Xerox copy from the first pages of "Rapport d'habilitation à diriger des recherches en Mathematiques ; Quelques problemes d'analyse nonconvex Soutenu le 19 Janvier 1995

Wilfrid Gangbo
School of Mathematics
Georgia Institute of Technology
Atlanta, GA 30332, USA
gangbo@math.gatech.edu *

August 30, 2005

The notes here are a xerox copy of the original version of a portion of my "habilitation" defended in January 1995 at Université de Metz. In the past few years, several people, including my coauthor Robert McCann, have suggested that I make a copy of these notes available on an electronic form.

Here, you will find only the first 14 pages of that "habilitation", which concerns the existence of optimal maps in the Monge-Kantorovich problem, for general cost functions.

*I was holding a postdoctoral position at MSRI Berkeley, the year I defended my habilitation. The members of the jury were: G. Bouchitté. Y. Brenier, M. Chipot, B. Dacorogna, F. Murat, L. Shafrir.

1 Introduction

Dans ce travail, nous nous intérèssons à des problèmes variationnels de la forme

$$(P) \qquad \inf\{\int_\Omega F(x, \mathbf{t}(x), \nabla \mathbf{t}(x)) \mid \mathbf{t} : \Omega \to \mathbf{R}^D, \mathbf{t} \in X\},$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est un ouvert borné, $F : \Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{D\times d} \longmapsto \mathbf{R}$ est continue et $X \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^D)$. Nous notons $\mathbf{R}^{D\times d}$ l'ensemble des matrices réelles à D lignes et d colonnes.

Conformément à la terminologie usuelle, nous disons qu'un problème de la forme (P) est un problème vectoriel si $D, d > 1$, autrement nous parlerons de problème scalaire. Des années d'études des problèmes de la forme (P) par plusieurs auteurs dans le cas scalaire sont couronnées par beaucoup de résultats intéressants que nous ne mentionnons pas. Nous insistons sur le cas vectoriel où peu de résultats ont été obtenus. Par exemple, il n'existe pas assez résultats dans le cas vectoriel permettant de résourdre certaines Equations aux Dérivées Partielles.

Nous étudions aussi bien des problèmes de la forme (P), des problèmes relaxés de (P) et des problèmes duaux à (P). Notre premier exemple est le problème de transport de masse de Monge-Kantorovich. Ce problème à été initialement formulé par Monge (1781) dans l'un des plus remarquables de ses écrits. Le grand géometre y propose le problème suivant:

"Deux volumes équivalent étant donnés, les décomposer en particules infiniments petites se correspondant deux à deux, de telle façon que la somme des produits des chemins parcourus en transportant chaque parcelle sur celle qui lui correspond, par le volume de la parcelle transportée, soit minimum."

D'après Appell (1928), "la solution que Monge propose laisse beaucoup à désiré parce qu'elle s'appuie sur des propositions si mal établies qu'on peut douter de leur exactitude ...". On peut remarquer que le problème de Monge est équivalent au problème suivant:

"Etant donné deux masses égales du déblai et du remblai, diviser le déblai et le remblai en élement correspondant de même masse de telle façon que la somme des produits obtenus en multipliant la masse d'un élément du déblai par sa distance à l'élément du remblai soit minimum."

La formulation mathématique de ce problème est la suivante: Soient $K, L \subset \mathbf{R}^d$ deux ensembles compacts tels que $\mathcal{L}^d(\partial K) = \mathcal{L}^d(\partial L) = 0$. Supposons que K et L sont respectivement munies de deux mesures de Borel positives μ et ν satisfaisant $\mu(K) = \nu(L) > 0$. Supposons de plus que μ, ν et la measure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ et sont deux à deux absolument continues l'un par rapport à l'autre. Definissons

$$I(\mathbf{s}) = \int_K |x - \mathbf{s}(x)| d\mu(x)$$

sur l'ensemble X des functions $\mathbf{s} : K \to L$ satisfaisant la relation $\mathbf{s} * \mu = \nu$, c'est à dire $\mathbf{s}$ satisfait la relation

$$\nu(E) = \mu(\mathbf{s}^{-1}(E))$$

pour tout $E \subset L$ qui soit ν- mesurable. Trouver $\mathbf{t} \in X$ tel que

$$I(\mathbf{t}) = \inf\{I(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in X\}. \tag{1}$$

Un problème dual au problème (1) est le problème suivant:

$$\sup\left\{\int_K u(x) d\mu(x) + \int_L v(y) d\nu(y) \mid (u, v) \in Lip_1\right\}, \tag{2}$$

où

$$Lip_1 = \{(u, v) \mid u \in C(K), v \in C(L),\ u(x) + v(y) \leq |x - y|\ \forall x \in K, y \in L\}.$$

Beaucoup de mathématiciens se sont intéressé au problème de Monge (1) (par exemple Dupin 1818, Appell 1925, 1926) . En 1884, l'Académie des Sciences de Paris proposa comme sujet pour le prix Bordin, de reprendre le problème de Monge, d'établir les principes qui peuvent conduire à la solution, et de poursuivre jusqu'au bout la solution des cas particuliers. Comme nous le verrons le problème de Monge est si profond qu'il est lié à d'autres problèmes qui à priorie auraient semblé être sans aucun rapport avec celui du grand géometre. Par exemple ce problème aiderait à étudier la régularité de certaines équations elliptiques dégenerées reliées au problème d'extension minimale des fonctions de Lipschitz (voir Arronson, Evans, Wu,à paraitre). Le problème de Monge (1) est aussi lié au problème de la détermination de la norme minimale de Kantorovich-Rubinstein et de la métrique minimale de Kantorovich.

A ma connaissance, il n'existe aucun document contenant une preuve analytique de l'existence d'un minimum pour le problème de Monge (1). Appell (1928) dans son étude du problème admet implicitement l'existence d'un minimum, ce qui rend sa démonstration incomplète. Dans ce travail, nous ne saurons traiter complètement le problème de Monge (1). Par contre, nous traitons complètement le problème de Monge-Kantorovich dans le cas où la fonction coût est strictement convexe. Le problème de Monge-Kantorovich est une relaxée d'une généralisation du problème de Monge. Pour illustrer, considérons dans un premier temps la généralisation suivante du problème de Monge, en définissant pour chaque $p \geq 1$,

$$I_p(\mathbf{s}) = \int_K |x - \mathbf{s}(x)|^p d\mu(x)$$

sur l'ensemble X des functions $\mathbf{s} : K \to L$ satisfaisant $\mathbf{s} * \mu = \nu$ (le sens de la relation $\mathbf{s} * \mu = \nu$ est donnée dans la Définition 2.1). Le problème, consiste à trouver $\mathbf{t} \in X$ tel que

$$I_p(\mathbf{t}) = \inf \{I_p(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in X\}. \tag{3}$$

Le problème de Monge-Kantorovich dans ce cas est une relaxée du problème (3) et s'énonce de la façon suivante. Trouver un minimiseur du problème variationnel

$$\inf \left\{ \bar{I}_p(m) := \int_{K\times L} |x - y|^p m(dx, dy) \mid m \in \mathcal{P} \right\}. \tag{4}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des mesures de Borel m sur $K \times L$ satisfaisant

$$\int_{K\times L} f(x) m(dx, dy) = \int_K f(x) d\mu(x)$$

pour tout $f \in C(K)$ et

$$\int_{K\times L} g(y) m(dx, dy) = \int_L g(y) d\nu(y)$$

pour tout $g \in C(L)$. La fonction coût dans les cas (3) et (4) est donnée par $c(x, y) = |x - y|^p$ et est dite strictement convexe si $p > 1$.

