REMARQUES SUR UN MÉMOIRE DE N. FUSS;

Par J. LIOUVILLE.

Le Mémoire dont je veux parler est imprimé dans le tome IX des *Nova acta Acad. Petrop.* (année 1761). Il a pour objet la solution du problème suivant : « Un polygone P étant donné, de combien de manières peut-on le partager en polygones de m côtés au moyen de diagonales? » Ce problème comprend, comme cas particulier, celui de la décomposition en triangles, dont plusieurs géomètres se sont occupés, et qui, dans ces derniers temps, a surtout donné lieu à des remarques intéressantes de la part de MM. Lamé, Rodrigues et Binet [*].

Soit n le nombre des côtés du polygone P. Parmi les polygones $p_1, p_2, \ldots, p_i$ de m côtés, dont il est pour ainsi dire la somme dans une quelconque des décompositions proposées, il y en a toujours deux formés par $(m-1)$ côtés et une diagonale de P, tandis que les $(i-2)$ autres le sont par $(m-1)$ côtés et deux diagonales. Le nombre total des côtés de P sera ainsi

$$2(m-1)+(i-2)(m-2);$$

il faudra donc que l'on ait

$$n = im - 2(i-1)$$

pour que la décomposition en polygones de m côtés soit possible.

Cela admis, désignons par $\varphi(i)$ le nombre des décompositions cherchées, lequel pour une valeur donnée de m est naturellement une fonction de i. Il est évident qu'on aura d'abord

$$\varphi(1) = 1:$$

[*] *Voir* le tome III de ce Journal, page 505 et page 549, puis le tome IV, page 79 et page 91.

quant aux valeurs de $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$,..., Fuss les déduit les unes des autres à l'aide de la formule générale,

$$(a)\quad \varphi(i) = \frac{im - 2(i-1)}{2(i-1)}[\varphi(1)\varphi(i-1) + \varphi(2)\varphi(i-2) + \ldots + \varphi(i-1)\varphi(1)],$$

en faisant successivement $i=2$, $i=3$, $i=4$, etc. Il est aisé de démontrer cette formule, et je ne m'arrêterai pas à rapporter ici en détail les raisonnements de Fuss.

Le cas de $m=3$ se rapporte à la décomposition du polygone P en triangles. On a alors $n=i+2$, et en désignant par P_n ce que $\varphi(i)$ devient dans ce cas, la formule de Fuss se réduit à

$$P_n = \frac{n(P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_3)}{2n-6}.$$

Or, voilà précisément l'équation que M. Lamé (après l'avoir établie à peu près comme Fuss lui-même, bien qu'il n'eût pas lu le passage des *Nova acta*) combine avec l'équation de Segner,

$$P_{n+1} = P_n + P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_3 + P_n,$$

pour arriver à la formule d'Euler,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

dont on demandait une démonstration. Mais Fuss n'a pas même comparé sa formule à celle de Segner : à plus forte raison est-il loin d'avoir vu quel parti l'on pouvait tirer de cette comparaison. La démonstration que M. Lamé a donnée de la formule d'Euler s'est ainsi, pour ainsi dire, présentée d'elle-même à Fuss, lequel (habile géomètre pourtant) n'a pas su profiter de ce hasard heureux.

Ce n'est pas tout. Dans une addition placée à la fin de son Mémoire, Fuss considère la série

$$1 + x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \ldots + x^i\varphi(i) + \ldots,$$

où nous regarderons l'indéterminée x comme ayant une valeur très-petite, et il trouve que, d'après la loi des coefficients $\varphi(i)$, la $(m-1)^{ième}$

puissance de cette série est

$$\varphi(1) + x\varphi(2) + \ldots + x^{i-1}\varphi(i) + \text{ etc.}$$

La remarque est tout à la fois curieuse et exacte. Il s'ensuit qu'en posant

$$(b) \qquad u = 1 + x\varphi(1) + \ldots + x^i\varphi(i) + \ldots,$$

on a

$$u = 1 + xu^{m-1}.$$

Cette équation, dans le cas de $m = 3$, coïncide avec celle dont M. Binet a fait usage. Mais Fuss n'en a tiré aucun parti : il n'a pas su en déduire les nombres $\varphi(i)$ exprimés en fonction de i; que dis-je? il ne l'a pas même écrite explicitement. Et cette fois encore il a laissé échapper une conclusion élégante qui s'offrait à lui sans efforts.

L'équation

$$u = 1 + xu^{m-1}$$

se résout aisément par la formule de Lagrange ; ou du moins la formule de Lagrange fournit celle des racines qui est développable suivant les puissances entières et positives de x, la seule dont nous ayons besoin. En général, pour l'équation

$$u = \alpha + xf(u),$$

cette racine est

$$u = \alpha + \frac{x}{1}f(\alpha) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d.f(\alpha)^2}{d\alpha} + \ldots + \frac{x^i}{1.2\ldots i}\cdot\frac{d^{i-1}.f(\alpha)^i}{d\alpha^i} + \ldots.$$

En faisant $f(u) = u^{m-1}$, $\alpha = 1$, il viendra donc

$$u = 1 + x + (m-1)x^2 + \ldots + \frac{(im-i)(im-i-1)\ldots(im-2i+2)}{1.2\ldots i}x^i + \ldots.$$

D'un autre côté, on a

$$u = 1 + x\varphi(1) + x\varphi(2) + \ldots + x^i\varphi(i) + \text{ etc.}$$

De là résulte $\varphi(2) = m - 1$, puis, en général,

$$\varphi(i) = \frac{(im - i)(im - i - 1)\ldots(im - 2i + 2)}{1.2\ldots i}.$$

Telle est la valeur de $\varphi(i)$, que Fuss aurait dû trouver. On voit par les *Nova acta* que Pfaff s'était aussi occupé de ce problème, mais j'ignore entièrement quelle solution il avait obtenue.

