ανάλογα με το πόσοι ποσοδείκτες χρειάζονται (σε προθεματική μορφή) για να οριστούν:

$$\text{αριθμητικά} \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2 \subsetneq \cdots$$

  …και περιλαμβάνουν όλα τα σύνολα που ανακύπτουν στα κλασικά μαθηματικά

- Οι ανεξάρτητες της ZFC εικασίες για τις οποίες ενδιαφερόμαστε αφορούν ιδιότητες των προβολικών συνόλων που εκφράζονται από προτάσεις (ή προτασιακά σχήματα) της ανάλυσης $\mathbf{N}^{(2)}$

Κλασικά θεωρήματα και ZFC-ανεξάρτητες γενικεύσεις τους

- CH($\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$) (Suslin 1916) *Κάθε αναπαρίθμητο, $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο πραγματικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$*

  …αλλά η αντίστοιχη πρόταση CH($\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$) με $n > 1$ είναι ανεξάρτητη της ZFC (Gödel 1938, Cohen 1963)

- PAC($\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$) (Luzin-Novikov 1935, Kondo 1938) *Για κάθε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ σχέση $P(x,y)$ στους πραγματικούς,*

  $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$
  $\Longrightarrow$ υπάρχει προβολική $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια που $(\forall x)P(x, f(x))$

  (το Προβολικό Αξίωμα Επιλογής για το $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$)

  …αλλά η αντίστοιχη πρόταση PAC($\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$) με $n > 2$ είναι ανεξάρτητη της ZFC (Gödel 1938, με τη μέθοδο του Cohen 1963)

- Σημαντικά αποτελέσματα με ανοικτό το πρόβλημα της γενίκευσής τους από το 1938—και υπάρχουν πολλά τέτοια στην ανάλυση

Άπειρα παίγνια πλήρους πληροφορίας στους φυσικούς

- Σε κάθε σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ αντιστοιχούμε το παιχνίδι $G(A)$ όπου

(1) Οι δύο παίκτες I και II επιλέγουν εναλλακτικά φυσικούς αριθμούς

$$\mathrm{I}a_0,\quad \mathrm{II}a_1,\quad \mathrm{I}a_2,\quad \mathrm{II}a_3,\ldots,$$

έτσι που «στο τέλος του χρόνου» προσδιορίζεται μια άπειρη ακολουθία $\alpha = (a_0, a_1, \ldots)$

(2) Ο I (που επέλεξε το πρώτο στοιχείο a_0) κερδίζει την παρτίδα αν $\alpha \in A$, αλλιώς κερδίζει ο II

- Το A είναι προσδιοριστό (determined) αν ένας από τους δύο παίκτες έχει νικητήριο στρατηγική στο $G(A)$, μια μέθοδο με την οποία κερδίζει κάθε παρτίδα

Θεώρημα (με το Αξίωμα Επιλογής) Υπάρχουν σύνολα $A \subseteq \mathcal{N}$ που δεν είναι προσδιοριστά

Θεώρημα (Gale-Stewart 1953) Κάθε κλειστό σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι προσδιοριστό

Η ιστορία του αξιώματος PD — λάϊτ

- Το 1967 ο David Blackwell έδωσε μια καινούργια απόδειξη ενός κλασικού θεωρήματος του Suslin για τα $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ σύνολα με επίκληση του Θεωρήματος Gale-Stewart, ότι τα κλειστά σύνολα είναι προσδιοριστά

- Οι John Addison και Donald A. (Tony) Martin αναγνώρισαν *αμέσως* ότι η υπόθεση προσδιοριστότητας για πιο περίπλοκα παίγνια λύνει ZFC-ανεπίλυτα προβλήματα για τα προβολικά σύνολα, και διατύπωσαν το *Αξίωμα Προβολικής Προσδιοριστότητας*

PD : *Κάθε προβολικό σύνολο είναι προσδιοριστό*

- Σε *μερικές μέρες*, οι Martin και ΓΝΜ έδειξαν ότι η υπόθεση PD λύνει όλα τα εύκολα προβλήματα για τα προβολικά σύνολα

- Στα επόμενα 20 χρόνια και με την εργασία πολλών, λύθηκαν από την PD και τα δύσκολα προβλήματα για τα προβολικά σύνολα, π. χ., *για κάθε προβολική σχέση* $P(x,y)$ *στο* $\mathbb{R}$,

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \implies (\exists \text{ προβολική } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})(\forall x)P(x,f(x))$$

Πως «δικαιολογούνται» ισχυρά αξιώματα για τα σύνολα;

- Ο Gödel αναγνώρισε δύο είδη επιχειρημάτων για μια πρόταση θ
  - Εσωτερικά αποδεικτικά στοιχεία (intrinsic evidence):