Pour tout $\mathbf{s}$ satisfaisant $\mathbf{s} * \mu = \nu$, nous définissons la mesure $m = \delta(y - \mathbf{s}(x))dxdy$ par

$$\int_{K\times L} G(x, y) dm(x, y) = \int_K G(x, \mathbf{s}(x)) d\mu(x).$$

pour tout $G \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Il est immédiat que $m \in \mathcal{P}$. Pour montrer que le problème dans (3) est une relaxée du problème de Monge, nous vérifions que si m est une mesure de la forme $m = \delta(y - \mathbf{s}(x))dxdy$ où $\mathbf{s} * \mu = \nu$ alors,

$$\bar{I}_p(m) = I_p(\mathbf{s}).$$

Dans le cas $p > 1$, nous montrons qu'il existe un minimiseur m de (4) qui soit de la forme $m_0 = \delta(y - \mathbf{t}(x))dxdy$ où $\mathbf{t}$ satisfait la relation $\mathbf{t} * \mu = \nu$.

Le problème de Monge-Kantorovich trouve un très grand nombre d'applications. Nous en citons quelques une. Brenier (1987) prouve la décomposition polaire des champs vectoriels $\mathbf{q}$ satisfaisant la N^{-1} propriété, en résolvant le problème de Monge-Kantorovich (4) lorsque $p = 2$ (voir le Corollaire 2.7). Une preuve analytique de la décomposition polaire des champs vectoriels sera ensuite donnée par Gangbo (à paraitre). Rappelons que la décomposition polaire d'un champ vectoriel $\mathbf{q}$ s'écrit

$$\mathbf{q}(x) = \nabla\psi(\mathbf{a}(x))$$

oú ψ est une fonction convexe et $\mathbf{a} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ préserve les mesures de Lebesgue, c'est à dire

$$\mathcal{L}^d(\mathbf{a}^{-1}(E)) = \mathcal{L}^d(\mathbf{a}(E))$$

pour tout $E \subset \bar{\Omega}$ mesurable.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert dont le bord a une mesure nulle et $\mathbf{q} \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ une fonction satisfaisant la N^{-1} propriété. Le problème de Monge-Kantorovich (4) permet de caractériser la L^p-projection de $\mathbf{q}$ sur l'ensemble des applications préservant les mesures de Lebesgue. Cette projection est précisement l'application $\mathbf{a}$ apparaissant dans la décomposition polaire de $\mathbf{q}$ (voir le Remarque 2.8).

Comme l'a remarqué Brenier (1987), la résolution du problème (3) dans le cas $p = 2$ permet de déduire que l'équation de Monge-Ampère

$$\begin{cases} det(g(\nabla\psi(x))det(\nabla^2\psi(x) &= f(x) \\ \nabla\psi(\Omega_1) &= \Omega_2 \end{cases}$$

admet une solution unique au sens faible pour tout $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ tels que

$$\mathcal{L}^d(\partial\Omega_1) = \mathcal{L}^d(\partial\Omega_2) = 0,$$

pour tout $f \in L^1(\Omega_1)$ et $g \in L^1(\Omega_2)$ tels que $f > 0, g > 0$, f, g satisfaisant la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega_1} f(x)dx = \int_{\Omega_2} g(x)dx.$$

La plupart des auteurs qui ont étudiés le problème de Monge-Kantorovich ne s'intéressent pas à la question de savoir si parmi les minimiseurs de (4), il en existent qui puissent s'écrire $m_0 = \delta(y - \mathbf{t}(x))dxdy$ (voir Kantorovich 1942, Levin 1984, Rachev 1985). L'existence d'un minimiseur de (3) et d'un minimiseur de (4) qui soit de la forme $m_0 = \delta(y - \mathbf{t}(x))dxdy$ constituent l'une des difficultés des problémes. Apparemment, Sudakov (1979) prouve que pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe un minimiseur de (3) qui soit de la forme $m_0 = \delta(y - \mathbf{t}(x))dxdy$. Il résoudrait ainsi le problème initial de Monge. Sa preuve se base sur la théorie des probabilités et la théorie des mesures géométriques. Brenier (1987) dans son étude sur la décomposition polaire des champs vectoriels, en se basant sur la théorie des probabilités, prouve que dans le cas $p = 2$, on a un minimiseur de (4) qui soit de la forme $m_0 = \delta(y - \mathbf{t}(x))dxdy$. A ma connaissance, le problème de Monge-Kantorovich a toujours été donc traité par des approches basée soit sur théorie des probabilités, soit sur théorie des measures géométriques.

Dans ce travail, par une approche purement analytique, nous traitons le problème géneralisé de Monge dans le cas où la fonction coût est stritement convexe. Il s'en suit immédiatement qu'un minimiseur existe dans problème de Monge-Kantorovich (4) lorsque la fonction coût est strictement convexe. Notre méthode se base sur des outils élémentaires d'analyse et est donc accessible par un très large publique. Nous résumons notre approche de l'étude du problème de Monge-Kantorovich (3) de la façon suivante. Nous considérons le problème ci-dessous, beaucoup plus simple à analyser que (3) et qui avait été introduit par Rachev (1985) et dernièrement par Brenier (1987):

$$\sup\left\{\int_K u(x)d\mu(x) + \int_L v(y)d\nu(y) \mid (u, v) \in Lip_c\right\}, \tag{5}$$

où

$$Lip_c = \{(u,v) \mid u \in C(K), v \in C(L),\ u(x) + v(y) \leq c(x,y)\ \forall x \in K, y \in L\}.$$

Il est facile de montrer que le maximum dans (5) est atteint par une paire $(u,v) \in Lip_c$ (voir Théorème 2.2). Par un argument élémentaire, nous prouvons qu'il existe une fonction $\mathbf{t} : K \to L$ telle que

$$u(x) + v(\mathbf{t}(x)) = c(x, \mathbf{t}(x))$$

pour presque tout $x \in K$. Nous écrivons l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à (5) et lisons que $\mathbf{t} \in X$ et satisfait

$$I_p(\mathbf{t}) = \inf \{I_p(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in X\}.$$

Sudakov (1979) semblerait être le seul auteur a avoir résolu le problème d'existence d'un minimiseur dans (3) en considérant des fonctions coût generales. Je ne sais pas s'il existe dans la littérature russe d'autres auteurs ayant prouvés d'existence d'un minimiseur dans (3). Rachev (1985) qui est spécialiste du problème de Monge-Kantorovich ne mentionne que Sudakov comme référence lorsqu'il parle d'existence de minimiseur dans (3). La preuve d'existence d'un minimiseur dans (3) donnée par Sudakov (1979) est très ardue à comprendre par les Analystes. Ce travail contribuera donc à étudier le problème (3) en utilisant des méthodes accessibles aux Analystes, qui soient complètement différente des méthodes de Sudakov (1979). Les résultats obtenus dans l'étude du problème (3) permettent de déduire aisément l'existence d'un minimiseur dans (4). Notre étude est basée sur l'équation d'Euler-Lagrange de (5) et résoud le problème de Monge dans le cas où la fonction coût est strictement convexe.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous motivons l'importance de la quasiconvexité dans l'étude des problèmes du Calcul des Variations et nous citons quelques références relatives à ce sujet.

Pour terminer ce paragraphe introductif, nous fixons quelques notations utiles dans la suite du travail.