Note de M. J. Binet.

M. Liouville ayant bien voulu me donner communication des recherches précédentes, relatives à une question intéressante d'analyse, analogue à celle dont je me suis occupé dans le tome IV de ce Journal, je me propose de reconnaître comment la méthode des fonctions génératrices peut établir l'équation

$$u = 1 + xu^{m-1},$$

à laquelle Fuss paraît n'être arrivé que par une sorte d'induction. Je conserverai dans cette Note les dénominations employées par M. Liouville, et je poserai, pour abréger,

$$\psi(i) = \varphi(1)\varphi(i-1) + \varphi(2)\varphi(i-2) + \ldots + \varphi(i-2)\varphi(2) + (i-1)\varphi(1)\varphi,$$

à partir de $i = 2$; en sorte que

$$\psi(2) = \varphi(1)\varphi(1) = 1, \quad \psi(3) = \varphi(1)\varphi(2) + \varphi(2)\varphi(1), \text{ etc.}$$

L'échelle de relation (a), page 392, prend alors cette expression

$$(a) \qquad 2(i-1)\ \varphi(i) = [(m-2)i + 2]\ \psi(i).$$

u est une fonction de x donnée par l'équation

$$(b) \qquad u = 1 + \sum\nolimits_1^\infty x^i.\varphi(i);$$

on en tire

$$(u-1)^2 = \left[\sum x^i.\varphi(i)\right]^2,$$

ou bien

$$(u-1)^2 = x^2\varphi(1)\,\varphi(1) + x^3[\varphi(1)\,\varphi(2) + \varphi(2)\,\varphi(1)] + \text{etc.};$$

c'est-à-dire

$$(\text{б}) \qquad (u-1)^2 = \sum\nolimits_2 x^i.\psi(i):$$

ainsi $(u-1)^2$ est la fonction génératrice de $\psi(i)$, comme u est celle de $\varphi(i)$. Pour déterminer u, on formera la dérivée par dx de l'équation (b),

$$\frac{du}{dx} = \sum i\,x^{i-1}\varphi(i);$$

on multiplie par $2x$, et du produit l'on retranche $2(u-1) = \sum x^i.\varphi(i)$; il vient

$$2x\frac{du}{dx} - 2u + 2 = \sum 2(i-1)\,\varphi(i).x^i.$$

Prenez aussi la dérivée de l'équation (б), multipliée par $m-2$,

$$(m-2)\,\frac{d.(u-1)^2}{dx} = \sum (m-2)\,i\,\psi(i).x^{i-1};$$

multipliez par x, et ajoutez la même formule (б), multipliée par 2; cela fait

$$(m-2)x\frac{d.(u-1)^2}{dx} + 2(u-1)^2 = \sum[(m-2)\,i + 2]\,\psi(i).x^i.$$

Or, en vertu de l'échelle de relation (a), le second membre est égal à

$$\sum\nolimits_1 2(i-1)\,\varphi(i)x^i,$$

et il peut être remplacé par sa valeur tirée de l'équation antérieure; on a donc, pour déterminer u, cette équation différentielle

$$2(m-2)\,x(u-1)\frac{du}{dx} + 2(u-1)^2 = 2x\frac{du}{dx} - 2(u-1):$$

on en tire sur-le-champ l'équation séparée

$$\frac{(m-2)(u-1)-1}{u(u-1)}du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Le numérateur

$$(m-2)(u-1)-1 = (m-2)(u-1)+u-1-u,$$

ou bien $=(m-1)(u-1)-u$; l'équation à intégrer devient ainsi

$$\frac{du}{u-1} - \frac{(m-1)du}{u} = \frac{dx}{x};$$

son intégrale est

$$\log(u-1) - (m-1)\log u = \log(Ax),$$

A étant une constante d'intégration; on en tire

$$\frac{u-1}{u^{m-1}} = Ax,$$

et la fonction u doit être déterminée par l'équation algébrique

$$u = 1 + Axu^{m-1}.$$

La fonction u, tirée de l'équation (b), va fournir la valeur de la constante A, car on a, par la substitution dans l'équation algébrique,

$$x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \text{etc.} = Axu^{m-1};$$

en divisant par x, il vient

$$\varphi(1) + x\varphi(2) + \text{etc.} = Au^{m-1};$$

on posera $x = 0$, ce qui entraîne $u = 1$, et l'équation donnera

$$\varphi(1) = 1 = A.$$

L'équation en u est donc simplement

$$u = 1 + xu^{m-1}.$$

Il est, en effet, très-singulier que Fuss n'ait pas su tirer parti de cette équation, car on connaissait depuis longtemps une formule de Lambert pour le développement, selon les puissances de x, de la valeur de u: c'est le développement que donne aussi le théorème de Lagrange, employé comme l'a fait ci-dessus M. Liouville.