DEMONSTRATIO SERIEI

$$\frac{4.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 22.\ \ldots\ldots\ (4n-10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \ldots\ldots\ (n-1)}$$

EXHIBITAE IN RECENSIONE VI. TOMI VII. COMMENTARIORVM A. S. P.

Auctore

S. KOTELNIKOW.

Quum a quibusdam amicis intellexiſſem, deſiderari libellum, artem agrimenſoriam continentem, ad ſcribendum me accinxi, atque demonſtrato theoremate, *in omni figura rectilinea vt conſtrui poſſit debere datorum numerum eſſe* $2n-3$, denotante n numerum laterum, ad hanc aequationem perueni $2n-3 = x+y+z$, vbi, x numerum datorum laterum, y angulorum poligoni, z diagonalium, denotat. In enumeratione itemque euolutione praecipuorum constructionis caſuum in hac aequatione contentorum, continet enim multos, reſpexi potiſſimum ad tres ſequentes, quibus:

I. $x=n$, $y=n-3$, $z=0$

II. $x=n-2$, $y=n-1$, $z=0$

III. $x=n$, $y=0$, $z=n-3$.

et euolutis duobus prioribus, deduxi etiam formulas, exhibentes numerum conſtructionum pro quouis poligono, ſequentes

pro

Pro I casu

$$\frac{4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9 - - - - - - n}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6 - - - - - - (n-3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}$$

Pro II. casu

$$\frac{3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8 - - - - - - - n}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6 - - - - - - (n-2)} = \frac{n(n-1)}{1.\,2}.$$

Sed postquam perueni ad tertium casum euoluendum, multum desudaui; nunquam tamen, nec ex delineatione figurarum, nec ex aliis ratiociniis, ad legem, qua figurae pro quibusuis casibus formantur, peruenire potui: nec vnquam plures his quatuor 1, 2, 5, 14, certis et 42 incerto numero, detegere potui. Omissis itaque delineationibus figurarum, ad ratiocinia me conuerti et legem numerorum detectorum scrutans ad illam seriem delapsus sum. De cuius veritate tamen dubitaui, et iure quidem, nam ex quatuor tantum numeris certis 1, 2, 5, 14 et quinto 42 incerto, vti dixi, eruta est: et quamquam scirem in similibus demonstrationibus inductioni aliquantillum indulgendum esse, in medium tamen proferre non ausus sum, etiamsi mihi viderer, legitima ratiocinia in eruenda ista serie adhibuisse.

At cum nuper VII. Commentariorum tomum adeptus essem, volens me confirmare de veritate seriei inuentae, inspexi dissertationem Cel. *Segneri*, vt aliquid ibi ad meam vtilitatem detegerem; cumque nihil tale inuenissem, ad summarium dissertationum conuersus, vt iudicium de ea latum inspicerem, vidi inopinanter maximo mihi gaudio, eandem seriem, a summo quodam

dam geometra communicatam, cuius auctoritas maximum pondus demonstrationi meae addidit, meque de veritate illius seriei prorsus conuictum reddidit. Puto etiam illum iisdem ratiociniis ad hanc seriem peruenisse, quibus ego deductus sum. Sunt autem haec:

Quum in qualibet figura numerus triangulorum eam componentium sit $n-2$, facile patet, ex datis lateribus n et diagonalibus $n-3$, posse atque debere tot triangula construi, quot necesse est ad construendam figuram omnibus modis possibilibus, atque illa triangula ita construi posse, vt semper $n-2$ combinata praebeant verum constructionis modum, illam, non aliam, figuram exhibentem. Pone iam numerum triangulorum, qui combinati $n-2$ exhibent omnes constructionis modos eandem figuram praebentes, N: erit numerus modorum constructionis pro quauis figura $\frac{N}{n-2}$. Hinc

Pro triangulo $\frac{N}{1}$
Pro —— IV. $\frac{N}{2}$
—— V. $\frac{N}{3}$
—— VI. $\frac{N}{4}$
—— VII. $\frac{N}{5}$.

Numeri vero inuenti constructionis modorum, ita se habent:

Pro triangulo III. 1
—— —— IV. 2
—— —— V. 5
—— —— VI. 14
—— —— VII. 42.

De numero 42 quanquam ſim incertus, tamen eum aſſumo propterea, quod a lege reliquorum non abhorreat.

His ergo poſitis, habeo ſequentes aequationes:

$\frac{N}{1} = 1$; $\frac{N}{2} = 2$; $\frac{N}{3} = 5$; $\frac{N}{4} = 14$; $\frac{N}{5} = 42$.

Ex quibus ſequitur, numeros modorum conſtructionis 1, 2, 5, 14, 42, poſſe exprimi hoc modo:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 14}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}$$

ſiue

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{15}{3},\ \frac{56}{4},\ \frac{210}{5}.$$

Numeri ſuperiores denotant numerum triangulorum, quorum certi quidam $n-2$ dant figuram quaeſitam.

Cum in prioribus caſibus duobus numeri modorum conſtruendi figuras, ex datis lateribus n et $n-3$ angulis, item ex datis $n-2$ lateribus et $n-1$ angulis, per factores exhibeantur, concludo etiam hic per factores debere exprimi, quem in finem retineo numeros

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 14}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}.$$

Ex numero primo $\frac{1}{1}$ nihil concludere poſſum, ſumo ſecundum $\frac{2\cdot 2}{2}$, eumque transformo, vt aliquod indicium capiam de progreſſione factorum denominatoris, qui iam aliquam legem tenent, creſcunt ſcilicet vnitate, quam legem perpetuo retinebo in omnibus numeris. Transformo vero numerum $\frac{2\cdot 2}{2}$ in $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$. Hic nouus $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$ poteſt demum transformari in $\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}$ et $\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}$.

Eodem

Eodem modo tertium muto in $\frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot3\cdot4}$ et in $\frac{2\cdot6\cdot10}{2\cdot3\cdot4}$; aliter enim retentis iisdem denominatorum factoribus transformari non possunt, vt in numeratore constans aliqua lex pateat.

Notum vero, series per factores expressas hac proprietate gaudere, vt abiecto vel addito aliquo, vel aliquibus factoribus, semper certos casus exhibeant, qua proprietate posteriores $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}$ et $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}$ gaudent. Enim vero abiecto factore $\frac{10}{4}$, exhibetur $\frac{2\cdot6}{2\cdot3}=2$, casus pro quadrilatero, et abiecto demum factore $\frac{6}{3}$, habetur $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=1$, pro triangulo; priores vero $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}$ hanc proprietatem non habent, quare retineo posteriores, et habeo pro III. $\frac{2}{2}$; pro IV. $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}$; pro V. $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}$.

Simili modo numerum $\frac{4\cdot14}{4}$ transmuto in $\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot14}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$ $=\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$, duobus prioribus viam monstrantibus, et hac ratione inuenio pro VI. $\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$, qui omnes numeros, pro III. IV. et V scilicet, in se continet.

Postremo assumo quintum numerum $\frac{42\cdot5}{5}=\frac{5\cdot6\cdot7}{5}$, et transmuto eum in $\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14\cdot18}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$, quare habeo sequentes numeros modorum construendi figuras:

Pro trigono $\frac{2}{2}$
Pro quadrilatero $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}$
Pro pentagono $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}$
Pro hexagono $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}$
Pro heptagono $\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{18}{6}$.

In quibus iam lex progressionis facile patet, terminusque generalis erit $\frac{4n-10}{n-1}$, nam denominatoris factores a numero laterum vnitate deficiunt; factores vero numeratoris a quadruplo numero laterum denario. Consequenter numerus constructionum variarum ex datis lateribus et diagonalibus pro omni figura erit

$$\frac{2.6.10.14.18 \; - - - - - - \; (4n-10)}{2.3.4.5.6 \; - - - - - - \; (n-1)}.$$

PHYSICO-