Notations.
Pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$, $int(A)$, $\bar{A}$, ∂A dénotent respectivement l'intérieur, la fermeture et le bord de A.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ $x \cdot y$ et $|x|$ dénotent respectivement le produit scalaire usuel de x par y et la norme euclidienne de x.
Nous faisons la convention que fonction mesurable veut dire fonction mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue.
$\mathcal{L}^d$ dénote la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Nous notons l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue d'une fonction mesurable sur un ensemble A, $\int_A f(x)dx$.
Si $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 nous dénotons par $\nabla_x c$ les dérivées partielles de c par rapport aux variables x_i et par $\nabla_y c$ les dérivées partielles de c par rapport aux variables y_i.

2 Le probléme de Monge-Kantorovich

Dans ce paragraphe nous traitons le problème (3) dans la cas où la fonction coût est strictement convexe. Les résultats que nous obtenons permettent de résourdre le problème de Monge-Kantorovich. Dans un souci de rendre la présentation du travail facile à suivre par le lecteur, nous énoncons des résultats avec des hypothèses restrictives. Nous considérons des fonctions coût c incluant les fonctions de la forme

$$c(x, y) = h(|x-y|^p), \quad p > 1$$

où $h \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction stritement convexe et croissante. Plus précisement, nous supposons que $c \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est tel que
(H1) $c(\cdot, y)$ et $c(x, \cdot)$ sont strictement convexes pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,
(H2) $\nabla_x c(x, y) = -\nabla_x c(y, x)$ et $\nabla_y c(x, y) = -\nabla_y c(y, x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,
(H3) $c(x, y) \geq a|y|^p + b(x)$ et $c(x, y) \geq \tilde{a}|x|^p + \tilde{b}(y)$ tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, où $a, \tilde{a} > 0$ sont constantes, $p > 1$ et $b, \tilde{b} \in C(\mathbb{R}^d)$.

$K, L \subset \mathbb{R}^d$ sont deux ensembles compacts, respectivement munies de deux mesures de Borel positives μ et ν satisfaisant $\mu(K) = \nu(L) > 0$. Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes.
(H4) $\mathcal{L}^d(\partial K) = \mathcal{L}^d(\partial L) = 0$.
(H5) μ, ν et la measure de Lebesgue $\mathcal{L}^d$ et sont deux à deux absolument continues l'un par rapport à l'autre. Il est alors clair que μ, ν et $\mathcal{L}^d$ ont les mêmes ensembles de mesure nulle. Nous donnons la definition suivante.

Definition 2.1 *Soit $\mathbf{s} : K \to L$ une fonction mesurable. Nous disons que $\mathbf{s}$ transporte le mesure μ sur la mesure ν et nous notons $\mathbf{s} * \mu = \nu$ si*
1)

$$\int_K H(\mathbf{s}(x)) d\mu(x) = \int_L H(y) d\nu(y)$$

pour tout $H \in C(\mathbb{R}^d)$ où de façon équivalente
2)

$$\mu(\mathbf{s}^{-1}(E) = \nu(E)$$

pour tout $E \subset L$ qui soit ν-mesurable.

Nous définissons l'ensemble

$$Lip_c = \{(u, v) \mid u \in C(K), v \in C(L), \ u(x) + v(y) \leq c(x, y) \ \forall x \in K, y \in L\},$$

les fonctions

$$I(\mathbf{s}) := \int_K c(x, \mathbf{s}(x)) d\mu(x) \quad \mathbf{s} * \mu = \nu$$

et

$$J(u, v) := \int_K u(x) d\mu(x) + \int_L v(y) d\nu(y), \quad (u, v) \in Lip_c$$

utiles dans l'énoncé du théorème suivant, qui constitue le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 2.2 *Avec les hypothèses ci-dessus,*
1) Le problème variationnel

$$j = \sup \{J(u, v) \mid (u, v) \in Lip_c\} \tag{6}$$

admet un maximum.
2) Le problème variationnel

$$i = \inf \{I(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} * \mu = \nu\} \tag{7}$$

admet un minimiseur $\mathbf{t}$. *De plus, il existe* $\mathbf{t}^*$ *une fonction mesurable de* L *dans* K *telle que*

$$\mathbf{t} \circ \mathbf{t}^*(y) = y, \quad \mathbf{t}^* \circ \mathbf{t}(x) = x$$

pour presque tout $x \in K$ *et presque tout* $y \in L$.
3) Les problèmes (6) et (7) sont duaux l'un de l'autre.
4) Le minimiseur $\mathbf{t}$ *dans (7) est unique.*

Avant de présenter la preuve du Théoreème 2.2, nous faisons la remarque suivante.

Remarque 2.3 *Les conclusions du Théoreème 2.2 ont encore lieu si nous remplacons les hypothèses (H1)-(H3) par l'hypothèse plus générale ci-dessous.*
(H1g): $\nabla_x(x,\cdot)$ *et* $\nabla_y(\cdot,y)$ *sont des homéomorphismes de* $\mathbf{R}^d$ *dans* $\mathbf{R}^d$.

Preuve du Théorème 2.2 Par le Théorème de Radon-Nykodym et par l'hypothèse (H5), il existe des fonctions $f \in L^1(K)$, $g \in L^1(L)$ telles que $f, g > 0$ et

$$\mu = f d\mathcal{L}^d, \quad \nu = g d\mathcal{L}^d.$$

Remarquons que pour tout $\mathbf{s} : K \to L$ satisfaisant $\mathbf{s} * \mu = \nu$ (voir la Définition 2.1) et pour tout $(u,v) \in Lip_c$ nous avons que

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \int_K u(x) d\mu(x) + \int_L v(y) d\nu(y) \\ &= \int_K (u(x) + v(\mathbf{s})) d\mu(x) \\ &\leq \int_K c(x, \mathbf{s}(x)) d\mu(x) \\ &= I(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$j \leq i. \tag{8}$$

Nous divisons la suite de la preuve en quatre parties.
Première partie. Soit $\{(\bar{u}_n, \bar{v}_n)\} \subset Lip_c$ une suite telle que

$$j = \lim_{n \to \infty} J(\bar{u}_n, \bar{v}_n). \tag{9}$$

Posons

$$v_n(y) = \inf \{c(x,y) - \bar{u}_n(x) \,|\, x \in K\}$$

pour tout $y \in L$ et

$$u_n(x) = \inf \{c(x,y) - v_n(y) \,|\, y \in L\} \tag{10}$$

pour tout $x \in K$. Comme $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \in Lip_c$ nous avons que

$$\bar{v}_n(y) \leq c(x,y) - \bar{u}_n(x)$$

pour tout $x \in K$ et tout $y \in L$ ce qui implique que

$$\bar{v}_n(y) \leq v_n(y) \tag{11}$$

pour tout $y \in L$. De même, comme $(\bar{u}_n, v_n) \in Lip_c$ nous avons que

$$\bar{u}_n \leq u_n. \tag{12}$$

De plus, par le Lemme 4.4 (voir l'Appendixe), u_n et v_n sont des fonctions de Lipschitz avec des constantes de Lipschitz ne dépendant que de K, L et c. Donc $\{(u_n, v_n)\} \subset Lip_c$ et par (9), (11) et (12)

$$j = \lim_{n \to \infty} J(u_n, v_n). \tag{13}$$

Supposons sans perte de généralité que

$$a_n := \inf \{v_n(y) \mid y \in L\} = 0 \tag{14}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, il est évident que

$$(u + e, v - e) \in Lip_c,$$

et

$$J(u + e, v - e) = J(u, v)$$

pour tout $(u, v) \in Lip_c$ et pour tout constante $e \in \mathbb{R}$. Si on n'avait pas $a_n = 0$, il suffirait de remplacer la suite $\{(u_n, v_n)\}$ par la suite $\{(u_n + a_n, v_n - a_n)\} \subset Lip_c$. Le Lemme 4.4, (10) et (14) impliquent que la suite $\{v_n\}$ est équicontinue et converge à une sous suite près vers une fonction de Lipschitz v. De même, la suite $\{u_n\}$ est équicontinue et converge à une sous suite près vers une fonction de Lipschitz u telle que $(u, v) \in Lip_c$ et

$$j = J(u, v).$$

Ceci prouve la première assertion du Théorème.

