Analysis multilinearer Operatoren

Christoph Thiele

Stuttgart, 21. Juli 2000

Auftreten multilinearer Operatoren

- Taylorreihen nichtlinearer Operatoren

- Höhere Terme in Iterationsverfahren

Beispiel: Eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$-f''(x) + V(x)f(x) = \lambda^2 f(x)$$

Ist $V \equiv 0$, so haben wir

$$-f''(x) = \lambda^2 f(x)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$a\ e^{i\lambda x} + b\ e^{-i\lambda x}$$

Insbesondere sind alle Lösungen beschränkt.

Frage: Unter welchen Annahmen an V kann man auf beschränkte Lösungen schließen?

Vermutung:

Ist V reell und quadratintegrierbar ($L^2(\mathbf{R})$),

$$\int_{\mathbf{R}} |V(x)|^2 \, dx < \infty$$

so hat die Gleichung

$$-f''(x) + V(x)f(x) = \lambda^2 f(x)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbf{R}$ (bis auf eine Menge vom Maß Null) nur beschränkte Lösungen.

Neuere Resultate in dieser Richtung: Christ/Kiselev, Deift/Killip u.a.

Zugang von Christ/Kiselev: Explizite Reihenentwicklung für die Lösungen der Schrödingergleichung (WKB Entwicklung).

WKB Näherung

Näherungslösung der Schrödingergleichung:

$$\phi(x) = e^{i\lambda x - \frac{i}{2\lambda}\int_0^x V(y)\,dy}$$

(Man erhält diese mit dem Ansatz

$$\phi(x) = e^{i\lambda x + \theta(x)}$$

unter Vernachlässigung von θ'' und $(\theta')^2$.)

Ebenso ist $\overline{\phi}$ eine Näherungslösung.

Für eine exakte Lösung macht man den Ansatz

$$a(x)\phi(x) + b(x)\overline{\phi(x)}$$

mit langsam variierenden a and b.

Eine Lösung für die Schrödinger Gleichung erhält man, wenn

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}' = \frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & -V\overline{\phi}^2 \\ V\phi^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Picard Iteration

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}(x) \\ b_{n+1}(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_x^\infty \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -V\overline{\phi}^2 \\ V\phi^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} dy$$

Durch fortgesetzte Integration erhält man eine (zunächst formale) explizite Lösung:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{2n} T_{2n}(V, \ldots, V)$$

$$b = -i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{2n-1} T_{2n-1}(V, \ldots, V)$$

wobei $T_0 \equiv 1$ und

$$T_n(f_1, \ldots, f_n)(x) =$$

$$= \int_x^\infty \int_{t_1}^\infty \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty \prod_{j=1}^{n} \phi^{2(-1)^{n-j}}(t_j) f_j(t_j)\, dt_j$$

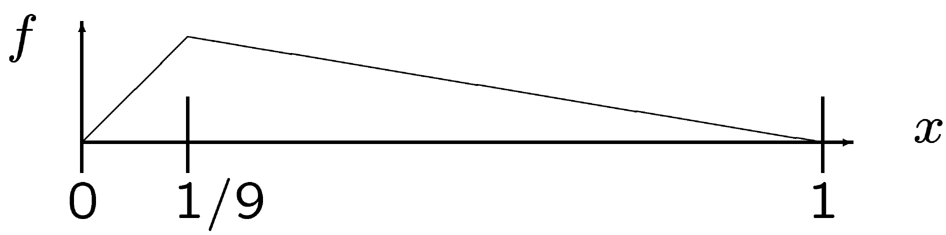
Dies sind multilineare Operatoren.

Fouriersche Reihe
einer Funktion f auf $[0,1]$:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n \, e^{2\pi i n x} \quad ,$$

$$\widehat{f}_n := \int_0^1 f(x) \, e^{-2\pi i n x} \, dx \quad .$$

Beispiel: $\widehat{f}_9 = 0$ falls f gleich:



.