Η θ συνάγεται από βασικές διαισθήσεις που έχουμε για τα σύνολα

- Τα αξιώματα της ZFC συνήθως δικαιολογούνται με (πολύ ισχυρά) τέτοια επιχειρήματα, όπως και μερικά ασθενή αξιώματα ύπαρξης μεγάλων πληθαρίθμων, π.χ. απρόσιτων
  - Εξωτερικά αποδεικτικά στοιχεία (extrinsic evidence):

Η θ υποστηρίζεται από τις σχέσεις της με άλλες αληθείς ή αληθοφανείς προτάσεις ... περίπου όπως με τους νόμους της φυσικής

★ *Δεν υπάρχει κανένα πιθανοφανές εσωτερικό επιχείρημα για την* PD

Τα βασικά επιχειρήματα για την PD

- Δεν έχουν βρεθεί αντινομίες ή παράδοξα σε σχεδόν 50 χρόνια, παρά τις επίπονες προσπάθειες πολλών εχθρών αλλά και φίλων της PD
- Η PD συνάγεται από πολύ ισχυρά αξιώματα ύπαρξης μεγάλων πληθαρίθμων, για τα οποία μερικοί ισχυρίζονται ότι υπάρχουν εσωτερικά αποδεικτικά επιχειρήματα (Martin-Steel, 1988 και Woodin)
- Το πλέγμα των συνεπαγωγών από την PD προσφέρει μια ελκυστική και αληθοφανή εικόνα του κόσμου των συνόλων

★ Για πολλές προτάσεις θ (όπως το Προβολικό Αξίωμα Επιλογής):

- Η θ για $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ σύνολα είναι θεώρημα της ZFC
- Η θ για $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_4$ σύνολα είναι θεώρημα της ZFC + PD
- ★ Η απόδειξη της θ για $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_4$ σύνολα στην ZFC + PD αποδίδει με φυσικό τρόπο μια καινούργια και διαφορετική ZFC-απόδειξη της θ για $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ σύνολα που εμπλουτίζει σημαντικά το νόημά της

...και αυτό ισχύει σχεδόν για όλα τα θεωρήματα της ZFC + PD

Μερικές σύγχρονες (απλοϊκά διατυπωμένες) απόψεις

- Ο Solomon Feferman υποστηρίζει ότι η CH δεν έχει αντικειμενική αληθοτιμή με επιχειρήματα από τη θεωρία αποδείξεων: π.χ. διατύπωσε την εικασία ότι *Η πρόταση* CH $\vee \neg$CH *δεν αποδεικνύεται στη «φυσική για το πρόβλημα» ημικατασκευαστική θεωρία*, που στη συνέχεια αποδείχθηκε από τον Michael Rathjen

- Ο Hugh Woodin έχει διαμρφώσει ένα «μεγάλο πρόγραμμα» του οποίου οι εικασίες (αν αποδειχθούν) συνεπάγονται ότι υπάρχει ορίσιμη αντιστοιχία του $\mathbb{R}$ με τον πρώτο αναπαρίθμητο πληθάριθμο $\aleph_1$

- Ο Peter Koellner υποστηρίζει (με ισχυρά επιχειρήματα) ότι όποια και αν είναι η αληθοτιμή της CH, αυτό θα πρέπει να βασιστεί σε εξωτερικά αποδεικτικά στοιχεία—δεν υπάρχουν εσωτερικά επιχειρήματα που είτε να την δικαιολογούν ή να την αναιρούν

- Σημαντικές προσφορές στη σωστή και χρήσιμη διατύπωση του προβλήματος έχουν κάνει οι Tony Martin και Charles Parsons

Οι αφελείς απόψεις της εποχής 1965 – 1985

• Η CH είναι αντικειμενικά ψευδής — πολύ ψευδής!

• Ο πληθάριθμος $\mathfrak{c}$ του $\mathbb{R}$ είναι τεράστιος—απρόσιτος, μεγαλύτερος από τον πρώτο απρόσιτο, σταθερό σημείο της απαρίθμησης των πληθαρίθμων ($\aleph_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$), κ.λπ.

• Δεν υπάρχει ορίσιμη εμφύτευση του $\aleph_1$ στο $\mathbb{R}$ — ακόμη και αν επιτρέψουμε τυχαίους διατακτικούς στον ορισμό

• Τα ανωτέρω θα συνάγονται τετριμμένα από ισχυρά αξιώματα

...για τα οποία θα υπάρχουν ισχυρά εξωτερικά αποδεικτικά στοιχεία, άσχετα με την CH

...και που θα ανακαλυφθούν «τυχαία», κάπως όπως η PD, ή όπως ο Κολόμβος ανακάλυψε την Αμερική

• Με άλλα λόγια, το κεντρικό πρόβλημα δεν είναι η CH, αλλά η γενικότερη άγνοιά μας για προτάσεις που εκφράζονται στην τριτοβάθμια αριθμητική $\mathbf{N}^{(3)}$, για την οποία ξέρουμε ελάχιστα