JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CATALAN

Solution nouvelle de cette question: Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 91-94.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A7_0>

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. (*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est P_n.

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement P_n.

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de n côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC ; je désigne leur nombre par $P_{n,1}$;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas *les deux triangles consécutifs* ABC, BCD ; je désigne leur nombre par $P_{n,2}$;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas *les trois triangles consécutifs* ABC, BCD, CDE ; leur nombre est $P_{n,3}$;

. . . .

$(n-2)$°. Enfin, les décompositions du polygone de n côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas *les $n-2$ triangles consécutifs* BCD, CDE,.... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-2}$.

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

du polygone proposé, sans qu'il y en ait d'*omises* ou de *répétées;* donc

$$P_{n+1} = P_n + P_n + P_{n,1} + P_{n,2} + \ldots + P_{n,n-2}. \quad (1)$$

Désignons actuellement par $P_{k,l}$ le nombre des décompositions d'un polygone de k côtés, $abcd\ldots lmnpq\ldots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas l triangles consécutifs abc, bcd, cde,... mnp.

Il est facile de s'assurer que l'on obtiendra ces décompositions si l'on ajoute, à celles qui ne contiennent pas les $l+1$ triangles abc, bcd,... mnp, npq, toutes les décompositions du polygone de $k-1$ côtés $abcd\ldots lmnq\ldots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas les $l-1$ triangles consécutifs abc, bcd,... lmn : on a donc

$$P_{k,l} = P_{k,l+1} + P_{k-1,l-1};$$

ou, en changeant l en $l-1$:

$$P_{k,l} = P_{k,l-1} - P_{k-1,l-2}. \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation linéaire du second ordre, aux différences finies et partielles à trois variables, on pourrait employer les méthodes de Lagrange ou celles de Laplace (*); mais on parviendra plus facilement au résultat, de la manière suivante.

Changeons l en $l-1$, $l-2$,... 4, 3, 2, et ajoutons les équations résultantes; nous obtiendrons

$$P_{k,l} = P_{k,1} - [P_{k-1,l-2} + P_{k-1,l-3} + \ldots + P_{k-1,1} + P_{k-1,0}]. \quad (3)$$

Si, dans cette nouvelle équation, on suppose successivement $l=1$, $l=2$, $l=3$,.... et si l'on observe avec un peu d'attention les résultats, on trouve qu'ils peuvent se mettre sous cette forme,

$$P_{k,1} = P_{k,1},$$
$$P_{k,2} = [P_{k,1}] - [P_{k-1,0}],$$
$$P_{k,3} = [P_{k,1} - P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0}],$$
$$P_{k,4} = [P_{k,1} - 2P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0} - P_{k-2,0}],$$

(*) Lagrange, *Mémoires de Berlin,* année 1775, page 183 ; Laplace, *Académie des Sciences, Savants étrangers,* tome VII, année 1773.

$$P_{k,5} = [P_{k,1} - 3P_{k-1,1} + P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 2P_{k-2,0}],$$
$$P_{k,6} = [P_{k,1} - 4P_{k-1,1} + 3P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 3P_{k-2,0} + P_{k-3,0}],$$
$$P_{k,7} = [P_{k,1} - 5P_{k-1,1} + 6P_{k-2,1} - 3P_{k-3,1}] - [P_{k-1,0} - 4P_{k-2,0} + 3P_{k-3,0}], \text{ etc.}$$

Et en général:

1°. Si l est pair, et $= 2i$:

$$\left.\begin{array}{l} P_{k,l} = \left[P_k - \frac{2i-2}{1}P_{k-1,1} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2}P_{k-2,1} - \ldots \pm \frac{i}{1}P_{k-i+1,1}\right] \\ \quad - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-3}{1}P_{k-2,0} + \frac{2i-4}{1}\,\frac{2i-5}{2}P_{k-3,0} - \ldots \pm P_{k-i,0}\right]; \end{array}\right\} \quad (4)$$

2°. Si l est impair, et $= 2i+1$:

$$\left.\begin{array}{l} P_{k,l} = \left[P_{k,1} - \frac{2i-1}{1}P_{k-1,1} + \frac{2i-2}{1}\,\frac{2i-3}{2}P_{k-2,1} - \ldots \mp P_{k-i,1}\right] \\ \quad - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-2}{1}P_{k-2,0} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2}P_{k-3,0} - \ldots \pm iP_{k-i,0}\right]. \end{array}\right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de $P_{k,l}$ satisfont, suivant que l est pair ou impair, à l'équation (2). D'ailleurs, elles contiennent deux fonctions arbitraires: elles sont donc bien, l'une ou l'autre, l'intégrale générale de cette équation.

Dans le problème dont il s'agit, on a $P_{k,0} = P_k$: en effet, si dans le polygone de k côtés, nous n'omettons aucun triangle, nous devons trouver toutes les décompositions. En même temps, si l'on ajoute aux décompositions qui contiennent le triangle *abc*, celles qui ne le contiennent pas, on les obtiendra toutes; ainsi $P_{k-1} + P_{k,1} = P_k$, ou

$$P_{k,1} = P_k - P_{k-1}. \qquad (6)$$

Remplaçant donc, dans les équations (4) et (5), $P_{k,0}$ par P_k, et $P_{k,1}$ par sa valeur, il viendra, en confondant en une seule les deux formules,

$$P_{k,l} = P_k - \frac{l}{1}P_{k-1} + \frac{l-1}{1}\,\frac{l-2}{2}P_{k-2} - \ldots \qquad (7)$$

Le second membre s'arrête de lui-même.

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2} P_{n-1} - \ldots = 0. \qquad (8)$$

Si $n=2i$, le second membre se termine par $\mp \frac{i+1}{1} P_{i+1}$; et si $n=2i+1$, par $\pm P_{i+1}$. On voit que cette équation se déduit de la précédente, en y faisant $k=n+1$ et $l=n$.

En rapprochant le mode de décomposition qui vient d'être employé, de celui qui avait été donné d'abord par *Ségner*, et de la formule trouvée probablement par *Euler*, on arrive à cette conséquence remarquable, savoir que les trois équations,

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2} P_{n-1} - \ldots = 0, \qquad (A)$$

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_3P_{n-1} + P_n, \qquad (B)$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n, \qquad (C)$$

donneront pour P_{n+1} la même valeur numérique, pourvu que l'on suppose dans les deux dernières, $P_3=1$, et dans la première, $P_3=1$ et $P_4=2$.