Vol. 83, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © May 1996

CORRESPONDANCE DE HOWE POUR LES GROUPES RÉDUCTIFS SUR LES CORPS FINIS

ANNE-MARIE AUBERT, JEAN MICHEL ET RAPHAËL ROUQUIER

Soit (G, G') une paire de sous-groupes d'un groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ (où $\mathbb{F}_q$ est un corps fini de caractéristique p impaire) dont chacun est le centralisateur de l'autre dans $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$. Suivant R. Howe (voir [H1] et [H2]), il y a une correspondance entre représentations de G et de G' donnée par la représentation de Weil ω du groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(q) := \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$.

Plus précisément, si $(G_m, G'_{m'})$ est une paire réductive duale irréductible dans $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$, i.e., l'une des paires $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q))$ (avec $n = 2mm'$), $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}_{2m'+1}(q))$ (avec $n = m(2m'+1)$), $(\mathbf{U}_m(q), \mathbf{U}_{m'}(q))$, $(\mathbf{GL}_m(q), \mathbf{GL}_{m'}(q))$ (avec $n = mm'$), la restriction de ω à $G_m.G'_{m'}$ définit une application entre groupes de Grothendieck de représentations complexes $\mathscr{R}(G_m) \to \mathscr{R}(G'_{m'})$ que nous appellerons correspondance de Howe.

Le but de notre article est de décrire cette correspondance. Nous obtenons une formule explicite pour les paires linéaires et unitaires et présentons une formule conjecturale pour les paires symplectiques-orthogonales.

Nous partons d'un résultat de Bhama Srinivasan [Sr, 4.3] décrivant la projection sur l'espace des fonctions uniformes (i.e., combinaisons linéaires de caractères de Deligne-Lusztig) de la restriction à $G_m.G'_{m'}$ d'une représentation apparentée $\omega^\flat$ qui a été définie par Gérardin (cf. [G, théorème 2.4 (c)]). Pour les paires symplectiques-orthogonales, les représentations ω et $\omega^\flat$ ont même restriction à $G_m.G'_{m'}$; dans les cas linéaires et unitaires, ces restrictions diffèrent par la multiplication par une représentation de G_m à valeur dans $\{-1, 1\}$. L'étude de la correspondance de Howe peut donc être remplacée par celle de l'application linéaire Θ entre groupes de Grothendieck $\mathscr{R}(G_m) \to \mathscr{R}(G'_{m'})$ induite par $\omega^\flat$.

Le groupe G_m étant dans tous les cas considérés l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique réductif $\mathbf{G}$ sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$, défini sur $\mathbb{F}_q$, si F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant, on a $G_m = \mathbf{G}^F$. Srinivasan n'ayant considéré que les paires $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{SO}^{\pm}_{2m'}(q))$ (au lieu de toutes les paires symplectiques-orthogonales), nous supposerons les groupes orthogonaux pairs dans la suite, sauf mention contraire. Cependant nous pourrons traiter le cas de $\mathbf{O}_{2m'}$ (et pas seulement $\mathbf{SO}_{2m'}$) en étendant certains résultats aux groupes non connexes. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique connexe, et soit $\mathbf{G}^*$ un groupe dual de $\mathbf{G}$ (i.e., dont le système de racines est dual du système de racines de $\mathbf{G}$) et F^* une isogénie de $\mathbf{G}^*$ duale de F. Lusztig a défini une partition de l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathbf{G}^F$ en séries $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ para-

Reçu le 15 octobre 1993. Révision reçue le 7 juillet 1995.

métrées par les classes de conjugaison F^*-stables d'éléments semi-simples s de $\mathbf{G}^*$. Les représentations unipotentes sont par définition les éléments de $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$, et cette partition est analogue à une "décomposition de Jordan": $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ est en bijection avec $\mathscr{E}(\mathrm{C}_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$. Nous étendons cette description au cas où $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{O}_{2m'}$.

Une conséquence facile du résultat de Srinivasan est la compatibilité de la correspondance de Howe avec les séries de Lusztig. Plus précisément, si $(\mathbf{G}, F)$, $(\mathbf{G}', F')$ sont tels que $G_m = \mathbf{G}^F$, $G'_{m'} = \mathbf{G}'^{F'}$, et si $\chi \in \mathscr{E}(\mathbf{G}^F, (s))$, où (s) est la classe de $\mathbf{G}^*$-conjugaison d'un élément semisimple s de $\mathbf{G}^{*F^*}$, alors il existe une classe de $\mathbf{G}'^*$-conjugaison semisimple (s') bien définie de $\mathbf{G}'^*$ telle que $\Theta(\chi)$ soit dans le sous-espace $\mathscr{R}(\mathbf{G}'^{F'}, (s'))$ de $\mathscr{R}(\mathbf{G}'^{F'})$ engendré par $\mathscr{E}(\mathbf{G}'^{F'}, (s'))$ et cette application entre classes semi-simples est induite par l'inclusion naturelle d'un des groupes $\mathbf{G}^{*F^*}$ ou $\mathbf{G}'^{*F'^*}$ dans l'autre (cf. proposition 2.3; cette situation est analogue à celle considérée dans [A] pour des paires réductives duales sur un corps p-adique). En particulier, l'image par la correspondance de Howe d'une représentation irréductible unipotente est une somme de représentations irréductibles unipotentes.

Nous montrons (théorème 2.6) que la projection uniforme de la restriction de $\omega^\flat$ au sous-espace $\mathscr{R}(\mathbf{G}^F, (s)) \otimes \mathscr{R}(\mathbf{G}'^{F'}, (s'))$ se décrit en fonction de la correspondance entre représentations unipotentes de $\mathrm{C}_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et $\mathrm{C}_{\mathbf{G}'^*}(s')^{F'^*}$ induite, suivant la composante irréductible, soit par $\omega^\flat$, soit par R (où, pour un groupe fini H, on désigne par R la représentation naturelle de $H \times H$ sur $\mathbb{C}H$). Il est naturel de conjecturer que cette description reste valable sans prendre la projection uniforme. Dans la suite nous ne considérons que la restriction de $\omega^\flat$ aux représentations unipotentes.

Un raisonnement analogue à celui fait par Kudla pour les groupes p-adiques [K, théorème 2.5] montre que la correspondance de Howe est compatible à la répartition des représentations irréductibles en "séries de Harish-Chandra" associées (au moyen de l'induction parabolique) à des paires formées d'un sous-groupe de Levi et d'une représentation irréductible cuspidale de ce dernier (cf. théorème 3.7).

Parmi les groupes membres d'une paire duale irréductible, seuls $\mathbf{O}^+_{2k^2}(q)$ avec k pair, $\mathbf{O}^-_{2k^2}(q)$ avec k impair, $\mathbf{Sp}_{2(k^2+k)}(q)$ et $\mathbf{U}_{(1/2)(k^2+k)}(q)$ possèdent une représentation unipotente cuspidale; ces groupes ont une unique représentation unipotente cuspidale excepté $\mathbf{O}^\pm_{2k^2}(q)$ qui en possède deux, extensions de l'unique représentation unipotente cuspidale de $\mathbf{SO}^\pm_{2k^2}(q)$. A toute représentation unipotente cuspidale est ainsi associé un entier k; Adams et Moy ont démontré que la correspondance de Howe au niveau des représentations unipotentes cuspidales est donnée par une application θ telle que $\theta(k) = k \pm 1$ si $k \neq 0$ et $\theta(0) = 0$ ou 1 (cf. [AM, théorèmes 4.1 et 5.2]).

Les représentations irréductibles du groupe $\mathbf{Sp}_{2m}(q)$, (resp. $\mathbf{O}^\pm_{2m'}(q)$, resp. $\mathbf{U}_m(q)$) d'une même série de Harish-Chandra sont en bijection avec les représentations irréductibles d'un groupe de Weyl de type $\mathbf{B}_{m-k^2-k}$ (resp. $\mathbf{B}_{m'-k^2}$, resp. $\mathbf{B}_{(1/2)(m-((k^2+k)/2))}$ (cf. [L2] ou [C, §13.8] et notre lemme 3.2). Pour les paires réductives duales irréductibles $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q))$ et $(\mathbf{U}_m(q), \mathbf{U}_{m'}(q))$, la correspondance de Howe entre séries de Harish-Chandra de représentations irréductibles unipotentes se traduit donc par une correspondance entre des représentations de paires de groupes de Weyl respectivement de type $(\mathbf{B}_{m-k^2-k}, \mathbf{B}_{m'-\theta(k)^2})$ et de type $(\mathbf{B}_{(1/2)(m-((k^2+k)/2))}, \mathbf{B}_{(1/2)(m-((\theta(k)^2+\theta(k))/2))})$.

Soit $(W_l, W_{l'})$ une telle paire de groupes de Weyl de type $(\mathbf{B}_l, \mathbf{B}_{l'})$. Nous notons φ l'unique homomorphisme de W_l dans $\{-1, 1\}$ de noyau le sous-groupe de type $\mathbf{D}_l$ de W_l. Si r est un entier compris entre 0 et l, nous désignons par $\mathrm{Irr}(W_r)$ l'ensemble des caractères irréductibles de W_r; le groupe $W_r \times W_{l-r}$ s'envoie naturellement dans W_l. Nous démontrons (théorème 3.10) que la correspondance de Howe au niveau des paires de groupes de Weyl est décrite par l'un des termes suivants:

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant \min(l,l')} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W_r)} (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l-r}}^{W_l} \chi \otimes \mathrm{Id}) \otimes (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l'-r}}^{W_{l'}} \varphi\chi \otimes \mathrm{Id}),$$

pour la paire $(\mathbf{U}_m(q), \mathbf{U}_{m'}(q))$ avec k impair ou $k = k' = 0$;

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant \min(l,l')} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W_r)} (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l-r}}^{W_l} \chi \otimes \varphi) \otimes (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l'-r}}^{W_{l'}} \varphi\chi \otimes \mathrm{Id}),$$

pour la paire $(\mathbf{U}_m(q), \mathbf{U}_{m'}(q))$ sinon.

Nous conjecturons (conjecture 3.11) que la correspondance de Howe est donnée par les formules suivantes:

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant \min(l,l')} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W_r)} (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l-r}}^{W_l} \chi \otimes \varphi) \otimes (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l'-r}}^{W_{l'}} \chi \otimes \varphi),$$

pour la paire $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{+}_{2m'}(q))$ si k est pair et la paire $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{-}_{2m'}(q))$ si k est impair;

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant \min(l,l')} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W_r)} (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l-r}}^{W_l} \chi \otimes \mathrm{Id}) \otimes (\mathrm{Ind}_{W_r \times W_{l'-r}}^{W_{l'}} \chi \otimes \varphi),$$

pour la paire $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{+}_{2m'}(q))$ si k est impair et la paire $(\mathbf{Sp}_{2m}(q), \mathbf{O}^{-}_{2m'}(q))$ si k est pair. Nous donnons des indices en faveur de cette conjecture au §6. En particulier, à l'aide d'un ordinateur, et en utilisant un résultat de Waldspurger [MVW, chapitre 4, IV, 5] qui montre que la restriction de la représentation de Weil est sans multiplicité pour les paires de type I, nous avons vérifié cette conjecture pour $m, m' \leqslant 11$.

Nous décrivons aussi entièrement la correspondance de Howe dans le cas des paires $(\mathbf{GL}_m(q), \mathbf{GL}_{m'}(q))$ (dites de type II) au théorème 5.5.

L'une des motivations de cet article est l'existence d'une correspondance du même type entre représentations de deux groupes p-adiques qui sont membres d'une paire réductive duale. Sur un corps p-adique, la représentation de Weil étant seulement une représentation projective, on doit remplacer le groupe symplectique par un revêtement, le groupe métaplectique (voir [H3, pour une introduction à ce sujet]); une autre différence avec le cas fini réside dans le fait que sur les corps p-adiques la correspondance est bijective pour les paires qui ne sont pas de type II (conjecture de Howe maintenant démontrée, voir [W]). En dépit de ces différences, la correspondance sur les corps p-adiques est liée à celle sur les corps finis, comme le montre en particulier l'article de Howe [H4] et l'on remarque des analogies concernant son comportement fonctoriel (comparer la proposition 2.3 à [A, théorème 5.9]).

SOMMAIRE

1. Rappels et notations. Soit H un groupe fini. Nous noterons $Z(H)$ le centre de H, $\mathrm{Irr}(H)$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles complexes, ou dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, de H et $\mathscr{R}(H)$ le groupe des caractères, de base $\mathrm{Irr}(H)$ sur $\mathbb{Z}$. Pour $h, g \in H$ on note ${}^h g$ pour hgh^{-1}.

Soit $\langle F \rangle$ un groupe cyclique de générateur F agissant sur H. On notera $h \mapsto {}^F h$ l'action de F. On dit que deux éléments h et k de H sont F-conjugués si les éléments hF et kF de $H \rtimes \langle F \rangle$ sont conjugués. On note H^F les points fixes de H par F.

Dans la suite, $\mathbb{F}_q$ désignera le corps fini à q (une puissance d'un nombre premier impair p) éléments et $\overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Rappelons que les classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de tores maximaux rationnels de $\mathbf{G}$ sont paramétrées par les F-classes (classes de F-conjugaison) du groupe de Weyl $W_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$, relatif à un tore maximal rationnel fixé $\mathbf{T}$ (cf. par exemple [C, proposition 3.3.3]). Cette bijection associe au tore ${}^g\mathbf{T}$ (où $g \in \mathbf{G}$) son "type" par rapport au tore $\mathbf{T}$, qui est la F-classe de $W_{\mathbf{G}}$ définie par l'élément $g^{-1F}g \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$.

A. Groupes classiques sur les corps finis

Groupes linéaires et unitaires. Soit $\mathbf{GL}_l$ le groupe linéaire en dimension l sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. C'est un groupe algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, défini sur $\mathbb{F}_q$; on peut le munir de deux $\mathbb{F}_q$-structures, l'une correspondant à l'endomorphisme de Frobenius F^+ qui agit par élévation à la puissance q des coefficients matriciels et l'autre correspondant à F^- défini par ${}^{F^-}g = {}^{tF^+}g^{-1}$ (où ${}^tg$ désigne la matrice transposée de g). Le groupe $\mathbf{GL}_l^{F^+}$ est le groupe linéaire $\mathrm{GL}_l(q)$ en dimension l sur le corps $\mathbb{F}_q$, et le groupe $\mathbf{GL}_l^{F^-}$, est le groupe unitaire $\mathrm{U}_l(q)$ en dimension l relativement à l'automorphisme d'ordre 2 de $(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$. Nous le noterons aussi $\mathrm{GL}_l(-q)$, ce qui nous permettra de considérer simultanément les groupes linéaires et unitaires par la notation $\mathrm{GL}_l(\varepsilon q)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit F un endomorphisme qui est soit F^+, soit F^-. Soit $\mathbf{T}_l$ le tore des matrices diagonales de $\mathbf{GL}_l$. Ce tore est F-stable; il est déployé dans le cas linéaire, mais tout sous-groupe de Borel le contenant est envoyé par F sur le sous-groupe de Borel opposé dans le cas unitaire. Dans les deux cas, le groupe de Weyl $\mathrm{N}_{\mathbf{GL}_l}(\mathbf{T}_l)/\mathbf{T}_l$ s'identifie au groupe symétrique $\mathfrak{S}_l$, l'élément w de $\mathfrak{S}_l$ envoyant $\mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \mathbf{T}_l$ sur $\mathrm{diag}(t_{w(1)}, t_{w(2)}, \ldots, t_{w(l)})$, et l'action de F sur $\mathfrak{S}_l$ est triviale; les $\mathbf{GL}_l{}^F$-classes de tores maximaux rationnels sont donc paramétrées par les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_l$.

Géométries orthogonales et symplectiques. Soit V un $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle\, ,\rangle$ qui est soit alternée soit symétrique. Dans le cas où la forme $\langle\, ,\rangle$ est symétrique la forme quadratique associée est équivalente à la forme

$$x_1x_{1'} + x_2x_{2'} + \cdots + x_lx_{l'} \quad \text{si } \dim V = 2l$$

$$x_1x_{1'} + x_2x_{2'} + \cdots + x_lx_{l'} + x_0^2 \quad \text{si } \dim V = 2l + 1.$$

Soit $\mathbf{Sp}_{2l}$ (resp. $\mathbf{O}_{2l}$ ou $\mathbf{O}_{2l+1}$) le groupe des automorphismes de $(V, \langle\, ,\rangle)$ si la forme $\langle\, ,\rangle$ est alternée (resp. symétrique). Dans la suite de cette partie nous supposerons que V est un espace vectoriel quadratique de dimension paire. Les groupes $\mathbf{O}_{2l}$ et $\mathbf{Sp}_{2l}$ ont tous deux pour tore maximal le tore $\mathbf{T}_l$ des matrices diagonales d'entrées $(t_1, \ldots, t_l, t_l^{-1}, \ldots, t_1^{-1})$ que nous noterons encore $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_l)$.

Soient F^+ l'endomorphisme qui élève tous les coefficients d'une matrice à la puissance q (le groupe $\mathbf{O}_{2l}^+(q) = \mathbf{O}_{2l}^{F^+}$ est alors le groupe orthogonal sur $\mathbb{F}_q$ de la forme quadratique considérée) et F^- l'endomorphisme défini par $F^-(g) = \sigma F^+(g)\sigma^{-1}$ pour $g \in \mathbf{O}_{2l}$, où σ est un élément fixé stable par F^+ de $\mathbf{O}_{2l} - \mathbf{SO}_{2l}$ (où $\mathbf{SO}_{2l}$ est la composante neutre de $\mathbf{O}_{2l}$). Deux tels éléments σ différant par un élément de $\mathbf{SO}_{2l}$, deux choix de F^- diffèrent par un automorphisme intérieur et les groupes de points rationnels sont isomorphes. Nous prendrons pour σ la matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{l-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \mathrm{Id}_{l-1} \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\mathbf{O}_{2l}^-(q) = \mathbf{O}_{2l}^{F^-}$ est le groupe orthogonal sur $\mathbb{F}_q$ pour l'autre classe d'équivalence de formes quadratiques.

Soit $\mathbf{T}_l$ le tore diagonal de $\mathbf{Sp}_{2l}$, et $W(\mathbf{C}_l) = \mathrm{N}_{\mathbf{Sp}_{2l}}(\mathbf{T}_l)/\mathbf{T}_l$ le groupe de Weyl correspondant. Le groupe $W(\mathbf{C}_l)$ s'identifie naturellement au groupe W_l des permutations de $\{1, 2, \ldots, l, l', \ldots, 2', 1'\}$ qui commutent avec l'involution $(11')(22')\cdots(ll')$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, l-1\}$ nous noterons $s_j \in W_l$ la permutation qui échange j et $j+1$ ainsi que j' et $(j+1)'$ et laisse fixes les autres éléments. Soit $\sigma_r \in W_l$ $(1 \leqslant r \leqslant l)$ la permutation qui échange r et r' et laisse fixes les autres éléments. On vérifie facilement que

$$\sigma_r = s_r s_{r+1} \cdots s_{l-1} \sigma_l s_{l-1} \cdots s_{r+1} s_r. \tag{1.1}$$

Alors $\{s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, \sigma_l\}$ est un système de générateurs de W_l en tant que groupe de Coxeter. Soit $\varphi_l \colon W_l \to \{-1, +1\}$ l'homomorphisme défini sur les générateurs par $\varphi_l(s_j) = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant l-1$ et $\varphi_l(\sigma_l) = -1$. Par 1.1 on a $\varphi_l(\sigma_r) = -1$, d'où $\varphi_l|_{W_{l-1}} = \varphi_{l-1}$; ceci nous autorisera à noter φ sans préciser l'indice. On peut voir que

$$\varphi(w) = (-1)^{|\{w(1), \ldots, w(l)\} \cap \{1', \ldots, l'\}|} \tag{1.2}$$

car l'égalité est vraie pour w un des générateurs de $\{s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, \sigma_l\}$ et puisque l'application $w \mapsto (-1)^{|\{w(1), \ldots, w(l)\} \cap \{1', \ldots, l'\}|}$ est un morphisme de W_l dans $\{-1, +1\}$.

Une permutation dans W_l définit une permutation de l'ensemble formé des couples $(1, 1'), (2, 2'), \ldots, (l, l')$. On en déduit un homomorphisme de W_l dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_l$.

Nous noterons W_l^+ le noyau de φ; $(W_l^+, \{s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, \sigma_l s_{l-1} \sigma_l\})$ est un groupe de Coxeter qui s'identifie naturellement au groupe de Weyl $W(\mathbf{D}_l) = \mathrm{N}_{\mathbf{SO}_{2l}}(\mathbf{T}_l)/\mathbf{T}_l$. Nous noterons W_l^- la classe $W_l^+ \sigma_l$.

Nous noterons parfois $s' = s_{l-1}$ et $s'' = \sigma_l s_{l-1} \sigma_l$: ce sont les deux extrémités de la “fourche” du diagramme de Dynkin $\mathbf{D}_l$. Soient r et $\tilde{r}$ deux entiers naturels tels que $r+\tilde{r}=l$ et soit l'élément de W_l^+ qui échange $r+1$ et $(r+1)'$ ainsi que l et l' et laisse fixes les autres éléments. Pour $r \leqslant l-2$, on a $\sigma_r\sigma_l = s_r s_r$.

Le groupe de Weyl $N_{\mathbf{O}_{2l}}(\mathbf{T}_l)/\mathbf{T}_l$ est naturellement isomorphe à W_l, et cet isomorphisme identifie l'élément σ de $\mathbf{O}_{2l} - \mathbf{SO}_{2l}$ défini au paragraphe précédent à σ_l. On a $W_l = W(\mathbf{D}_l) \cup \sigma_l W(\mathbf{D}_l)$.

Le groupe de Weyl $W(\mathbf{B}_l)$ de $\mathbf{SO}_{2l+1}$ s'identifie naturellement au groupe W_l. Pour l'inclusion naturelle $(\mathbf{O}_{2l}, F^+) \hookrightarrow (\mathbf{SO}_{2l+1}, F)$ un tore F^+-stable de type $w \in W(\mathbf{D}_l)$ de $\mathbf{SO}_{2l}$ est du même type w comme tore de $\mathbf{SO}_{2l+1}$, via l'inclusion $W_l^+ \subset W_l$; pour l'inclusion $(\mathbf{O}_{2l}, F^-) \hookrightarrow (\mathbf{SO}_{2l+1}, F)$ (définie par exemple par $x \mapsto {}^g x$ où $g^{-1}.{}^F g = \sigma_l$) un tore F^--stable de type w de $\mathbf{SO}_{2l}$ est de type $\sigma_l w$ comme tore de $\mathbf{SO}_{2l+1}$; de plus la fusion des classes de tores rationnels de $(\mathbf{SO}_{2l}, F^+)$ (resp. $(\mathbf{SO}_{2l}, F^-)$) par la conjugaison sous $\mathbf{SO}_{2l+1}(q)$ est la même que celle sous $\mathbf{O}_{2l}^+(q)$ (resp. $\mathbf{O}_{2l}^-(q)$). Il y a donc une bijection naturelle entre l'ensemble des classes de conjugaison sous $\mathbf{SO}_{2l+1}(q)$ des tores rationnels de $\mathbf{SO}_{2l+1}$ et l'union de l'ensemble des classes de $\mathbf{O}_{2l}^+(q)$-conjugaison des tores rationnels de $(\mathbf{SO}_{2l}, F^+)$ et de l'ensemble des classes de $\mathbf{O}_{2l}^-(q)$-conjugaison des tores rationnels de $(\mathbf{SO}_{2l}, F^-)$.

B. Éléments semisimples et centralisateurs. Soit $\mathbf{G}$ un des groupes $\mathbf{GL}_l$, $\mathbf{SO}_{2l+1}$ ou $\mathbf{O}_{2l}$, et F un endomorphisme de Frobenius sur $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}^F$ soit l'un des groupes $\mathbf{GL}_l(\varepsilon q)$, $\mathbf{SO}_{2l+1}(q)$ ou $\mathbf{O}_{2l}^{\pm}(q)$. Soit $\mathbf{T}_l$ le tore maximal de $\mathbf{G}$ formé des matrices diagonales; on a ${}^F\mathbf{T}_l = \mathbf{T}_l$. On a naturellement $\mathbf{T}_l \simeq \overline{\mathbb{F}}_q^l$; si $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbf{T}_l$ nous appellerons les λ_i par convention les “valeurs propres” de s (dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_l$ il s'agit bien des valeurs propres de s comme élément de $\mathbf{GL}_l$, mais dans le cas $\mathbf{O}_{2l}$ (resp. $\mathbf{SO}_{2l+1}$) les “vraies” valeurs propres de s sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \lambda_l^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}$ (resp. $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, 1, \lambda_l^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}$)). Choisissons un ordre total sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ tel 1 soit le plus grand élément, et -1 le plus grand après 1, et soit $(\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$ le sous-ensemble de $\mathbf{T}_l$ formé des éléments dont les valeurs propres sont en ordre croissant pour cet ordre. Tout élément semisimple de $\mathbf{G}$ est conjugué à un unique élément de $(\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$. Pour $s \in (\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q$, nous notons $\nu_\lambda(s)$ le nombre de valeurs propres de s égales à λ.

Soient $C_{\mathbf{G}}(s)$ le centralisateur dans $\mathbf{G}$ de s et $W(s) = \{w \in W_{\mathbf{G}} \mid {}^w s = s\}$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}}(s)$. Nous noterons $Z(s)$ l'ensemble des $w \in W_{\mathbf{G}}$ tels que ${}^{wF}s = s$. Un élément $s \in (\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$ est conjugué à un élément de $\mathbf{G}^F$ si et seulement si $Z(s) \neq \varnothing$: si $w \in Z(s)$ et $x \in \mathbf{G}$ est tel que $x^{-1}Fx = w$, le couple (wF, s) est conjugué par x à $(F, {}^x s)$, et par conséquent $(wF, C_{\mathbf{G}}(s))$ est conjugué à $(F, C_{\mathbf{G}}({}^x s))$. Pour décrire les centralisateurs des éléments semisimples de $\mathbf{G}$ et leur structure rationnelle, il suffit donc de décrire $C_{\mathbf{G}}(s)$ et $Z(s)$ pour $s \in (\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$.

Le groupe $C_{\mathbf{G}}(s)$ a une décomposition naturelle en produit suivant les valeurs propres de s: $C_{\mathbf{G}}(s) = \prod_\lambda \mathbf{G}_\lambda(s)$ où $\mathbf{G}_\lambda(s)$ est un groupe réductif quasi-simple de rang $\nu_\lambda(s)$. Si $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_l$, ou si $\lambda \neq \pm 1$, on a $\mathbf{G}_\lambda(s) \simeq \mathbf{GL}_{\nu_\lambda(s)}$. Si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2l+1}$, on a $\mathbf{G}_{-1}(s) \simeq \mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}$ et $\mathbf{G}_1(s) \simeq \mathbf{SO}_{2\nu_1(s)+1}$; si $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2l}$, et si $\nu_{-1}(s)$ et $\nu_1(s)$ sont tous deux non nuls, on a $\mathbf{G}_{-1}(s) \times \mathbf{G}_1(s) \simeq (\mathbf{SO}_{2\nu_{-1}(s)} \times \mathbf{SO}_{2\nu_1(s)}) \rtimes \langle \sigma_s \rangle$, où σ_s est un élément qui induit l'automorphisme extérieur non trivial simultanément sur $\mathbf{SO}_{2\nu_{-1}(s)}$ et sur $\mathbf{SO}_{2\nu_1(s)}$; si $\nu_{-1}(s)$ ou $\nu_1(s)$ est nul, alors $\mathbf{G}_{-1}(s) \simeq \mathbf{SO}_{2\nu_{-1}(s)}$ et $\mathbf{G}_1(s) \simeq \mathbf{SO}_{2\nu_1(s)}$. Si $\mathbf{G} = \mathbf{O}_{2l}$, la description de $C_{\mathbf{G}}(s)$ ne change pas sauf que dans tous les cas on a $\mathbf{G}_{-1}(s) \times \mathbf{G}_1(s) \simeq \mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)} \times \mathbf{O}_{2\nu_1(s)}$.

Le groupe $W(s)$ a une décomposition en produit correspondant à celle de $C_{\mathbf{G}}(s)$: $W(s) = \prod_\lambda W_\lambda(s)$. D'après la description ci-dessus, pour $\mathbf{G} = \mathbf{SO}_{2l+1}$ ou $\mathbf{O}_{2l}$, on a $W_{-1}(s) \simeq W(\mathbf{B}_{\nu_{-1}(s)})$ et $W_1(s) \simeq W(\mathbf{B}_{\nu_1(s)})$. Enfin $Z(s)$ est une classe de la forme $w.W(s)$.

On pose $\varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^{\mathbb{F}_q\text{-rang de } \mathbf{G}}$, où par définition le $\mathbb{F}_q$-rang de $\mathbf{G}$ est la dimension d'un tore déployé maximal de $\mathbf{G}$. Si $(F, {}^x s)$ est conjugué à un couple (wF, s) où $s \in (\mathbf{T}_l)_{\leqslant}$ et $w \in Z(s)$, nous aurons besoin de calculer $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}}({}^x s)}$. Soit Φ_s le système de racines de $C^0_{\mathbf{G}}(s)$, et soit Φ_s^+ l'ensemble des racines de Φ_s positives pour l'ordre défini par le sous-groupe de Borel $\mathbf{B} \supset \mathbf{T}_l$. On dit que $w_1 \in Z(s)$ est Φ_s-réduit si ${}^{w_1F}\Phi_s^+ = \Phi_s^+$. Si on note $W^0(s)$ le groupe de Weyl de $C^0_{\mathbf{G}}(s)$, alors toute classe à gauche de $Z(s)$ sous $W^0(s)$ possède un unique élément Φ_s-réduit.

1.3. LEMME. *Si le couple $(F, {}^x s)$ est conjugué au couple (wF, s), alors $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}}({}^x s)} = (-1)^{l(w_1)}$ où w_1 est l'unique élément Φ_s-réduit de la classe $W^0(s)wF$, si $(\mathbf{G}, F)$ est un groupe linéaire, orthogonal ou symplectique. Si $(\mathbf{G}, F)$ est un groupe unitaire, $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}}({}^x s)} = (-1)^{l(w_1)+l(w_0)+l(w_0')}$, où w_0 (resp. w_0') est l'élément de plus grande longueur de $W_{\mathbf{G}}$ (resp. $W_1(s)$).*

Démonstration. Si $\mathbf{T}'$ est un tore maximalement déployé de $(wF, C_{\mathbf{G}}(s))$ alors on a $\varepsilon_{\mathbf{T}'} = \varepsilon_{C_{\mathbf{G}}(s)}$; de même, si $(\mathbf{G}, F)$ est un groupe linéaire, orthogonal ou symplectique, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{T}_l}$, puisque $\mathbf{T}_l$ est inclus dans un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ rationnel et est donc maximalement déployé. Si $(\mathbf{G}, F)$ est un groupe unitaire, par [DM3, 12.10] on a $\varepsilon_{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{T}_l}(-1)^{l(w_0)}$, puisque dans ce cas $\mathbf{T}_l$ est de type w_0 par rapport à un tore maximalement déployé. De même, on a $\varepsilon_{\mathbf{T}'}\varepsilon_{\mathbf{T}_l} = (-1)^{l(w')}$, où w' est le type de $\mathbf{T}'$. Il reste donc a voir que $w' = w_1$, ce qui est clair car par construction w_1F stabilise le sous-groupe de Borel $\mathbf{B} \cap C^0_{\mathbf{G}}(s)$. □

C. La représentation de Weil et la correspondance de Howe. Nous adoptons la présentation figurant dans [H1]. Le groupe H_n formé des points rationnels du radical unipotent du sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{GL}_{n+2}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_1$ est appelé le n-ième groupe de Heisenberg sur $\mathbb{F}_q$; on a $Z(H_n) \simeq \mathbb{F}_q$, le commutateur induit une forme alternée $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ sur $H_n/Z(H_n) \simeq \mathbb{F}_q^{2n}$, et $H_n \simeq \mathbb{F}_q^{2n} \times \mathbb{F}_q$ avec pour loi de groupe

$$(v, z)(v', z') = \left(v + v', z + z' + \frac{1}{2}\langle\!\langle v, v' \rangle\!\rangle\right).$$

Le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$ des transformations linéaires de $\mathbb{F}_q^{2n}$ préservant la forme $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$ agit donc sur H_n comme un groupe d'automorphismes, qui laissent stable $\mathbb{F}_q^{2n}$ et fixent $\mathbb{F}_q$ point par point (dans la décomposition $\mathbb{F}_q^{2n} \times \mathbb{F}_q$).

Pour tout caractère non trivial ζ de Z il existe, à isomorphisme près, une unique représentation (fidèle) ρ_ζ de H_n sur $\mathbb{C}$ de restriction à Z égale à un multiple de ζ; cette représentation est de degré q^n. Puisque ρ_ζ est unique, $\mathbf{Sp}_{2n}(q) \subset \mathrm{Aut}(H_n)$ stabilise la représentation ρ_ζ; nous obtenons ainsi une représentation projective de $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$, de degré q^n.

Puisque $H^2(\mathbf{Sp}_{2n}(q), \mathbb{C}^\times) = 0$, cette représentation projective est une vraie représentation; elle est uniquement déterminée par ζ, si l'on exclut le cas $\mathbf{Sp}_2(3) = \mathbf{SL}_2(3)$, car dans les autres cas, $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$ étant engendré par ses commutateurs n'a pas de caractère linéaire non trivial. Cette représentation ω est appelée la représentation de Weil de $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$ associée au caractère ζ.

Nous rappelons brièvement ci-dessous la classification des paires réductives duales irréductibles de $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$ (cf. [H2, §3] ou [MVW, chapter I]).

(1) Soient V et V' deux $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de dimensions respectives m et m' avec $mm' = n$. L'espace $E = (V \otimes_{\mathbb{F}_q} V') \oplus (V \otimes_{\mathbb{F}_q} V')^*$ est symplectique de dimension $2n$ pour la forme $\langle\langle\, ,\rangle\rangle$ définie par:

$$\langle\langle x + x^*, y + y^* \rangle\rangle = y^*(x) - x^*(y),$$
$$\text{pour} \quad x, y \in V \otimes_{\mathbb{F}_q} V' \quad \text{et} \quad x^*, y^* \in (V \otimes_{\mathbb{F}_q} V')^*.$$

Si $G_m = \mathbf{GL}(V)$ et $G'_{m'} = \mathbf{GL}(V')$, le sous-groupe $G_m.G'_{m'}$ de $\mathbf{GL}(E)$ est contenu dans le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(E)$ et $(G_m, G'_{m'})$ est une paire réductive duale irréductible dans $\mathbf{Sp}(E)$.

(2) Soit V (resp. V') un $\mathbb{F}_{q^2}$-espace vectoriel de dimension m (resp. m') muni d'une forme ε-hermitienne (resp. ε'-hermitienne) notée $\langle\, ,\rangle$ (resp. $\langle\, ,\rangle'$) avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon\varepsilon' = -1$. On suppose que $mm' = n$. Alors $E = V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} V'$ est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel symplectique pour la forme alternée non dégénérée:

$$\langle\langle v_1 \otimes v'_1, v_2 \otimes v'_2 \rangle\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(\langle v_1, v_2\rangle \langle v'_2, v'_1\rangle'),$$
$$\text{pour} \quad v_1, v_2 \in V \quad \text{et} \quad v'_1, v'_2 \in V';$$

nous désignerons par $\mathbf{Sp}(E)$ son groupe d'isométries et nous poserons $G_m = \mathbf{U}_m(q)$ et $G'_{m'} = \mathbf{U}_{m'}(q)$. Alors, le groupe $G_m.G'_{m'}$ est contenu dans le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(E)$ et $(G_m, G'_{m'})$ est une paire réductive duale irréductible dans $\mathbf{Sp}(E)$.

(3) Soit V (resp. V') un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2m$ (resp. m'_1) muni d'une forme alternée (resp. orthogonale) non dégénérée, notée $\langle\, ,\rangle$ (resp. $\langle\, ,\rangle'$). On suppose que $mm'_1 = n$. Alors $E = V \otimes_{\mathbb{F}_q} V'$ est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel symplectique pour la forme alternée non dégénérée définie par:

$$\langle\langle v_1 \otimes v'_1, v_2 \otimes v'_2 \rangle\rangle = (\langle v_1, v_2\rangle \langle v'_2, v'_1\rangle'),$$
$$\text{pour} \quad v_1, v_2 \in V \quad \text{et} \quad v'_1, v'_2 \in V';$$

nous désignerons par $\mathbf{Sp}(E)$ son groupe d'isométries et nous poserons $G_m = \mathbf{Sp}_{2m}(q)$. Alors, le groupe $G_m.G'$ est contenu dans le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(E)$, où

G' est le groupe orthogonal de la forme $\langle\ ,\ \rangle'$ et (G_m, G') est une paire réductive duale irréductible dans $\mathbf{Sp}(E)$. Dans la suite, nous ne considérerons ce type de paires que pour $m'_1 = 2m'$ et nous noterons $G'_{m'}$ pour G'.

Nous utilisons dans la suite les résultats de Srinivasan qui a étudié une autre construction, la représentation de Weil définie par Gérardin dans [G], que nous noterons $\omega^\flat$. Toutefois les résultats de Srinivasan sont aussi bien utilisables pour étudier la restriction de ω à $G_m.G'_{m'}$, car:

- dans le cas (3) ci-dessus, ω et $\omega^\flat$ ont même restriction à $G_m.G'_{m'}$;
- dans les cas (1) et (2) ci-dessus, si ν_m (resp. $\nu_{m'}$) désigne l'unique caractère linéaire d'ordre deux du groupe G_m (resp. $G'_{m'}$), la restriction de $\omega^\flat$ à $G_m.G'_{m'}$ est égale à la restriction à $G_m.G'_{m'}$ de ω multipliée par le caractère $\nu_m^{m'} \otimes \nu_{m'}^{m}$ de $G_m.G'_{m'}$.

La restriction de $\omega^\flat$ à $G_m.G'_{m'}$ définit, par inflation, une représentation de $G_m \times G'_{m'}$, dont nous noterons $\omega_{m,m'}$ le caractère.

Nous appellerons correspondance de Howe la correspondance (qui n'est pas une isométrie en général), entre caractères de G_m et caractères de $G'_{m'}$, définie par l'application $\Theta_{G'_{m'}}$ de $\mathscr{R}(G_m)$ dans $\mathscr{R}(G'_{m'})$ donnée par:

$$(1.4) \qquad \omega_{m,m'} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G_m)} \chi \otimes \Theta_{G'_{m'}}(\chi).$$

D. Caractères de Deligne-Lusztig et séries de Lusztig. Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, défini sur $\mathbb{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Aux $\mathbf{G}^F$-classes de conjugaison de couples $(\mathbf{T}, \theta)$ où $\mathbf{T}$ est un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}$, et où $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (où ℓ est un nombre premier différent de p), Deligne et Lusztig ont associé un caractère virtuel $R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\theta)$ de $\mathbf{G}^F$. Les caractères ainsi obtenus sont orthogonaux (mais non nécessairement disjoints) pour deux couples non conjugués.

Plus généralement, si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi rationnel d'un sous-groupe parabolique (non nécessairement rationnel) de $\mathbf{G}$, Lusztig a défini un foncteur $R_\mathbf{L}^\mathbf{G}\colon \mathscr{R}(\mathbf{L}^F) \to \mathscr{R}(\mathbf{G}^F)$ qui étend la définition de $R_\mathbf{T}^\mathbf{G}$. Ce foncteur est parfois appelé "induction de Lusztig", nous noterons ${}^*R_\mathbf{L}^\mathbf{G}$ son adjoint ("restriction de Lusztig"); ces deux foncteurs sont transitifs (cf. [DM3, (11.5)]) et vérifient une "formule de Mackey" (cf. [DM3, chapitre 11]) qui couvre au moins les cas que nous considérons.

Nous noterons $\mathrm{Unif}(\mathbf{G}^F)$ le sous-espace de l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{G}^F)$ des fonctions centrales sur $\mathbf{G}^F$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ engendré par les caractères $R_\mathbf{T}^\mathbf{G}(\theta)$. Les éléments de $\mathrm{Unif}(\mathbf{G}^F)$ sont appelés "fonctions uniformes". "Presque toute" fonction centrale est uniforme, en particulier la fonction caractéristique d'une classe semi-simple; si $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$, toute fonction centrale est uniforme. Il n'en est pas de même dans les autres groupes; par exemple, $\omega_{m,m'}$ n'est pas uniforme dans le cas symplectique-orthogonal si $mm' \neq 0$.

Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe, $\mathbf{G}^*$ un groupe dual de $\mathbf{G}$ (dont le système de racines est dual du système de racines de $\mathbf{G}$), et F^* une isogénie de $\mathbf{G}^*$

duale de F (cf. par exemple [C, 4.3]). Nous considérerons les couples $(\mathbf{G}^F, \mathbf{G}^{*F^*})$ suivants: $(\mathbf{G}^F = \mathbf{GL}_l(\varepsilon q),\ \mathbf{G}^{*F^*} = \mathbf{GL}_l(\varepsilon q))$, $(\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_{2l}(q),\ \mathbf{G}^{*F^*} = \mathbf{SO}_{2l+1}(q))$ et $(\mathbf{G}^F = \mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q),\ \mathbf{G}^{*F^*} = \mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q))$; nous serons aussi amenés à considérer le couple formé de groupes non connexes $(\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q), \mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q))$ (nous utilisons la notation $\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q)$ (resp. $\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)$) pour désigner $\mathbf{SO}_{2l}^{+}(q)$ ou $\mathbf{SO}_{2l}^{-}(q)$ (resp. $\mathbf{O}_{2l}^{+}(q)$ ou $\mathbf{O}_{2l}^{-}(q)$) suivant la valeur de $\varepsilon \in \{1, -1\}$).

Nous avons besoin d'étendre les notions ci-dessus à un groupe réductif non connexe (nous allons en effet les appliquer d'une part à $C_{\mathbf{G}^*}(s)$, qui n'est pas nécessairement connexe car nous n'avons pas supposé $\mathbf{G}$ à centre connexe et d'autre part à $\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}$). Si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif non connexe, nous posons $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) := \mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{0F}}^{\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}^0}(\theta))$ et nous appelons "fonctions uniformes" les combinaisons linéaires de $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ (avec cette définition, il y a moins de fonctions uniformes que dans [DM4], où l'induit ci-dessus est décomposé en somme de certains caractères de Deligne-Lusztig généralisés).

D'après [L2, (7.5.1)], si l'on suppose choisis un isomorphisme entre le groupe multiplicatif $\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$, et un plongement de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$, l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de couples $(\mathbf{T}, \theta)$, où $\mathbf{T}$ est un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}$, et où $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F)$, est en bijection avec l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison de couples $(\mathbf{T}^*, s)$, où $\mathbf{T}^*$ est un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}^*$, et où $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$.

Si la classe sous $\mathbf{G}^F$ de la paire $(\mathbf{T}, \theta)$ correspond à la classe sous $\mathbf{G}^{*F^*}$ de la paire $(\mathbf{T}^*, s)$, nous désignerons aussi par $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\hat{s})$ le caractère de Deligne-Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ de $\mathbf{G}^F$. Etant donné $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ nous noterons (s) sa classe de conjugaison sous $\mathbf{G}^{*F^*}$ et pour s semisimple nous appellerons "série de Lusztig associée à (s)" l'ensemble:

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \bigcup_{\mathbf{T}^* \ni s} \{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F) \mid \langle \chi, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\hat{s}) \rangle \neq 0\}, \tag{1.5}$$

où $\mathbf{T}^*$ parcourt les tores maximaux rationnels de $\mathbf{G}^*$ contenant s. D'après [L2, 7.5.2], les séries de Lusztig quand (s) parcourt l'ensemble des classes semisimples de $\mathbf{G}^{*F^*}$ forment une partition de $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$.

Avec ces notations, pour $\mathbf{G}$ connexe, le paramétrage de Lusztig est alors donné par (cf. par exemple [DM3, 13.23]):

1.6. Théorème (Lusztig). *Il existe une bijection $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$ telle que, en étendant par linéarité π aux caractères virtuels, on ait:*

$$\pi(\varepsilon_{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\hat{s})) = \varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} R_{\mathbf{T}^*}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1_{\mathbf{T}^*}).$$

Nous pouvons étendre le paramétrage ci-dessus à certains groupes non connexes:

1.7. Proposition. *Le théorème 1.6 est encore valable pour les groupes $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{O}_{2l}$, $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}^{*F^*} = \mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)$.*

Démonstration. Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q))$; si ${}^{\sigma}\rho = \rho$, alors $\mathrm{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)}\rho$ est somme de deux représentations irréductibles ρ^{I} et ρ^{II} de $\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)$; sinon $\tilde{\rho} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)}\rho = \mathrm{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)}{}^{\sigma}\rho$ est irréductible; toute représentation irréductible de $\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q)$ est de la forme ρ^{I}, ρ^{II} ou $\tilde{\rho}$.

La classe (s) de $s \in \mathbf{SO}_{2l}$ est σ-invariante si et seulement si s a une valeur propre égale à 1 ou -1. Si s n'a pas de valeur propre égale à 1 ou -1, alors $C_{\mathbf{O}_{2l}}(s) = C_{\mathbf{SO}_{2l}}(s)$ et toute représentation de $\mathscr{E}(\mathbf{O}_{2l}^{\varepsilon}(q), (s))$ est de la forme $\tilde{\rho}$ avec $\rho \in \mathscr{E}(\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q), (s))$, ${}^{\sigma}\rho \in \mathscr{E}(\mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q), ({}^{\sigma}s))$. Si s a une valeur propre 1 ou -1, on peut choisir $s \in (s)$ invariant par σ (par exemple le représentant de (s) dans $\mathbf{T}_{\leqslant}$, cf. §1.B), et la proposition se déduit alors du fait que l'on peut pour $\mathbf{G}^F = \mathbf{SO}_{2l}^{\varepsilon}(q)$ choisir l'application π de 1.6 compatible à σ, i.e. telle que ${}^{\sigma}(\pi(\rho)) = \pi({}^{\sigma}\rho)$. □

On appelle "caractères unipotents" les éléments de $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, 1)$; ils forment donc un "modèle" pour les autres séries de Lusztig. Nous noterons $\mathrm{U}(\mathbf{G}^F)$ le sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbf{G}^F)$ formé des fonctions centrales qui sont combinaisons linéaires de caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$. Soient $\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}$ et $\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}^{\mathbf{G}^F}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathscr{C}(\mathbf{G}^F)$ respectivement sur $\mathrm{Unif}(\mathbf{G}^F)$ et sur $\mathrm{U}(\mathbf{G}^F)$; si $f \in \mathscr{C}(\mathbf{G}^F)$, nous dirons que $\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(f)$ (resp. $\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}^{\mathbf{G}^F}(f)$) est la "projection uniforme" (resp. "projection unipotente") de f.

1.8. Remarque. Puisque la fonction caractéristique de l'identité est uniforme, la projection uniforme d'une fonction centrale quelconque ρ a même dimension que ρ; en particulier si ρ est un (vrai) caractère de $\mathbf{G}^F$ et $\langle \rho, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\hat{s}) \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{T}^* \ni s$, alors la projection de ρ sur $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ est nulle.

Soit $R^{\mathbf{G}^F}$ la représentation du groupe $\mathbf{G}^F \times \mathbf{G}^F$ d'espace les fonctions f sur $\mathbf{G}^F$ à valleurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$, définie par

$$(R^{\mathbf{G}^F}(g_1, g_2)f)(g) := f(g_1 g g_2^{-1}) \quad \text{pour } g_1, g_2, g \in \mathbf{G}^F$$

(i.e., la représentation naturelle de $\mathbf{G}^F \times (\mathbf{G}^F)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[\mathbf{G}^F]$); nous notons encore $R^{\mathbf{G}^F}$ son caractère.

Nous aurons besoin par la suite des deux propositions suivantes:

1.9. Proposition. *Si* $\mathbf{G}$ *est connexe, on a*

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F \times \mathbf{G}^F}(R^{\mathbf{G}^F}) = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}}} \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_w^F)} R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\theta) \otimes R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}}(\theta),$$

où dans la somme ci-dessus $\mathbf{T}_w$ *est un tore de type* w *par rapport à un tore rationnel fixé* $\mathbf{T}_0$ *de* $\mathbf{G}$, *et où* $W_{\mathbf{G}}$ *est le groupe de Weyl de* $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_0)$.

Démonstration. On a (cf. par exemple [DM3, proposition 12.12]))

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}}} R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}_w}^{\mathbf{G}} = \sum_{(\mathbf{T}) \subset \mathbf{G}} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}},$$

où $W(\mathbf{T})$ est le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relatif à $\mathbf{T}$ et où la somme du membre de droite ci-dessus porte sur des représentants des $\mathbf{G}^F$-classes de tores rationnels. La représentation $R^{\mathbf{G}^F}$ est caractérisée par le fait que pour deux caractères irréductibles $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et donc par bilinéarité pour deux fonctions centrales f_1 et f_2, on a:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle R^{\mathbf{G}^F}, f_1 \otimes f_2 \rangle;$$

donc sa projection uniforme est caractérisée par le fait que pour deux fonctions de classe quelconques on a:

$$\langle \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(f_1), \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(f_2) \rangle = \langle \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(R^{\mathbf{G}^F}), f_1 \otimes f_2 \rangle.$$

Mais d'autre part:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(f_1), \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{G}^F}(f_2) \rangle &= \sum_{(\mathbf{T}),(\mathbf{T}')} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|\,|W(\mathbf{T}')^F|} \langle R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_1), R_{\mathbf{T}'}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}'}^{\mathbf{G}}(f_2) \rangle \\
&= \sum_{(\mathbf{T})} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|^2} \langle R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_1), R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \circ {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_2) \rangle \\
&= \sum_{(\mathbf{T})} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|^2} \langle {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_1), ({}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}) \circ {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_2) \rangle \\
&= \sum_{(\mathbf{T})} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|} \langle {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_1), {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_2) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{(\mathbf{T})} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|} \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(T^F)} \theta \otimes \theta, {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_1) \otimes {}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(f_2) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{(\mathbf{T})} \frac{1}{|W(\mathbf{T})^F|} \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(T^F)} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) \otimes R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta), f_1 \otimes f_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

la quatrième égalité d'après la formule de Mackey pour les foncteurs de Lusztig, cf. [DM3, théorème 11.13], d'où le résultat. □

1.10. PROPOSITION. *Soient* $\mathbf{T} \times \mathbf{L}$ *une décomposition en produit direct d'un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$*, où* $\mathbf{T}$ *est un tore, et soit* $W_{\mathbf{L}}$ *le groupe de Weyl de* $\mathbf{L}$*; on a*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\times\mathbf{L}}(\theta \otimes 1) = \frac{1}{|W_{\mathbf{L}}|} \sum_{v \in W_{\mathbf{L}}} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\times\mathbf{T}_v}(\theta \otimes 1),$$

où $\mathbf{T}_v$ *est un tore maximal rationnel de type* v *par rapport à un tore maximal rationnel fixé de* $\mathbf{L}$ *et* θ *un caractère de* $\mathbf{T}^F$.

Démonstration. Nous déduisons l'égalité $1_{\mathbf{L}} = 1/|W_{\mathbf{L}}| \sum_{v \in W_{\mathbf{L}}} R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{T}_v}(1)$ de [DM3, proposition 12.13]; en tensorisant par θ, nous obtenons $\theta \otimes 1 = 1/|W_{\mathbf{L}}| \sum_{v \in W_{\mathbf{L}}} R^{\mathbf{T}\times\mathbf{L}}_{\mathbf{T}\times\mathbf{T}_v}(\theta \otimes 1)$, et (1.10) résulte alors de la transitivité du foncteur de Lusztig.

E. Représentations unipotentes. Dans la suite, nous fixons un tore $\mathbf{T}_0$ de $\mathbf{G}$ inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel, par rapport auquel nous mesurerons les types des autres tores, et nous posons $R_w := R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_w}(1)$. Nous supposons désormais dans cette partie que $\mathbf{G}$ est connexe. Pour toute fonction ϕ sur $W_{\mathbf{G}}$, on considère la fonction R_ϕ définie par

$$R_\phi = R^{\mathbf{G}}_\phi := \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}}} \phi(w) R_w. \tag{1.11}$$

Avec cette définition, si $\mathbf{G}$ est déployé on a

$$R_w = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}})} \phi(w) R_\phi.$$

Les R_ϕ forment une base orthonormée de l'espace $\mathrm{Unif}(\mathbf{G}^F) \cap \mathrm{U}(\mathbf{G}^F)$.

Pour expliquer le cas d'un groupe non déployé, nous avons besoin d'abord de donner quelques résultats sur les fonctions de F-classe. Si H est un groupe fini muni de l'action d'un groupe $\langle F \rangle$ cyclique fini, engendré par un élément F, on appelle fonction de F-classe sur H une fonction f constante sur les F-classes, i.e. vérifiant

$$f(x) = f(hx.{}^F h^{-1}) \quad \text{pour tous } x, h \in H.$$

Une telle fonction s'identifie à la restriction à $H.F = \{hF\}_{h \in H}$ d'une fonction centrale sur $H \rtimes \langle F \rangle$. Nous noterons $\mathscr{C}_F(H)$ l'ensemble des fonctions de F-classe sur H.

Rappelons quelques propriétés des fonctions de F-classe sur H (c'est un cas particulier très simple de la théorie de Clifford, cf. par exemple [DM1, I.6]).

(1) $\chi \in \operatorname{Irr}(H \rtimes \langle F \rangle)$ a une restriction nulle à $H.F$ lorsque $\operatorname{Res}_H^{H \rtimes \langle F \rangle} \chi$ n'est pas irréductible.

(2) Si $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr}(H \rtimes \langle F \rangle)$ ont une restriction irréductible à H, alors

$$\langle \chi_1 \chi_2 \rangle_{H.F} = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Res}_H^{H \rtimes \langle F \rangle} \chi_1 \neq \operatorname{Res}_H^{H \rtimes \langle F \rangle} \chi_2 \\ 1 & \text{si } \chi_1 = \chi_2, \end{cases}$$

où $\langle \chi_1 \chi_2 \rangle_{H.F} = |H|^{-1} \sum_{h \in H} \chi_1(hF) \overline{\chi_2(hF)}$ est le produit scalaire des fonctions de F-classe restrictions de χ_1 et χ_2 à $H.F$.

(3) Si $\operatorname{Res}_H^{H \rtimes \langle F \rangle} \chi_1 = \operatorname{Res}_H^{H \rtimes \langle F \rangle} \chi_2$ alors $\chi_1 = \chi_2 \otimes \theta$ où $\theta \in \operatorname{Irr}(\langle F \rangle)$.

(4) Si K est un sous-groupe de H stable par wF où $w \in H$, nous noterons $\operatorname{Res}_{K.wF}^{H.F}$ (resp. $\operatorname{Ind}_{K.wF}^{H.F}$) le foncteur déduit de $\operatorname{Res}_{K \rtimes \langle wF \rangle}^{H \rtimes \langle F \rangle}$ (resp. $\operatorname{Ind}_{K \rtimes \langle wF \rangle}^{H \rtimes \langle F \rangle}$) par restriction. La réciprocité de Frobenius se restreint:

$$\langle \operatorname{Res}_{K.wF}^{H.F} \chi, \psi \rangle_{K.wF} = \langle \chi, \operatorname{Ind}_{K.wF}^{H.F} \psi \rangle_{H.F}.$$

Si ϕ est une fonction de F-classe sur $W_{\mathbf{G}}$ (ce qui est la même chose que la restriction à $W_{\mathbf{G}}.F$ d'une fonction centrale sur $W_{\mathbf{G}} \rtimes \langle F \rangle$), on pose

$$R_\phi = R_\phi^{\mathbf{G}} := \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}}} \phi(wF) R_w. \tag{1.12}$$

On a

$$R_w = \sum_{\tilde{\phi} \in \operatorname{Irr}(W_{\mathbf{G}})^F} \overline{\tilde{\phi}(wF)} R_{\tilde{\phi}}$$

où l'expression sous la somme signifie que $\tilde{\phi}$ parcourt un ensemble formé d'une extension à $W_{\mathbf{G}} \rtimes \langle F \rangle$ de chaque caractère irréductible F-invariant de $W_{\mathbf{G}}$.

Si H est un groupe fini, nous désignons par γ_h (ou par γ_h^H quand nous aurons besoin de préciser le groupe concerné) la fonction centrale sur H qui vaut $|C_H(h)|$ (cardinal du centralisateur dans H de h) sur la classe de h et 0 ailleurs. Si $\phi \in \operatorname{Irr}(W_{\mathbf{G}})$, on a donc

$$\phi = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}}} \phi(w) \gamma_w^{W_{\mathbf{G}}}; \tag{1.13}$$

et, par conséquent,

$$R_w = R_{\gamma_w}. \tag{1.14}$$

Pour les groupes orthogonaux, nous poserons

$$R_\phi^{\mathbf{O}_{2l}^+(q)\oplus\mathbf{O}_{2l}^-(q)} := \frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l}\phi(w)R_w,$$

pour $\phi\in\operatorname{Irr}(W_l)$, où $R_w\in\mathscr{C}(\mathbf{O}_{2l}^+(q))$ si $w\in {W_l}^+$ et $R_w\in\mathscr{C}(\mathbf{O}_{2l}^-(q))$ sinon. Si ϕ est l'extension à W_l d'un caractère ψ irréductible, W_l-invariant de ${W_l}^+$, on a

$$R_\phi^{\mathbf{O}_{2l}^+(q)\oplus\mathbf{O}_{2l}^-(q)} = \frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^+(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^+(q)}(R_\psi^{\mathbf{SO}_{2l}^+(q)}) + \frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^-(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^-(q)}(R_\psi^{\mathbf{SO}_{2l}^-(q)});$$

si $\phi=\operatorname{Ind}_{{W_l}^+}^{W_l}(\psi)$, où $\psi\in\operatorname{Irr}({W_l}^+)$ n'est pas W_l-invariant, on a

$$R_\phi^{\mathbf{O}_{2l}^+(q)\oplus\mathbf{O}_{2l}^-(q)} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^+(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^+(q)}(R_\psi^{\mathbf{SO}_{2l}^+(q)}).$$

1.15. Proposition. *La projection uniforme unipotente du caractère de la représentation $R^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}$ est égale à*

$$\frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l^+} R_w\otimes R_w.$$

Démonstration. Comme dans le cas des groupes connexes, nous définissons ${}^*R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}$ comme l'adjoint de $R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}$. On a ${}^*R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} = {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ\operatorname{Res}_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}$. Montrons d'abord que

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} = \mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ\frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ{}^*R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}.$$

Pour le voir il suffit de vérifier que l'égalité est vraie sur $\mathrm{U}(\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q))\cap\operatorname{Unif}(\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q))$: ainsi, il suffit de montrer que pour tout $v\in W_l^\varepsilon$, on a

$$\frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ{}^*R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v) = R_v;$$

mais,

$$\begin{aligned}{}^*R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v) &= ({}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ\operatorname{Res}_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\circ\operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)})(R_v^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)})\\ &= {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)} + R_{\sigma_v}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}),\end{aligned}$$

donc la somme vaut

$$\frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} \circ {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}) + \frac{1}{|W_l|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} \circ {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_{\sigma_v}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}),$$

i.e.,

$$\frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\left(\frac{1}{|W_l^\varepsilon|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)} \circ {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}) + \frac{1}{|W_l^\varepsilon|}\sum_{w\in W_l^\varepsilon} R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)} \circ {}^*R_{T_w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_{\sigma_v}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)})\right),$$

i.e., encore

$$\frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}(R_v^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)} + R_{\sigma_v}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}) = R_v^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)},$$

par le résultat dans $\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)$ (cf. preuve de la proposition 1.9). Avec cette formule, on peut conclure comme dans la preuve de la proposition 1.9, en utilisant $\langle R_w^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}, R_w^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\rangle_{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} = |C_{W_l}(w)|$ (car $\langle R_w^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}, R_w^{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)}\rangle_{\mathbf{O}_{2l}^\varepsilon(q)} = \langle R_w^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}, R_w^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)} + R_{\sigma w}^{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}\rangle_{\mathbf{SO}_{2l}^\varepsilon(q)}$, qui vaut $2|C_{W_l^\varepsilon}(w)|$ si la classe de w ne se scinde pas par restriction de W_l à W_l^ε et $|C_{W_l^\varepsilon}(w)|$ sinon).

2. Correspondance de Howe et caractères de Deligne-Lusztig

A. Représentation de Weil et fonctions uniformes. Comme expliqué à la fin du §1.A, nous pouvons identifier les classes de tores rationnels de $\mathbf{SO}_{2l+1}$ à l'union des classes de tores rationnels de $(\mathbf{O}_{2l}, F^+)$ et de celles de $(\mathbf{O}_{2l}, F^-)$. Étant donné $w \in W(\mathbf{B}_l)$ nous noterons $\mathbf{T}_w$ un représentant de la classe de tores correspondante dans $\mathbf{SO}_{2l+1}$, et, par abus de notation, aussi un représentant de la classe correspondante dans $(\mathbf{O}_{2l}, F^+)$ (si $w \in W(\mathbf{D}_l)$) ou dans $(\mathbf{O}_{2l}, F^-)$ (si $w \in \sigma W(\mathbf{D}_l)$). Nous nous permettrons de plus de noter $\mathbf{O}_{2l}^{+1}$ pour $(\mathbf{O}_{2l}, F^+)$ et $\mathbf{O}_{2l}^{-1}$ pour $(\mathbf{O}_{2l}, F^-)$, si bien qu'avec ces notations $\mathbf{T}_w$ est un tore de $\mathbf{O}_{2l}^{\varphi(w)}$, où φ est le caractère de $W(\mathbf{B}_l)$ décrit en (1.2).

A l'aide de ces notations nous allons exprimer le résultat (4.3) de [Sr] (qui donne la restriction à une paire duale irréductible de la projection uniforme de la représentation de Weil) sous une forme uniforme pour les trois sortes de paires réductives duales. Nous ne reproduisons pas ici la formule de Srinivasan qui, bien que plus complexe, est entièrement contenue dans la notre. Nous nous contentons d'indiquer comment elle se ramène à notre forme. Nous désignons par $\mathbf{G}_m$ l'un des groupes $\mathbf{GL}_m$ ou $\mathbf{Sp}_{2m}$.

Lorsque $\mathbf{G}_m = \mathbf{Sp}_{2m}$, nous noterons $\omega^{\#} = \omega^{\#}_{m,m'}$ l'élément de l'espace $\mathrm{Unif}(\mathbf{Sp}_{2m}) \otimes (\mathrm{Unif}(\mathbf{O}^+_{2l}(q)) \oplus \mathrm{Unif}(\mathbf{O}^-_{2l}(q))$ défini comme la somme formelle de la projection sur l'espace des fonctions uniformes du caractère $\omega_{m,m'}$ associé à $\mathbf{Sp}_{2m}(q).\mathbf{O}^+_{2m'}(q)$ et de la projection uniforme du caractère $\omega_{m,m'}$ associé à $\mathbf{Sp}_{2m}(q).\mathbf{O}^-_{2m'}(q)$. Nous poserons $\mathbf{G}'^{\varepsilon}_{m'} := \mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m'}$.

Quand $\mathbf{G}_m$ est un groupe linéaire, nous poserons $\omega^{\#} = \omega_{m,m'}$, $\varphi = \mathrm{Id}$ et $\mathbf{G}'_{m'} := \mathbf{GL}_{m'}$.

Enfin nous poserons $\varepsilon = -1$ quand $\mathbf{G}_m^F = \mathbf{GL}_m(-q)$ et $\varepsilon = 1$ dans les autres cas (i.e., $\mathbf{G}_m^F = \mathbf{GL}_m(q)$ ou $\mathbf{G}_m^F = \mathbf{Sp}_{2m}(q)$).

2.1. Proposition. *Nous supposons q assez grand pour que, pour tout tore maximal rationnel $\mathbf{T}$ de l'un des groupes $\mathbf{G}_m$ ou $\mathbf{G}'_{m'}$, le quotient $\mathbf{T}^F/\mathbf{Z}^F_{\mathbf{G}}$ ait au moins deux $W(\mathbf{T})^F$-orbites de caractères réguliers. Alors $\omega^{\#}$ est égale à:*

$$\varepsilon^{mm'} \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^l}{|W_{\mathbf{G}_l}|} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_{m-l}}|} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_{m'-l}}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}_l}} \varphi(w) \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_w^F)}$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l}}} R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_v}(\theta \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_{v'}}(\theta \otimes 1).$$

Démonstration. Dans les cas linéaire et unitaire, la formule ci-dessus résulte immédiatement de [Sr, (4.3)].

Considérons maintenant le cas symplectique-orthogonal. D'après [Sr, (4.3)] et le lemme 1.10, la projection uniforme du caractère $\omega_{m,m'}$ associé à $\mathbf{Sp}_{2m}(q).\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m'}(q)$ est, avec les notations du §1.A, si $m' > m$:

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{|W_l|} \frac{1}{|W_{m-l}|} \frac{1}{|W'_{m'-l}|} \sum_{w \in W_l} \varphi(w) \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_w^F)}$$

$$\sum_{v \in W_{m-l}} \sum_{\{v' \in W_{m'-l} | \varphi(wv') = \varepsilon\}} R^{\mathbf{Sp}_{2m}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_v}(\theta \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{SO}^{\varphi(wv')}_{2m'}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_{v'}}(\theta \otimes 1).$$

Avec nos définitions (cf. §1.D) toute fonction uniforme $\mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m}(q)$-invariante sur $\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}(q)$ est la restriction d'une unique fonction uniforme sur $\mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m}(q)$; par exemple, la fonction $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}}(\theta) + R_{\sigma\mathbf{T}}^{\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}}({}^{\sigma}\theta)$, où σ est l'automorphisme extérieur de $\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}$ et $\mathbf{T}$ un tore de $\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}$, est la restriction à $\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m}$ de $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m}}(\theta)$. En utilisant ces remarques et le fait que la somme ci-dessus est invariante par $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{ad}\, \sigma$, on voit que cette somme est la restriction à $\mathbf{Sp}_{2m}(q).\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2m'}(q)$ d'une unique fonction uniforme sur $\mathbf{Sp}_{2m}(q).\mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m'}(q)$ qui vaut:

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{|W_l|} \frac{1}{|W_{m-l}|} \frac{1}{|W_{m'-l}|} \sum_{w \in W_l} \varphi(w) \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_w^F)}$$

$$\sum_{v \in W_{m-l}} \sum_{\{v' \in W_{m'-l} | \varphi(wv')=\varepsilon\}} R^{\mathbf{Sp}_{2m}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_v}(\theta \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{O}^{\varphi(wv')}_{2m'}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{T}_{v'}}(\theta \otimes 1).$$

On en déduit immédiatement la proposition: quand on ne fixe pas le type du groupe orthogonal, il suffit d'oublier la condition $\varphi(wv') = \varepsilon$.