Deuxième partie. Avant de prouver que (7) admet un minimum, nous prouvons que

$$u(x) = \inf \{c(x, y) - v(y) \mid y \in L\} \tag{15}$$

pour tout $x \in K$ et

$$v(y) = \inf \{c(x, y) - u(x) \mid x \in K\} \tag{16}$$

pour tout $y \in L$. En effet, posons

$$w(x) = \inf \{c(x, y) - v(y) \mid y \in L\}.$$

La fonction w est par définition la plus grande des fonctions $\bar{w}$ telles que $(\bar{w}, v) \in Lip_c$. Comme $(u, v) \in Lip_c$ alors,

$$u \leq w.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in int(K)$ l'on ait $u(x_0) < w(x_0)$. Dans un voisinage ouvert O de x_0, on a $u(x) < w(x)$ pour tout $x \in O$. Comme $f > 0$ dans O et comme $\mathcal{L}^d(O) \neq 0$ alors on a que

$$J(u, v) < J(w, v),$$

ce qui est absurde donc $u \equiv w$ et (15) est prouvé. Par un raisonnement similaire, on prouve (16).

Soit $\mathbf{t} : K \to L$ et $\mathbf{t}^* : L \to K$ les fonctions mesurables définies dans le Lemme 4.4 par la relation

$$u(x) + v(\mathbf{t}(x)) = c(x, \mathbf{t}(x)) \tag{17}$$

pour presque tout $x \in K$,

$$u(\mathbf{t}^*(y)) + v(y) = c(\mathbf{t}^*(y), y) \tag{18}$$

pour presque tout $y \in L$. Soit $H \in C(\mathbb{R}^d)$ et $r \in [0, 1]$. Posons

$$u_r(x) = \inf \{c(x, y) - v(y) - rH(y) \mid y \in L\}, \quad x \in K$$

et

$$v_r(y) = v(y) + rH(y), \quad y \in L.$$

Par le Lemme 4.5 et comme (u, v) est une paire minimiseur dans (6), l'équation d'Euler-Lagrange de (6) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{r\to 0} \frac{J(u_r, v_r) - J(u,v)}{r} &= \lim_{r\to 0} \int_K \frac{u_r(x) - u(x)}{r} d\mu(x) + \int_L H(y) d\nu(y) \\ &= \int_K -H(\mathbf{t}(x)) d\mu(x) + \int_L H(y) d\nu(y) \end{aligned}$$

d'où, par la Définition 2.1 on a que

$$\mathbf{t} * \mu = \nu$$

et par (17)

$$\begin{aligned} I(\mathbf{t}) &= \int_K c(x, \mathbf{t}(x)) d\mu(x) \\ &= \int_K (u(x) + v(\mathbf{t}(x))) d\mu(x) \\ &= \int_K u(x) d\mu(x) + \int_L v(y) d\nu(y). \\ &= J(u, v). \end{aligned} \tag{19}$$

Par (8) et (19) nous obtenons que

$$i = I(T) = J(u, v) = j, \tag{20}$$

ainsi, il existe un minimiseur pour le problème (7).

Soient respectivement $\tilde{K}_1$ et $\tilde{L}_1$ l'ensemble des $x \in K$ et l'ensemble des $y \in L$, tels que u soit différentiable en x et v soit différentiable en y. Posons

$$K_1 = int(K) \cap \tilde{K}_1, \quad L_1 = int(L) \cap \tilde{L}_1, \quad .$$

Comme par hypothèse (H4) $\mathcal{L}^d(\partial K) = \mathcal{L}^d(\partial L) = 0$ et comme u et v sont des fonctions de Lipschitz alors

$$\mathcal{L}^d(K \setminus K_1) = \mathcal{L}^d(L \setminus L_1) = 0,$$

ce qui par le fait que $\mathbf{t} * \mu = \nu$ implique que

$$\mu(K_1 \cap \mathbf{t}^{-1}(L_1)) = \mu(X). \tag{21}$$

Soit $\mathbf{t}^*$ la fonction définie dans le Lemme 4.4 par

$$u(\mathbf{t}^*(y)) + v(y) = c(\mathbf{t}^*(y), y)$$

pour tout $y \in L_1$. Soit $x \in K_1 \cap \mathbf{t}^{-1}(L_1)$. Nous observons que $t(x) \in L_1$ et par le Lemme 4.4, $a = \mathbf{t}^* \circ \mathbf{t}(x)$ est l'unique point de K tel que

$$u(a) + v(\mathbf{t}(x)) = c(a, \mathbf{t}(x)).$$

Comme de plus $x \in K_1$, par le Lemme 4.4 nous avons que

$$u(x) + v(\mathbf{t}(x)) = c(x, \mathbf{t}(x))$$

et donc $\mathbf{t}^* \circ \mathbf{t}(x) = x$, ce qui, par (21) implique que

$$\mathbf{t}^* \circ \mathbf{t}(x) = x, \tag{22}$$

pour presque tout $x \in K$. Se basant sur des arguments similaires, il est aisé de vérifier que

$$\mathbf{t} \circ \mathbf{t}^*(y) = y, \tag{23}$$

pour presque tout $y \in L$.

Troisième partie. (8) et (20) prouvent que (6) et (7) sont duaux l'un de l'autre.

Quatrième partie. Supposons que $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ sont deux minimiseurs de (7). Considérons la paire $(u, v) \in Lip_c$ maximisant J dans la première partie de cette preuve. Nous avons que

$$j = J(u, v) \tag{24}$$

et

$$i = I(\mathbf{t_1}) = I(\mathbf{t_2}). \tag{25}$$

Comme (6) et (7) sont duaux l'un de l'autre et que $\mathbf{t_1} * \mu = \nu$ nous déduisons de (24) et (25) que

$$\int_K (u(x) + v(\mathbf{t_1}(x)))d\mu(x) = \int_K u(x)d\mu(x) + \int_L v(y)d\nu(y) = j = i = \int_K c(x, \mathbf{t_1}(x))d\mu(x). \tag{26}$$

Puisque $(u, v) \in Lip_c$ et que la mesure μ est positive alors (26) implique que

$$u(x) + v(\mathbf{t_1}(x)) = c(x, \mathbf{t_1}(x))$$

pour presque tout $x \in K$ et donc par la Définition 4.3

$$\mathbf{t_1}(x) \in \partial_c u(x) \tag{27}$$

pour presque tout $x \in K$. De façon analogue

$$\mathbf{t_2}(x) \in \partial_c u(x). \tag{28}$$

pour presque tout $y \in L$. Comme par le Lemme 4.4, $\partial_c u(x)$ se réduit à un seul point pour presque tout $x \in K$, (27) et (28) impliquent que

$$\mathbf{t_1}(x) = \mathbf{t_2}(x)$$

pour presque tout $x \in K$. ∎

Remarque 2.4 *Dans la preuve du Théorème 2.2 la paire $(u, v) \in Lip_c$ qui est maximiseur dans le problème (6) satisfait le relation*

$$u(x) = \inf \{c(x, y) - v(y) \mid y \in L\}$$

pour tout $x \in K$. Dans le cas où la fonction coût est donnée par $c(x, y) = |x - y|$, on remarque donc que u est l'extension minimal de Lipschitz de v. Ceci donne une idée du lien qu'il pourrait avoir entre le probléme de Monge-Kantorovich et le probléme d'extension minimal des fonctions de Lipschitz, comme nous l'avions annoncé dans l'Introduction.

Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions un cas particulier du problème de Monge-Kantorovich.

Théorème 2.5 *[Rachev 1985]. Avec les hypothèses du Théorème 2.2, si le coût $c(x, y) = |x - y|^2$ alors le minimiseur* $\mathbf{t}$ *dans (7) est le gradiant d'une fonction convexe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Preuve Avec les notations du Théorème 2.2, soit $(u, v) \in Lip_c$ maximisant J et $\mathbf{t}$ minimisant I. Rappelons que dans la preuve du Théorème 2.2 $\mathbf{t}(x)$ est l'unique solution de l'équation (voir (17) et (48))

$$\nabla_x c(x, \mathbf{t}(x)) = \nabla u(x)$$

pour presque tout $x \in K$, ce qui équivaut, dans le cas où $c(x, y) = |x - y|^2$ à l'équation

$$2(x - \mathbf{t}(x)) = \nabla u(x)$$

pour presque tout $x \in K$, et donc

$$\mathbf{t}(x) = x - \frac{1}{2}\nabla u(x) = \nabla \psi(x)$$

pour presque tout $x \in K$, où

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - u(x)).$$

De même, par (15)

$$u(x) = \inf \left\{ |x - y|^2 - v(y) \; |y \in L \right\} = |x|^2 - 2 \sup \left\{ x \cdot y + \frac{v(y) - |y|^2}{2} \; |y \in L \right\}$$

et donc

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \sup \left\{ x \cdot y + \frac{v(y) - |y|^2}{2} \; |y \in L \right\}$$

pour tout $x \in K$. D'où ψ est convexe en tant que suprémum de fonctions convexes. ∎

Du Théorème 2.5 nous déduisons les Corollaires 2.7 et 2.9 ci-dessous. Avant d'énoncer ces Corollaires, nous donnons les définitions suivantes.

Definition 2.6 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $\mathbf{q} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^d$.*
Nous disons que $\mathbf{q}$ satisfait la N^{-1} propriété si

$$\mathcal{L}^d(\mathbf{q}^{-1}(N)) = 0$$

pour tout $N \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\mathcal{L}^d(N) = 0$.
Nous disons que $\mathbf{q}$ préserve les mesures de Lebesgue sur $\bar{\Omega}$ si $\mathbf{q}(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ et

$$\mathcal{L}^d(\mathbf{q}^{-1}(E)) = \mathcal{L}^d(E)$$

pour tout $E \subset \bar{\Omega}$.

Corollaire 2.7 *[Brenier 1987]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné tel que $\mathcal{L}^d(\partial\Omega) = 0$. Soit $\mathbf{q} \in L^p(\Omega)^d$ satisfaisant la N^{-1} propriété. Alors, il existe une fonction $\mathbf{a} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ préservant les mesures de Lebesgue et il existe une fonction convexe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ telles que*

$$\mathbf{q}(x) = \nabla \psi(\mathbf{a}(x))$$

pour presque tout $x \in \Omega$. De plus $\nabla \psi$ et $\mathbf{a}$ sont déterminés de façon unique.

Preuve Dand cette preuve nous insistons surtout sur l'existence des facteurs ψ et $\mathbf{a}$. Pour la question d'unicité de ces facteurs, nous nous référons à Brenier (1987) et Gangbo (à paraître). Nous donnons la preuve en plusieurs étapes.

Première étape. Supposons que $\mathbf{q} \in C^1(\bar{\Omega})$ et que l'ensemble $N \subset \Omega$ des x tels que le jacobien de $\mathbf{q}$ en x soit nul est vide. Posons

$$K = \bar{\Omega}, \mu = \mathcal{L}^d$$
$$L = \overline{\mathbf{q}(\Omega_2)},$$

et soit ν la mesure définie sur L par

$$\int_L G(y) d\nu(y) = \int_L G(\mathbf{q}(x)) dx \tag{29}$$

pour tout $G \in C(L)$. Nous remarquons que (K, μ) et (L, ν) satisfont les hypothèses du Théorème 2.5. Donc, il existe une fonction convexe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que avec le coût $c(x,y) = |x-y|^2$, le minimiseur $\mathbf{t}$ dans (7) soit le gradiant de ψ. En particulier nous avons que

$$\nabla\psi * \mu = \nu. \tag{30}$$

pour tout $G \in C(L)$. Nous remarquons par l'assertion 2) du Théorème 2.2 que $\nabla\psi$ est inversible à un ensemble de mesure nul près. Soit $\mathbf{a} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ définie par

$$\mathbf{a}(x) = (\nabla\psi)^{-1}(\mathbf{q}(x)),$$

soit $H \in C(\mathbb{R}^d)$ et $G = H \circ (\nabla\psi)^{-1}$. Par le fait que $\nabla\psi * \mu = \nu$ et par (29) on a que

$$\int_K G(\nabla\psi(x)) d\mu(x) = \int_L G(y) d\nu(y) = \int_K G(\mathbf{q}(x)) dx$$

et en remplacant G par $H \circ (\nabla\psi)^{-1}$ on déduit en que

$$\int_K H(x) dx = \int_K H \circ (\nabla\psi)^{-1}(\mathbf{q}(x)) dx = \int_K H(\mathbf{a}(x)) dx. \tag{31}$$

(31) étant vrai pour tout $H \in C(\mathbb{R}^d)$ on obtient que $\mathbf{a}$ préserve les mesures de Lebesgue et que

$$\mathbf{q}(x) = \nabla\psi(\mathbf{a}(x))$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

Deuxième étape. Supposons que $\mathbf{q} \in L^p(\Omega)^d$. Par un argument d'approximation et par la première étap nous obtenons que $\mathbf{q}(x) = \nabla\psi(\mathbf{a}(x))$ pour presque tout $x \in \Omega$ (pour plus de détails, nous référons l lecteur à Brenier (1987) et Gangbo (à paraitre)).

Troisième étape. Nous montrons que $\mathbf{q} \in L^p(\Omega)^d$ si et seulement si $\nabla\psi \in L^p(\Omega)^d$. En effet, comm $\mathbf{a}$ préserve les mesures de Lebesgue, nous avons que pour $1 \le p < \infty$

$$\int_\Omega |\mathbf{q}(x)|^p dx = \int_\Omega |\nabla\psi(\mathbf{a}(x))|^p dx = \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^p dx$$

et comme ψ est convexe, ceci qui prouve que $\mathbf{q} \in L^p(\Omega)^d$ si et seulement si $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. Le résultat e évident dans le cas où $p = \infty$.

Remarques 2.8 *Avec les notations du Corollaire 2.7, nous faisons les remarques suivantes.*
1) Considérons la décomposition polaire

$$\mathbf{q}(x) = \nabla\psi(\mathbf{a}(x))$$

t dénotons par ψ^* la transformee de Legendre-Fenchel de ψ. Alors,

$$\psi(\mathbf{a}(x)) + \psi^*(\mathbf{q}(x)) = \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{a}(x) \tag{32}$$

our presque tout $x \in \Omega$ (voir Rockafellar, 1970).