Theorem L. Carleson, 1966:
Ist $f \in L^2[0,1]$, dann konvergiert die Fouriersche Reihe von f für fast alle x.
(Alternative Beweise: Fefferman, Lacey/T.)

Die Fouriersche Transformation

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} f(x) \, e^{-2\pi i x \xi} \, dx \quad ,$$

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) \, e^{2\pi i x \xi} \, d\xi \quad .$$

Die Hilbertsche Transformation
einer Funktion auf $\mathbf{R}$

$$Hf(x) := \ p.v. \ \int_{\mathbf{R}} \ f(x-t) \ \frac{dt}{t}$$

$$:= \ \lim_{\epsilon \to 0} \ \int_{\mathbf{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} \ f(x-t) \ \frac{dt}{t} \quad .$$

(Beispiel eines singulären Integrals.)
Theorem A. Kolmogorov, 1925, M. Riesz 1926:
Sei $1 < p < \infty$, dann gilt

$$\|Hf\|_p \leq C_p \ \|f\|_p$$

für alle $f \in L^p(\mathbf{R})$, wobei

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p \, dx \quad .$$

Korollar:(duale Ungleichung)
Sei $1 < p, p' < \infty$ mit $1/p + 1/p' = 1$, dann gilt

$$|T(f,g)| \leq C_p \ \|f\|_p \ \|g\|_{p'} \quad ,$$

wobei

$$T(f,g) := \int Hf(x) \ g(x) \, dx \quad .$$

Hauptthema dieses Vortrags:

L^p- Abschätzungen von singulären Integraloperatoren mit Modulationssymmetrien.

Modulation:

$$M_\eta f(x) := f(x)e^{2\pi i\eta x}$$

Beispiel 1
Bilineare Hilbertsche Transformation:

$$B(f,g)(x) := p.v. \int f(x-t)g(x+t)\frac{dt}{t}$$

$$B(M_\eta f, M_\eta g) = M_{2\eta} B(f,g)$$

Beispiel 2
Carlesonscher Operator:

$$C(f)(x) = \sup_N \left| \int_{-\infty}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x}\, d\xi \right|$$

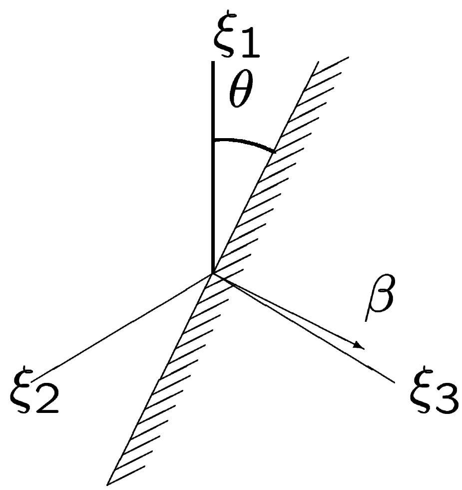
$$C(M_\eta f) = C(f)$$

Die bilineare Hilbertsche Transformation

$$B_\alpha(f,g)(x) := p.v. \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(x-\alpha t)\frac{dt}{t} \quad ,$$

$$T_\alpha(f_1,f_2,f_3) := \int_{\mathbf{R}} B_\alpha(f_1,f_2)(x) f_3(x)\, dx$$

$$= i \int_{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0} \mathrm{sign}(\beta\cdot\xi) \left(\prod_{j=1}^{3} \widehat{f}_j(\xi_j)\right) d\mu$$



Diese Einparameterfamilie ist invariant unter Permutationen von f_1, f_2, f_3. Es gibt drei degenerierte Fälle von B_α:

$$B_0(f,g) = H(f)\cdot g \ , \qquad B_1(f,g) = H(f\cdot g) \ ,$$

$$B_\infty(f,g) = f\cdot H(g) \ .$$

Theorem (Lacey/T.)

