puis, comme précédemment, en observant que le jeton ne peut être placé dans un coin de l'échiquier,

$$R_{4n} = (4n - 2)\, R_{4n-4};$$

par suite

$$R_{4n} = 2.6.10. \ldots (4n - 2).$$

Exemple IV. — De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs distincts, en supposant que tous les produits diffèrent des facteurs et diffèrent entre eux ?

Soit O_n ce nombre de manières ; le nombre de multiplications à faire dans chacune des manières est toujours $(n - 1)$. On a d'abord, pour deux facteurs a et b, les multiplications ab et ba ; donc $O_2 = 2$.

Prenons un troisième facteur c ; on peut le combiner comme multiplicateur ou comme multiplicande avec le produit effectué, ce qui donne

$$c(ab) \quad \text{et} \quad (ba)c;$$

mais on peut aussi faire intervenir le nombre c, pendant la multiplication, de quatre manières :

$$acb, \quad cab, \quad bca, \quad cba;$$

on a donc $O_3 = 6\,O_2$. Prenons un quatrième facteur d et combinons-le avec l'un des O_3 produits entièrement effectués, abc par exemple. On a deux manières distinctes :

$$d(abc) \quad \text{et} \quad (abc)d;$$

mais, si l'on introduit le facteur d pendant l'opération, abc exige deux multiplications. Donc, en faisant intervenir d dans l'intervalle de la multiplication de a par (bc), il y a quatre manières :

$$ad(bc), \quad da(bc), \quad a(dbc), \quad a(bdc),$$

et autant pour la multiplication de (bc) par a ; en tout dix manières. On a donc

$$O_4 = 10\,O_3.$$

Désignons par M une des manières employées pour obtenir le produit de $(n - 1)$ facteurs, et introduisons le nouveau facteur f. Celui-ci peut se combiner comme multiplicande ou comme multiplicateur, ce qui donne les deux cas Mf et fM ; mais, si on l'introduit avant d'avoir effectué le produit M, il y a $(n - 2)$ multiplications dont chacune donne quatre manières ; donc en tout

$$2 + 4(n - 2) \quad \text{ou} \quad 4n - 6;$$

par suite

$$O_n = (4n - 6)\, O_{n-1},$$

et

$$O_n = 2.6.10 \ldots (4n - 6) = 2^{n-1}.1.3.5 \ldots (2n - 3).$$

Cette démonstration est due à O. RODRIGUES; mais le résultat précédent est de M. CATALAN (*Journal de Liouville*, 1re série, t. III et VI).

44. Permutations avec répétition. — Ce sont les diverses manières de disposer n objets en ligne droite, ces objets n'étant pas tous distincts. Par exemple, si α lettres sont égales à a, si β lettres sont égales à b, ..., λ lettres à l, avec la condition

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n,$$

le nombre des permutations avec répétition est

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Exemple I. — De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs égaux ou inégaux ?

Si α facteurs sont égaux à a, β à b, γ à c, ..., en désignant par a, b, c, ... des facteurs quelconques inégaux, il faut diviser

$$O_n=2^{n-1}.1.3.5.\ldots(2n-3),$$

par le produit des factorielles

$$\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots$$

Exemple II. — De combien de manières peut-on remplacer le produit de n facteurs par des produits de deux facteurs dans le cas de n pair, et par des produits de deux facteurs et d'un seul, dans le cas de n impair ?

Exemple III. — De combien de manières peut-on décomposer un produit de $3n$ facteurs en n produits de trois facteurs ?

On trouve

$$\frac{(3n)!}{(3!)^n.\,n!}.$$

45. Arrangements simples. — Les arrangements simples de p objets distincts, pris q à q, sont les manières de disposer en ligne droite q de ces objets, de telle sorte que deux dispositions diffèrent soit par le *choix*, soit par l'*ordre* des objets.

En désignant leur nombre par A_p^q, on déduit ces arrangements des arrangements A_p^{q-1}, en écrivant successivement à la suite de ces derniers les $(p-q+1)$ lettres qui n'y entrent pas

$$A_p^q=(p-q+1)\,A_p^{q-1};$$

par suite,

$$A_p^q=p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1).$$