)

$$||\mathbf{q} - \mathbf{a}||_{L^2(\Omega)^d} = \inf \left\{ ||\mathbf{q} - \mathbf{b}||_{L^2(\Omega)^d} \mid b \text{ préserve les mesures de Lebesgue sur } \bar{\Omega} \right\}.$$

n effet, soit b préservant les mesures de Lebesgue sur $\bar{\Omega}$. Nous avons que

$$\psi(\mathbf{b}(x)) + \psi^*(\mathbf{q}(x)) \geq \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{b}(x)$$

our presque tout $x \in \Omega$ (voir Rockafellar, 1970) et que

$$\int_\Omega H(\mathbf{b}(x))dx = \int_\Omega H(x)dx$$

ur tout $H \in C(\mathbb{R}^d)$ et donc par (32)

$$\begin{aligned}
||\mathbf{q} - \mathbf{b}||^2_{L^2(\Omega)^d} &= \int_\Omega |\mathbf{q}(x)|^2 dx - 2\int_\Omega \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{b}(x)dx + \int_\Omega |x|^2 dx \\
&\geq \int_\Omega |\mathbf{q}(x)|^2 dx - 2\int_\Omega [\psi(\mathbf{b}(x)) + \psi^*(\mathbf{q}(x))]dx + \int_\Omega |x|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\mathbf{q}(x)|^2 dx - 2\int_\Omega [\psi(\mathbf{a}(x)) + \psi^*(\mathbf{q}(x))]dx + \int_\Omega |x|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\mathbf{q}(x)|^2 dx - 2\int_\Omega \mathbf{q}(x) \cdot \mathbf{a}(x)dx + \int_\Omega |x|^2 dx \\
&= ||\mathbf{q} - \mathbf{a}||^2_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned} \tag{33}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le Corollaire 2.7, il est facile de montrer que pour tout $< p < \infty$ et pour tout $\mathbf{q} \in L^p(\Omega)^d$ satisfaisant la N^{-1} propriété, en se servant de la fonction coût $x, y) = |x - y|^p$, $\mathbf{q}$ se décompose

$$\mathbf{q}(x) = \mathbf{t_p}(\mathbf{a_p}(x)).$$

r le fait que tout application préservant les mesures de Lebesgue est la limite dans la norme L^p d'une ite de difféomorphismes préservant la mesure et l'orientation (voir Brenier, à paraitre), nous pouvons ntrer que

$$||\mathbf{q} - \mathbf{a_p}||_{L^2(\Omega)^d} = \inf \left\{ ||\mathbf{q} - \mathbf{b}||_{L^2(\Omega)^d} \mid b \text{ préserve les mesures de Lebesgue sur } \bar{\Omega} \right\}.$$

rollaire 2.9 *[Brenier 1987]. Soit $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ deux ouvert bornés tels que $\mathcal{L}^d(\partial\Omega_1) = \mathcal{L}^d(\partial\Omega_2) = 0$. t $f \in L^1(\Omega_1)$ et $g \in L^1(\Omega_2)$ satisfaisant la condition de compatibilité $\int_{\Omega_1} f(x)dx = \int_{\Omega_2} g(y)dy$. Alors uation de Monge-Ampère*

$$\begin{cases} det(g(\nabla\psi(x))det(\nabla^2\psi(x)) &= f(x) \qquad x \in \Omega_1 \\ \nabla\psi(\Omega_1) &= \Omega_2 \end{cases}$$

net une solution unique au sense faible.

euve Posons

$$K = \bar{\Omega}_1, \quad \mu = f dx$$

$$L = \bar{\Omega}_2, \quad \nu = g dx.$$

Alors (K, μ) et (L, ν) satisfont les hypothèses du Théorème 2.5. Donc, il existe une fonction convexe $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\nabla\psi * \mu = \nu$$

c'est à dire que

$$\int_{\Omega_1} H(\nabla\psi(x))f(x)dx = \int_{\Omega_2} H(y)g(y)dy$$

pour tout $H \in C(\mathbb{R}^d)$. D'où

$$\nabla\psi(\Omega_1) = \Omega_2$$

et au sense faible

$$det(g(\nabla\psi(x))det(\nabla^2\psi(x) = f(x) \;\; \forall x \in \Omega_1.$$

Il est évident que $\nabla\psi$ est déterminé de façon unique. ∎

4 Annexe

Dans ce paragraphe nous prouvons quelques théorèmes élémentaires utiles dans l'étude du problème de Monge-Kantorovich. Nous supposons que $c \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est définie comme dans le paragraphe précédent et nous utilisons les notations des précédents paragraphe. Commencons par énoncer un Lemme utile dans l'étude des fonctions $(u,v) \in Lip_c$ où nous rappelons que

$$Lip_c = \{(u,v) \in C(K) \times C(L) \mid u(x) + v(y) \leq c(x,y) \; \forall (x,y) \in K \times L\}.$$

Lemme 4.1 *Supposons que c satisfait les hypothèses (H1), (H2) et (H3) du paragraphe précédent. Alors,*
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\nabla_x c(x,\cdot)$ est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.
2) Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\nabla_y c(\cdot,y)$ est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.
3) La fonction $E : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $\nabla_x c(x, E(x,z)) = z$ est continue.

Preuve. Nous divisons la preuve en deux parties.
Première partie. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(y) = c(y,x).$$

Par les hypothèses (H1) et (H3), la fonction G est strictement convexe et pour tout $y \neq 0$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda G(\frac{y}{\lambda}) \geq \lim_{\lambda \to 0+} \bar{a} \frac{|y|^p}{\lambda^{p-1}} + \lambda \bar{b}(x) = \infty.$$

Par le Théorème 26.6 de Rockafellar (1970), $\nabla G \equiv \nabla_x c(\cdot, x)$ est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, ce qui implique que la fonction $y \to \nabla_x c(y,x) \equiv -\nabla_x c(x,y)$ est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. De façon analogue, nous déduisons que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\nabla_y c(\cdot, y)$ est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, la fonction E est bien définie.
Deuxième partie. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$E(x,z) = y. \tag{35}$$

Soient $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ deux suites convergeant respectivement vers x et z. Montrons que

$$\lim_{n \to \infty} E(x_n, y_n) = E(x,z).$$

Nous commencons d'abord par définir

$$T = \nabla_x c(x,\cdot), \quad T_n := \nabla_x c(x_n, \cdot)$$

et

$$y_n := T_n^{-1}(z_n). \tag{36}$$

Par 35) nous remarquons que

$$T(z) = y. \tag{37}$$

Fixons $R > 0$. Comme par la première partie de la preuve T est un homeomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et par (37) $T(y) = z$ alors $T(B(y,R))$ est ouvert et il existe $r > 0$ tels que

$$B(z,r) \subset T(B(y,R)). \tag{38}$$

Comme $\nabla_x c$ est continue dans $\mathbb{R}^d$, $\{T_n\}$ converge uniformément vers T dans $\bar{B}(y,R)$ et nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$\max\{|T_n(t) - T(t)| \mid t \in B(y,R)\} < \frac{r}{2} \tag{39}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Assertion 1. Pour tout n assez grand nous avons que

$$B(z, \frac{r}{2}) \subset T_n(B(y, R)). \tag{40}$$

En effet, nous remarquons tout d'abord par (39), par (38) et par le fait que T est un homéomorphisme, pour tout $t \in \partial B(y, R)$ nous avons

$$|T_n(t) - z| \geq |T(t) - z| - |T_n(t) - T(t)| > \frac{r}{2}$$

et donc

$$B(z, \frac{r}{2}) \cap T_n(\partial B(y, R)) = \emptyset \tag{41}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, le dégree topologique $d(T_n, B(y, R), z)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\nabla_x c$ est continue dans $\mathbb{R}^d$, $\{T_n\}$ converge uniformément vers T dans $B(y, R)$ et par les Théorèmes 2.1.3 et 3.3.7 dans Fonseca et Gangbo (1995) il existe un nombre entier $n_0(z)$ tel que

$$d(T_n, B(y, R), z) = d(T, B(y, R), z) = \pm 1 \tag{42}$$

et tel que $z \in T_n(B(y, R))$ pour tout $n \geq n_0(z)$. Par le Théorème de Séparation de Jordan (voir Fonseca et Gangbo 1995, Théorème 3.3.1), par le fait que T et T_n sont des homéomorphismes et par (42), on déduit que $T_n(B(y, R))$ est la composante connexe de $\mathbb{R}^d \setminus T_n(\partial B(y, R))$ contenant z. Par (41) et dû au fait que $B(z, \frac{r}{2})$ est un ensemble connexe on obtient (40) pour tout $n \geq n_0(z)$.

Assertion 2.

$$\lim_{n \to \infty} E(x_n, z_n) = E(x, z).$$

En effet, comme $\{z_n\}$ converge vers z, nous supposons sans perte de généralité que

$$z_n \in B(z, \frac{r}{2}) \tag{43}$$

pour tout $n \geq n_0(z)$. Par (40) et (43) nous obtenons que pour chaque $n \geq n_0(z)$ il existe $b_n \in B(y, R)$ tel que

$$z_n = T_n(b_n). \tag{44}$$

Dû fait que T_n est injective, nous déduisons par (36) et (44) que

$$y_n = b_n \tag{45}$$

et donc $y_n \in B(y, R)$ pour tout $n \geq n_0(z)$. Soit $\{y_{n_i}\}$ une sous suite arbitrairement extraite de $\{y_n\}$ et convergeant vers un certain point b. En passant à la limite dans (44), sachant que $\{T_n\}$ converge uniformément vers T dans tout sous ensemble compact de $\mathbb{R}^d$ nous avons que

$$z = T(b).$$

Ceci, (37) et le fait que T soit injectif impliquent que

$$y = b.$$

Ainsi, $\{y_n\}$ converge y et par (36)

$$\lim_{n \to \infty} E(x_n, z_n) = E(x, z),$$

donc E est continue. ∎

Remarque 4.2 *Soit $p > 1$ et soit c definie par*

$$c(x,y) = |x-y|^p.$$

Alors, c satisfait les hypothèses du Lemme 4.1 et pour tout $\epsilon \in (0,1)$ on a

$$c(x,y) \geq \epsilon |x|^p - k(\epsilon,p)|y|^p \text{ et } c(x,y) \geq \epsilon |y|^p - k(\epsilon,p)|x|^p$$

tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ où

$$k(\epsilon,p) := \frac{1-\epsilon^{\frac{p}{p-1}}}{(1-\epsilon^{\frac{1}{p-1}})^p}$$

Soit $(u,v) \in Lip_c$ satisfaisant

$$u(x) = \inf\{c(x,y) - v(y) \mid y \in L\} \tag{46}$$

$$v(y) = \inf\{c(x,y) - u(x) \mid x \in K\}. \tag{47}$$

Il est facile de vérifer que l'opérateur $S_c : v \to u$ est lié à la transformée de Legendre-Fenchel $l \to l^*$ (voir Rockafellar 1970). En effet, si $c(x,y) = |x-y|^2$ alors

$$S_c v(x) = |x|^2 - 2\sup\left\{x \cdot y - \frac{v(y)-|y|^2}{2} \mid y \in L\right\}.$$

En posant $U(x) = \frac{v(x)-|x|^2}{2}$ pour tout $x \in K$ et

$$V(y) = \begin{cases} \frac{v(y)-|y|^2}{2} & \text{si} \quad y \in L \\ +\infty & \text{si} \quad y \in \mathbb{R}^d \setminus L \end{cases}$$

la relation précédente s'écrit

$$U = V^*.$$

On peut définir une notion de c-sous-gradiant de u au point x relativement au coût c de la façon suivante.

Definition 4.3 *Supposons que $(u,v) \in Lip_c$ satisfait (46) et (47). Alors, pour tout $x \in K$ on définie $\partial_c u(x)$ le c-sous-gradiant de u au point x relativement au coût c par*

$$\partial_c u(x) = \{y \in L \mid u(x) + v(y) = c(x,y)\}$$

et on définie $\partial_c v(y)$ le c-sous-gradiant de v au point y relativement au coût c par

$$\partial_c v(y) = \{x \in K \mid u(x) + v(y) = c(x,y)\}.$$

Si u est différentiable en $x \in int(K)$ alors $\partial_c u(x) = \{E(x, \nabla(x))\}$ où E est définie dans le Lemme 4.1. Il est trivial que u et v sont des fonctions de Lipschitz (voir Lemme 4.4) et donc $\partial_c u(x)$ se réduit à un point unique pour presque tout $x \in K$. Sans entrer dans les détails, nous affirmons que la majorité des "bonnes propriétés des fonctions convexes sont satisfaites par les fonctions de la forme $u = S_c v$.

Lemme 4.4 *Supposons que $(u,v) \in Lip_c$ satisfait (46) et (47). Alors,*
1. u et v sont des fonctions de Lipschitz avec des constantes de Lipschitz ne dépendant que de K, L et c.
2. $\partial_c u(x)$ est réduit à un point unique pour presque tout $x \in K$, en particulier pour tout $x \in int(K)$ tels que u soit differentiable en x. De plus, la fonction à multi-valeurs $\mathbf{t} : x \to \mathbf{t}(x) = \partial_c u(x)$ est mesurable.
3. De même, $\partial_c v(y)$ est réduit à un point unique pour presque tout $y \in L$, en particulier pour tout $y \in int(L)$ tels que v soit differentiable en y. La fonction à multi-valeurs $\mathbf{t}^* : y \to \mathbf{t}^*(y) = \partial_c v(y)$ est mesurable.

Preuve Nous divisons la preuve en trois parties.
<u>Première partie.</u> Montrons que u et v sont des fonctions de Lipschitz. Soient $x_1, x_2 \in K$, et $y_1, y_2 \in L$ telles que

$$u(x_1) = c(x_1, y_1) - v(y_1) \ \text{ et } \ u(x_2) = c(x_2, y_2) - v(y_2).$$

Nous observons que

$$u(x_1) - u(x_2) \leq c(x_1, y_1) - c(x_2, y_1) \leq M|x_1 - x_2|$$

oú

$$M := \sup\left\{|\nabla_x c(x,y)| + |\nabla_y c(x,y)| \ | \ (x,y) \in K \times L\right\}.$$

En intervertissant le rôle de x_1 et de x_2 nous concluons que

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

et de la même façon

$$|u(y_1) - u(y_2)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

<u>Deuxième partie.</u> Définissons $\mathbf{t}$. Soit $\bar{K}_1$ l'ensemble des $x \in K$ telles que u soit différentiable en x et soit

$$K_1 = int(K) \cap \bar{K}_1.$$

Comme par l' hypothèse (H4) $\mathcal{L}^d(\partial K) = 0$ et que u est une fonction de Lipschitz alors,

$$\mathcal{L}^d(K \setminus K_1) = 0.$$

Soit $x_0 \in K_1$ et $y_0 \in L$ choisis de telle façon que la fonction $y \to c(x_0, y) - v(y)$ atteint son minimum en y_0. Par (46) et (47), nous en déduisons que la fonction $x \to c(x, y_0) - u(x)$ atteint son minimum en x_0. De plus $x_0 \in int(K)$ et u est différentiable en x_0, d'où

$$\nabla_x c(x_0, y_0) - \nabla u(x_0) = 0, \tag{48}$$

ce qui est équivalent à dire que

$$y_0 = E(x_0, \nabla u(x_0))$$

où E est définie dans le Lemme 4.1. Ainsi x_0 étant fixé, y_0 est déterminée de façon unique et par le Lemme 4.1, $\mathbf{t}$ est l'application qui à x associe $E(x, \nabla u(x))$. D'où $\mathbf{t}$ est mesurable.
<u>Troisième partie.</u> L'existence de $\mathbf{t}^*$ se prouve de la même façon que celle de $\mathbf{t}$.