Ist $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, so gilt a priori

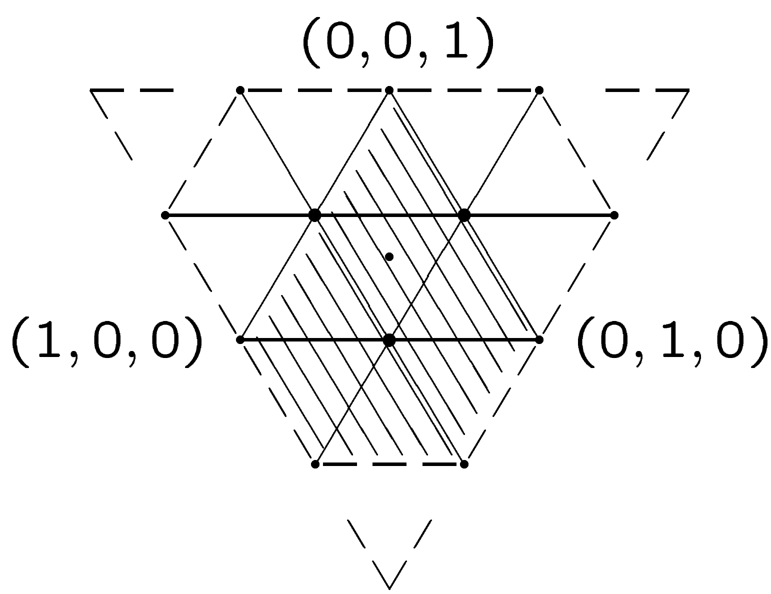
$$\|B_\alpha(f_1, f_2)\|_{p_3{}'} \leq C_{\alpha,p_1,p_2} \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

wann immer

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} = 1 \ , \quad 1 < p_1, p_2 \leq \infty \ , \ 2/3 < p_3{}' < \infty$$

Hier ist $p_3{}'$ definiert durch $1/p_3 + 1/p_3{}' = 1$.

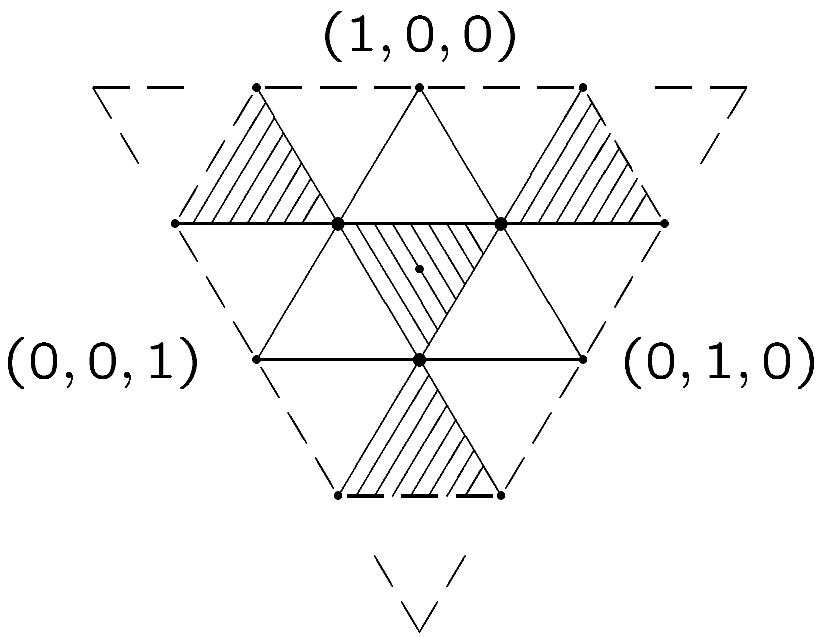
Die Menge von Tupeln $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3)$ aus diesem Theorem schematisch dargestellt:



Ist $p_3{}' < 1$, dann folgt $p_3 < 0$.
Es gilt $1 \leq p_i \leq \infty$ in der konvexen Hülle der drei bezeichneten Punkte.

Duale Abschätzungen

Permutation der Indizes $1, 2, 3$ führt zu dualen Abschätzungen. In dasselbe Diagramm eingetragen erhalten wir die konvexe Hülle des schraffierten Gebietes:



Nur die schraffierten Gebiete werden direkt bewiesen, der Rest folgt durch Interpolation.