Un calcul du même type conduit au résultat si $m' = m$ ou $m' < m$. □

Nous allons exprimer la proposition ci-dessus sous une autre forme qui nous servira parfois. L'application f qui pour $w \in W_l'$ envoie $R^{\mathbf{SO}_{2l+1}}_{\mathbf{T}_w}(\theta)$ sur $R^{\mathbf{O}^+_{2l}}_{\mathbf{T}_w}(\theta)$ et pour $w \in \sigma W_l'$ envoie $R^{\mathbf{SO}_{2l+1}}_{\mathbf{T}_w}(\theta)$ sur $R^{\mathbf{O}^-_{2l}}_{\mathbf{T}_w}(\theta)$ définit une isométrie de $\mathrm{Unif}(\mathbf{SO}_{2l+1}(q))$ sur $\mathrm{Unif}(\mathbf{O}^+_{2l}) \oplus \mathrm{Unif}(\mathbf{O}^-_{2l})$; à travers cette application, nous pouvons exprimer $\omega^\#$ comme une correspondance entre un groupe et un groupe du même type que son dual. Si $\mathbf{G}_m = \mathbf{Sp}_{2m}$ on a $\mathbf{G}^*_m = \mathbf{SO}_{2m+1}$ (cf. §1.D). Si $\mathbf{G}_m$ est un groupe linéaire, on a $\mathbf{G}^*_m = \mathbf{G}_m$.

2.2. Proposition. *Sous les mêmes hypothèses que 2.1, $\omega^\#$ est égale à:*

$$\varepsilon^{mm'} \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^l}{|W_{\mathbf{G}_l}|} \sum_{w \in W_{\mathbf{G}_l}} \varphi(w) \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_w^F)} R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{G}_{m-l}}(\theta \otimes 1) \otimes f(R^{\mathbf{G}^*_{m'}}_{\mathbf{T}_w \times \mathbf{G}^*_{m'-l}}(\theta \otimes 1)).$$

Démonstration. Il suffit, une fois faite la traduction dans $\mathbf{G}^*_{m'}$ à travers l'application f, d'appliquer le lemme 1.10. □

B. Correspondance de Howe et séries de Lusztig. Nous allons voir que la proposition 2.1 montre que la correspondance de Howe est compatible avec les séries de Lusztig. Autrement dit, si $\chi \in \mathscr{E}(G_m, (s))$, il existe une classe de conjugaison (s') sous $G'^*_{m'}$ telle que $\Theta_{G'_{m'}}(\chi)$ est dans le sous-espace de $\mathscr{R}(G'_{m'})$ engendré par $\mathscr{E}(G'_{m'}, (s'))$. Cette application entre classes de $\mathbf{G}^*_m$-conjugaison (s) et classes de $\mathbf{G}'^*_{m'}$-conjugaison (s') est induite par l'injection naturelle du dual de l'un des groupes $\mathbf{G}_m$, $\mathbf{G}'_{m'}$ dans le dual de l'autre. Plus précisément, si $m < m'$ nous notons $\mathscr{I}_{m,m'}$ l'injection de $G^*_m = \mathbf{SO}_{2m+1}(q)$ dans $G'^*_{m'} = \mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m'}(q)$ qui envoie

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{sur} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \mathrm{Id}_{2(m'-m)} & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

et si $m \geqslant m'$ nous notons $\mathscr{I}_{m',m}$ l'injection de $G'^*_{m'} = \mathbf{O}^{\varepsilon}_{2m'}(q)$ dans $G^*_m = \mathbf{SO}_{2m+1}(q)$

qui envoie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{sur} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \mathrm{Id}_{2(m-m')+1} & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix};$$

et si $G_m = \mathbf{GL}_m(\varepsilon q)$ et $G'_{m'} = \mathbf{GL}_{m'}(\varepsilon q)$ avec $m < m'$, nous notons $\mathscr{I}_{m,m'}$ l'injection qui envoie a sur $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{m'-m} \end{pmatrix}$, et symétriquement si $m \geqslant m'$.

La compatibilité entre la correspondance de Howe et les séries de Lusztig, est exprimée par la proposition suivante.

2.3. Proposition. *Soient χ (resp. χ') un caractère irréductible de G_m (resp. $G'_{m'}$) et (s) (resp. (s')) la classe de conjugaison géométrique associée à χ (resp. χ'). Si $\chi \otimes \chi'$ intervient dans $\omega_{m,m'}$, alors si $m < m'$ on a $(s') = \mathscr{I}_{m,m'}(s)$ et sinon $(s) = \mathscr{I}_{m',m}(s')$.*

Démonstration. Supposons que $m \geqslant m'$ et $(s) \neq \mathscr{I}_{m',m}(s')$, ou que $m < m'$ et $(s') \neq \mathscr{I}_{m,m'}(s)$; alors par 2.1 on a $\langle \omega_{m,m'} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}_m}(s) \otimes R_{\mathbf{T}'}^{\mathbf{G}'_{m'}}(s') = 0$. Il résulte alors de la remarque 1.8 que la projection de $\omega_{m,m'}$ sur $\mathbb{C}\mathscr{E}(G_m,(s)) \otimes \mathbb{C}\mathscr{E}(G'_{m'},(s'))$ est nulle. $\square$

Notons qu'en particulier les caractères unipotents se correspondent. Il n'en est pas de même pour la correspondance associée à la représentation ω: pour la décrire il faut "multiplier" la correspondance $\mathscr{I}_{m,m'}$ ci-dessus par un élément d'ordre 2 de $\mathbf{G}_m^* \times \mathbf{G}'^*_{m'}$ (correspondant au caractère $v_m^{m'} \otimes v_{m'}^m$ décrit au §1.C).

L'application $\mathscr{I}_{m,m'}$ peut aussi se voir comme suit, en utilisant les notations de §1.B: un élément $s \in \mathbf{G}_m^*$ est conjugué à un unique élément $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in (\mathbf{T}_m)_{\leqslant}$; par cette conjugaison, $\mathscr{I}_{m,m'}$ s'identifie à l'inclusion naturelle $(\mathbf{T}_m)_{\leqslant} \hookrightarrow (\mathbf{T}_{m'})_{\leqslant}$ donnée par $(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \mapsto (\lambda_1,\dots,\lambda_m,1,\dots,1)$; nous notons $\mathbf{T}_{m,0}$ les éléments de $(\mathbf{T}_m)_{\leqslant}$ qui n'ont pas de valeur propre égale à 1, et, si $s \in \mathbf{T}_{m,0}$ nous noterons pour abréger $s_{m'} = \mathscr{I}_{m,m'}(s) \in (\mathbf{T}_{m'})_{\leqslant}$.

Soit $s \in \mathbf{T}_m$ et $w \in Z(s)$. En utilisant que (cf. §1.B) $(\mathbf{T}_m^{wF}, s)$ est conjugué à un couple rationnel $(\mathbf{T}_w^F, s')$, nous pouvons définir un caractère de Deligne-Lusztig associé à (w,s) que nous noterons $R_{\mathbf{T}_m^{wF}}^{\mathbf{G}}(\hat{s})$, et soit $\mathscr{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ la série correspondante.

Avec ces notations la proposition 2.3 peut se reformuler ainsi:

2.4. Proposition. *Pour $l \leqslant \min(m,m')$ et pour $s \in \mathbf{T}_{l,0}$, soit $\omega_{m,m',s}$ la projection de $\omega_{m,m'}$ sur $\mathbb{C}\mathscr{E}(G_m,(s_m)) \otimes \mathbb{C}\mathscr{E}(G'_{m'},(s_{m'}))$. Alors on a:*

$$\omega_{m,m'} = \bigoplus_{l=0}^{\min(m,m')} \bigoplus_{s \in \mathbf{T}_{l,0}} \omega_{m,m',s}.$$

Nous noterons $\omega^{\#}_{m,m',s}$ la projection de $\omega^{\#}_{m,m'}$

- sur $\mathbb{C}\mathscr{E}(G_m, (s_m)) \otimes \mathbb{C}\mathscr{E}(G'_{m'}, (s_{m'}))$ dans les cas linéaires et unitaires;
- sur $\mathbb{C}\mathscr{E}(\mathbf{Sp}_{2m}(q), (s_m)) \otimes (\mathbb{C}\mathscr{E}(\mathbf{O}^+_{2m'}(q), (s_{m'})) \oplus \mathbb{C}\mathscr{E}(\mathbf{O}^-_{2m'}(q), (s_{m'})))$ dans le cas symplectique-orthogonal.

Le but de notre article est de démontrer que $\omega_{m,m'}$ est (conjecturalement) déterminée par $\omega^{\#}_{m,m'}$. Cette question est équivalente à prouver que, pour tout s, le terme $\omega_{m,m',s}$ est déterminé par $\omega^{\#}_{m,m',s}$. Dans la suite, nous notons $\mathbf{T} = \mathbf{T}_l$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

2.5. Proposition. *Soit $s \in \mathbf{T}_{l,0}$. Le terme $\varepsilon^{mm'}\omega^{\#}_{m,m',s}$ est alors égal à*

$$\sum_{l'=l}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^{l'}}{|W(s_{l'})||W_{\mathbf{G}_{m-l'}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}|} \sum_{w \in Z(s_{l'})} \varphi(w)$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l'}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}} R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{vF}}(\hat{s}_{l'} \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{v'F}}(\hat{s}_{l'} \otimes 1),$$

où $Z(s)$ et $W(s)$ sont définis comme au §1.B.

Démonstration. D'après la proposition 2.1, où, en utilisant les remarques ci-dessus, nous changeons la somme $\sum_{w \in W_{\mathbf{G}_l}} \sum_{s \in (\mathbf{T}^*_w)^{F^*}}$ en $\sum_{s \in \mathbf{T}_l} \sum_{w \in Z(s)}$, on obtient que $\varepsilon^{mm'}\omega^{\#}_{m,m'}$ est égal à:

$$\sum_{l=0}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^{l}}{|W_{\mathbf{G}_l}||W_{\mathbf{G}_{m-l}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l}}|} \sum_{s \in \mathbf{T}_l} \sum_{w \in Z(s)}$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l}}} \varphi(w) R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{vF}}(\hat{s} \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{v'F}}(\hat{s} \otimes 1).$$

Si nous remplacons s par un conjugué ${}^v s$, avec $v \in W_{\mathbf{G}_l}$, nous F-conjuguons l'ensemble $Z(s)$, et la somme

$$\frac{\varepsilon^{l}}{|W_{\mathbf{G}_l}|} \sum_{w \in Z(s)} \varphi(w) R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{vF}}(\hat{s} \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{v'F}}(\hat{s} \otimes 1)$$

reste invariante. L'élément s ayant $|W_{\mathbf{G}_l}|/|W(s)|$ tels conjugués, $\varepsilon^{mm'}\omega^{\#}_{m,m'}$ est égal à

$$\sum_{l=0}^{\min(m,m')} \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_{m-l}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l}}|} \sum_{s \in (\mathbf{T}_l)_{\leqslant}} \frac{\varepsilon^{l}}{|W(s)|}$$

$$\sum_{w \in Z(s)} \sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l}}} \varphi(w) R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{vF}}(\hat{s} \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{v'F}}(\hat{s} \otimes 1).$$

Si on appelle l' la variable muette l et qu'on ne retient que les termes où $s_{l'} \in (\mathbf{T}_{l'})_{\leqslant}$ est l'image par $\mathscr{J}_{l,l'}$ d'un élément fixé s de $\mathbf{T}_{l,0}$, on obtient le résultat. □

C. Réduction au cas unipotent. En utilisant le paramétrage de Lusztig (cf. théorème 1.6 et proposition 1.7) nous allons montrer que la correspondance définie par $\omega^{\#}$ entre séries (s_m) et $(s_{m'})$ qui se correspondent comme en 2.4 peut être décrite en termes d'une correspondance entre caractères unipotents, définie soit par $\omega^{\#}$ soit par la projection uniforme de la représentation R.

Soit $s \in \mathbf{T}_{l,0}$ et $s_{l'} = \mathscr{J}_{l,l'}(s)$. Nous poserons $\mathbf{G}_{\#}(s) := \prod_{\lambda \neq 1} \mathbf{G}_{\lambda}(s)$ dans les cas linéaires et unitaires (resp. $\mathbf{G}_{\#}(s) := \prod_{\lambda \neq \pm 1} \mathbf{G}_{\lambda}(s)$ dans le cas symplectique-orthogonal), où les $\mathbf{G}_{\lambda}(s)$ sont les groupes réductifs qui interviennent dans la décomposition de $\mathrm{C}_{\mathbf{G}_l}(s)$, cf. §1.B, et $W_{\#}(s) := \prod_{\lambda \neq 1} W_{\lambda}(s)$ (resp. $W_{\#}(s) := \prod_{\lambda \neq \pm 1} W_{\lambda}(s)$), cf. §1.B; on a $W(s_{l'}) = W_{\#}(s) W_1(s_{l'})$ (resp. $W(s_{l'}) = W_{\#}(s) W_{-1}(s) \cdot W_1(s_{l'})$); de plus, 1 et -1 étant stables par F, on a $Z(s_{l'}) = Z_{\#}(s) W_1(s_{l'})$ (resp. $Z(s_{l'}) = Z_{\#}(s) W_{-1}(s) W_1(s_{l'})$) et tout élément $w \in Z(s_{l'})$ s'écrit $w = w_{\#} w_1$ (resp. $w = w_{\#} w_{-1} w_1$), avec $w_{\#} \in Z_{\#}(s)$ (resp. $w_{-1} \in W_{-1}(s)$) et $w_1 \in W_1(s)$.

2.6. THÉORÈME. *Pour $s \in \mathbf{T}_{l,0}$, le terme $\omega^{\#}_{m,m',s}$ est*

- *dans les cas linéaires et unitaires, l'image par le paramétrage de Lusztig (cf. théorème 1.6)*

$$\mathscr{E}(\mathbf{GL}_m \times \mathbf{GL}_{m'}, (s_m) \times (s_{m'})) \simeq \mathscr{E}(\mathrm{C}_{\mathbf{GL}_m}(s_m) \times \mathrm{C}_{\mathbf{GL}_{m'}}(s_{m'}), 1)$$

de

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}(R^{\mathbf{G}_{\#}(s)^F}) \otimes \omega^{\#}_{m-l,m'-l,1};$$

- *dans le cas symplectique-orthogonal, l'image par le paramétrage (cf. proposition 1.7)*

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}\mathscr{E}(\mathbf{Sp}_{2m} \times \mathbf{O}^{+}_{2m'}, (s_m) \times (s_{m'})) \oplus \mathbb{C}\mathscr{E}(\mathbf{Sp}_{2m} \times \mathbf{O}^{-}_{2m'}, (s_m) \times (s_{m'})))\\ &\simeq \mathbb{C}\mathscr{E}(\mathrm{C}_{\mathbf{SO}_{2m+1}}(s_m) \times \mathrm{C}_{\mathbf{O}^{+}_{2m'}}(s_{m'}), 1) \oplus \mathbb{C}\mathscr{E}(\mathrm{C}_{\mathbf{SO}_{2m+1}}(s_m) \times \mathrm{C}_{\mathbf{O}^{-}_{2m'}}(s_{m'}), 1)\end{aligned}$$

de

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}(R^{\mathbf{G}_{\#}(s)^F}) \otimes \mathrm{pr}_{\mathrm{unif}} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}(R^{\mathbf{O}^{F+}_{2\nu_{-1}(s)}} \oplus R^{\mathbf{O}^{F-}_{2\nu_{-1}(s)}}) \otimes \omega^{\#}_{m-l,m'-l,1}.$$

Démonstration. La proposition 2.5 montre que le terme $\varepsilon^{mm'} \omega^{\#}_{m,m',s}$ est égal à

$$\sum_{l'=l}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^{l'}}{|W(s_{l'})||W_{\mathbf{G}_{m-l'}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}|} \sum_{w \in Z(s_{l'})} \varphi(w)$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l'}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}} R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{vF}}(\hat{s}_{l'} \otimes 1) \otimes R^{\mathbf{G}'^{\varphi(wv')}_{m'}}_{\mathbf{T}^{wF} \times \mathbf{T}^{v'F}}(\hat{s}_{l'} \otimes 1).$$

D'après la description des centralisateurs établie au §1.B, on a $C_{\mathbf{SO}_{2m+1}}(s_m) = \mathbf{G}_\#(s) \times \mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)} \times \mathbf{SO}_{2\nu_1(s_m)+1}$ et $C_{\mathbf{O}_{2m'}^{\varphi(wv')}}(s_{m'}) = \mathbf{G}_\#(s) \times \mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)} \times \mathbf{O}_{2\nu_1(s_{m'})}$. La structure rationnelle de ces centralisateurs est donnée comme suit: $(\mathbf{G}_\#(s), w_\# F) \simeq \prod_\lambda \mathbf{G}_\lambda(s)^{\varphi(w_\lambda)}$, où $w_\# = \prod_\lambda w_\lambda$ et où $\mathbf{G}_\lambda(s)^{\varphi(w_\lambda)}$ est un groupe linéaire ou unitaire suivant le signe de $\varphi(w_\lambda)$, $(\mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}, w_{-1}F) \simeq \mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}^{\varphi(w_{-1})}$, enfin $(\mathbf{O}_{2\nu_1(s_{m'})}, w_1 v' F) \simeq \mathbf{O}_{2\nu_1(s_{m'})}^{\varphi(w_1 v')}$.

Par le lemme 1.3, du côté $\mathbf{SO}_{2m+1}$, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}^*}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} = (-1)^{l(w'_\#)}\varphi(w_{-1})$ où $w'_\#$ est l'élément Φ_s-réduit dans la classe de $w_\#$. En effet, l'élément Φ_s-réduit w'_{-1} dans la classe de w_{-1} est σ si $\varphi(w_{-1}) = -1$ et 1 sinon. Comme $l(\sigma)$ est impair, on a donc $(-1)^{l(w'_{-1})} = \varphi(w_{-1})$. Enfin l'élément Φ_s-réduit dans la classe de $w_1 v$ est 1.

Par ailleurs, du côté de $\mathbf{O}_{2m'}$, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}^*}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} = (-1)^{l(w'_\#)}\varphi(w_\#)$. En effet, tout d'abord si $\varphi(w_\# w_{-1} w_1 v') = -1$ alors l'élément dans $Z(s)$ n'est pas $w_\# w_{-1} w_1 v'$ mais $w_\# w_{-1} w_1 v' \sigma$. D'autre part, cette fois-ci l'élément Φ_s-réduit dans la classe de $w_1 v'$ n'est plus 1, mais σ si $\varphi(w_1 v') = -1$. On trouve donc

$$\varepsilon_{\mathbf{G}^*}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} = (-1)^{l(w'_\#)}\varphi(w_\# w_{-1} w_1 v')\varphi(w_{-1})\varphi(w_1 v') = (-1)^{l(w'_\#)}\varphi(w_\#).$$

Dans le cas de $(\mathbf{GL}_m, F^+)$, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}^*}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} = (-1)^{l(w'_\#)}$. Dans le cas de $(\mathbf{GL}_m, F^-)$, on a $\varepsilon_{\mathbf{G}^*}\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)} = (-1)^{l(w'_\#)+l(w_{0,m})+l(w_{0,m-l})}$, où $w_{0,m}$ est l'élément de plus grande longueur de $W_{\mathbf{GL}_m}$ et $w_{0,m-l}$ l'élément de plus grande longueur de $W_{\mathbf{GL}_{m-l}}$, d'après le lemme 1.3.

Dans le cas des groupes linéaires et unitaires, le paramétrage de Lusztig (cf. théorème 1.6) introduit donc un signe égal à

$$\varepsilon^{l(w_{0,m})+l(w_{0,m-l})+l(w_{0,m'})+l(w_{0,m'-l})} = \varepsilon^{\binom{m}{2}+\binom{m-l}{2}+\binom{m'}{2}+\binom{m'-l}{2}} = \varepsilon^{(m+m')l}.$$

En utilisant l'application π du paramétrage de Lusztig (cf. théorème 1.6 et proposition 1.7), et le calcul des signes ci-dessus, nous en déduisons que,

- dans les cas linéaires et unitaires, $\pi(\omega_{m,m',s})$ est égal à

$$\sum_{l'=l}^{\min(m,m')} \frac{\varepsilon^{mm'+(m+m')l+l'}}{|W(s_{l'})||W_{\mathbf{G}_{m-l'}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}|} \sum_{w_\# \in Z_\#(s)} \sum_{w_1 \in W_1(s)}$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l'}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}} R_{w_\# w_1 v}^{\mathbf{G}_\#(s)\times\mathbf{GL}_{\nu_1(s_m)}} \otimes R_{w_\# w_1 v'}^{\mathbf{G}_\#(s)\times\mathbf{GL}_{\nu_1(s_{m'})}};$$

- dans le cas symplectique-orthogonal, $\pi(\omega^\#_{m,m',s})$ est égal à

$$\sum_{l'=l}^{\min(m,m')} \frac{1}{|W(s_{l'})||W_{\mathbf{G}_{m-l'}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}|} \sum_{w_\# \in Z_\#(s)} \sum_{\substack{w_{-1} \in W_{-1}(s)\\ w_1 \in W_1(s)}} \varphi(w_1)$$

$$\sum_{v \in W_{\mathbf{G}_{m-l'}}} \sum_{v' \in W_{\mathbf{G}_{m'-l'}}} R_{w_\# w_{-1} w_1 v}^{\mathbf{G}_\#(s)\times\mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}^{\varphi(w_{-1})}\times\mathbf{SO}_{2\nu_1(s_m)+1}} \otimes R_{w_\# w_{-1} w_1 v'}^{\mathbf{G}_\#(s)\times\mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}^{\varphi(w_{-1})}\times\mathbf{O}_{2\nu_1(s_{m'})}^{\varphi(v' w_1)}}$$

En regroupant les termes suivant le type des valeurs propres, les formules ci-dessus se réécrivent respectivement

$$\left(\frac{1}{|W_{\#}(s)|}\sum_{w_{\#}\in Z_{\#}(s)} R_{w_{\#}}^{\mathbf{G}_{\#}(s)}\otimes R_{w_{\#}}^{\mathbf{G}_{\#}(s)}\right)$$

$$\otimes\left(\sum_{l''=0}^{\min(m-l,m'-l)}\frac{\varepsilon^{mm'+(m+m')l+l+l''}}{|W_{\mathbf{G}_{l''}}||W_{\mathbf{G}_{(m-l)-l''}}||W_{\mathbf{G}_{(m'-l)-l''}}|}\sum_{w_1\in W_1(s)}\right.$$

$$\left.\sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{(m-l)-l''}}}\ \sum_{v'\in W_{\mathbf{G}_{(m'-l)-l''}}} R_{w_1 v}^{\mathbf{GL}_{m-l}}\otimes R_{w_1 v'}^{\mathbf{GL}_{m'-l}}\right)$$

et

$$\left(\frac{1}{|W_{\#}(s)|}\sum_{w_{\#}\in Z_{\#}(s)} R_{w_{\#}}^{\mathbf{G}_{\#}(s)}\otimes R_{w_{\#}}^{\mathbf{G}_{\#}(s)}\right)\otimes\left(\frac{1}{|W_{-1}(s)|}\sum_{w_{-1}\in W_{-1}(s)} R_{w_{-1}}^{\mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}^{\varphi(w_{-1})}}\otimes R_{w_{-1}}^{\mathbf{O}_{2\nu_{-1}(s)}^{\varphi(w_{-1})}}\right)$$

$$\otimes\left(\sum_{l''=0}^{\min(m-l,m'-l)}\frac{1}{|W_{\mathbf{G}_{l''}}||W_{\mathbf{G}_{(m-l)-l''}}||W_{\mathbf{G}_{(m'-l)-l''}}|}\sum_{w_1\in W_1(s)}\varphi(w_1)\right.$$

$$\left.\sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{(m-l)-l''}}}\ \sum_{v'\in W_{\mathbf{G}_{(m'-l)-l''}}} R_{w_1 v}^{\mathbf{SO}_{2(m-l)+1}}\otimes R_{w_1 v'}^{\mathbf{O}_{2(m'-l)}^{\varphi(v')\varphi(w_1)}}\right),$$

puisque $\nu_1(s_{l'}) = l'-l$ et où l'on a pris $l''=l'-l$ comme nouvelle variable dans le dernier terme, terme qui est égal (cf. 2.1) à $\omega^{\#}_{m-l,m'-l,1}$ (puisque $W_1(s_{l'})\simeq W(B_{l''})$); le premier terme est égal (cf. 1.9) à $\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}(R^{\mathbf{G}_{\#}(s)^F})$, et dans la deuxième formule, le terme du milieu est égal (cf. 1.15) à $\mathrm{pr}_{\mathrm{unif}}\circ\mathrm{pr}_{\mathrm{unip}}(R^{\mathbf{O}^{F+}_{2\nu_{-1}(s)}}\oplus R^{\mathbf{O}^{F-}_{2\nu_{-1}(s)}})$, d'où le théorème. □

3. Correspondance de Howe et séries de Harish-Chandra

A. Séries de Harish-Chandra

Définitions 3.1. Soient $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ et λ une représentation irréductible cuspidale de $\mathbf{L}^F$.

- Nous appellerons série de Harish-Chandra associée au couple $(\mathbf{L},\lambda)$ l'ensemble des représentations irréductibles γ de $\mathbf{G}^F$ tels que $\langle\gamma, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda\rangle_{\mathbf{G}^F}\neq 0$.

- Nous appellerons donnée cuspidale associée à γ la $\mathbf{G}^F$-classe du couple $(\mathbf{L}, \lambda)$.

Notons que la donnée cuspidale associée à γ est uniquement déterminée d'après, par exemple, [DM3, 6.4]. Nous noterons $\mathscr{H}_\lambda$ l'algèbre commutante $\mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\lambda)$, qui est appelée algèbre de Hecke associée à la donnée cuspidale $(\mathbf{L}, \lambda)$.

Soit $(\mathscr{W}, S)$ un système de Coxeter et soit $s \mapsto q_s$ une fonction de S dans $\mathbb{C}$ telle que $q_s = q_{s'}$ si s et s' sont conjugués sous $\mathscr{W}$. On note $\mathscr{H}(\mathscr{W}, (q_s))$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ de base T_w ($w \in \mathscr{W}$) et de multiplication définie par:

$$T_w T_{w'} = T_{ww'}, \quad \text{pour } w \in \mathscr{W} \text{ et } w' \in \mathscr{W} \text{ tels que } l(ww') = l(w) + l(w'),$$

$$(T_s + 1)(T_s - q_s) = 0, \qquad \text{si } s \in S,$$

(où l est la fonction longueur sur $\mathscr{W}$ relativement à S).

Nous supposons dorénavant que λ est unipotente. Alors, Lusztig a montré que le groupe $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$ est un groupe de Weyl et Lusztig, Howlett et Lehrer ont montré que l'algèbre $\mathscr{H}_\lambda$ est isomorphe à l'algèbre $\mathscr{H}(\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F, q_s)$ où le système de Coxeter S et la fonction q_s sont définis de la manière suivante (cf. [L3] dont nous reproduisons certains résultats ici pour la commodité du lecteur):

Soient $\Gamma_{\mathbf{G}}$ et $\Gamma_{\mathbf{L}}$ les diagrammes de Dynkin respectifs de $\mathbf{G}$ et de $\mathbf{L}$ munis de l'action du Frobenius F; le diagramme $\Gamma_{\mathbf{L}}$ est un sous-diagramme de $\Gamma_{\mathbf{G}}$. On associe à $\Gamma_{\mathbf{L}}$ un diagramme $\Gamma'_{\mathbf{L}}$ défini de la manière suivante:

- les sommets de $\Gamma'_{\mathbf{L}}$ sont en bijection avec les orbites de F sur l'ensemble des sommets de $\Gamma_{\mathbf{G}}$ qui n'appartiennent pas à $\Gamma_{\mathbf{L}}$;
- si γ et γ' sont deux telles orbites distinctes, on pose:

$$m(\gamma, \gamma') := \frac{2(|\Phi_{\Gamma_{\mathbf{L}} \cup \gamma \cup \gamma'}| - |\Phi_{\Gamma_{\mathbf{L}}}|)}{|\Phi_{\Gamma_{\mathbf{L}} \cup \gamma}| + |\Phi_{\Gamma_{\mathbf{L}} \cup \gamma'}| - 2|\Phi_{\Gamma_{\mathbf{L}}}|};$$

  où, quand $X \subset \Gamma_{\mathbf{G}}$, Φ_X désigne l'ensemble des racines du sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ associé à X. Lusztig a montré que $m(\gamma, \gamma')$ est l'un des entiers 2, 3, 4, 6; les sommets du diagramme $\Gamma'_{\mathbf{L}}$ sont joints par 0, 1, 2, ou 3 traits suivant que $m(\gamma, \gamma')$ est égal à 2, 3, 4, ou 6.

Alors $\Gamma'_{\mathbf{L}}$ est le graphe de Coxeter de $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/\mathbf{L}^F$. Soit γ une orbite de F sur le complémentaire de $\Gamma_{\mathbf{L}}$ dans $\Gamma_{\mathbf{G}}$ et soit $\mathbf{P}_\gamma$ (resp. $\mathbf{P}$) le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ associé à $\Gamma_{\mathbf{L}} \cup \gamma$ (resp. $\Gamma_{\mathbf{L}}$); le caractère induit $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{P}_\gamma^F}(\lambda)$ se décompose en deux $\mathbf{P}_\gamma^F$-caractères irréductibles de degrés notés $d_\gamma \geqslant d'_\gamma$. La fonction $\gamma \mapsto q_\gamma$ est alors définie par $q_\gamma := d_\gamma/d'_\gamma$.

Les groupes suivants:

- $\mathbf{Sp}_{2k(k+1)}(q)$, $\mathbf{U}_{(k(k+1))/2}$,
- $\mathbf{SO}^{\varepsilon}_{2k^2}(q)$ où ε est le signe de $(-1)^k$;
- $\mathbf{SO}_{2k(k+1)+1}(q)$,

sont les seuls groupes dans leur familles de Lie respectives qui possèdent un caractère unipotent cuspidal; ces groupes ont un unique caractère unipotent cuspidal (cf. [L3]), nous le notons λ_k.

Nous considérons maintenant un sous-groupe de Levi rationnel, inclus dans un sous-groupe parabolique rationnel, d'un des groupes ci-dessus et qui possède une représentation unipotente cuspidale. Un tel Levi est de la forme $\mathbf{L} \times \mathbf{T}$ où $\mathbf{T}$ est un tore déployé, et $\mathbf{L}$ est un groupe du même type que $\mathbf{G}$ qui possède une représentation unipotente cuspidale λ_k. Décrivons cas par cas l'algèbre $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$:

- Si $\mathbf{G}$ est de type ${}^2A_{2n+((k^2+k)/2)-1}$ avec $k \geqslant 0$, alors $\mathbf{L}$ et $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$ sont respectivement de types ${}^2A_{((k^2+k)/2)-1}$ et B_n (en convenant que ${}^2A_{-1}$ est le diagramme vide).
- Si $\mathbf{G}$ est de type $B_{n+(k^2+k)}$ (resp. $C_{n+(k^2+k)}$) avec $k \geqslant 1$, alors $\mathbf{L}$ et $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$ sont respectivement de types B_{k^2+k} (resp. C_{k^2+k}) et B_n.
- Si $\mathbf{G}$ est de type D_{n+k^2} avec $k \geqslant 2$ pair, alors $\mathbf{L}$ et $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$ sont respectivement de types D_{k^2} et B_n.
  Si $k = 0$, alors $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$ est de type D_n.
- Si $\mathbf{G}$ est de type ${}^2D_{n+k^2}$ avec $k \geqslant 1$ impair, alors $\mathbf{L}$ et $\mathscr{H}_{\lambda_k \otimes 1}$ sont respectivement de types ${}^2D_{k^2}$ (en convenant que ${}^2D_1$ est le diagramme vide) et B_n.

Nous dirons qu'un caractère irréductible du groupe $\mathbf{O}_m^\varepsilon(q)$ est unipotent s'il intervient dans le caractère induit du groupe $\mathbf{SO}_m^\varepsilon(q)$ au groupe $\mathbf{O}_m^\varepsilon(q)$ d'un caractère unipotent de $\mathbf{SO}_m^\varepsilon(q)$. L'unicité du caractère unipotent cuspidal λ_k de $\mathbf{SO}_{2k^2}^\varepsilon(q)$ (resp. $\mathbf{SO}_{2k(k+1)+1}(q)$) implique que le caractère $\mathrm{Ind}_{\mathbf{SO}_{2k^2}^\varepsilon(q)}^{\mathbf{O}_{2k^2}^\varepsilon(q)}(\lambda_k)$ (resp. $\mathrm{Ind}_{\mathbf{SO}_{2k(k+1)+1}(q)}^{\mathbf{O}_{2k(k+1)+1}(q)}(\lambda_k)$) est somme de deux caractères irréductibles unipotents cuspidaux, λ_k^I et λ_k^{II}, de $\mathbf{O}_{2k^2}^\varepsilon(q)$ (resp. $\mathbf{O}_{2k(k+1)+1}(q)$). Ces deux caractères diffèrent par la multiplication par le caractère linéaire non trivial de $\mathbf{O}_{2k^2}^\varepsilon(q)$ (resp. $\mathbf{O}_{2k(k+1)+1}(q)$).

Nous complétons ces résultats par le lemme suivant:

3.2. Lemme. *Si* $\mathbf{L} = \mathbf{O}_{2k^2}^\varepsilon \times \mathbf{T}$ *est un sous-groupe de Levi du groupe* $\mathbf{G} = \mathbf{O}_m^\varepsilon$ *et* λ *est un caractère unipotent cuspidal de* $\mathbf{O}_{2k^2}^\varepsilon(q)$, *l'algèbre* $\mathscr{H}_{\lambda \otimes 1} := \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{O}_m^\varepsilon}(\lambda \otimes 1))$ *est une algèbre de Hecke de type* B_{m-k^2}.

Démonstration. Si $k = 0$, il est bien connu que $\mathscr{H}_1$ est isomorphe à l'algèbre du groupe de Weyl de $\mathbf{O}_m^\varepsilon$, qui est $W(B_m)$, d'où le résultat.

Supposons donc $k \neq 0$. Les paires $(\mathbf{L}, \lambda_k^I)$ et $(\mathbf{L}, \lambda_k^{II})$ sont non conjuguées dans $\mathbf{G}^F = \mathbf{O}_m^\varepsilon(q)$ car un élément qui les conjuguerait induirait un élément de $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ qui échangerait les caractères λ_k^I sur λ_k^{II}; un tel élément stabilise $\mathrm{N}_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}^\circ)$, donc induirait un automorphisme de $\mathbf{L}/\mathbf{L}^\circ \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui échangerait le caractère trivial et le caractère non trivial, ce qui est impossible. Donc, d'après la formule de Mackey (cf. [DM4, théorème 4.5 p. 44]), on a $\langle R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^I), R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^{II})\rangle = 0$.

Soit χ un caractère irréductible de $\mathbf{G}^{\circ F}$ qui intervient dans $R_{\mathbf{L}^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(\lambda_k)$. Il résulte alors de, par exemple, [L4, p. 89], que χ est stable sous l'action de $\mathbf{G}^F$ (χ est paramétré par un symbole de défaut $4k$ ou $4k+2$, et seuls les caractères paramétrés par des symboles de défaut 0 dont les deux parties sont égales ne sont pas stables);

donc $\mathrm{Ind}_{\mathbf{G}^{\circ F}}^{\mathbf{G}} F(\chi)$ est somme de deux caractères irréductibles χ_1 et χ_2, qui diffèrent par la multiplication par le caractère non trivial de $\mathbf{G}^F/\mathbf{G}^{\circ F}$. Comme $\mathbf{G}^F/\mathbf{G}^{\circ F} \simeq \mathbf{L}^F/\mathbf{L}^{\circ F}$, $\langle \chi_i, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^I)\rangle \neq 0$ si et seulement si $\langle \chi_j, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^{II})\rangle \neq 0$ pour $\{i,j\} = \{1,2\}$.

Comme $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^I)$ et $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda_k^{II})$ sont disjointes, on en déduit que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda^I)) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathbf{G}^F}(R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda^{II})) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}\mathbf{G}^{\circ F}}(R_{\mathbf{L}^\circ}^{\mathbf{G}^\circ}(\lambda))$, ce qu'il fallait démontrer. □

B. L'algèbre de Hopf $\mathscr{R}\mathfrak{S}$. Nous suivons la présentation de [Z]. Il est commode de considérer que les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ sont inclus les uns dans les autres: une permutation de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est prolongée en une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même, fixant tout $k > n$.

Soit $\mathscr{R}(\mathfrak{S}_n)$ le groupe des caractères complexes de $\mathfrak{S}_n$. Considérons le groupe gradué $\mathscr{R}\mathfrak{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathscr{R}(\mathfrak{S}_n)$ (où $\mathfrak{S}_0 = \{1\}$, et donc $\mathscr{R}(\mathfrak{S}_0) = \mathbb{Z}$); c'est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $\bigcup_{n\geqslant 0}\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$. Nous le munissons de la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, telle que deux éléments de graduation différente soient orthogonaux et égale au produit scalaire usuel pour deux caractères d'un même groupe $\mathfrak{S}_n$. On munit $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ d'une multiplication $m\colon \mathscr{R}\mathfrak{S}\otimes\mathscr{R}\mathfrak{S} \to \mathscr{R}\mathfrak{S}$ définie par: si $l+\tilde{l} = n$, $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l)$ et $\tilde{\psi} \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_{\tilde{l}})$, on a $m(\psi\otimes\tilde{\psi}) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{\tilde{l}}}^{\mathfrak{S}_n}(\psi\otimes\tilde{\psi})$ (où $\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{\tilde{l}}$ s'envoie naturellement dans $\mathfrak{S}_n$ en tant que stabilisateur du sous-ensemble $\{1,\dots,l\}$ de $\{1,\dots,n\}$). L'adjoint de m pour la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est une comultiplication $m^*\colon \mathscr{R}\mathfrak{S} \to \mathscr{R}\mathfrak{S}\otimes\mathscr{R}\mathfrak{S}$, qui d'après la réciprocité de Frobenius vérifie pour $v \in \mathscr{R}(\mathfrak{S}_n)$: $m^*(v) = \sum_{l+\tilde{l}=n}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{\tilde{l}}}^{\mathfrak{S}_n} v$. Ainsi, m et m^* font de $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ une algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}$ (l'axiome de Hopf exprimant la formule de Mackey pour la restriction d'un induit).

Nous noterons simplement xz pour $m(x\otimes z)$, et $x^*\colon \mathscr{R}\mathfrak{S} \to \mathscr{R}\mathfrak{S}$ l'opérateur adjoint de la multiplication par $x \in \mathscr{R}\mathfrak{S}$; autrement dit x^* est défini par:

$$(3.3)\qquad \langle x^*(y), z\rangle = \langle y, xz\rangle, \qquad \text{pour tout } y \in \mathscr{R}\mathfrak{S} \text{ et tout } z \in \mathscr{R}\mathfrak{S}.$$

C. L'algèbre de Hopf $\mathscr{R}\mathbf{B}$. Nous reprenons les notations de §1.A. Nous considérons les groupes $W_l = W(\mathbf{B}_l) = W(\mathbf{C}_l)$ comme inclus les uns dans les autres en incluant les uns dans les autres les ensembles de lettres $1,\dots,l,l',\dots,1'$ sur lesquels ils opèrent. Pour $l+\tilde{l} = n$, le groupe $W_l\times W_{\tilde{l}}$ s'envoie naturellement dans W_n comme stabilisateur du sous-ensemble $\{1,\dots,l,l',\dots,1'\}$ de $\{1,\dots,n, n',\dots,1'\}$. Ceci permet de munir, comme nous l'avons fait au §3.B pour $\mathscr{R}\mathfrak{S}$, d'une structure d'algèbre de Hopf le module gradué $\mathscr{R}\mathbf{B} = \bigoplus_{l\geqslant 0}\mathscr{R}(W_l)$. Il est bien connu qu'il existe une bijection: $\bigcup_{l+\tilde{l}=n}\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{\tilde{l}}) \simeq \mathrm{Irr}(W_n)$ définie comme suit:

(3.4) on considère $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l)$ comme caractère de W_l via l'homomorphisme naturel $W_l \to \mathfrak{S}_l$ (cf. §1.A), et à $\psi\otimes\tilde{\psi} \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{\tilde{l}})$ considéré comme caractère de $W_l\times W_{\tilde{l}}$ on associe le caractère $\mathrm{Ind}_{W_l\times W_{\tilde{l}}}^{W_n}\psi\otimes(\tilde{\psi}\varphi)$ (où φ est défini au §1.A), qui se trouve appartenir à $\mathrm{Irr}(W_n)$.

Donc $\mathscr{R}\mathbf{B}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module est isomorphe à $\mathscr{R}\mathfrak{S} \otimes \mathscr{R}\mathfrak{S}$, et par construction cet isomorphisme est compatible au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Nous noterons $a \boxtimes b$ l'élément de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ correspondant à $a \otimes b \in \mathscr{R}\mathfrak{S} \otimes \mathscr{R}\mathfrak{S}$.

3.5. Proposition. *Soit $\psi \boxtimes \phi \in \mathscr{R}(W_l)$, alors:*

$$\mathrm{Ind}_{W_l \times W_m}^{W_{m+l}}(\psi \boxtimes \phi) \otimes 1 = (\psi x_m) \boxtimes \phi \text{ et } \varphi \cdot (\psi \boxtimes \phi) = \phi \boxtimes \psi.$$

où x_m désigne le caractère trivial de $\mathfrak{S}_m$.

Démonstration. $\mathrm{Ind}_{W_l \times W_m}^{W_{l+m}}(\psi \boxtimes \phi) \otimes 1$ est le produit de $\psi \boxtimes \phi$ par l'identité (qui vaut $x_m \boxtimes 1$) dans l'algèbre $\mathscr{R}\mathbf{B}$. Or il résulte de [Z, 7.3] qu'en fait $a \otimes b \mapsto a \boxtimes b$ est un homomorphisme d'algèbres de Hopf; en particulier il commute au produit donc on a bien: $(\psi \boxtimes \phi) \cdot (x_m \boxtimes 1) = (\psi x_m) \boxtimes \phi$, d'où la première égalité. D'autre part, si $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_r)$ et $\phi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_{\bar{r}})$, alors

$$\begin{aligned}\varphi \cdot (\psi \boxtimes \phi) &= \mathrm{Ind}_{W_r \times W_{\bar{r}}}^{W_l}(\mathrm{Res}_{W_r \times W_{\bar{r}}}^{W_l}\varphi) \cdot (\psi \otimes (\phi\varphi)) = \mathrm{Ind}_{W_r \times W_{\bar{r}}}^{W_l}(\varphi \otimes \varphi) \cdot (\psi \otimes (\phi\varphi)) \\ &= \mathrm{Ind}_{W_r \times W_{\bar{r}}}^{W_l}(\psi\varphi) \otimes \phi = \mathrm{Ind}_{W_{\bar{r}} \times W_r}^{W_l}\phi \otimes (\psi\varphi) = \phi \boxtimes \psi,\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité car les sous-groupes $W_r \times W_{\bar{r}}$ et $W_{\bar{r}} \times W_r$ de W_l sont conjugués. □

D. Résultats et conjecture. Soit $(G_m, G'_{m'})$ une paire réductive duale irréductible de type I dans $\mathbf{Sp}_{2n}(q)$ (i.e., l'un des cas (2) ou (3) de 1.C). Dans ce paragraphe, nous regroupons les groupes G et G' en "tours de Witt", i.e., nous considérons des couples (G_m, V_m) où V_m est l'espace vectoriel muni d'une forme (hermitienne, alternée ou symétrique) sous-jacent à la représentation naturelle de G_m, et nous regroupons les V_m en suites croissantes d'espaces munis de formes compatibles et de même type de Witt.

- Dans le cas des groupes unitaires il y a deux tours de Witt, celle dont les groupes sont $\mathbf{U}_{2l}(q)$ pour $l \in \mathbb{N}$ et celle de groupes $\mathbf{U}_{2l+1}(q)$ pour $l \in \mathbb{N}$; nous noterons $\mathbf{U}^+$ la première tour et $\mathbf{U}^-$ la seconde.
- Dans le cas symplectique, il y a une unique tour de Witt, de groupes $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$ pour $l \in \mathbb{N}$, que nous noterons $\mathbf{Sp}$.
- Dans le cas orthogonal, il y a quatre tours de Witt, dont les groupes sont respectivement $\mathbf{O}_{2l}^+(q)$, $\mathbf{O}_{2l}^-(q)$, $\mathbf{O}_{2l+1}^+(q)$, et $\mathbf{O}_{2l+1}^-(q)$, pour l parcourant $\mathbb{N}$. Nous noterons $\mathbf{O}^+$ la tour des $\mathbf{O}_{2l}(q)$ et $\mathbf{O}^-$ celle des $\mathbf{O}_{2l}^-(q)$ (nous ne considérons les deux autres tours que dans ce paragraphe).

3.6. Notation. Soient $G_l \subset G_m$ deux groupes de la même tour de Witt $\mathbf{T}$, et soit λ un caractère cuspidal de G_l. Nous noterons $\mathscr{R}(G_m)_\lambda$ le sous-groupe de $\mathscr{R}(G_m)$ engendré par les

$$\{\gamma \in \mathrm{Irr}(G_m) \mid \langle \gamma, R_{\mathbf{G}_l \times \mathbf{T}_{m-l}}^{\mathbf{G}_m}(\lambda \otimes 1)\rangle \neq 0\}.$$

Le résultat suivant exprime la compatibilité de la correspondance de Howe entre caractères irréductibles unipotents de G_m et caractères irréductibles unipotents de $G'_{m'}$ avec leur répartition en séries de Harish-Chandra; il est complètement analogue au résultat obtenu par Kudla pour les groupes p-adiques [K, théorème 2.5]. Nous retrouverons ce résultat combinatoirement au §5 pour les caractères unipotents des groupes unitaires.

3.7. THÉORÈME. *Soient* $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ *deux tours de Witt, telles que les couples* $(G_m, G'_{m'})$ *où* $G_m \in \mathbf{T}$ *et* $G'_{m'} \in \mathbf{T}'$ *forment des paires duales de type I. Soit* λ *un caractère irréductible cuspidal d'un* $G_l \in \mathbf{T}$. *Alors il existe* $G'_{l'} \in \mathbf{T}'$ *tel que* $\lambda' = \Theta_{G'_{l'}}(\lambda)$ *(cf. 1.4) soit un caractère irréductible cuspidal de* $G'_{l'}$, *et si* $\gamma \in \mathcal{R}(G_m)_\lambda$ *on a* $\Theta_{G'_{m'}}(\gamma) = 0$ *si* $m' < l'$ *et* $\Theta_{G'_{m'}}(\gamma) \in \mathcal{R}(G'_{m'})_{\lambda'}$ *sinon.*

Démonstration. Pour la durée de la démonstration, nous allons changer nos conventions pour les groupes unitaires: si nous considérons la tour $\mathbf{U}^+$, nous poserons $G_m = \mathbf{U}_{2m}(q)$ (au lieu de $G_{2m} = \mathbf{U}_{2m}(q)$), et de même pour la tour $\mathbf{U}^-$, nous poserons $G_m = \mathbf{U}_{2m+1}(q)$.

Nous posons

$$m'(\gamma) = \min\{m' | \Theta_{G'_{m'}}(\gamma) \neq 0\}. \tag{3.8}$$

Par un résultat de [MVW, chapter 3, lemme IV.2], il existe m' tel que $\Theta_{G'_{m'}}(\gamma) \neq 0$, donc $m'(\gamma)$ est bien défini. Nous parlons alors de première occurrence de γ (relativement à la tour $\mathbf{T}'$).

Certaines parties de l'énoncé sont déjà connues: d'après [MVW, chapter 3, IV, 4. théorème principal, 1.(*b*)], si λ est un caractère irréductible cuspidal de G_l, alors:

(1) (cas de première occurrence) l'élément $\Theta_{G'_{m'(\lambda)}}(\lambda)$ est un caractère irréductible cuspidal que nous noterons λ'.

(2) Si $m' > m'(\lambda)$, aucun caractère cuspidal n'intervient dans $\Theta_{G'_{m'}}(\lambda)$.

Il reste donc à voir que $\Theta_{G'_{m'}}(\gamma) \in \mathcal{R}(G'_{m'})_{\lambda'}$ pour $m' > m'(\lambda)$.

• Supposons $m = l$ (i.e., $\gamma = \lambda$ cuspidal) et $m' > m'(\gamma)$. Soit $\gamma' \in \Theta_{G'_{m'}}(\lambda)$; d'après le rappel précédent, γ' n'est pas cuspidal. L'entier j maximal tel que $\gamma' \mid R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{G}'_{m'-j}\times\mathbf{GL}_j}(\lambda_1 \otimes \rho')$ avec $\lambda_1 \in \mathrm{Irr}(G'_{m'-j})$ cuspidal et $\rho' \in \mathrm{Irr}(\mathbf{GL}_j)$ est donc $\geqslant 1$. Puisque $\gamma' | \Theta_{G'_{m'}}(\gamma)$, on a donc:

$$\begin{aligned} 0 < \langle \omega_{m,m'}, \gamma \otimes \gamma' \rangle_{G_m \times G'_{m'}} &\leqslant \langle \omega_{m,m'}, \gamma \otimes R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{G}'_{m'-j}\times\mathbf{GL}_j}(\lambda_1 \otimes \rho') \rangle_{G_m \times G'_{m'}} \\ &= \langle 1 \otimes {}^*R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{G}'_{m'-j}\times\mathbf{GL}_j}(\omega_{m,m'}), \gamma \otimes \lambda_1 \otimes \rho' \rangle_{G_m \times G'_{m'-j} \times \mathbf{GL}_j(q)}. \end{aligned}$$

On a la décomposition suivante (cf. [MVW, chapter 3, IV, théorème 5]):

$$\begin{aligned} &(1 \otimes {}^*R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{G}'_{m'-j}\times\mathbf{GL}_j})(\omega_{m,m'}) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{\min(m,j)} R^{\mathbf{G}_m \times \mathbf{GL}_j \times \mathbf{G}'_{m'-j}}_{\mathbf{G}_{m-i}\times\mathbf{GL}_i\times(\mathbf{GL}_{j-i}\times\mathbf{GL}_i)\times\mathbf{G}'_{m'-j}}(\omega_{m-i,m'-j} \otimes 1_{\mathbf{GL}_{j-i}(q)} \otimes \mathrm{R}^{\mathbf{GL}_i(q)}). \end{aligned}$$

Le terme $\langle \omega_{m,m'}, \gamma \otimes \gamma' \rangle_{G_m \times G'_{m'}}$ est donc majoré par

$$\sum_{i=0}^{\min(m,j)} \langle \omega_{m-i,m'-j} \otimes 1_{\mathbf{GL}_{j-i}(q)} \otimes \mathrm{R}^{\mathbf{GL}_i(q)}, {}^*R^{\mathbf{G}_m \times \mathbf{GL}_j \times \mathbf{G}'_{m'-j}}_{\mathbf{G}_{m-i} \times \mathbf{GL}_i \times (\mathbf{GL}_{j-i} \times \mathbf{GL}_i) \times \mathbf{G}'_{m'-j}} (\gamma \otimes \lambda_1 \otimes \rho')\rangle$$

(le produit scalaire étant relatif à $G_{m-i} \times \mathbf{GL}_i(q) \times (\mathbf{GL}_{j-i}(q) \times \mathbf{GL}_i(q)) \times G'_{m'-j}$). Mais γ étant cuspidal, seul le terme correspondant à $i = 0$ a une contribution non nulle. On a donc:

$$\langle \omega_{m,m'-j} \otimes 1_{\mathbf{GL}_j(q)}, \gamma \otimes \lambda_1 \otimes \rho' \rangle_{G_m \times \mathbf{GL}_j(q) \times G'_{m'-j}} > 0;$$

par conséquent $\rho' = 1$ et $\lambda_1 | \Theta_{G'_{m'-j}}(\gamma)$. Mais, comme λ_1 est cuspidal, $m' - j = m'(\gamma)$ et $\lambda_1 = \lambda'$, i.e., $\gamma' \in \mathscr{R}(G'_{m'})_{\lambda'}$.

• Supposons maintenant $m \geqslant l + 1$. Puisque $\gamma \,|\, R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{T}_{m-l} \times \mathbf{G}_l}(1 \otimes \lambda)$, il existe $\gamma_1 \in \mathrm{Irr}(G_{m-1})$ tel que $\gamma_1 \,|\, R^{\mathbf{G}_{m-1}}_{\mathbf{T}_{m-l-1} \times \mathbf{G}_l}(1 \otimes \lambda)$ et $\gamma \,|\, R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}}(1 \otimes \gamma_1)$. Comme $\gamma' | \Theta_{G'_{m'}}(\gamma)$, on a:

$$0 < \langle \omega_{m,m'}, \gamma \otimes \gamma' \rangle_{G_m \times G'_{m'}} \leqslant \langle \omega_{m,m'}, (R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}}(1 \otimes \gamma_1)) \otimes \gamma' \rangle_{G_m \times G'_{m'}}$$

$$= \langle ({}^*R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}} \otimes 1)(\omega_{m,m'}), 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma' \rangle_{\mathbf{GL}_1(q) \times G_{m-1} \times G'_{m'}}.$$

On a la décomposition suivante (cf. [MVW, chapter 3, IV, théorème 5]):

$$({}^*R^{\mathbf{G}_m}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}} \otimes 1)(\omega_{m,m'})$$

$$= 1 \otimes \omega_{m-1,m'} + R^{(\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}) \times \mathbf{G}'_{m'}}_{(\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}_{m-1}) \times \mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}'_{m'-1}} (\mathrm{R}^{\mathbf{GL}_1(q)} \otimes \omega_{m-1,m'-1}).$$

On en déduit que $\langle \omega_{m,m'}, \gamma \otimes \gamma' \rangle_{G_m \times G'_{m'}}$ est majoré par:

$$\langle 1 \otimes \omega_{m-1,m'}, 1 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma' \rangle_{\mathbf{GL}_1(q) \times G_{m-1} \times G'_{m'}}$$

$$+ \langle \mathrm{R}^{\mathbf{GL}_1(q)} \otimes \omega_{m-1,m'-1}, 1 \otimes \gamma_1 \otimes {}^*R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}'_{m'-1}} \gamma' \rangle_{\mathbf{GL}_1(q) \times G_{m-1} \times \mathbf{GL}_1(q) \times G'_{m'-1}}.$$

Le premier terme ci-dessus est non nul si et seulement si $\gamma' | \Theta_{G'_{m'}}(\gamma_1)$. Le second terme est non nul si et seulement s'il existe $\gamma'_1 \in \mathrm{Irr}(G'_{m'-1})$ et $\rho'_1 \in \mathrm{Irr}(\mathbf{GL}_1(q))$ tels que $(\rho'_1 \otimes \gamma'_1) \,|\, {}^*R^{\mathbf{G}'_{m'}}_{\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{G}'_{m'-1}} \gamma'$ et:

$$\langle \mathrm{R}_1 \otimes \omega_{m-1,m'-1}, 1 \otimes \gamma_1 \otimes \rho'_1 \otimes \gamma'_1 \rangle_{\mathbf{GL}_1(q) \times G_{m-1} \times \mathbf{GL}_1(q) \times G'_{m'-1}} \neq 0;$$

il s'ensuit $\rho'_1 = 1$ et $\gamma'_1 | \Theta_{G'_{m'-1}}(\gamma_1)$. Nous raisonnons alors par récurrence sur m. Pour $m = l$, le résultat a été établi au début de la preuve. Sinon, par hypothèse le théorème a lieu pour γ_1 donc $\gamma_1' \in \mathscr{E}(G'_{m'-1}, 1)_{\lambda'}$ d'où $\gamma' \in \mathscr{R}(G'_{m'})_{\lambda'}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Adams et Moy ont décrit (cf. [AM, théorème 5.2]) les paires (λ, λ') de caractères unipotents cuspidaux qui se correspondent (par la première occurrence, comme décrit dans l'énoncé de 3.7) dans les cas que nous considérons:

• Pour les tours $(\mathbf{Sp}, \mathbf{O}^\varepsilon)$, λ_k correspond à λ_k^{II} si ε est le signe de $(-1)^k$ et à λ_{k+1}^I sinon.

• Pour les tours $(\mathbf{U}^\varepsilon, \mathbf{U}^{\varepsilon'})$, λ_k correspond à celui des $\lambda_{k'}$, où $k' = k \pm 1$, tel que $(-1)^{(k'(k'+1))/2} = \varepsilon'$, et de plus pour les tours $(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^+)$, λ_0 correspond à λ_0 (i.e., les séries principales se correspondent). Nous redémontrerons ce résultat indépendamment au §5.

D'après §3.A, pour toutes les tours ci-dessus, et pour tout caractère unipotent cuspidal d'un G_l, la partie

$$(\mathscr{R}G)_\lambda := \bigoplus_m \mathscr{R}(G_m)_\lambda$$

de $\mathscr{R}G = \bigoplus_m \mathscr{R}(G_m)$ (où $(\mathscr{R}G)_\lambda$ désigne la "série de Harish-Chandra" d'un caractère unipotent cuspidal λ) est isomorphe à $\mathscr{R}\mathbf{B}$.

Il résulte immédiatement de 3.7 que si nous fixons deux tours de Witt $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$, l'élément $\omega_{m,m'}$ de $\mathscr{R}G \otimes \mathscr{R}G'$ est somme de termes $\omega_{m,m'}^{\lambda,\lambda'} \in (\mathscr{R}G)_\lambda \otimes (\mathscr{R}G')_{\lambda'}$ où (λ, λ') parcourt les couples de caractères cuspidaux qui se correspondent. Nous noterons $\Omega_{m,m'}^{\lambda,\lambda'}$ l'élément de $\mathscr{R}\mathbf{B} \otimes \mathscr{R}\mathbf{B}$ obtenu à partir de $\omega_{m,m'}^{\lambda,\lambda'}$ par l'isomorphisme de $(\mathscr{R}G)_\lambda \otimes (\mathscr{R}G')_{\lambda'}$ avec $\mathscr{R}\mathbf{B} \otimes \mathscr{R}\mathbf{B}$, et nous noterons $\Theta_{\lambda,\lambda'}$ l'application de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ dans $\mathscr{R}\mathbf{B}$ correspondante.

3.9. Définition. Nous posons formellement $X := \sum_{h \geqslant 0} x_h \in \mathscr{R}\mathfrak{S}$ (où x_n est le caractère trivial de $\mathfrak{S}_n$) et nous notons X^* l'application $\mathscr{R}\mathfrak{S} \to \mathscr{R}\mathfrak{S}$ donnée par $\sum_{h \geqslant 0} x_h^*$.

3.10. THÉORÈME. *Pour $\mathscr{R}G = \bigoplus_m \mathbf{U}_m(q)$, pour tout couple $(\lambda_k, \lambda_{k'})$ de caractères cuspidaux unipotents qui se correspondent (i.e., $k' = k \pm 1$ ou $k = k' = 0$), $\Theta_{\lambda_k,\lambda_{k'}}$ est l'application de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ dans $\mathscr{R}\mathbf{B}$ définie par $\phi \boxtimes \psi \mapsto X\psi \boxtimes X^*(\phi)$ si k est impair ou $k = k' = 0$ et $\phi \boxtimes \psi \mapsto X^*(\psi) \boxtimes X\phi$ sinon.*

Ce théorème sera démontré au paragraphe 5.

3.11. CONJECTURE. *Pour $\mathscr{R}G = \bigoplus_m \mathbf{Sp}_{2m}(q)$ et $\mathscr{R}G' = \bigoplus_{m'} \mathbf{O}_{2m'}^\varepsilon(q)$, l'application $\Theta_{\lambda_k,\lambda_k^{II}}$ (ici ε est le signe de $(-1)^k$) est l'application de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ dans $\mathscr{R}\mathbf{B}$ définie par $\phi \boxtimes \psi \mapsto X^*(\phi) \boxtimes X\psi$, et $\Theta_{\lambda_k,\lambda_{k+1}^I}$ (ici ε est le signe de $(-1)^{k+1}$) est l'application de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ dans $\mathscr{R}\mathbf{B}$ définie par $\phi \boxtimes \psi \mapsto X\phi \boxtimes X^*(\psi)$.*

La description de la correspondance de Howe pour les paires linéaires sera donnée en 5.5.

4. Une décomposition en termes de caractères fantômes. Une base de l'espace des fonctions uniformes unipotentes sur un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur

$\mathbb{F}_q$ est formée des caractères fantômes R_ψ, indexés par les caractères irréductibles du groupe de Weyl; nous déduisons de la proposition 2.1 une description en termes de caractères fantômes de la partie unipotente uniforme de la restriction de $\omega^\flat$ à $G_m.G^*_{m'}$ (cf. proposition 4.1). Dans les cas linéaires et unitaires, toute fonction centrale étant uniforme, les caractères fantômes sont (au signe près) les caractères irréductibles unipotents de $\mathbf{G}^F$, et nous obtenons ainsi une description complète de la partie unipotente de la restriction à $\mathbf{GL}_m(\varepsilon q).\mathbf{GL}_{m'}(\varepsilon q)$ de $\omega^\flat$.

4.1. Proposition. *Avec les notations de §1.E et sous les hypothèses de la proposition 2.1, la partie unipotente $\omega^\#_{m,m',1}$ de $\omega^\#_{m,m'}$ est,*

- *dans les cas linéaires et unitaires:*

$$\varepsilon^{mm'} \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \varepsilon^l \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l)} R^{\mathbf{GL}_m(\varepsilon q)}_{\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_m}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{m-l}}(\psi\otimes 1)} \otimes R^{\mathbf{GL}_{m'}(\varepsilon q)}_{\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_{m'}}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{m'-l}}(\psi\otimes 1)};$$

- *dans le cas symplectique-orthogonal:*

$$\sum_{l=0}^{\min(m,m')} \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(W_l)} R^{\mathbf{Sp}_{2m}(q)}_{\mathrm{Ind}^{W_m}_{W_l\times W_{m-l}}(\psi\otimes 1)} \otimes R^{\mathbf{O}^+_{2m'}(q)\oplus\mathbf{O}^-_{2m'}(q)}_{\mathrm{Ind}^{W_{m'}}_{W_l\times W_{m'-l}}(\varphi\psi\otimes 1)},$$

où $W_l = W(\mathbf{B}_l)$.

Démonstration. Soit $l\in\{0,1,\dots,\min(m,m')\}$. Le terme correspondant à l dans la proposition ci-dessus est

$$\varepsilon^{mm'+l} \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}_l})} R_{\mathrm{Ind}^{W_{\mathbf{G}_m}}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}}(\psi\otimes 1)} \otimes R_{\mathrm{Ind}^{W_{\mathbf{G}_{m'}}}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m'-l}}}(\varphi\psi\otimes 1)}. \tag{4.2}$$

En appliquant (1.13) respectivement à ψ et à 1, nous obtenons

$$\psi = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_l}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}} \psi(w)\,\gamma_w^{W_{\mathbf{G}_l}} \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_{m-l}}|}\sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \gamma_v^{W_{\mathbf{G}_{m-l}}},$$

et, par conséquent,

$$\psi\otimes 1 = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_l}|\,|W_{\mathbf{G}_{m-l}}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}} \psi(w) \sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \gamma_{wv}^{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}};$$

comme $\mathrm{Ind}^{W_{\mathbf{G}_m}}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}}(\gamma_{wv}^{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}}) = \gamma_{wv}^{W_{\mathbf{G}_m}}$, il s'ensuit que

$$\mathrm{Ind}^{W_{\mathbf{G}_m}}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}}(\psi\otimes 1) = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_l}|\,|W_{\mathbf{G}_{m-l}}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}} \psi(w) \sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} \gamma_{wv}^{W_{\mathbf{G}_m}};$$

et donc, en utilisant (1.14) que

$$R_{\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m-l}}}^{W_{\mathbf{G}_m}}(\psi\otimes 1)} = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_l}||W_{\mathbf{G}_{m-l}}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}}\psi(w)\sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{m-l}}} R_{wv}.$$

Le même calcul avec $\varphi\psi$ au lieu de ψ montre que

$$R_{\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{G}_l}\times W_{\mathbf{G}_{m'-l}}}^{W_{\mathbf{G}_{m'}}}(\varphi\psi\otimes 1)} = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}_l}||W_{\mathbf{G}_{m'-l}}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}}\varphi\psi(w)\sum_{v'\in W_{\mathbf{G}_{m'-l}}} R_{wv'}.$$

Le terme (4.2) est donc égal, en tenant compte de

$$\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}_l})}\psi(w)\psi(w') = \begin{cases} 0 & \text{si } w \text{ et } w' \text{ ne sont pas conjugués,}\\ |\mathrm{C}_{W_{\mathbf{G}_l}}(w)| & \text{sinon,}\end{cases}$$

à

$$\frac{\varepsilon^{mm'+l}}{|W_{\mathbf{G}_l}||W_{\mathbf{G}_{m-l}}||W_{\mathbf{G}_{m'-l}}|}\sum_{w\in W_{\mathbf{G}_l}}\varphi(w)\sum_{v\in W_{\mathbf{G}_{m-l}}}\sum_{v'\in W_{\mathbf{G}_{m'-l}}} R_{wv}\otimes R_{wv'},$$

qui est la projection unipotente du terme correspondant à l dans l'expression de $\omega^{\#}_{m,m'}$ qui figure dans la proposition 2.1. □

Dans le reste de ce chapitre, nous traduisons 4.1 dans les algèbres $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ et $\mathscr{R}\mathbf{B}$.

4.3. Théorème. *Nous définissons formellement X^ε et X^* par $X^\varepsilon := \sum_{h\geqslant 0}\varepsilon^h x_h$ et $X^* := \sum_{h\geqslant 0} x_h^*$. Soit $\Omega_{m,m'}$ l'élément de $\mathscr{R}\mathfrak{S}\otimes\mathscr{R}\mathfrak{S}$ correspondant à l'application de $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ dans $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ définie par $\psi\mapsto X^\varepsilon.X^*(\psi)$; la partie unipotente de la restriction à $\mathbf{GL}_m(\varepsilon q).\mathbf{GL}_{m'}(\varepsilon q)$ de la représentation de Weil $\omega^\flat$ est égale à $R^{\mathbf{GL}_m\times\mathbf{GL}_{m'}}_{\varepsilon^{(m+1)m'}\Omega_{m,m'}}$.*

Démonstration. D'après la proposition 4.1, la partie unipotente de $\omega_{m,m'}$, qui est égale à:

$$\varepsilon^{mm'}\sum_{l=0}^{\min(m,m')}\varepsilon^l\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l)} R^{\mathbf{GL}_m}_{\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_m}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{m-l}}(\psi\otimes 1)}\otimes R^{\mathbf{GL}_{m'}}_{\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_{m'}}_{\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{m'-l}}(\psi\otimes 1)}$$

s'écrit encore:

$$R^{\mathbf{GL}_m\times\mathbf{GL}_{m'}}_{\varepsilon^{mm'}\sum_{l=0}^{\min(m,m')}\varepsilon^l\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_l)}\psi x_{m-l}\otimes\psi x_{m'-l}}.$$

Donc la partie unipotente de $\omega_{m,m'}$ est $R^{\mathbf{GL}_m\times\mathbf{GL}_{m'}}_{\varepsilon^{(m+1)m'}A_{m,m'}}$, où:

$$A_{m,m'}=\sum_{l=0}^{\min(m,m')}\varepsilon^{m'-l}\sum_{\psi\in\operatorname{Irr}(\mathfrak{S}_l)}\psi x_{m-l}\otimes\psi x_{m'-l}.$$

Il nous faut donc vérifier que Ω vaut

$$\sum_{m,m'}A_{m,m'}=\sum_{k,k',l}\sum_{\rho\in\operatorname{Irr}(\mathfrak{S}_l)}\varepsilon^{k'}x_k\rho\otimes x_{k'}\rho.$$

Or, pour $\phi,\psi\in\mathscr{R}\mathfrak{S}$, on a

$$\begin{aligned}\langle\phi\otimes\psi,A\rangle&=\sum_{k,k',\rho}\langle\phi,\rho x_k\rangle\langle\psi,\rho\varepsilon^{k'}x_{k'}\rangle\\&=\sum_{k,k',\rho}\langle x_k^*\phi,\rho\rangle\langle\varepsilon^{k'}x_{k'}^*\psi,\rho\rangle\\&=\sum_{k,k'}\langle x_k^*\phi,\varepsilon^{k'}x_{k'}^*\psi\rangle\\&=\sum_{k,k'}\langle\varepsilon^{k'}x_{k'}x_k^*\phi,\psi\rangle\\&=\langle X^\varepsilon X^*\phi,\psi\rangle;\end{aligned}\tag{$*$}$$

d'où le résultat. □

Nous traitons maintenant le cas des paires orthogonales-symplectiques.

4.4. Théorème. (a) *Le terme* $\omega^{\#}_{m,m',1}$ *est égal à* $R^{\mathbf{Sp}_{2m}(q)\times(\mathbf{O}^+_{2m'}(q)\oplus\mathbf{O}^-_{2m'}(q))}_{\Omega_{m,m'}}$ *où:*

$$\Omega_{m,m'}=\sum_{l=0}^{\min(m,m')}\sum_{\psi\boxtimes\phi\in\operatorname{Irr}(W_l)}((\psi x_{m-l})\boxtimes\phi)\otimes((\phi x_{m'-l})\boxtimes\psi).$$

(b) *L'application de* $\mathscr{R}\mathbf{B}$ *dans* $\mathscr{R}\mathbf{B}$ *correspondant à* $\Omega_{m,m'}$ *est donnée par* $\psi\boxtimes\phi\mapsto X\phi\boxtimes X^*\psi$.

Démonstration. L'assertion (a) résulte immédiatement des propositions 3.5

et 4.1. Soit maintenant $\psi \boxtimes \phi \in \mathscr{R}(W_m)$ (resp. $\psi' \boxtimes \phi' \in \mathscr{R}(W_{m'})$), on a alors:

$$
\begin{aligned}
&\langle \Omega_{m,m'}, (\psi \boxtimes \phi) \otimes (\psi' \boxtimes \phi') \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \sum_{\psi'' \boxtimes \phi'' \in \mathrm{Irr}(W_l)} \langle \psi \boxtimes \phi, (\psi'' x_{m-l}) \boxtimes \phi'' \rangle \langle \psi' \boxtimes \phi', (\phi'' x_{m'-l}) \boxtimes \psi'' \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \sum_{\psi'' \boxtimes \phi'' \in \mathrm{Irr}(W_l)} \langle x_{m-l}^*(\psi) \boxtimes \phi, \psi'' \boxtimes \phi'' \rangle \langle \phi' \boxtimes x_{m'-l}^*(\psi'), \psi'' \boxtimes \phi'' \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \langle x_{m-l}^*(\psi) \boxtimes \phi, \phi' \boxtimes x_{m'-l}^*(\psi') \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,m')} \langle \phi x_{m'-l} \boxtimes x_{m-l}^*(\psi), \psi' \boxtimes \phi' \rangle,
\end{aligned}
$$

d'où l'assertion (b). □

5. Description explicite de la correspondance de Howe dans les cas linéaires et unitaires. Nous appellerons partitions de $n \in \mathbb{N}$ les suites décroissantes d'entiers naturels strictement positifs

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \quad \text{telles que} \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \nu_j = n.$$

Il peut être commode dans certains cas de permettre à la fin d'une suite un certain nombre de zéros, et de considérer comme équivalentes des suites qui ne diffèrent que par des zéros. Nous appellerons $l(\nu)$ le nombre de ν_j non nuls. Nous poserons $\|\nu\| = n$. Nous noterons ${}^t\mu$ la partition duale de μ, c'est-à-dire la partition telle que μ'_i est le cardinal de l'ensemble $\{j \mid \mu_j \geqslant i\}$, pour $1 \leqslant i \leqslant \mu_1$.

Les caractères du groupe symétrique sont en bijection avec les partitions de n; nous noterons $[\nu]$ le caractère de $\mathfrak{S}_n$ correspondant à ν. Le caractère identité de $\mathfrak{S}_n$ sera ainsi noté $x_n = [(n)]$ et le caractère signe sera noté $y_n = [(1, \ldots, 1)]$.

Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ et $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_s)$ sont deux partitions, nous appellerons *intersection* de μ et μ', notée $\mu \cap \mu'$ la partition $(\inf(\mu_1, \mu'_1), \ldots, \inf(\mu_{\inf(r,s)}, \mu'_{\inf(r,s)}))$.

Nous dirons que μ est contenue dans μ', ce que nous notons $\mu \subset \mu'$, si $\mu \cap \mu' = \mu$.

Soit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_t) \subset (\mu \cap \mu')$. Nous noterons $p_{\mu=\mu'}(\nu)$ la partition $(\nu_i)_{\{i \mid \mu_i = \mu'_i\}}$, et $p_{\mu \neq \mu'}(\nu)$ la partition $(\nu_i)_{\{i \mid \mu_i \neq \mu'_i\}}$. Nous noterons $\mu \cap^= \mu'$ pour $p_{\mu=\mu'}(\mu \cap \mu')$ et $\mu \cap^{\neq} \mu'$ pour $p_{\mu \neq \mu'}(\mu \cap \mu')$.

Nous dirons que μ et μ' sont proches si pour tout i on a $|\mu_i - \mu'_i| \leqslant 1$. Enfin nous écrirons $\nu \preccurlyeq \mu$ si $\nu \subset \mu$ et ν est proche de μ.

A. Une première description

5.1. LEMME. *Soient μ, ν deux partitions et i un entier positif. Alors:*

$$\langle x_i^*([{}^t\mu]), [{}^t\nu]\rangle = \begin{cases} 1 & \textit{si } \nu \preccurlyeq \mu \textit{ et } i = \|\mu\| - \|\nu\| \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. C'est un cas particulier de la règle de Littlewood-Richardson (voir [Z, proposition 4.18]). □

5.2. LEMME. *Soient μ et μ' deux partitions proches. Alors, l'application $\nu \mapsto p_{\mu=\mu'}(\nu)$ induit une bijection de l'ensemble $\{\nu | \nu \preccurlyeq \mu$ et $\nu \preccurlyeq \mu'\}$ vers l'ensemble $\{\gamma \,|\, \gamma \preccurlyeq \mu \cap^= \mu'\}$.*

Démonstration. Si $\nu \subset \mu \cap \mu'$ est proche à la fois de μ et de μ' on a clairement $p_{\mu\neq\mu'}(\nu) = \mu \cap^{\neq} \mu'$, donc se donner ν équivaut à se donner $p_{\mu=\mu'}(\nu)$. □

Si μ et μ' sont des partitions, soit $\varepsilon^{\|\mu'\|} c_{[\mu],[\mu']}$ le coefficient de $[\mu] \otimes [\mu']$ dans Ω (voir 4.3).

5.3. LEMME.

$$c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu']} = \begin{cases} \varepsilon^{\|\mu \cap^{\neq} \mu'\|} c_{[{}^t(\mu\cap^=\mu')],[{}^t(\mu\cap^=\mu')]} & \textit{si } \mu \textit{ et } \mu' \textit{ sont proches,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Il résulte de $(*)$ dans la démonstration du théorème 4.3 que

$$\begin{aligned} c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu']} &= \sum_\nu \varepsilon^{\|\nu\|} \langle x^*_{\|\mu\|-\|\nu\|}([{}^t\mu]), [{}^t\nu]\rangle \langle x^*_{\|\mu'\|-\|\nu\|}([{}^t\mu']), [{}^t\nu]\rangle \\ &= \sum_{\nu \preccurlyeq \mu \text{ et } \nu \preccurlyeq \mu'} \varepsilon^{\|\nu\|} \quad \text{par le lemme 5.1} \\ &= \varepsilon^{\|\mu\cap^{\neq}\mu'\|} \sum_{\gamma \preccurlyeq \mu\cap^=\mu'} \varepsilon^{\|\gamma\|} \quad \text{par le lemme 5.2} \\ &= \varepsilon^{\|\mu\cap^{\neq}\mu'\|} \sum_\gamma \varepsilon^{\|\gamma\|} \langle x^*_{\|\mu\cap^=\mu'\|-\|\gamma\|}([{}^t(\mu\cap^=\mu')]), [{}^t\gamma]\rangle^2 \quad \text{par le lemme 5.1,} \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

On dit qu'une partition $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ est *paire* si pour tout i le cardinal de l'ensemble $\{j \,|\, \mu_j = i\}$ est pair, c'est à dire si chaque partie apparaît un nombre pair de fois.

5.4. Lemme. *Dans le cas des paires unitaires* ($\varepsilon = -1$) *on a*

$$c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu]} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \text{ est paire,} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

dans le cas des paires linéaires ($\varepsilon = 1$), *si* $\mu = (r^{k_1}, \ldots, 1^{k_r})$, *on a*

$$c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu]} = \prod_i k_i.$$

Démonstration. On a $c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu]} = \varepsilon^{\|\mu\|} \sum_{\nu \leqslant \mu} \varepsilon^{\|\mu\|-\|\nu\|}$. Si $\mu = (r^{k_1}, \ldots, 1^{k_r})$, on a donc

$$c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu]} = \varepsilon^{\|\mu\|} \sum_{i_1 \leqslant k_1, \ldots, i_r \leqslant k_r} \varepsilon^{\sum i_j} = \varepsilon^{\|\mu\|} \prod_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{k_j} \varepsilon^i,$$

d'où le résultat: $\sum_{i=0}^{k_j} (-1)^i$ est nul sauf si k_j est pair, auquel cas il vaut 1. □

Le caractère fantôme $R_{[\mu]}^{\mathbf{GL}_m}$ défini en (1.11) est un caractère irréductible. Nous pouvons donc résumer comme suit les résultats obtenus, avec les notations de 3.10 et 3.11:

5.5. Théorème. *Pour* $\mathscr{R}G = \bigoplus_m \mathscr{R}(\mathbf{GL}_m(q)) = \mathscr{R}G'$, *la correspondance de Howe entre caractères unipotents est donnée par* $R_{[\mu]}^{\mathbf{GL}_m} \mapsto R_{\Theta([\mu])}^{\mathbf{GL}_{m'}}$, *où* Θ *est l'application de* $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ *dans* $\mathscr{R}\mathfrak{S}$ *définie par*

$$[\mu] \mapsto \sum_{{}^t\mu' \text{ proche de } {}^t\mu} f({}^t\mu \cap^{=} {}^t\mu')[\mu'],$$

où, si $\nu = (r^{k_1}, \ldots, 1^{k_r})$, *on pose* $f(\nu) = \prod_i k_i$.

Si μ et μ' sont deux partitions proches, nous dirons que μ et μ' sont *transverses* si $\mu \cap^{=} \mu'$ est vide. Nous dirons que μ et μ' sont 2-*transverses* si la partition $\mu \cap^{=} \mu'$ est paire (en particulier, si μ et μ' sont transverses elles sont 2-transverses). Enfin on définit la partition $\zeta = \mu \cap^{\inf} \mu'$ par $\zeta = \{\sup(\mu_i, \mu'_i) - 1\}_{1 \leqslant i \leqslant \sup(l(\mu), l(\mu'))}$.

Remarque. Si μ et μ' sont proches, alors on a $p_{\mu \neq \mu'}(\mu \cap^{\inf} \mu') = \mu \cap^{\neq} \mu'$ et pour tout i on a $(p_{\mu = \mu'}(\mu \cap^{\inf} \mu'))_i = (\mu \cap^{=} \mu')_i - 1$.

Avec cette terminologie, la correspondance de Howe dans le cas des paires unitaires est donnée par:

5.6. Proposition.

$$c_{[{}^t\mu],[{}^t\mu']} = \begin{cases} (-1)^{\|\mu \cap \mu'\|} = (-1)^{\|\mu \cap^{\inf} \mu'\|} & \text{si } \mu \text{ et } \mu' \text{ sont 2-transverses,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents, en remarquant que si $\mu \cap^{=} \mu'$ est paire, alors $(-1)^{\|\mu \cap \mu'\|} = (-1)^{\|\mu \cap^{\neq} \mu'\|}$ et $\|\mu \cap \mu'\| - \|\mu \cap^{\inf} \mu'\| = \{$nombre de parties de $\mu \cap^{=} \mu'\}$ est pair. $\square$

B. Étude des 2-cœurs. Nous avons besoin de quelques termes du langage des "diagrammes de Young". Le *diagramme de Young* associé à la partition μ de m, est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ défini par:

$$D(\mu) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid 1 \leqslant i \leqslant \mu_j\}$$

que nous visualisons comme un ensemble de pavés de côté unité du "quart Nord-Est" du plan euclidien. Nous appelons *frontière* de μ les pavés "extrémaux", c'est-à-dire les $\{(i, j) \in D(\mu) | (i, j+1) \notin D(\mu)$ et $(i+1, j) \notin D(\mu)\}$. Nous appelons 2-crochet de μ un couple de la forme $\{(i, j), (i, j+1)\}$ ou $\{(i, j), (i+1, j)\}$ d'éléments de la frontière de μ tels qu'on obtienne encore le diagramme d'une partition en retirant ces éléments à $D(\mu)$. Le premier type de crochet est dit de type (1^2) et le second de type (2).

5.7. Lemme. *Soient μ et μ' deux partitions proches. Alors, μ et μ' sont 2-transverses si et seulement si il existe deux partitions transverses $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$, obtenues respectivement à partir de μ et μ' en enlevant des 2-crochets de la forme (1^2), telles que $\mu \cap^{\inf} \mu' = \bar{\mu} \cap^{\inf} \bar{\mu}'$.*

Démonstration. $p_{\mu=\mu'}(\mu \cap^{\inf} \mu')$ est obtenue à partir de $\mu \cap^{=} \mu'$ en enlevant toute la frontière. Donc μ et μ' sont 2-transverses si et seulement si $p_{\mu=\mu'}(\mu \cap^{\inf} \mu')$ est obtenue à partir de $\mu \cap^{=} \mu'$ en enlevant des 2-crochets de la forme (1^2). Ces crochets sont des crochets de μ ou des crochets de μ'. Il existe donc une famille F_μ de crochets de μ (qui sont de la forme (1^2) et sont en fait des crochets de $\mu \cap^{=} \mu'$), et une famille semblable F'_μ de crochets de μ', telles que $\mu \cap^{\inf} \mu'$ soit obtenue à partir de $\mu \cap \mu'$ en retirant F_μ et F'_μ à $\mu \cap^{=} \mu'$. On prend pour $\bar{\mu}$ (resp. $\bar{\mu}'$) la partition obtenue en retirant F_μ (resp. F'_μ) à μ (resp. μ'). Il est clair que $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ sont transverses, puisque $F_\mu \cup F'_\mu$ est toute la frontière de $\mu \cap^{=} \mu'$.

Réciproquement soient $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ deux partitions transverses obtenues respectivement à partir de μ et μ' en enlevant des 2-crochets de la forme (1^2), avec $\mu \cap^{\inf} \mu' = \bar{\mu} \cap^{\inf} \bar{\mu}'$. Soit ζ un tel crochet de μ. Soit k tel que ζ se trouve aux lignes k et $k+1$ de μ. On a ainsi $\bar{\mu}_k = \mu_k - 1$, $\bar{\mu}'_k = \bar{\mu}_k + 1$ car $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ sont transverses, d'où $\bar{\mu}'_k = \mu_k$. Comme $(\mu \cap^{\inf} \mu')_k = (\bar{\mu} \cap^{\inf} \bar{\mu}')_k$, on a $\mu_k \geqslant \mu'_k \geqslant \bar{\mu}'_k = \mu_k$ d'où égalité des trois termes et $(\mu \cap^{\inf} \mu')_k = (\mu \cap^{=} \mu')_k - 1$. De même, $(\mu \cap^{\inf} \mu')_{k+1} = (\mu \cap^{=} \mu')_{k+1} - 1$. On a le même résultat si on part d'un crochet semblable ζ de μ'.

Il reste à voir que tout point de la frontière de $\mu \cap^{=} \mu'$ appartient à un tel crochet. Soit k tel que $\mu_k = \mu'_k$, alors $(\bar{\mu} \cap^{\inf} \bar{\mu}')_k = \mu_k - 1 = \mu'_k - 1 = \sup(\bar{\mu}_k, \bar{\mu}'_k) - 1$. Puisque $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ sont transverses, on a $\bar{\mu}_k \neq \bar{\mu}'_k$, donc nécessairement $\bar{\mu}_k = \mu_k - 1$ ou $\bar{\mu}'_k = \mu'_k - 1$ et ainsi il existe un crochet ζ de μ ou μ' du type étudié précédemment, qui se trouve aux lignes $(k-1, k)$ ou $(k, k+1)$. $\square$

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ une partition de m. Soit $t \geqslant r$ un entier. On appelle *t-ensemble de β-nombres* associé à μ, l'ensemble $\beta = \{\beta_i\}_{i=1,\dots,t}$, où $\beta_i = \mu_i + t - i$. Nous noterons β^t (resp. $\beta^{t,\mu}$) quand nous aurons besoin de préciser t (resp. μ). Réciproquement, à toute suite $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ strictement décroissante d'entiers positifs, on peut associer la partition μ correspondante, définie par $\mu_i = \beta_i - t + i$.

Si β^t est le t-ensemble de β-nombres associé à μ, où $t \geqslant l(\mu)$, on pose $\beta^t(0) = \{(\beta_i/2) | \beta_i \text{ pair}\}$ et $\beta^t(1) = \{((\beta_i - 1)/2) | \beta_i \text{ impair}\}$. Soient $\mu(0)$ et $\mu(1)$ les partitions respectivement associées aux ensembles de β-nombres $\beta(0)$ et $\beta(1)$. Alors, le couple $(\mu(0), \mu(1))$ ne dépend que de la classe $\bar{t}$ de t modulo 2, et on appelle $\mu(0)$ et $\mu(1)$ les *2-quotients* de μ de *paramètre* $\bar{t}$.

On appelle 2-cœur de μ la partition minimale pour l'inclusion, contenue dans μ et obtenue à partir de μ en enlevant des 2-crochets.

5.8. Lemme. *Si μ' est une partition obtenue à partir de μ en enlevant un 2-crochet, alors il existe j tel que μ' soit la partition associée à l'ensemble de β-nombres $\{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j - 2, \beta_{j+1}, \dots, \beta_t\}$.*

Démonstration. C'est facile à voir; le fait qu'on puisse retirer un 2-crochet à μ implique qu'il existe j tel que les nombres ci-dessus soient distincts. Notons qu'ils n'apparaissent pas nécessairement en ordre décroissant ci-dessus, il se peut qu'il faille échanger $\beta_j - 2$ et β_{j+1}. □

Il résulte de 5.8 que le 2-cœur de μ ne contient que des β-nombres pairs (resp. impairs) consécutifs. Son t-ensemble de β-nombres est $\{1, 3, \dots, t_0 + 1, 0, 2, \dots, t_1\}$, où $t_0 = |\beta^t(0)|$ et $t_1 = |\beta^t(1)|$. Nous notons τ_k la partition correspondante (le "k-ième 2-cœur"), qui est une partition triangulaire à k lignes, de surface $(k^2 + k)/2$, où $k = t_1 - t_0$ si $t_1 \geqslant t_0$ et $k = t_0 - t_1 - 1$ sinon.

5.9. Lemme. *Si μ et μ' sont 2-transverses, alors μ et μ' ont des 2-cœurs consécutifs ou bien μ et μ' ont des 2-cœurs vides.*

Démonstration. D'après le lemme 5.7, on peut supposer que μ et μ' sont transverses. Soit $t = \sup(l(\mu), l(\mu'))$, et $\beta^{t,\mu}$, $\beta^{t,\mu'}$ les t-ensembles de β-nombres correspondants. Comme μ et μ' sont transverses, tout élément de $\beta^{t,\mu}$ diffère de 1 de l'élément correspondant de $\beta^{t,\mu'}$. Il en résulte que $|\beta^{t,\mu}(0)| = |\beta^{t,\mu'}(1)|$ et $|\beta^{t,\mu}(1)| = |\beta^{t,\mu'}(0)|$. Ceci donne le résultat vu la formule pour la taille k du 2-coeur donnée ci-dessus. □

5.10 Lemme. *Si μ et μ' sont 2-transverses, τ et τ' sont les 2-cœurs de μ et μ' respectivement alors* $\sup(l(\mu), l(\mu')) \equiv \|\tau\| - \|\tau'\| \pmod 2$.

Démonstration. Si μ et μ' sont 2-transverses, il est clair que $\|\mu\| - \|\mu'\| = \sup(l(\mu), l(\mu')) \pmod 2$, de même qu'il est clair que $\|\mu\| = \|\tau\|$ et $\|\mu'\| = \|\tau'\|$, d'où le résultat. □

C. Description à l'aide des 2-quotients. En traduisant la condition $\mu \preccurlyeq \mu'$ en termes des ensembles de β-nombres associés, on obtient:

5.11. Remarque. $\mu \preccurlyeq \mu'$ si et seulement si pour tout $i \leqslant t$ on a:

$$\beta_i^{t,\mu} \leqslant \beta_i^{t,\mu'} \leqslant \beta_i^{t,\mu} + 1.$$

5.12. PROPOSITION. *Soient μ et μ' deux partitions et τ et τ' leurs 2-cœurs. Supposons τ et τ' consécutifs ou tous deux vides. Soient $(\mu(0), \mu(1))$, et $(\mu'(0), \mu'(1))$ les 2-quotients de paramètre* $(\|\tau\| - \|\tau'\|) \pmod 2$. *Alors, μ et μ' sont 2-transverses si et seulement si $\mu(1) \preccurlyeq \mu'(0)$ et $\mu'(1) \preccurlyeq \mu(0)$.*

Démonstration. Soit $t = \sup(l(\mu), l(\mu'))$. Supposons par exemple $l(\mu) \geqslant l(\mu')$. Soient $\beta^{t,\mu} = \{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$ et $\beta^{t,\mu'} = \{\beta'_1, \ldots, \beta'_t\}$ les t-ensembles de β-nombres correspondants.

• Supposons μ et μ' 2-transverses. On définit $f: \beta^{t,\mu} \to \beta^{t,\mu'}$ de la façon suivante: si $\mu_i \neq \mu'_i$, on pose $f(\beta_i) = \beta_i + \mu'_i - \mu_i$. Sinon si $\mu_i = \mu'_i$, soit $j = \inf\{k | \mu_k = \mu'_k = \mu_i\}$. Si $i - j$ est impair, on a $\mu'_{i-1} = \mu_i$ et on pose $f(\beta_i) = \beta_i - 1$. Sinon si $i - j$ est pair, puisque μ et μ' sont 2-transverses, on a $\mu'_{i+1} = \mu_i$ et on pose $f(\beta_i) = \beta_i + 1$.

Il est clair que l'application ainsi définie est une bijection, dont les restrictions de f à $\{\beta_i \text{ pair}\}$ et $\{\beta_i \text{ impair}\}$ sont strictement croissantes, d'images $\{\beta'_i \text{ impair}\}$ et $\{\beta'_i \text{ pair}\}$ respectivement. En outre, pour tout $\beta \in \beta^{t,\mu}$, on a $f(\beta) = \beta \pm 1$. En utilisant pour i tel que β_i soit pair les inégalités qui en résultent

$$\frac{f(\beta_i) - 1}{2} \leqslant \frac{\beta_i}{2} \leqslant \frac{f(\beta_i) - 1}{2} + 1 \tag{a}$$

et pour β_i impair,

$$\frac{\beta_i - 1}{2} + 1 \geqslant \frac{f(\beta_i)}{2} \geqslant \frac{\beta_i - 1}{2}, \tag{b}$$

On en déduit, d'après 5.11, $\mu(1) \preccurlyeq \mu'(0)$ et $\mu'(1) \preccurlyeq \mu(0)$.

• Supposons réciproquement que $\mu(1) \preccurlyeq \mu'(0)$ et $\mu'(1) \preccurlyeq \mu(0)$. Puisque τ et τ' sont consécutifs ou tous deux vides, on a $|\beta^{t,\mu}(0)| = |\beta^{t,\mu'}(1)|$ et $|\beta^{t,\mu'}(0)| = |\beta^{t,\mu}(1)|$. Soit $f: \beta^{t,\mu} \to \beta^{t,\mu'}$ l'unique bijection se restreignant en des applications strictement croissantes de $\{\beta_i \text{ impair}\}$ dans $\{\beta'_i \text{ pair}\}$ et de $\{\beta_i \text{ pair}\}$ dans $\{\beta'_i \text{ impair}\}$. De $\mu(1) \preccurlyeq \mu'(0)$ et $\mu'(1) \preccurlyeq \mu(0)$ on déduit les inégalités (a) et (b), et donc pour tout $\beta \in \beta^{t,\mu}$, on a $f(\beta) = \beta \pm 1$.

Soit j tel que $\mu_j = \mu'_j$, ou de façon équivalente, $\beta_j = \beta'_j$. On a $f(\beta_j) = \beta_j \pm 1 = \beta'_j \pm 1$, d'où $f(\beta_j) = \beta'_{j\pm1}$.

Supposons par exemple $f(\beta_j) = \beta'_{j-1} = \beta'_j + 1$. On a $f(\beta_{j-1}) = \beta_{j-1} \pm 1 \geqslant \beta_j = \beta'_j$. On a $f^{-1}(\beta'_j) = \beta_{j\pm1}$; si $f(\beta_{j+1}) = \beta'_j$, alors il existe $l \leqslant j - 1$ tel que $f(\beta_l) = \beta_{l'}$ avec $l' \geqslant j + 1$, puisque f est bijective: c'est impossible puisque $f(\beta) = \beta \pm 1$ et la suite des β_i (resp. des β'_i) est strictement décroissante. Ainsi, $f^{-1}(\beta'_j) = \beta_{j-1} = \beta_j - 1$ et $\beta_{j-1} = \beta'_{j-1}$. De même, si $f(\beta_j) = \beta'_{j+1}$, on conclut que $\beta'_{j+1} = \beta_{j+1}$.

Soit maintenant j tel que $\mu_j \neq \mu'_j$, supposons par exemple $\mu_j > \mu'_j$. Alors, $\beta_j > \beta'_j$ et $f(\beta_j) = \beta_j \pm 1 \geqslant \beta'_j$. Soit k tel que $f(\beta_j) = \beta'_k$. Si $k < j$ alors, f étant bijective, il existe $l < j$ tel que $f(\beta_l) = \beta'_{l'}$ avec $l' \leqslant j$, et on a à nouveau une contradiction.

Ainsi, pour tout j, on a $|\beta'_j - \beta_j| \leqslant 1$ et donc μ et μ' sont proches.

Soit j tel que $\beta_j = \beta'_j$ et $j_1 \leqslant j$ minimal et $j_2 \geqslant j$ maximal tels que pour tout k, $j_1 \leqslant k \leqslant j_2$, on ait $\beta_k = \beta'_k$. Alors, d'après ce qui précède, $f(\{\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_2}\}) = \{\beta'_{j_1}, \ldots, \beta'_{j_2}\}$ et

$$f(\beta(0) \cap \{\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_2}\}) = \beta'(1) \cap \{\beta'_{j_1}, \ldots, \beta'_{j_2}\} = \beta(1) \cap \{\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_2}\}.$$

Il en résulte que $j_2 - j_1$ est pair, et par conséquent que μ et μ' sont 2-transverses. □

Pour réexprimer la proposition précédente en termes de correspondance de Howe, nous utilisons le lemme suivant (bien connu des spécialistes, mais dont nous n'avons pu trouver de référence commode):

5.13. Lemme. *Soit μ une partition. Soit $t \in \{0,1\}$. Soit $(\mu(0), \mu(1))$ le 2-quotient de μ de paramètre t. Alors, le 2-quotient de ${}^t\mu$ de paramètre t est $({}^t\mu(1), {}^t\mu(0))$.*

Nous associerons le signe suivant à la partition $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ de m

$$\varepsilon_\mu = (-1)^{\sum_{i=1}^{k} \binom{\mu_i}{2} + \binom{m(m-1)}{2}},$$

où ${}^t\mu = (\mu'_1, \ldots, \mu'_{k'})$ de sorte que $\varepsilon_\mu R^{\mathbf{GL}_m}_{[\mu]}$ (où $R^{\mathbf{GL}_m}_{[\mu]}$ est le caractère fantôme défini en (1.12)) est un vrai caractère du groupe unitaire $\mathbf{U}_m = \mathbf{GL}_m(-q)$ (voir [DM2, preuve du lemme 9.6]).

Rappelons la proposition suivante (voir [FS, appendice, proposition p. 224]):

5.14. Proposition. (i) *La représentation unipotente cuspidale λ_k de $\mathbf{U}_{1/2(k^2+k)}(q)$ est $\varepsilon_{\tau_k} R^{\mathbf{U}_{1/2(k^2+k)}}_{[\tau_k]}$.*

(ii) *Pour $m \geqslant 1/2(k^2+k)$, les caractères irréductibles de $\mathscr{R}(\mathbf{U}_m(q))_{\lambda_k}$ sont les $\varepsilon_\mu R^{\mathbf{U}_m}_{[\mu]}$ où μ est une partition de 2-coeur τ_k. Le caractère $\varepsilon_\mu R^{\mathbf{U}_m}_{[\mu]}$ est associé à l'élément de $\mathscr{R}\mathbf{B}_{1/2(m-1/2(k^2+k))}$ donné par $[\mu(0)] \boxtimes [\mu(1)]$ où $\mu(0)$ et $\mu(1)$ sont les 2-quotients de paramètre 1 de μ.*

Nous démontrons maintenant le théorème 3.10 dont nous rappelons l'énoncé.

5.15. Théorème. *Pour $\mathscr{R}G = \bigoplus_m \mathbf{U}_m(q)$, pour tout couple $(\lambda_k, \lambda_{k'})$ de caractères cuspidaux unipotents qui se correspondent (i.e., $k' = k+1$ ou $k = k' = 0$), $\Theta_{\lambda_k, \lambda_{k'}}$ est l'application de $\mathscr{R}\mathbf{B}$ dans $\mathscr{R}\mathbf{B}$ définie par $\nu \boxtimes \mu \mapsto X\mu \boxtimes X^*(\nu)$ si k est impair ou si $k = k' = 0$ et $\nu \boxtimes \mu \mapsto X^*(\mu) \boxtimes X\nu$ sinon.*

Démonstration. Soient μ, μ' deux partitions de 2-cœur respectivement τ_k et $\tau_{k'}$ et de 2-quotient de paramètre 1 respectivement $(\mu(0), \mu(1))$ et $(\mu'(0), \mu'(1))$. La représentation de Weil étant une vraie représentation, nous n'avons pas de question de signe à nous poser, et il suffit donc de vérifier que $c_{[\mu],[\mu']}$ est non nul exactement quand $\mu'(0) \boxtimes \mu'(1)$ est un composant de $X\mu(1) \boxtimes X^*\mu(0)$ ou de $X^*\mu(0) \boxtimes X\mu(1)$, suivant la parité de k. Or $c_{[\mu],[\mu']} \neq 0$ si et seulement si ${}^t\mu$ et ${}^t\mu'$ sont 2-transverses.

- Supposons k pair et $k \neq 0$ ou $k' \neq 0$, c'est à dire $|\tau_k| - |\tau_{k'}|$ impair. Les 2-quotients de paramètre 1 de ${}^t\mu$ et ${}^t\mu'$ sont $({}^t\mu(1), {}^t\mu(0))$ et $({}^t\mu'(1), {}^t\mu'(0))$, d'après 5.13. Donc, d'après 5.12, $c_{[\mu],[\mu']} \neq 0$ si et seulement si ${}^t\mu(0) \preccurlyeq {}^t\mu'(1)$ et ${}^t\mu'(0) \preccurlyeq {}^t\mu(1)$, c'est à dire, en utilisant 5.1, si et seulement si $\langle X^*([\mu(1)]), [\mu'(0)]\rangle \neq 0$ et $\langle [\mu'(1)], X([\mu(0)])\rangle \neq 0$ d'où le résultat dans ce cas.
- Supposons k impair ou $k = k' = 0$, c'est à dire $|\tau_k| - |\tau_{k'}|$ pair. Les 2-quotients de paramètre 0 de ${}^t\mu$ et ${}^t\mu'$ sont $({}^t\mu(0), {}^t\mu(1))$ et $({}^t\mu'(0), {}^t\mu'(1))$, d'après 5.13. Donc, d'après 5.12, $c_{[\mu],[\mu']} \neq 0$ si et seulement si ${}^t\mu(1) \preccurlyeq {}^t\mu'(0)$ et ${}^t\mu'(1) \preccurlyeq {}^t\mu(0)$, c'est à dire, en utilisant 5.1, si et seulement si $\langle X^*([\mu(0)]), [\mu'(1)]\rangle \neq 0$ et $\langle [\mu'(0)], X([\mu(1)])\rangle \neq 0$ d'où le résultat. □

6. Cas symplectique-orthogonal: indices pour la conjecture. Nous présentons ici les calculs qui nous ont incités à faire la conjecture 3.11, ainsi que quelques indices montrant qu'il y a un espoir de démontrer combinatoirement cette conjecture.

Nous avons calculé à l'aide d'un ordinateur la représentation unipotente $\omega_{m,m',1}$, pour $G_m = \mathbf{Sp}_{2m}(q)$ et $G'_{m'} = \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q)$, à une ambiguité près pour la série principale (où nous n'avons que la restriction de $\omega_{m,m'}$ à $\mathbf{Sp}_{2m}(q) \times \mathbf{SO}^{\pm}_{2m'}(q)$), pour $m, m' \leqslant 11$. Nous expliquons la méthode, et pourquoi les résultats suggèrent que cette méthode pourrait fournir une démonstration (avec cependant toujours une ambiguité pour la série principale).

Soit $\omega'_{m,m}$ la restriction à $\mathbf{Sp}_{2m}(q) \times \mathbf{SO}^{\pm}_{2m'}(q)$ de la représentation de Weil $\omega_{m,m'}$ de $\mathbf{Sp}_{2m}(q) \times \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q)$; nous notons $\omega_{m,m',1}$ et $\omega'_{m,m',1}$ les projections unipotentes de ces représentations. Un résultat de Waldspurger (cf. [MVW, chapter 4, IV, 5]) affirme que $\omega_{m,m'}$ est sans multiplicité; il en résulte que $\omega'_{m,m',1}$ est une représentation où tout caractère irréductible intervient avec multiplicité au plus deux.

Par ailleurs, $\omega^{\sharp}_{m,m',1}$ est donnée par le théorème 4.4. Comme expliqué ci-dessous, $\omega^{\sharp}_{m,m',1}$ est un élément de $\mathbb{Q}\mathscr{R}(\mathbf{Sp}_{2m}(q) \times \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q))$; notre programme vérifie que, dans tous les cas testés, il existe un seul élément $\omega'_{m,m',1}$ de $\mathscr{R}(\mathbf{Sp}_{2m}(q) \times \mathbf{O}^{\pm}_{2m'}(q))$ tel que:

- Les coefficients de $\omega'_{m,m',1}$ sur les caractères irréductibles sont 0, 1 ou 2;
- La projection de $\omega'_{m,m',1}$ sur les fonctions uniformes est égale à $\omega^{\sharp}_{m,m',1}$.

Nous noterons que, au vu du théorème 3.7 et de la description explicite qui suit sa démonstration, la connaissance de $\omega'_{m,m',1}$ détermine les termes $\omega^{\lambda_k,\lambda^I_{k+1}}$, ainsi que les termes $\omega^{\lambda_k,\lambda^{II}_k}$ pour $k > 0$: en effet un caractère irréductible $\chi \in \mathscr{R}(\mathbf{SO}^{\pm}_{2m}(q))_{\lambda_k}$, où $k > 0$, possède deux extensions à $\mathbf{O}^{\pm}_{2m}(q)$, qui sont respectivement dans les séries $\mathcal{R}(\mathbf{O}^{\pm}_{2m}(q))_{\lambda^I_k}$ et $\mathcal{R}(\mathbf{O}^{\pm}_{2m}(q))_{\lambda^{II}_k}$; et si $\psi \otimes \chi$ intervient dans $\omega'_{m,m'}$, nous savons déterminer en fonction de la série de ψ lequel des cas se présente.

Les calculs on été faits en langage GAP (cf. [Sc]), sauf la partie cruciale (la recherche d'un élément d'un réseau à coefficients $\leqslant 2$ et possédant une projection donnée sur un sous-espace vectoriel) pour laquelle nous remercions Philippe Hoogvorst de nous avoir fourni un algorithme efficace écrit en langage C.

Nous décrivons maintenant plus en détail les calculs. Les caractères unipotents des groupes $\mathbf{Sp}_{2m}(q)$ et $\mathbf{SO}^{\pm}_{2m'}(q)$ sont paramétrés par les *symboles* introduits par Lusztig [L2]. Un symbole est une paire $\Lambda = (S, T)$ (non ordonnée) de parties de $\mathbb{N}$, modulo la relation d'équivalence $(S, T) \sim (\{0\} \cup S + 1, \{0\} \cup T + 1)$ (un "décalage"). On appelle *rang* du symbole le nombre

$$\operatorname{rg}(\Lambda) = \sum_{\nu \in S} \nu + \sum_{\mu \in T} \mu + [(|S| + |T| - 1)^2/4]$$

(il est facile de voir que ce nombre est invariant pour la relation d'équivalence définissant les symboles). On normalisera un symbole en supposant $|S| \geqslant |T|$ et $0 \notin S \cap T$; on dit alors que le symbole est réduit, et on appelle défaut du symbole le nombre $\operatorname{def}(\Lambda) = |S| - |T|$ (cette normalisation choisit un représentant bien défini si $\operatorname{def}(\Lambda) > 0$). On notera que si S est la suite de β-nombres d'une partition ν, et T la suite de β-nombres d'une partition μ, alors $\operatorname{rg}(\Lambda) = \|\nu\| + \|\mu\| + [\operatorname{def}(\Lambda)^2/4]$. Lusztig (cf. [L2, 8.2]) a démontré le théorème suivant:

6.1. THÉORÈME. *Les caractères unipotents de $\mathcal{R}(\mathbf{Sp}_{2m}(q))_{\lambda_k}$ sont en bijection avec les symboles de rang m et de défaut $2k+1$, et ceux de $\mathcal{R}(\mathbf{SO}^{\pm}_{2m}(q))_{\lambda_k}$ avec les symboles de rang m et de défaut $2k$, à l'exception près qu'un symbole de la forme (S, S) paramètre deux caractères de la série principale de $\mathbf{SO}^{+}_{2m}(q)$ conjugués par $\mathbf{O}^{+}_{2m}(q)$ (tous les autres caractères unipotents de $\mathbf{SO}^{\pm}_{2m}(q)$ sont invariants sous l'action du groupe orthogonal).*

Il résulte immédiatement du théorème ci-dessus que les caractères unipotents de $\mathbf{O}^{\pm}_{2m}(q)$ sont paramétrés par des symboles *ordonnés* avec mêmes conditions de rang et de défaut. Le paramétrage pour $\mathbf{O}$ et $\mathbf{Sp}$ a la propriété que, si $\rho_\Lambda \in \mathcal{R}(G_m)$ est un caractère unipotent paramétré par le symbole $\Lambda = (S, T)$ de la série de Harish-Chandra $(\mathcal{R}G)_\lambda$, l'élément correspondant de $\mathcal{R}\mathbf{B}$ est paramétré par le couple de partitions dont S et T sont les ensembles de β-nombres.

Les fonctions unipotentes uniformes admettent une base formée des caractères fantômes, paramétrés par une base des fonctions de F-classe sur le groupe de Weyl $W_{\mathbf{G}}$ (cf. §1.D). Pour un groupe déployé, une telle base est donnée par $\operatorname{Irr}(W_{\mathbf{G}})$. Pour $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2m}$, les caractères de $W_{\mathbf{G}} = W(\mathbf{B}_m)$ sont en bijection avec les symboles de rang m et de défaut 1, et pour $\mathbf{G} = \mathbf{SO}^{+}_{2m}$, les caractères de $W_{\mathbf{G}} = W(\mathbf{D}_m)$ sont en bijection avec les symboles de rang m et de défaut 0, à l'exception près qu'un symbole de la forme (S, S) paramètre deux caractères de $W(\mathbf{D}_m)$ conjugués sous $W(\mathbf{B}_m)$. Les caractères fantômes de $\mathbf{SO}^{-}_{2m}(q)$ sont paramétrés par les restrictions à $W(\mathbf{D}_m).\sigma$ des caractères de $W(\mathbf{B}_m)$. Ces fonctions ne sont pas linéairement indépendantes (deux caractères de même restriction donnent des fonctions opposées). Dans l'espace vectoriel qu'elles engendrent, elles sont paramétrées par des vecteurs $e_{(S,T)}$ où (S,T) est un symbole ordonné de défaut 0 avec $S \neq T$, et où $e_{(S,T)} = -e_{(T,S)}$. Nous noterons R_Λ le caractère fantôme paramétré par un symbole Λ comme ci-dessus. Nous devons décrire les produits scalaires $\langle R_\Lambda, \rho_{\Lambda'}\rangle$.

Si $\Lambda = (S,T)$ est un symbole (supposé réduit), on note $X(\Lambda) = S \cap T$, $Y(\Lambda) = \{y_0, y_1, \ldots\}$ la différence symétrique de S et T, rangée en ordre croissant, et on note $P(\Lambda) = \{y_1, y_3, \ldots\}$ les éléments d'indice impair de Y. Enfin on note $M^\sharp(\Lambda)$ la différence symétrique de $T - Y(\Lambda)$ et $P(\Lambda)$. Lusztig (cf. [L4, 4.23]) a démontré:

$$\langle R_\Lambda, \rho_{\Lambda'}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\Lambda) \neq X(\Lambda') \text{ ou } Y(\Lambda) \neq Y(\Lambda') \\ 2^{-[(|Y(\Lambda)|-1)/2]}(-1)^{|M^\sharp(\Lambda)\cap M^\sharp(\Lambda')|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le programme en GAP utilise cette formule pour exprimer $\omega^\sharp_{m,m',1}$ dans la base ρ_Λ des caractères unipotents.

Références

[AM] J. Adams et A. Moy, *Unipotent representations and reductive dual pairs over finite fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 309–321.

[A] A.-M. Aubert, *Description de la correspondance de Howe en termes de classification de Kazhdan-Lusztig*, Invent. Math. **103** (1991), 379–415.

[C] R. Carter, *Finite Groups of Lie Type*, Wiley-Interscience, New York, 1985.

[DM1] F. Digne et J. Michel, *Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani*, Mem. Soc. Math. France (N.S.) **20** (1985).

[DM2] ———, *Foncteurs de Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires sur un corps fini*, J. Algebra **107** (1987), 217–255.

[DM3] ———, *Representations of Finite Groups of Lie Type*, London Math. Soc. Stud. Texts **21**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[DM4] ———, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), 345–406.

[FS] P. Fong et B. Srinivasan, *Brauer trees in classical groups*, J. Algebra **131** (1990), 179–225.

[G] P. Gérardin, *Weil representations associated to finite fields*, J. Algebra. **46** (1977), 54–101.

[H1] R. Howe, *On the character of Weil's representation*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 287–298.

[H2] ———, *Invariant theory and duality for classical groups over finite fields with applications to their singular representation theory*, preprint, Yale University.

[H3] ———, "θ-series and invariant theory" in *Automorphic Forms, Representations and L-functions, Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, 1979, 315–322.

[H4] ———, "Another look at the local θ-correspondence for an unramified dual pair" in *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro*, Israel Math. Conf. Proc. **2**, Weizmann, Jerusalem, 1990, 93–124.

[HL] R. B. Howlett et G. I. Lehrer, *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math. **58** (1980), 37–64.

[K] S. Kudla, *On the local theta correspondence*, Invent. Math. **83** (1986), 229–255.

[L1] G. Lusztig, *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius*, Invent. Math. **38** (1976), 101–159.

[L2] ———, *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), 125–175.

[L3] ———, *Representations of Finite Chevalley Groups*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **39**, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[L4] ———, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Ann. of Math. Stud. **107**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.

[MVW] C. Mœglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math **1291**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Sc] M. Schönert et al., GAP 3.2—Groups, Algorithms and Programming, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinish-Westfalisch Tech. Hoschule, Aix-la-Chapelle, 1993.

[Sr] B. Srinivasan, *Weil representations of finite classical groups*, Invent. Math. **51** (1979), 143–153.

[W] J.-L. Waldspurger, "Démonstration d'une conjecture de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$" in *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro*, Israel Math. Conf. Proc. **2**, Weizmann, Jerusalem, 1990, 267–324.

[Z] A. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups*, Lecture Notes in Math. **869**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

Aubert: LMENS-DMI URA 762 et GDR 1179 du CNRS, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris, France; aubert@dmi.ens.fr

Michel: UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 Denis-Diderot et UMR 9994 du CNRS, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France; jmichel@mathp7.jussieu.fr

Rouquier: UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 Denis-Diderot et UMR 9994 du CNRS, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France; rouquier@mathp7.jussieu.fr