Lemme 4.5 *Supposons que $(u, v) \in Lip_c$, satisfont (46) et (47). Soit $H \in C(\mathbb{R}^d)$. Pour chaque $r \in [0,1]$ posons*

$$u_r(x) = \inf\left\{c(x,y) - v(y) - rH(y) \,|\, y \in L\right\},$$

pour tout $x \in K$. Alors,

$$\left|\frac{u_r(x) - u(x)}{r}\right| \leq \beta$$

pour tout $r \in [0,1]$ et pour tout $x \in K$.

$$\lim_{r \to 0} \frac{u_r(x) - u(x)}{r} = -H(\mathbf{t}(x))$$

pour presque tout $x \in K$, où $\mathbf{t}$ est définie comme dans le Lemme 4.4 et $\beta = \max\left\{|H(y)| \,|\, y \in L\right\}$.

Preuve L'idée principale de la preuve est la même que celle du Lemme 2.4 dans Gangbo (à paraitre). Nous divisons la preuve en deux parties.
<u>Première partie.</u> Soient $x \in K$ et $r > 0$. Pour tout $\delta > 0$ il existe $y_\delta, \bar{y}_\delta \in L$ telles que

$$u_r(x) \geq c(x, y_\delta) - v(y_\delta) - rH(y_\delta) - \delta \geq u(x) - rH(y_\delta) - \delta \tag{49}$$

et

$$u(x) \geq c(x, \tilde{y}_\delta) - v(\tilde{y}_\delta) - \delta \geq u_r(x) + rH(\tilde{y}_\delta) - \delta. \tag{50}$$

Par (49) et (50) on a que

$$-|r\beta| - \delta \leq u(x) - u_r(x) \leq |r\beta| + \delta.$$

δ étant arbitraire, nous concluons que

$$|\frac{u_r(x) - u(x)}{r}| \leq \beta$$

pour tout $r \in [0, 1]$ et pour tout $x \in K$.

Deuxième partie. Soit $\{r_i\}$ une suite positive convergeant vers 0. Par (49) et (50) nous supposons sans perte de généralié qu'il existe deux suites $\{y_i\}$ et $\{\tilde{y}_i\}$ convergeant respectivement vers $y, \tilde{y} \in L$ telles que

$$c(x, y_i) - v(y_i) - r_i H(y_i) \geq u_{r_i}(x) \geq c(x, y_i) - v(y_i) - r_i H(y_i) - r_i^2, \tag{51}$$

$$c(x, \tilde{y}_i) - v(\tilde{y}_i) \geq u(x) \geq c(x, \tilde{y}_i) - v(\tilde{y}_i) - r_i^2 \tag{52}$$

et donc

$$-r_i H(y_i) - r_i^2 \leq u_{r_i}(x) - u(x) \leq -r_i H(\tilde{y}_i) + r_i^2. \tag{53}$$

Par (53) $\{u_{r_i}(x)\}$ converge vers $u(x)$ et donc en passant à la limite dans (51) et (52) on déduit les égalités

$$u(x) = c(x, y) - v(y) = c(x, \tilde{y}) - v(\tilde{y}).$$

Par la Définition 4.3, $y, \tilde{y} \in \partial_c u(x)$. Si de plus on suppose que $x \in K_1$ alors par le Lemme 4.4 on obtient que

$$y = \tilde{y} = \mathbf{t}(x)$$

et en passant à la limite dans (53) on en déduit que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{u_r(x) - u(x)}{r} = -H(\mathbf{t}(x))$$

pour tout $x \in K_1$. Par des arguments similaires on obtient aussi que

$$\lim_{r \to 0^-} \frac{u_r(x) - u(x)}{r} = -H(\mathbf{t}(x))$$

pour tout $x \in K_1$. ∎

REFERENCES.

ACERBI, E. and FUSCO, N. (1984). Semicontinuity problems in the calculus of variations. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **62**, 371-387.

ALIBERT, J.J. and DACOROGNA, B. (1991). An Example of a Quasiconvex Function not Polyconvex in two dimension, Archive for Rational Mechanics and Analysis.

APPELL, P. (1925). Extension d'un théorème de Monge. Compte Rendu l'Académie des Sciences, t. 180, p. 781. (1926) Acta Matematica, volume jubilaire pour Mittag-Leffler.

APPELL, P. (1928). Le problème géométrique des déblais et des remblais. Mémorial des Sciences Mathématiques, Académie des Sciences de Paris, fascicule XXVII.

BALL, J. (1980). Strict convexity, strong ellipticity, and regularity in the calculus of variations. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **87**, 501-513.

BRENIER, Y. (1987). Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. Compte Rendu l'Académie des Sciences de Paris, **305**, 805-808.

BRENIER, Y. (à paraitre). On the ideal of an incompressible fluid.

DACOROGNA, B. (1987). Direct Methods in the Calculus of Variations. Springer-Verlag .

DACOROGNA, B., DOUCHET, J., GANGBO, W., RAPPAZ, R. (1990). Some examples of rank one convex functions in dimension two. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **114A**, 135-150.

DACOROGNA, B., MARCELLINI, P. (1990). Semicontinuité pour des intégrandes polyconvexes sans continuité des determinants. Compte Rendu des Académie des Sciences de Paris, t. **311**, série I, 393-396.

DUPIN, (1818). Exercices de géométrie et d'algèbre.

GANGBO, W. (1993). On the continuity of the polyconvex, quasiconvex and rank one convexenvelope with respect to the growth condition. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **123A**, 707-729.

GANGBO, W. (1994). On the weak lower semi-continuity of the polyconvex integrande. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 73, 5.

GANGBO, W. (à paraitre). An elementary proof of the polar factorization of vector-valued functions. Archive for Rational Mechanics and Analysis.

FONSECA, I. et GANGBO, W. (1995). Degree theory in Analysis and applications. Oxford University Press.

KANTOROVICH, L.V. (1948). On a problem of Monge. Uspekhi Mat. Nauk, **3,2**. 225-226. (In Russian).

LEVIN, V.L. (1984). The mass transfer problem in topological space and probability measures on the product of two compact spaces with given martingal measures, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **276**, 1059-1064.

MONGE, G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais. Mémoire de l'académie des Sciences.

MORREY, C.B. (1952). Quasiconvexity and semicontinuity of multiple integrals. Pacific Journal of Mathematics, **2**, 25-53.

MORREY, C.B. (1966). Multiple integrals in the calculus of variations. Springer.

RACHEV, S.T. (1985). The Monge-Kantorovich mass transference problem and its stochastic applications. Theory of Probability and its Applications, no 4, **XXIX**, 647-671.

RESHETNYAK, Y.G. (1968). Stability theorems for mappings with bounded excursion. Siberian Math. J., **9**, 499-512.

ROCKAFELLAR, T. (1970). Convex Analysis. Princeton University Press.

SVERAK, V. (1991). Quasiconvex Functions with Subquadratic Growth. Proceedinds of the Royal Society of London, **A433**, 723-725.

SVERAK, V. (1992). Rank one convexity does not imply quasiconvexity. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **120**, 185-189.