Abschätzungen im degenerierten Fall

Der degenerierte Fall $\alpha = 1$ führt zu

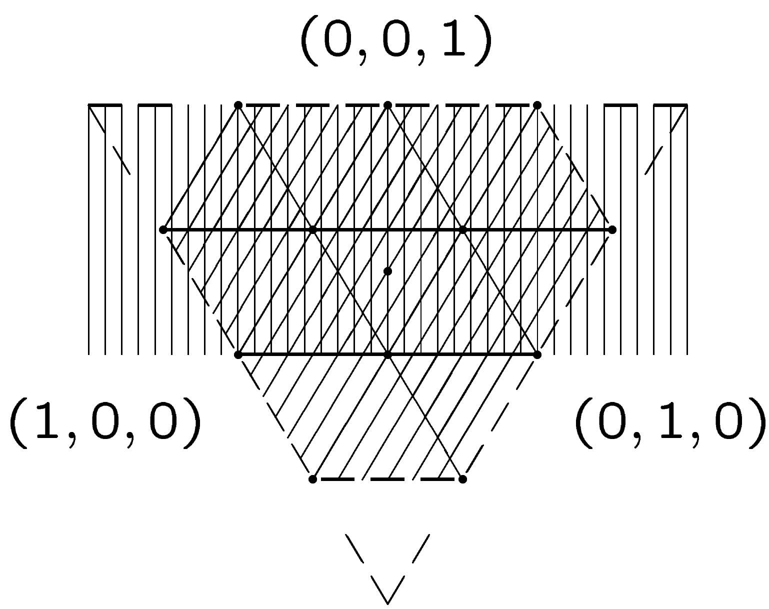
$$B_1(f_1, f_2) = H(f_1 \cdot f_2) \quad .$$

Dessen duale Operatoren sind gegeben durch

$$f_2 \cdot H(f_3) \ , \quad f_1 \cdot H(f_3)$$

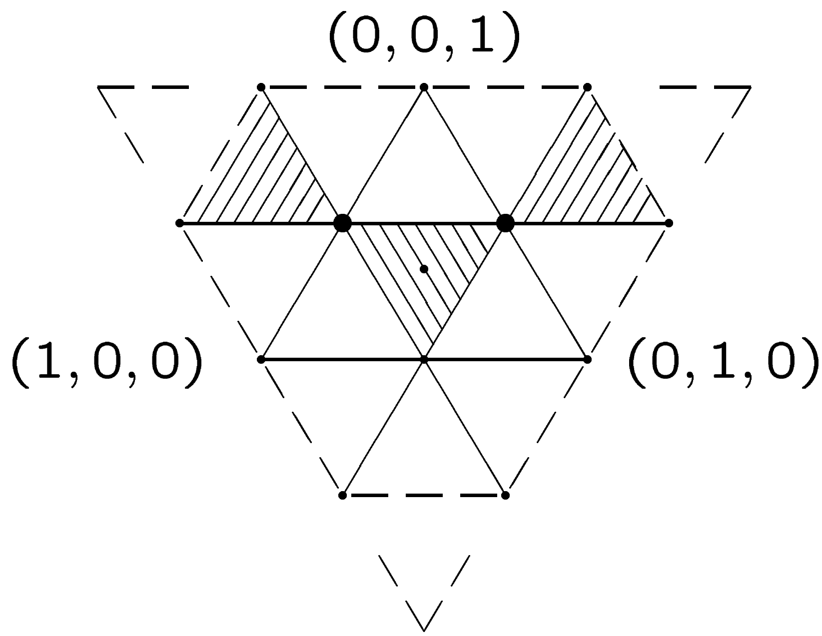
A priori Abschätzungen für einen dieser Operatoren erhält man genau dann, wenn

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{p_j} = 1 \ , \quad 1 < p_3 < \infty$$



In der Schnittmenge der schraffierten Gebiete erwartet man daher Abschätzungen gleichmäßig in α für α nahe der 1.

