## ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

И. М. Пак, А. Е. Постников

В данной заметке мы приводим алгоритм, который позволяет закодировать и перечислить все остовные деревья графа со структурой долей (см. ниже). Этот алгоритм может оказаться полезным для перечисления остовных деревьев, удовлетворяющих некоторым условиям.

Обозначим число остовных деревьев данного графа Г без петель и без кратных ребер через $t$ (Г). Мы будем рассматривать графы $\Gamma = \Gamma(G; G_1, \ldots, G_k)$, где $G$ — граф с вершинами $\bar 1, \bar 2, \ldots, \bar k$, а $\Gamma_l$ получается из него заменой вершины $\bar i$ на $G_i$, причем для вершин $a \in G_i$ и $b \in G_j$ $(i \neq j)$ ребро $(a, b) \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $(\bar i, \bar j) \in G$.

Теорема.

$$t(\Gamma(G; G_1, \ldots, G_k)) = \prod_{l=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n_l} f_l(i)\, d(l)^{i-1}\right)\sum_{\gamma}\prod_{r=1}^{k} n_r^{\rho_\gamma(\bar r)-1}, \tag{1}$$

*где* $n_i := |G_i|$, $d_i = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}n_j$ $(m_{ij})$ — *матрица смежности вершин графа* $G$, $f_l(i)$ — *число остовных корневых лесов графа* $G_l$ *с* $i$ *связными компонентами* (*остовным корневым лесом* графа мы называем лес, содержащий все вершины графа, в каждой связной компоненте которого выбрана вершина, называемая *корнем*); *второе суммирование ведется по всем остовным деревьям* $\gamma$ *графа* $G$, *а* $\rho_\gamma(\bar r)$ *означает степень вершины* $\bar r$ *в графе* $\gamma$.

Мы опишем здесь метод кодирования остовных деревьев графа Г. Занумеруем вершины графа $G_1$ числами $1, 2, \ldots, n_1$; графа $G_2$ — числами $n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \ldots$; графа $G_k$ — числами $N - n_k + 1, \ldots, N$; $(N = \sum_{i=1}^{k} n_i)$. Мы будем кодировать каждое остовное дерево $\alpha$ графа Г набором последовательностей $P_1, P_2, \ldots, P_k, R$, состоящих из вершин графа Г, длины $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1, k - 2$ соответственно.

Опишем вначале метод кодирования деревьев, принадлежащий Прюферу (см., например, [1, 2]).

Пусть $T$ — дерево с вершинами, занумерованными различными натуральными числами. Рассмотрим последовательность ребер $(b_i, a_i)$ дерева $T$, которая строится следующим образом: $b_1$ — концевая вершина в дереве $T$ с наименьшим номером ($a_1$ тогда определяется однозначно), аналогично $b_2$ — концевая вершина с наименьшим номером в дереве $T \setminus (a_1, b_1)$ и т. д. Таким образом строим последовательность длины $|T| - 2$. *Кодом Прюфера* будем называть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{|T|-2}$.

Ориентируем теперь остовное дерево $\alpha$ графа Г к корню в вершине с номером $N$. Обозначим через $\mu_i$ ориентированный корневой лес $\alpha \cap G_i$ (все его деревья ориентированы к своему корню). Из каждого $\mu_i$ образуем дерево $\tilde\mu_i$. Для этого соединим каждый корень $\mu_i$ с некоторой формальной вершиной $\tilde i$. Пусть $G_i + \{\tilde i\}$ — граф, содержащий вершину $\tilde i$, соединенную со всеми вершинами графа $G_i$. Тогда $\tilde\mu_i$ — остовное дерево графа $G + \{\tilde i\}$. Будем считать, что вершина $\tilde i$ имеет максимальный номер, и найдем $P_i'$ — код Прюфера дерева $\tilde\mu_i$, который запишем в последовательности $P_i$.

Рассмотрим дерево $\alpha'$, полученное из $\alpha$ стягиванием корневых лесов $\mu_i$ к своим корням, найдем последовательность Прюфера ребер $(b_i, a_i)$ для дерева $\alpha'$. Если $b_1 \in G_j$, то заменим первое вхождение $\tilde j$ в $P_j$ на такую вершину $a_1'$, что ребро $(b_1, a_1') \in \alpha$ (именно в данной ориентации). Аналогично поступим с ребром $(b_2, a_2)$ и т. д. Если на $r$-м шаге $b_r \in G_i$, а в $P_i$ не встречается $\tilde i$, то запишем $a_r'$ на первое свободное место в последовательности $R$. Далее, повторяя одну из этих операций, мы получим окончательный код: $P_1, P_2, \ldots, P_k, R$.

Лемма 1. *Набор последовательностей* $P_1, P_2, \ldots, P_k, R$ *длины* $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1, k - 2$ *соответственно является кодом некоторого дерева* $\alpha$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *для всякого* $i$ $a \in P_i \Rightarrow a \in G_i \cup D_i$, *где* $D_i := \bigcup_{m_{ij}>0} G_j$;

2) *пусть* $P_i'$ *— последовательность, образованная из* $P_i$ *заменой всех* $b$, *записанных в* $P_i$, *но не являющихся вершиной* $G_i$ *на* $\bar{i}$, *тогда для всякого* $i$ *последовательность* $P_i'$ *является кодом Прюфера остовного дерева графа* $G_i + \{i\}$;

3) *пусть последовательность* $R'$ *образована из* $R$ *заменой всех* $a \in G_i$ *на* $\bar{i}$. *Тогда* $R'$ *является кодом Прюфера некоторого остовного дерева графа* $G$.

Лемма 2. *Кодирование устанавливает биекцию между остовными деревьями графа* Г *и наборами, удовлетворяющими условию леммы* 1.

Лемма 3. *Для каждого набора остовных корневых лесов* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ *графов* $G_1, G_2, \ldots, G_k$ *соответственно и остовного дерева* $\beta$ *графа* $G$ *число остовных деревьев графа* Г, *соответствующих* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *и* $\beta$ (см. лемму 1, п. 2), 3)), *равно*:

$$t(\Gamma, \mu, \beta) = \prod_{l=1}^{k} \left(d(l)^{\delta_l - 1} n_l^{\rho_\beta(l)-1}\right), \tag{2}$$

*где* $\delta_l$ *— число связных компонент леса* $\mu_l$.

Несложно найти метод декодирования, обратный описанному выше алгоритму кодирования, который по набору, удовлетворяющему условию леммы 1, строит основное дерево графа Г. Таким образом, мы получили метод перебора всех остовных деревьев. Отсюда следуют лемма 1 и лемма 2, из которых легко получить доказательство леммы 3 и теоремы.

Следствие 1. *Пусть* $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, $G = \Gamma = K_k$ *— полный граф с* $k$ *вершинами. Тогда*

$$t(\Gamma) = k^{k-2}. \tag{3}$$

Это известная формула Кэли [3]. Идея кодирования деревьев для подсчета $t(\Gamma)$ принадлежит Прюферу [2]. В этом случае наш код состоит лишь из последовательности $R$, совпадающей с кодом Прюфера.

Следствие 2. *Пусть* $n_1 = p$, $n_2 = q$, $k = 2$, $\Gamma = K_{p,q}$ *— двудольный граф с* $p$ *вершинами в первой доле и с* $q$ *— во второй. Тогда*

$$t(\Gamma) = p^{q-1} q^{p-1}. \tag{4}$$

Формула (4) была получена Скоинсом [4], а доказана с помощью кодирования Реньи [5].

Следствие 3. *Пусть* $G_i = O_{n_i}$ $(O_m$ *— это пустой граф с* $m$ *вершинами*$)$, $G = K_k$. *Тогда* $\Gamma = K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *и*

$$t(\Gamma) = (N - n_1)^{n_1 - 1} (N - n_2)^{n_2 - 1} \ldots (N - n_k)^{n_k - 1} N^{k-2}. \tag{5}$$

Формула (5) является обобщением (3) и (4). Ее доказательство можно найти у Аустина в [6], а кодировку в статье Олаха [7], причем в этом случае его код совпадает с нашим.

Следствие 4. *Пусть* $G_i = O_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; *тогда*

$$t(\Gamma) = \prod_{i=1}^{k} d(i)^{n_i - 1} \sum_{\gamma} \prod_{j=1}^{k} n_j^{\rho_\gamma(j)-1}.$$

Авторы благодарны А. В. Зелевинскому за внимание, проявленное к настоящей работе.

[1] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М.: Мир, 1977.— С. 32—34. [2] Prufer H. // Archiv der Math. und Phys. (3).— 1918.— V. 27.— P. 142—144. [3] Caley A. // J. of Pure and Appl. Math.— 1889.— V. 23.— P. 376—378. [4] Scoins H. // Proc. of Cambridg Phil. Society.— V. 58.— P. 12—16. [5] Renyi A. // J. Mayar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.— 1966.— V. 16.— P. 77—105. [6] Austin T. L. // Canad. J. Math.— 1960.— V. 12.— № 4.— P. 535—545. [7] Olah G. // Studia Sci. Math. Hung.— 1968.— V. 3.— P. 71—80.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Правление общества
16 января 1990 г.