Gleichmäßige Abschätzungen



1) T., Habilitation 1998: Die zwei zentralen Punkte. Abschätzungen vom schwachen Typ:

$$L^2 \times L^2 \to L^{1,\infty}$$

2) Grafakos-Li, 2000: inneres Dreieck.

3) Li, 2000: äußere Dreiecke.

Es ist nicht bekannt, ob man gleichmäßige Abschätzungen in der Nähe der Punkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ hat.

Motivation für gleichmäßige Abschätzungen:

Der erste Calderonsche Kommutator (aus einer Taylorschen Reihe für das "Cauchysche Integral entlang einer Lipschitz - stetigen Kurve")

$$T = [A, M] = AM - MA \quad .$$

Hier bezeichnet A die Multiplikation mit einer gegebenen Funktion A und M die Faltung mit $1/x^2$.

$$T(f)(x) := p.v. \int_{\mathbf{R}} \frac{A(x) - A(y)}{(x-y)^2} f(y)\, dy \quad .$$

$$= p.v. \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^1 A'(\alpha y + (1-\alpha)x)\, d\alpha \right) \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(p.v \int_{\mathbf{R}} f(x-t) A'(x - \alpha t) \frac{dt}{t} \right) \; d\alpha \quad .$$

Calderon, 1977: Ist A Lipschitz - stetig (also $A' \in L^\infty(\mathbf{R})$), so ist T beschränkt in $L^2(\mathbf{R})$.

Um dieses Resultat entlang der obigen Rechnung zu reproduzieren, braucht man gute Abschätzungen von B_α nahe der degenerierten Fälle $\alpha = 0, 1$. (Habilitation, T.)

Multilineare Operatoren

Eine n-lineare Form hat allgemein die Form

$$\Lambda(f_1, \ldots, f_n) = \int_{\mathbf{R}^n} m(\xi) \prod_{j=1}^{n} \widehat{f_j}(\xi_j)\, d\xi_j$$

Eine natürlich Annahme ist, daß Λ invariant ist unter gleichzeitiger Translation aller Funktionen f_i. Dann ist m ein Maß auf der Hyperebene

$$\Gamma := \{\xi : \xi_1 + \ldots + \xi_n = 0\} \quad ,$$

$$\Lambda(f_1, \ldots, f_n) = \int_{\Gamma} m(\xi) \prod_{j=1}^{n} \widehat{f_j}(\xi_j)\, d\mu$$

Modulationssymmetrie heißt

$$m(\xi) = m(\xi - \eta)$$

für gewisse η, wir nehmen an η ist aus einem k-dimensionalen Teilraum Γ' von Γ.

Eine modulationsinvariante Klasse von Operatoren erhält man durch die Forderung

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha \mathrm{dist}(\xi, \Gamma')^{-|\alpha|}$$

für alle partiellen Ableitungen tangential zu Γ.

Theorem (Muscalu, Tao, T.)

Seien k, n ganze Zahlen mit

$$0 \leq k < n/2$$

Sei Γ die Hyperebene in $\mathbf{R}^n$ wie zuvor und sei Γ' ein k-dimensionaler Teilraum von Γ so, dass für k-Tupel von Koordinaten Γ' Graph einer Funktion dieser Koordinaten ist.
Sei m eine Funktion auf Γ so, dass

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq \mathrm{dist}(\xi, \Gamma')^{-|\alpha|}$$

für alle partiellen Ableitungen tangential zu Γ.

Dann gilt für die zugehörende Form Λ

$$|\Lambda(f_1, \ldots, f_n)| \leq C \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{p_j}$$

vorausgesetzt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1 \ , \quad 1 < p_1, \ldots, p_n < \infty$$

Bemerkungen: Bekannt für $k = 0$. Der Fall $n = 3$, $k = 1$ ist im wesentlichen die b.H.T. Die dualen Operatoren erfüllen weitere Abschätzungen.

Die Terme der WKB Reihe

Nach einigen Vereinfachungen und einer zusätzlichen Fourierschen Transformation

$$f_j \to \widehat{f}_j \quad ,$$

die dank $f_j \in L^2(\mathbf{R})$ unerheblich ist, :

1.Term: Maximaloparator zur Identität, Carlesonscher Operator

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i\lambda\xi}\, d\xi$$

$$\mathsf{sup}_x \left| \int_{x}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i\lambda\xi}\, d\xi \right|$$

2. Term: Maximaloperator zur bilinearen Hilbertschen Transformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{2} \widehat{f}(\xi_j)\, e^{2\pi i\lambda\xi_j}\, d\xi_j$$

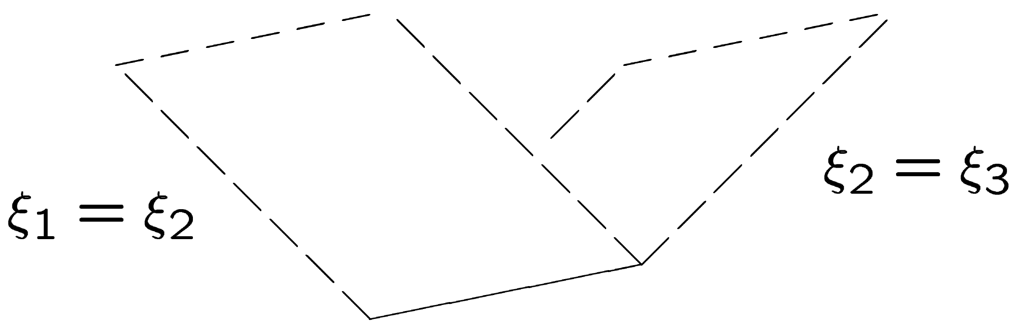
$$\mathsf{sup}_x \left| \int_{x}^{\infty} \int_{\xi_1}^{\infty} \prod_{j=1}^{2} \widehat{f}(\xi_j)\, e^{2\pi i\lambda\xi_j}\, d\xi_j \right|$$

3. Term: Maximaloperator zum “Biest”

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi_1}^{\infty} \int_{\xi_2}^{\infty} \prod_{j=1}^{3} \widehat{f}(\xi_j)\, e^{2\pi i\lambda\xi_j}\, d\xi_j$$

Das Biest

Der Multiplikator m ist die charakteristische Funktion der konvexen Hülle von



Jede der Ebenen für sich entspricht einem der Operatoren (B=b.H.T.)

$$B(f_1, f_2) \cdot f_3 \ , \quad f_1 \cdot B(f_2, f_3) \quad ,$$

Beide Ebenen sind degeneriert. Wegen $k = 2$ und $n = 4$ ist die Bedingung $k < n/2$ verletzt.

Das Biest kann mit einem weichen Schnitt in zwei symmetrische Teile zerlegt werden: eines davon hat die Singularitäten $\xi_1 = \xi_2$ und $\xi_1 = \xi_2 = a_3\xi_3 = a_4\xi_4$. Diese sind symmetrisch unter den Vertauschungen $1 \to 2$ und $3 \to 4$.

Theorem

Definiere $\Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4)$ als

$$\int_{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0,\ \xi_1<\xi_2,\ \xi_2<\xi_3} \prod_{j=1}^{4} \widehat{f}_j(\xi_j)\, d\mu$$

Dann gelten a priori Abschätzungen

$$|\Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4)| \leq C_{p_1,p_2,p_3,p_4} \prod_{j=1}^{4} \|f_j\|_{p_j}$$

sofern

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{p_j} = 1 \ , \quad 1 < p_j < \infty \quad .$$

Darüberhinaus erfüllen die entsprechenden dualen trilinearen Operatoren Abschätzungen für

$$\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}, \frac{1}{p_4}\right) \in D' \cap D$$

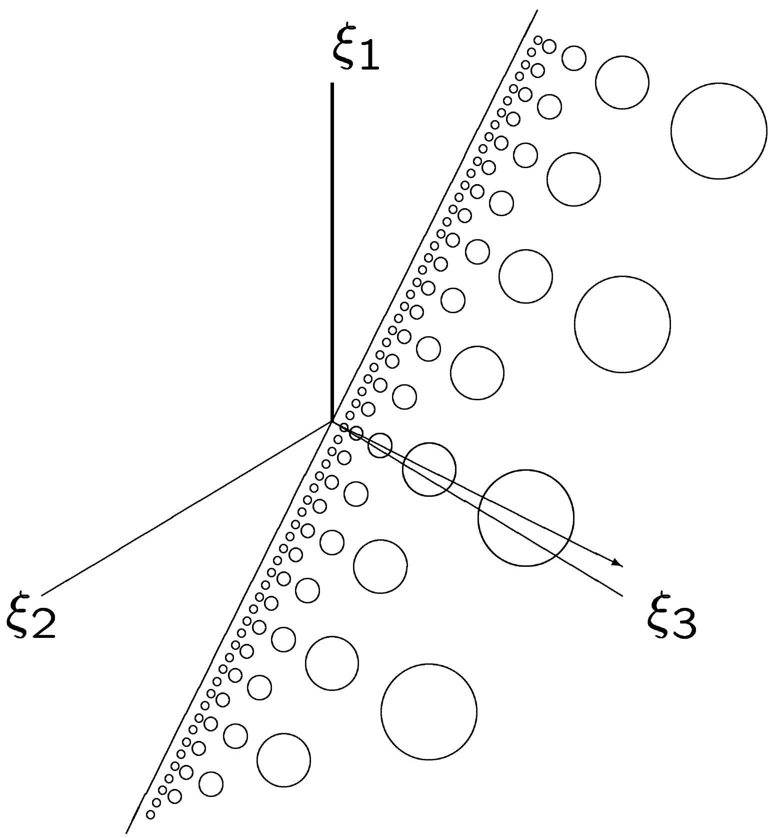
wobei D' die offene konvexe Hülle der Punkte

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

und deren Bilder unter den Vertauschungen $1 \to 2$ und $3 \to 4$ ist und D das Bild von D' unter der Vertauschung $1 \to 3$ ist.

Zum Beweis (b.H.T, nicht gleichmäßig)

Man zerlegt den Multiplikator m im Frequenzraum in glatte Funktionen gemäß dem Schema



Nach einer zusätzlichen Zerlegung in der Ortsvariablen x wird die trilineare Form zu

$$\sum_{p \in P} c_p \prod_{j=1}^{3} \left\langle f_j, \psi_{1,p} \right\rangle$$

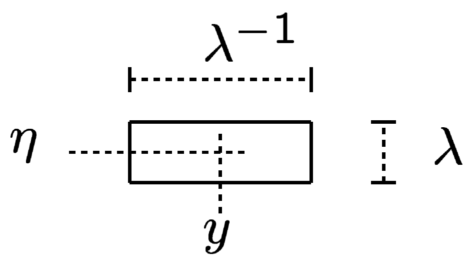
mit Funktionen $\psi_{j,p}$, die Orts- und Frequenzlokalisierung kodieren. Diese Summe kann dann absolut abgeschätzt werden.

Wellenpakete

Die $\psi_{j,p}$ sind Wellenpakete von der Form

$$\psi_{j,p}(x) = \sqrt{\lambda}\ \psi(\lambda(x-y))\ e^{2\pi i\lambda\eta x}$$

für gewisse Parameterwerte λ, η , y und eine feste Testfunktion ψ. Den Parameterwerten zugeordnet ist ein Rechteck:



.

Wesentliches Hilfsmittel im Beweis sind Abschätzungen vom Besselschen Typ,

$$\sum \left|\left\langle f, \phi_{j,p}\right\rangle\right|^2 \leq C\|f\|_2^2 \quad ,$$

falls die Summe über disjunkte Rechtecke geht: