Algebraische Modelltheorie

Volker Weispfenning

Skriptum einer Vorlesung,
gehalten im Wintersemester 1995/96
an der Universität Passau.

Ausgearbeitet und ergänzt von Matthias Aschenbrenner.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Es ist nicht ungewöhnlich, daß aus der Mitschrift eines Hörers einer Vorlesung ein mehr oder weniger knappes Skript entsteht, das als eine Stütze bei der Wiederholung des Stoffes dienen kann.

Das hier vorliegende Skript von M. Aschenbrenner zu meiner Vorlesung im WS 1995/96 sprengt diesen Rahmen in vieler Hinsicht. Herr Aschenbrenner hat nicht nur das Gerüst der Definitionen, Beispiele und Resultate mit ausführlichen (sowohl inhaltlichen als auch historischen) Motivationen aufgefüllt. Er hat das Material der begleitenden Übungen in das Skript integriert und selbständig die relevante Literatur durchforstet. Große Teile daraus, die ich aus Zeitgründen weggelassen habe, oder um die Vorkenntnisse der Hörer nicht zu sehr zu strapazieren (sowohl im Bereich der Modelltheorie als auch der Algebra), sind zum Stoff der Vorlesung hinzugekommen. Schließlich wurde ein umfassendes Literaturverzeichnis angefügt.

Aus dem ganzen Skript spricht die Begeisterung des abfassenden Autors für die Algebra, Modelltheorie und die strukturelle Sichtweise der Mathematik im allgemeinen.

Der Stoff der Vorlesung beschränkt sich auf die heute weitgehend „klassischen" Begriffe und Resultate vor 1980 aus dem Dunstkreis der A. Robinsonschen Sicht der Modelltheorie. Vieles davon ist heute Lehrbuchstoff geworden. Eine Ausnahme bildet vielleicht die bis heute zu wenig beachtete Theorie der modelltheoretischen Resultanten, sowie die Betonung „lokaler" Persistenzsätze (vgl. [**177**]) gegenüber ihren „globalen" Versionen Modellvollständigkeit und Substrukturvollständigkeit.

Mein Dank gilt Herrn Matthias Aschenbrenner für sein unermüdliches Engagement, das zu diesem außergewöhnlichen Skript geführt hat, sowie Herrn Markus Schweighofer für das Korrekturlesen.

Volker Weispfenning,

Passau, den 22. Mai 1996.

Auch mein Dank an Markus Schweighofer für die Übernahme der überaus mühsamen Aufgabe des Korrekturlesens, welche er mit der ihm eigenen akribischen Genauigkeit erfüllte; ohne seine Mithilfe wäre das Skriptum in dieser Form nicht denkbar gewesen. Für verbleibende Fehler bin natürlich in Gänze ich selbst verantwortlich.

M. A.

KAPITEL 1

Was ist Modelltheorie?

Modelltheorie ist das Studium mathematischer Strukturen mittels der Methoden der mathematischen Logik. Unter „mathematischen Strukturen“ verstehen wir in dieser Vorlesung hauptsächlich Strukturen der Algebra, also etwa Gruppen, Ringe, Körper, Moduln usw., nicht jedoch topologische Räume o.ä. Dies ist dadurch bedingt, daß wir uns auf der Seite der mathematischen Logik auf die Logik erster Stufe beschränken wollen, da ihre Modelltheorie besonders schöne Eigenschaften besitzt, die bei Logiken höherer Stufe in der Regel verloren gehen. (Dennoch sind diese bedeutsam, da sie besser für die Modelltheorie von Strukturklassen wie die der topologischen Räume geeignet sind.) Die algebraische Modelltheorie ist also im Überschneidungsbereich von Algebra und mathematischer Logik beheimatet; Chang-Keisler [**2**] schreiben schlagwortartig: „Modelltheorie = Algebra + Logik“.

Was macht aber nun den spezifisch modelltheoretischen Zugang zur Algebra aus? Unter „Algebra“ verstand man bis weit ins 19. Jahrhundert im wesentlichen Techniken zur Lösung algebraischer Gleichungssysteme über „konkret“ gegebenen „Rechenbereichen“ (wie $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) mit endlichen exakten symbolischen Mitteln — kurz das Bereitstellen von Werkzeugen zum Rechnen. (Der Schwerpunkt lag auf *algorithmischen* Fragen.) Diese Auffassung wandelte sich, mit dem genialen Vorläufer E. Galois, in einem Zeitraum von etwa fünfzig Jahren um die Jahrhundertwende unter dem Einfluß der Arbeiten von R. Dedekind, D. Hilbert, E. Steinitz, E. Noether und vieler anderer grundlegend. Mit dem Erscheinen der ersten Auflage der *Modernen Algebra* von B. van der Waerden im Jahr 1910 [**39**] manifestiert sich die „moderne“, wie man sagen könnte *strukturelle* Sichtweise der Algebra zum ersten Mal in Form eines Lehrbuchs; der Verfasser bezieht sich ausdrücklich auf die Vorlesungen von Emmy Noether und Emil Artin. (Später führte diese strukturelle Methodik durch N. Bourbaki auch in anderen Gebieten der Mathematik zu einer vollständig neuen Grundlegung.) Algebra war nun (und ist bis heute) die Untersuchung „abstrakt“ gegebener algebraischer Strukturen mit Hilfe der axiomatischen Methode sowie die Klassifizierung solcher Strukturen *bis auf Isomorphie.* Isomorphe Strukturen sind bekanntlich von ihren algebraischen Eigenschaften her ununterscheidbar, auch wenn sie über weitere, in diesem Sinne nicht „algebraische“ Eigenschaften verfügen, bzgl. derer sie durchaus sehr verschieden sein können, z.B.: *Jede endliche Gruppe der Ordnung p, p Primzahl, ist isomorph zu* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Oder: *Vermöge der* exp*-Funktion ist* $(\mathbb{R}, 0, +) \cong (\mathbb{R}^{>0}, 1, \cdot)$.

Historisch nahezu parallel zur Entwicklung der modernen Algebra ist die der mathematischen Logik. (Die grundlegenden Arbeiten stammen dabei von G. Frege, D. Hilbert, B. Russell, A. N. Whitehead, K. Gödel, A. Church, A. Tarski u.v.a.) In der mathematischen Logik wird die durch den strukturellen Gesichtspunkt in der Algebra so zentral gewordene axiomatische Methode und der Beweisbegriff an sich *mit mathematischen Mitteln* untersucht: Man führt eine formale Sprache zur

Notation mathematischer Sachverhalte ein, definiert einen Folgerungs- und Erfüllbarkeitsbegriff, einen Deduktionskalkül usw. In Bezug auf die Algebra ergibt sich damit z.B. die Möglichkeit, algebraische Eigenschaften durch Sätze in einer formalisierten Sprache, etwa in der Logik erster Stufe, auszudrücken, z.B. die Lösbarkeit von Polynomgleichungen und -ungleichungen. (Eigenschaften, die dergestalt in der Logik erster Stufe formulierbar sind, nennt man *elementar.*) Mit Hilfe von Ergebnissen und Methoden der Logik kann damit etwa das Zusammenspiel zwischen der syntaktischen Gestalt der Sätze und ihrer Semantik untersucht werden. Diese Idee ist der Anfang der Modelltheorie, die — mit Vorläufern wie L. Löwenheim, Th. Skolem, A. Tarski, A. I. Malcev — erstmals in voller Allgemeinheit von A. Robinson in die Tat umgesetzt und in den fünfziger und sechziger Jahren von Robinson, Tarski und einer vielzahl weiterer zu einer umfangreichen Theorie ausgebaut wurde.[1] Bis heute ist sie weiter sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gewachsen und hat sich zu einer eigenständigen Disziplin in der Mathematik entwickelt. (Der Ausdruck „Modelltheorie“ erscheint zum ersten Mal bei Tarski [**167**].) Mit der Formalisierung algebraischer Aussagen einhergehend wird der „Ununterscheidbarkeitsbegriff“ in der Algebra von dem der Isomorphie zu dem der *elementaren Äquivalenz* zweier Strukturen vergröbert: Zwei Strukturen sind elementar äquivalent, wenn sie dieselben Sätze (der Logik erster Stufe) erfüllen. Isomorphe Strukturen sind dann elementar äquivalent, i.a. gilt aber nicht die Umkehrung; elementar äquivalente, nicht-isomorphe Strukturen werden also im Lichte der Logik erster Stufe (und bzgl. einer Sprache der ersten Stufe) als äquivalent angesehen, auch wenn sie vom algebraischen Standpunkt durchaus andere Eigenschaften haben können. (In der Sprache der Kategorientheorie lautet das: Man geht von der Kategorie aller Strukturen und strukturerhaltendenden Abbildungen einer algebraischen Theorie, etwa der Gruppen und Gruppenhomomorphismen, über zu einer Kategorie mit denselben Objekten und den sog. *elementaren Abbildungen* als Morphismen.)

Damit haben wir einen Aspekt der (algebraischen) Modelltheorie, nämlich die *Charakterisierung algebraischer Strukturen bis auf elementare Äquivalenz,* beleuchtet. Als weitere sind *die Konstruktion von Strukturen mit gewissen vorgeschriebenen elementaren Eigenschaften* mittels Substruktur-, Erweiterungs-, Kettenkonstruktionen oder Ultraproduktbildung usw. zu nennen. Ferner ergeben sich *algorithmische Fragestellungen,* wie sie sich als Entscheidungsprobleme in natürlicher Weise stellen: Vorgelegt eine Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen und eine elementare Aussage φ über solche Strukturen; kann φ entschieden werden, d.h. gibt es einen Algorithmus, der bei Vorlage von φ entscheidet, ob φ in allen Strukturen aus $\mathcal{K}$ gilt oder nicht? (Derartige Probleme werden wir in der Vorlesung jedoch nur am Rande behandeln.)

Zentral für Anwendungen der Modelltheorie und mit dem ersten erwähnten Gesichtspunkt verwandt ist die *Schaffung neuer Beweisprinzipien für die Algebra.* Wir werden z.B. später (in §4) beweisen, daß jeder algebraisch abgeschlossene Körper K der Charakteristik 0 elementar äquivalent zum komplexen Zahlkörper $\mathbb{C}$ ist („Lefschetz-Prinzip“). Um eine elementare Eigenschaft φ für einen (oder alle) algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$ zu beweisen oder zu widerlegen, genügt es damit, dies für $K = \mathbb{C}$ zu tun, wo dies — unter der Verfügbarkeit mächtiger Hilfsmittel wie das der komplexen Funktionentheorie — eventuell wesentlich einfacher vonstatten gehen kann. Wegen ihrer Ungewohntheit konnten sich

[1] Biographisches zu Robinson und Tarski findet man in [**17**] bzw. [**79**]; [**71**], [**173**] sind Teile einer Serie von Artikeln im *Journal of Symbolic Logic,* die das Werk Tarskis würdigen.

anfänglich nur wenige Mathematiker mit diesen neuen modelltheoretischen Beweismethoden und Begriffen anfreunden, gleichwohl die dadurch erzielten mathematischen Ergebnisse durchaus Aufmerksamkeit erregten, wie die Arbeiten von J. Ax und S. Kochen zur Artinschen Vermutung in der p-adischen Zahlentheorie (für einen Überblick siehe [**104**]), der einfache modelltheoretische Beweis der Lösung des 17. Hilbertschen Problems durch Robinson (vgl. §6.8) oder die Lösung des Problems der Existenz eines invarianten Unterraums für polynomial kompakte Operatoren in der Hilbertraumtheorie durch Bernstein-Robinson zeigen. ([**52**]; vgl. auch den Übersichtsartikel [**119**].) Der bekannte Mathematiker P. Halmos drückt dieses Unbehagen in seiner Autobiographie ([**186**], S. 204) sehr dezidiert so aus:

> *And, finally, logicians point proudly to a handful of mathematical theorems whose first proof used the techniques of formal logic; the one nearest to my work is the Bernstein-Robinson result concerning invariant subspaces of polynomially compact operators.* [...] *The logic proofs of mathematics theorems, all of them as far as I know, are dispensable: they can be (and they have been) replaced by proof using the language and techniques of ordinary mathematics. The Bernstein-Robinson proof uses non-standard models of higher order predicate languages, and when Abby (Abraham Robinson's nickname) sent me his preprint I really had to sweat to pinpoint and translate its mathematical insight. Yes, I sweated, but, yes, it was a mathematical insight and it could be translated. The paper didn't convince me (or anyone else?) that non-standard models should forthwith be put into every mathematician's toolkit; it showed only that Bernstein and Robinson were clever mathematicians who solved a difficult problem, using a language they spoke fluently. If they had done it in Telegu instead, I would have found their paper even more difficult to decode, but the extra difficulty would have been one of degree, not of kind.*

Inzwischen ist diese Ansicht aber wohl kaum mehr haltbar: Modelltheoretische Schlußweisen sind in einer Reihe von Gebieten der Mathematik im Einsatz, und das sehr junge Feld der reellen algebraischen Geometrie hat sie geradezu in ihr Fundament aufgenommen (vgl. [**55**], [**66**]). Ein berühmtes Beispiel für die Schlagkraft solcher Beweisprinzipien ist das folgende: Sei R ein reell abgeschlossener Körper (vgl. §6) und D eine (nicht notwendig assoziative) *Divisionsalgebra* über R, d.h. eine R-Algebra, in der die Division eindeutig ausführbar ist. (Beispiele über dem Körper $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, $\mathbb{C}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ oder die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$.) Dann ist stets $\dim_R D \in \{1, 2, 4, 8\}$. Dieser Satz für $R = \mathbb{R}$ ist ein tiefliegendes topologisches Resultat und als Satz von Kervaire-Milnor (1958) bekannt. (Über reelle Divisionsalgebren informiere sich der interessierte Leser in dem ausgezeichneten Artikel von Hirzebruch-Koecher-Remmert in [**184**], S. 147–252, hier insbesondere Kap. 11). Für beliebige reell abgeschlossene Körper ist es bis heute nicht gelungen, einen rein algebraischen Beweis dieser Aussage zu führen. Mittels etwas Modelltheorie ergibt sie sich jedoch wegen der bekannten Gültigkeit für $R = \mathbb{R}$ aus einem zum Lefschetz-Prinzip analogen Satz von Tarski, dem wir in §6 begegnen werden. Nach [**55**] ein „mit überlegenen mathematischen Methoden geführter Beweis [welcher] nichts zu wünschen übrigläßt."

KAPITEL 2

Grundlegende Vereinbarungen. Der Kompaktheitssatz

2.1. Voraussetzungen

Für die Lektüre dieses Skripts setzen wir beim Leser eine gewisse Vertrautheit mit den Grundbegriffen und wesentlichen Resultaten der mathematischen Logik und universellen Algebra voraus, etwa im Umfang von [**25**], darüber hinaus — in geringerem Maße — mit einigen Konzepten der „klassischen“ Algebra (vgl. dazu eventuell [**31**], [**34**], [**39**]). (Abschnitte, die weitergehendes Vorwissen erfordern, sind mit einem Stern gekennzeichnet; sie können ohne Schaden überlesen werden.)

Insbesondere sollte der Leser auf der syntaktischen Seite parat haben, was man unter einer *Sprache L der Prädikatenlogik erster Stufe* und *Termen*, *Formeln* und *Sätzen* über L versteht, und wie *konjunktive*, *disjunktive* und *pränexe Normalformen* von L-Formeln aufgebaut sind. Auf semantischer Seite sollte der Begriff der *L-Struktur*, des *Homomorphismus* zwischen L-Strukturen und der *Striktheit* von Homomorphismen geläufig sein, und im Hinblick auf den Übergang zwischen Syntax und Semantik die Definition der *Modellbeziehung*, des *semantischen Folgerungsbegriffs* (s.u.), der *Erfüllbarkeit* von Formeln und die Sätze über die Überführbarkeit von Formeln in die genannten Normalformen.

Gelegentlich wird im Zusammenhang mit den einleitend bereits erwähnten algorithmischen Aspekten der Modelltheorie auch auf die einfachsten Begriffsbildungen, etwa rekursive Aufzählbarkeit oder Entscheidbarkeit, aus der Berechenbarkeitstheorie zurückgegriffen. Wir werden durchgehend die Church'sche These bemühen und Entscheidungs- bzw. Aufzählungsverfahren lediglich informell spezifizieren.

An einigen Stellen werden Begriffe der Booleschen Algebra wie der eines (distributiven) Verbands, einer Booleschen Algebra usw. verwendet; der Leser kann sich, so sie ihm noch nicht vertraut sind, darüber in [**40**] informieren. Über Kardinal- und Ordinalzahlen wird (in naiver Art und Weise) ebenfalls verfügt; vgl. dazu eventuell [**16**], §7 oder [**185**].

2.2. Notation

Einige Bemerkungen vorweg zur Notation: Wir bezeichnen Terme mit t, t', $\dots$, Formeln durch φ, ψ, ϑ, $\dots$, Strukturen durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ usw. und ihre Universen durch A, B bzw. C, usw. Die Substrukturbeziehung zwischen L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ notieren wir als $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine Menge, so bezeichne $L(B)$ die um Konstantensymbole $\overline{b}$ für alle Elemente $b \in B$ erweiterte Sprache L. (Später werden wir des öfteren nicht mehr streng zwischen den formalen Symbolen $\overline{b}$ und den Elementen $b \in B$ unterscheiden.) Ferner sei $(\mathfrak{A}, B)$ die zugehörige Expansion von $\mathfrak{A}$ zu einer $L(B)$-Struktur durch $\overline{b}^{(\mathfrak{A},B)} := b$ für alle $b \in B$; dual dazu sei $\mathfrak{C}|L$ die Restriktion einer $L(B)$-Struktur $\mathfrak{C}$ auf die Sprache L.

Wir treffen folgende Vereinbarung: In allgemeinen modelltheoretischen Betrachtungen (Definitionen, Beweisen usw.) wollen wir genau zwischen einer Struktur $\mathfrak{A}$ und ihrem Universum A sowie zwischen den Operationssymbolen f und ihrer Interpretation $f^{\mathfrak{A}}$ bzgl. $\mathfrak{A}$ unterscheiden; befassen wir uns jedoch mit speziellen algebraischen Strukturen, so schließen wir uns dem in der Mathematik üblichen Sprachgebrauch an und trennen nicht mehr zwischen Struktur und Trägermenge bzw. Operationssymbol und Operation; so bezeichne z.B. $\mathbb{Q}$ sowohl den Körper $\mathfrak{Q}$ der rationalen Zahlen als auch dessen Universum $\mathbb{Q}$.

Sei φ eine L-Formel; wir schreiben $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für eine zu φ gehörige erweiterte Formel mit Variablen $x_1, \dots, x_n$; dies soll andeuten, daß die $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschieden und die in φ frei vorkommenden Variablen in der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ enthalten sind. Sind t_i Terme und x_i paarweise verschiedene Variablen über L ($1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$), so notieren wir die simultane Substitution der t_i für die x_i in der Form $\varphi[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$.

Die Kardinalzahl einer Menge M notieren wir als $\mathrm{card}(M)$, im Fall endlicher Mengen auch als $|M|$. Ist κ eine Kardinalzahl, so sei κ^+ die kleinste Kardinalzahl $> \kappa$. $\aleph_0$ ist die erste unendliche Kardinalzahl. Die Potenzmenge von M wird als 2^M geschrieben. Die natürlichen Zahlen sind $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, und $\mathbb{N}_0$ ist $\{0, 1, 2, \dots\}$.

2.3. Modell- und Folgerungsbeziehung

Ist φ eine Formel in L, so schreiben wir die Modellrelation als $\mathfrak{A} \models \varphi$; daß eine Formel φ in allen L-Strukturen wahr (also allgemeingültig) ist, notieren wir als $\models \varphi$. Wir legen (im Einklang mit [**25**]) folgenden semantischen Folgerungsbegriff zugrunde: Ist Φ eine Menge von Formeln in L (bzw. $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen), so schreiben wir $\Phi \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{K} \models \varphi$), falls φ in allen Modellen von Φ gilt (bzw. φ in allen Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ erfüllt ist). Ausführlich heißt dies im Fall Φ: Für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$, so $\mathfrak{A} \models \varphi$. Zum Beispiel gilt also mit $\varphi := (x = z)$, $\psi := (x = y)$ zwar $\{\psi\} \models \varphi$, aber nicht $\models \psi \to \varphi$.

Zum Zusammenhang zwischen Substitution und Modellrelation: Wir schreiben für eine L-Struktur $\mathfrak{A}$, $a_1, \dots, a_n \in A$, paarweise verschiedene Variablen $x_1, \dots, x_n$ und eine L-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ im folgenden öfters kurz nur $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ für $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi[\overline{a}_1/x_1, \dots, \overline{a}_n/x_n]$.

Übung. Eine Übung zur Wiederauffrischung: Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen bzgl. der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Gibt es eine erweiterte L-Formel $\varphi(x)$ derart, daß für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt: $q \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q} \models \varphi(q)$? Hinweis: Jede natürliche Zahl kann als Summe von vier Quadraten natürlicher Zahlen geschrieben werden („Vierquadratesatz“).

2.4. Kompaktheitssatz und Varianten

Sei im folgenden L eine feste Sprache erster Stufe.— Unser wesentliches Hilfsmittel beim Aufbau der Modelltheorie wird das als *Kompaktheitssatz* bekannte Resultat sein, daß sich sehr leicht aus dem in der mathematischen Logik bewiesenen *Gödelschen Vollständigkeitssatz* [**80**], [**107**] ergibt; informell lautet dieser wie folgt (für eine exakte Fassung und Beweis vgl. [**25**], Satz 2.4.5 oder [**20**]):

Gödelscher Vollständigkeitssatz. *Es gibt ein System logischer Axiome und Regeln, das zu einer gegebenen Formelmenge Φ genau alle semantischen Folgerungen aus Φ aufzählt.* $\square$

Damit erhält man, da der dabei verwendete syntaktische Beweisbegriff finitär ist, unmittelbar (vgl. etwa [**25**], Satz 2.4.7):

Kompaktheitssatz. *Sei Φ eine Menge von L-Formeln, φ eine L-Formel. Gilt dann $\Phi \models \varphi$, so existiert eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\Phi' \models \varphi$.* $\square$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß der Kompaktheitssatz auch ohne Zuhilfenahme eines logischen Kalküls auf rein semantischer Ebene sehr elegant mittels einer Ultraproduktbildung bewiesen werden kann; wir werden einen solchen Beweis in §9 kennenlernen.

Ferner erhalten wir aus dem Vollständigkeitssatz folgendes Korollar, das man auch als eine „abstrahierte“ Version dieses Satzes bezeichnen könnte:

Korollar 2.4.1. *Sei L abzählbar und effektiv gegeben, Φ eine rekursiv aufzählbare Menge von Formeln. Dann ist auch die Menge $\{\varphi : \Phi \models \varphi\}$ aller semantischen Folgerungen aus Φ rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Sei $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursive Aufzählung von Φ. Da L abzählbar und effektiv gegeben ist, ist die Menge der syntaktisch korrekten L-Formeln abzählbar und rekursiv aufzählbar; sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine rekursive Aufzählung dieser Menge. Wir gehen nach dem bekannten “dove-tailing”-Algorithmus vor: Sei Φ_n $(n \in \mathbb{N})$ die Menge der ersten n Formeln von Φ, d.h. $\Phi_n = \{\phi_m : m \leq n\}$. Damit generiere man für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sukzessive mit dem gemäß Vollständigkeitssatz existierenden vollständigen und korrekten Kalkül eine endliche Aufzählung aller Beweise der Länge n mit Voraussetzungen aus Φ_n, die höchstens die Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ enthalten, und notiere die jeweilige Endformel. $\square$

Gelegentlich sind Umformulierungen des Kompaktheitssatzes leichter anzuwenden; wir werden v.a. die Varianten aus den folgenden beiden Korollaren verwenden.

Korollar 2.4.2. *Sei Φ eine Menge von L-Formeln. Falls Φ kein Modell besitzt, so existiert ein endliches $\Phi' \subseteq \Phi$, so daß auch Φ' kein Modell besitzt.*

Beweis. Besitze Φ kein Modell. Wähle nun etwa $\varphi := \neg(x = x)$. Dann gilt trivialerweise $\Phi \models \varphi$; also existiert nach dem Kompaktheitssatz ein endliches $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\Phi' \models \varphi$, d.h. Φ' hat kein Modell. $\square$

Oft ist es nützlich, den Formelbegriff etwas weiter zu fassen und auch beliebige (auch unendliche) Konjunktionen und Disjunktionen zuzulassen: Sei $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ eine Familie von L-Formeln (I eine beliebige Indexmenge) mit zugehörigen Erweiterungen $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$. Dann nennen wir Formeln der Art

$$\bigwedge_{i\in I} \varphi_i\,, \qquad \bigvee_{i\in I} \varphi_i$$

L_∞-Formeln, und definieren deren Semantik wie folgt: Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $a_1, \ldots, a_n \in A$; dann gelte

$$\mathfrak{A} \models \left(\bigwedge_{i\in I} \varphi_i\right)(a_1, \ldots, a_n),$$

falls für alle $i \in I$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$, und

$$\mathfrak{A} \models \left(\bigvee_{i \in I} \varphi_i \right) (a_1, \ldots, a_n),$$

falls es ein $i \in I$ gibt derart, daß $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$. (Insbesondere werden Konjunktionen mit leerer Indexmenge stets als wahr, Disjunktionen mit leerer Indexmenge stets als falsch interpretiert.)

Durch den Übergang von einer Sprache L der Logik erster Stufe zu L_∞ erzielen wir einen Zugewinn an Ausdrucksstärke (vgl. Übung nach Def. 2.7.2). In der Situation der folgenden Version des Kompaktheitssatzes handelt es sich jedoch lediglich um eine Möglichkeit zur suggestiveren Notation:

Korollar 2.4.3. *Sei Φ eine Menge von L-Sätzen, $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ eine Familie von L-Sätzen. Gilt $\Phi \models \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, so existiert ein endliches $J \subseteq I$ mit $\Phi \models \bigvee_{i \in J} \varphi_i$. (Man beachte: Bei der letztgenannten Disjunktion handelt es sich um eine L-Formel.)*

Beweis. Nach Voraussetzung hat $\Phi \cup \{\neg\varphi_i : i \in I\}$ kein Modell. Mit Kor. 2.4.2 folgt: Es gibt ein endliches $J \subseteq I$ derart, daß $\Phi \cup \{\neg\varphi_i : i \in J\}$ kein Modell hat, d.h. $\Phi \models \bigvee_{i \in J} \varphi_i$. □

2.5. Vollständigkeit und Entscheidbarkeit

Wir definieren:

Definition 2.5.1. Eine Menge Φ von L-Formeln heißt *vollständig*, falls für jeden L-Satz φ gilt: $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \neg\varphi$. Φ heißt *entscheidbar*, falls die Menge aller semantischen Folgerungen aus Φ entscheidbar (rekursiv) ist.

Den Zusammenhang zwischen Vollständigkeit und Entscheidbarkeit einer widerspruchsfreien Formelmenge beleuchtet der folgende Satz. (Vgl. auch Def. 2.7.2 in §2.7.)

Satz 2.5.2. *Sei Φ eine rekursiv aufzählbare und vollständige Formelmenge. Dann ist Φ entscheidbar.*

Beweis. Falls Φ inkonsistent ist, so ist Φ trivialerweise entscheidbar; sei also nun Φ konsistent. Sei $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine rekursive Aufzählung der Folgerungen von Φ. Sei φ eine beliebiger L-Satz. Dann existiert wegen der Vollständigkeit von Φ ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi = \varphi_i$ oder $\neg\varphi = \varphi_i$. Erzeuge nun $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, bis einer der beiden Fälle eintritt. Dieses Verfahren entscheidet die Menge der semantischen Folgerungen aus Φ. □

Übung. Man überlege sich, an welcher Stelle im zweiten Fall des vorstehenden Beweises die Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit von Φ einging.

2.6. Umgang mit Konstanten

Das zeitweilige Erweitern einer vorgegebenen Sprache L um einige Konstantensymbole, etwa einer Teilmenge $B \subseteq A$ der Trägermenge einer Struktur $\mathfrak{A}$, zu der Sprache $L(B)$ ermöglicht es, in den $L(B)$-Formeln spezifisch auf die Objekte der Struktur $\mathfrak{A}$ Bezug zu nehmen; dieser freizügige Umgang mit um Konstanten angereicherten, dann eventuell überabzählbaren Sprachen ist ein Charakteristikum, das die Modelltheorie gegenüber der „klassischen“ mathematischen Logik auszeichnet.

Zudem sind Konstanten als Ersatz für freie Variablen in Formelmengen oft einfacher zu handhaben. Wir zeigen hier zwei zwar einfache, jedoch sehr praktische Sätze zur Handhabung von Konstanten; zunächst ein bereits aus [**25**] bekannter Satz (Theorem 2.4.2), eine Art semantisches Pendant des dort behandelten „Deduktionstheorems“:

Satz 2.6.1. *Sei Φ eine Formelmenge in L, φ ein L-Satz, ψ eine L-Formel. Dann gilt:*

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi \models (\varphi \to \psi)$$

Beweis. Gelte zunächst $\Phi \models (\varphi \to \psi)$. Sei $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ eine erweiterte Formel zu ψ. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $a_1, \ldots, a_n$ aus A. Gilt dann $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\varphi\}$, so $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)(a_1, \ldots, a_n)$, und damit $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Da $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ beliebig aus A^n war, gilt $\mathfrak{A} \models \psi$.

Sei nun umgekehrt $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ vorausgesetzt. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, und gelte $\mathfrak{A} \models \Phi$. Sei $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$; dann folgt, da φ Satz ist, $\mathfrak{A} \models \varphi$, also $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Dies zeigt $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$. $\square$

Nun zu den angekündigten Sätzen über den Umgang mit Konstanten:

Satz 2.6.2. *Sei Φ eine Formelmenge in L, φ eine L-Formel, und $c_1, \ldots, c_n$ seien L-Konstanten, die weder in Φ noch in φ vorkommen. Gilt*

$$\Phi \models \varphi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n],$$

so folgt

$$\Phi \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\left(\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le n \\ c_i = c_j}} x_i = x_j \right) \to \varphi \right).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, und $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ Erweiterung von φ. Betrachte die Stelle $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ in $\mathfrak{A}$. Gelte $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $a_i = a_j$ für $1 \le i, j \le n$ mit $c_i = c_j$. Man ändere nun $\mathfrak{A}$ zu einer Struktur $\mathfrak{B}$ durch Modifikation von $c_i^{\mathfrak{A}}$: Setze $c_i^{\mathfrak{B}} := a_i$ für $i = 1, \ldots, n$. (Dies ist offenbar wohldefiniert.) Dann gilt immer noch $\mathfrak{B} \models \Phi$, und daher $\mathfrak{B} \models \varphi\big(c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{B}}, b_1, \ldots, b_m\big)$, also $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, und somit $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$. $\square$

Korollar 2.6.3. *Sei Φ eine Formelmenge in L, φ eine L-Formel, und seien $c_1, \ldots, c_n$ paarweise verschiedene L-Konstanten, die weder in Φ noch in φ vorkommen. Gilt $\Phi \models \varphi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$, so folgt $\Phi \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, (\varphi)$.* $\square$

Korollar 2.6.4. *Sei Φ eine Formelmenge in L, φ, ψ Formeln; $c_1, \ldots, c_n$ seien paarweise verschiedene Konstanten in L, die weder in Φ noch in φ oder ψ vorkommen. Dann gilt: Aus*

$$\Phi \models \big(\varphi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \to \psi\big)$$

folgt

$$\Phi \models \big(\exists x_1 \cdots \exists x_n\, (\varphi) \to \psi\big).$$

Beweis. O.B.d.A. nehmen wir an, daß $x_1, \ldots, x_n$ nicht in ψ vorkommen. Nach Voraussetzung gilt dann $\Phi \models (\varphi \to \psi)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$. Nach dem eben bewiesenen Kor. 2.6.3 folgt nun: $\Phi \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi \to \psi)$. Da nun $\forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi \to \psi)$ logisch äquivalent ist zu $\neg \exists x_1 \cdots \exists x_n (\varphi) \vee \psi$, ergibt sich $\Phi \models \big(\exists x_1 \cdots \exists x_n (\varphi) \to \psi\big)$, wie gewünscht. $\square$

2.7. Einige Definitionen. Theorien und elementare Klassen

Sei L eine Sprache erster Stufe. Wir definieren einige Formelmengen:

Definition 2.7.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Es bezeichne $\mathsf{At} = \mathsf{At}_L$ die Menge der atomaren Formeln, $\mathsf{Ba} = \mathsf{Ba}_L$ die Menge der Basisformeln (d.h. der atomaren und negiert atomaren Formeln), $\mathsf{Qf} = \mathsf{Qf}_L$ die Menge der quantorenfreien Formeln, $\mathsf{Sa} = \mathsf{Sa}_L$ die Menge der Sätze und schließlich $\mathsf{Fo} = \mathsf{Fo}_L$ die Menge aller Formeln über L.

(ii) Bekanntlich heißt ferner $\varphi \in \mathsf{Fo}$ *pränex,* falls φ von der Gestalt

$$\varphi = \mathrm{Q}_1 x_1 \cdots \mathrm{Q}_n x_n(\psi)$$

mit $\mathrm{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$ und quantorenfreiem $\psi \in \mathsf{Qf}$; man nennt ψ häufig den *Kern* von φ.

(iii) Die Menge der *existentiellen Formeln* $\exists_1 = (\exists_1)_L$ bestehe aus allen pränexen Formeln

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n(\psi)$$

mit $\psi \in \mathsf{Qf}$; analog sei $\forall_1 = (\forall_1)_L$ die Menge aller *universellen Formeln,* d.h. aller Formeln der Bauart

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi)$$

mit $\psi \in \mathsf{Qf}$. Wir schreiben des öfteren nur kurz $\forall \mathbf{x}(\psi)$ bzw. $\exists \mathbf{x}(\psi)$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ für $\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi)$ bzw. $\exists x_1 \cdots \exists x_n(\psi)$.

(iv) Allgemein enthalte für $m \in \mathbb{N}_0$ die Menge $\exists_m = (\exists_m)_L$ alle Formeln

$$\underbrace{\exists\forall\exists\cdots}_{m \text{ Blöcke}}(\psi)$$

mit quantorenfreiem Kern ψ, wobei $\exists$ bzw. $\forall$ hier jeweils für einen Block existenz- bzw. allquantifizierter Variablen $\exists x_1 \cdots \exists x_n$ bzw. $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ stehe. Analog sei $\forall_m = (\forall_m)_L$ definiert. Die vorstehende Bemerkung zur abkürzenden Schreibweise mittels Tupeln $\mathbf{x}$ von Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gilt sinngemäß auch hier.

Übung. Man gebe ein Axiomensystem für die Gruppentheorie an, und zwar:

(i) Über der Sprache $L = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$ mittels $\forall_1$-Sätzen;
(ii) über der Sprache $L = \{1, \cdot\}$ mit $\forall_2$-Sätzen;
(iii) über der Sprache $L = \{\,\cdot\,\}$ mit $\exists_3$-Sätzen.

Wir kommen nun zu den im folgenden zentralen Begriffen der Modellklasse, der Theorie und der elementaren Klasse.

Definition 2.7.2. Sei Φ eine Menge von L-Sätzen, $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Dann sei

$$\mathrm{Mod}(\Phi) := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ L\text{-Struktur}, \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

die *Klasse aller Modelle von* Φ und

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) := \{\varphi \in \mathsf{Sa}_L : \mathcal{K} \models \varphi\}$$

die *Theorie von* $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ heißt eine *elementare Klasse* (im weiteren Sinne), falls eine Satzmenge Φ in L existiert mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$. Φ heißt eine *L-Theorie*, falls Φ *widerspruchsfrei* ist in dem Sinne, daß für keine L-Formel φ gilt $\Phi \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, und *deduktiv abgeschlossen* ist in dem Sinne, daß für alle L-Sätze φ mit $\Phi \models \varphi$ folgt, daß $\varphi \in \Phi$.

$\mathrm{Th}(\{\mathfrak{A}\})$ mit einer einzelnen L-Struktur $\mathfrak{A}$ kürzt man als $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ab, entsprechend $\mathrm{Mod}(\{\varphi\})$ als $\mathrm{Mod}(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathsf{Sa}_L$. $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ für $\mathcal{K} \neq \varnothing$ ist stets eine L-Theorie gemäß obiger Definition.

BEISPIEL. Sei $L = \varnothing$ und $\mathcal{K}$ die Klasse aller endlichen Mengen. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht elementar.

BEWEIS. Wir nehmen zu L die abzählbar vielen Konstanten $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hinzu und erhalten eine neue Sprache L'. Ist $\mathcal{K}$ elementar, etwa $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ mit einer Formelmenge Φ in L, so gilt (in L'):

$$\Phi \models \bigvee_{i<j} c_i = c_j$$

Mit der Variante 2.4.3 des Kompaktheitssatzes erhält man die Existenz einer endlichen Teildisjunktion $\bigvee_{i<j\leq n} c_i = c_j$ (mit $n \in \mathbb{N}$), so daß

$$\Phi \models \bigvee_{i<j\leq n} c_i = c_j.$$

Kor. 2.6.3 zum Umgang mit Konstanten liefert dann

$$\Phi \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{i<j\leq n} x_i = x_j \right).$$

Das besagt aber: Jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, d.h. jede endliche Menge, hat $n-1$ oder weniger Elemente, was absurd ist. $\square$

ÜBUNG. Man zeige, daß die Klasse der zusammenhängenden (azyklischen, ungerichteten) Graphen über einer Sprache $L = \{R\}$ mit einem einzigen zweistelligen Relationssymbol R keine elementare Klasse ist. Man folgere, daß keine L-Formel $\varphi(x, y)$ existiert, so daß für alle azyklischen ungerichteten Graphen $\mathfrak{G}$, $g, g' \in G$ genau dann in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{G}$ liegen, wenn $\mathfrak{G} \models \varphi(g, g')$ gilt, es jedoch eine L_∞-Formel $\psi(x, y)$ mit dieser Eigenschaft gibt.

ÜBUNG. Kann man die Klasse der Gruppen (der Körper) in der Sprache $L = \{1, \cdot\}$ (der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$) durch universelle Sätze axiomatisieren? Gibt es eine Menge Φ von universellen L-Sätzen derart, daß für jede endliche L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A}$ ist genau dann eine Gruppe (ein Körper), wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$?

$\mathrm{Mod}(\cdot)$ und $\mathrm{Th}(\cdot)$ bilden eine *Galois-Verbindung,* d.h. es gilt

(i) $\Phi \subseteq \Phi' \Rightarrow \mathrm{Mod}(\Phi) \supseteq \mathrm{Mod}(\Phi')$,
(ii) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \Rightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{K}) \supseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}')$,
(iii) $\Phi \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi))$,
(iv) $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$

für alle Satzmengen Φ, Φ' und alle Klassen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ von L-Strukturen. Damit erhält man unmittelbar:

PROPOSITION 2.7.3. *Die Abbildungen* $\mathrm{Mod} \circ \mathrm{Th}$ *und* $\mathrm{Th} \circ \mathrm{Mod}$ *sind Hüllenoperatoren, d.h. wachsend, monoton und idempotent:*

(i) *Für alle Klassen* $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ *von L-Strukturen gilt:*

(a) $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$,
(b) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \Rightarrow \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}'))$,
(c) $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})))) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$;

(ii) *Für alle L-Satzmengen Φ, Φ' gilt:*
(a) $\Phi \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi))$,
(b) $\Phi \subseteq \Phi' \Rightarrow \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi)) \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi'))$,
(c) $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi)))) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi))$.

Ferner gilt für Klassen $\mathcal{K}$ von L-Strukturen und widerspruchsfreie L-Satzmengen Φ:

(i) *$\mathcal{K}$ ist elementar genau dann, wenn $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$,*
(ii) *Φ ist eine Theorie genau dann, wenn $\Phi = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi))$.*

$\mathrm{Mod}(\,\cdot\,)$, $\mathrm{Th}(\,\cdot\,)$ *vermitteln eine Bijektion zwischen der Gesamtheit der nichtleeren elementaren Klassen und den Theorien.* □

Übung. Man beweise Prop. 2.7.3.

Theorien und elementare Klassen sind also zwei verschiedene, einander entsprechende Aspekte ein und desselben Konzepts. Vollständige Theorien sind besonders interessant:

Satz 2.7.4. *Sei Φ eine L-Theorie. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *Φ ist vollständig.*
(ii) *Φ ist eine maximale L-Theorie.*
(iii) *$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für alle $\mathfrak{A} \models \Phi$.*
(iv) *$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für ein $\mathfrak{A} \models \Phi$.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist $\Psi \supset \Phi$ eine Theorie und etwa $\psi \in \Psi \setminus \Phi$, so ist also $\psi \notin \Phi$, somit $\neg\psi \in \Phi \subseteq \Psi$, und damit $\psi \wedge \neg\psi \in \Psi$, Widerspruch.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $\mathfrak{A} \models \Phi$, so $\Phi \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, also $\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ aufgrund der Maximalität von Φ.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (iv): Trivial, da jede widerspruchsfreie Satzmenge Φ ein Modell besitzt. (Hätte Φ kein Modell, so gälte nach Definition der Modellbeziehung stets $\Phi \models \varphi$ für alle L-Formeln φ.)

Zu (iv) $\Rightarrow$ (i): Trivial. □

Da jede widerspruchsfreie Menge von L-Formeln ein Modell hat, folgt:

Korollar 2.7.5. (Satz von Lindenbaum, nach [**159**]) *Jede widerspruchsfreie Menge Φ von L-Sätzen ist in einer vollständigen L-Theorie enthalten, der* Vervollständigung von Φ. □

KAPITEL 3

Persistenz und die Diagrammethode

In diesem Abschnitt sei L eine beliebige Sprache der Logik erster Stufe.

3.1. Persistenz und Abschlüsse von Formelmengen

Vor dem ersten wesentlichen Resultat über die Persistenz logischer Formeln unter Erweiterungen zwischen L-Strukturen haben wir einige technische Vorbereitungen zu treffen.

Definition 3.1.1. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ L-Strukturen, B eine nichtleere Teilmenge von A, und $h\colon B \to C$ eine Abbildung. Sei ferner φ eine L-Formel mit Erweiterung $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Wir sagen, *h erhält φ* oder auch *φ ist persistent unter h*, falls für alle $a_1, \dots, a_n \in B$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, so folgt $\mathfrak{C} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n))$.

Eine Menge Φ von L-Formeln ist *persistent unter h*, falls alle $\varphi \in \Phi$ unter h erhalten bleiben.

h heißt eine *elementare Abbildung,* falls $A = B$ und h die Menge Fo_L aller Formeln erhält.

Bemerkungen.

(i) Wie man sich sehr leicht überzeugt, ist diese Definition der Persistenz einer Formel φ unabhängig von der Wahl der Erweiterung $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ von φ.
(ii) Man kann die auf der Teilmenge B der Trägermenge A von $\mathfrak{A}$ definierte Funktion h auch als eine bzgl. A *partielle* Abbildung ansehen; h ist dann eine *totale* Abbildung, falls $B = A$ gilt.

Beispiele. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ L-Strukturen und $h\colon A \to C$ eine Abbildung. Dann gilt (vgl. [**25**], 1.3.2):

(i) h ist ein Homomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ genau dann, wenn h alle atomaren L-Formeln erhält.
(ii) h ist ein strikter Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ genau dann, wenn h alle atomaren L-Formeln sowie alle negierten Prädikate erhält.
(iii) h ist ein injektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$, genau wenn h alle atomaren Formeln und alle negierten Gleichungen erhält.
(iv) h ist eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ genau dann, wenn h alle Basisformeln, d.h. alle atomaren und negiert atomaren L-Formeln erhält.

Wir wollen nun im folgenden zeigen, daß eine Φ-erhaltende Abbildung $h\colon B \to C$ (wobei wieder Φ eine L-Formelmenge, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ L-Strukturen und B eine Teilmenge von A seien) sogleich Boolesche Kombinationen — und bei weitergehenden Annahmen über h sogar auch All- und Existenzabschlüsse — der Formeln aus Φ erhält. Dazu definieren wir zunächst allgemein den Abschluß einer Formelmenge.

Definition 3.1.2. Sei Φ eine Menge von L-Formeln, sowie $\Omega \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \exists, \forall\}$. Der *Abschluß von* Φ *unter* Ω ist definiert als die kleinste Menge Φ' von L-Formeln derart, daß $\Phi' \supseteq \Phi$ und Φ' abgeschlossen ist unter den logischen Operationen aus Ω.

Beispiele. Wie beziehen uns wieder auf die zugrundeliegende Sprache L und betrachten die Formelmengen $\mathsf{At} = \mathsf{At}_L$, $\mathsf{Ba} = \mathsf{Ba}_L$, $\mathsf{Fo} = \mathsf{Fo}_L$ und $\mathsf{Qf} = \mathsf{Qf}_L$.

(i) Die Menge Qf der quantorenfreien Formeln ist der Abschluß der Menge der atomaren Formeln unter $\{\wedge, \vee, \neg\}$.
(ii) Die Menge Fo aller Formeln über L ist der Abschluß der Menge der atomaren Formeln unter $\{\wedge, \vee, \neg, \exists, \forall\}$.
(iii) Sei Ba' der Abschluß der Menge aller L-Basisformeln unter $\{\wedge, \vee, \exists\}$. Dann ist jede Formel in Ba' logisch äquivalent zu einer existentiellen Formel, und umgekehrt ist jede existentielle L-Formel in Ba' enthalten; bis auf logische Äquivalenz ist also der Abschluß von Ba unter $\{\wedge, \vee, \exists\}$ nichts anderes als die Menge $\exists_1$.

Lemma 3.1.3. *Sei* Φ *eine Menge von* L*-Formeln,* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{C}$ L*-Strukturen,* $B \subseteq A$*, und* $h\colon B \to C$ *eine* Φ*-erhaltende Funktion. Dann erhält* h *auch den Abschluß von* Φ *unter* $\{\wedge, \vee\}$*, und falls zusätzlich* $A = B$ *gilt (d.h.* h *eine totale Funktion auf* A *ist), auch den Abschluß von* Φ *unter* $\{\wedge, \vee, \exists\}$*.*

Beweis. Sei Φ' der Abschluß von Φ unter $\{\wedge, \vee\}$ bzw. (falls $A = B$) unter $\{\wedge, \vee, \exists\}$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über den Aufbau der Formeln aus Φ'; der Induktionsschritt lautet: Sind $\varphi, \psi \in \Phi'$ persistent unter h, so auch $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ und (im Fall $A = B$) $\exists x(\varphi)$. Für $\wedge$, $\vee$ ist dies trivial. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ eine Erweiterung von φ, und gelte $\mathfrak{A} \models \exists x(\varphi)(a_1, \dots, a_n)$ für $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$; dies ist d.u.n.d. der Fall, wenn es ein $a \in A$ gibt mit $A \models \varphi(a_1, \dots, a_n, a)$. Damit folgt $\mathfrak{C} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n), h(a))$, also $\mathfrak{C} \models \exists x(\varphi)(h(a_1), \dots, h(a_n))$. $\square$

Definition 3.1.4. Eine existentielle Formel über L heißt *positiv existentiell,* falls sie keine Negationen enthält; die Menge der positiv existentiellen L-Formeln schreibt man als $\exists^+ = (\exists^+)_L$.

Bemerkung. Bis auf logische Äquivalenz sind die positiv existentiellen Formeln gerade die Formeln aus dem Abschluß von At unter $\{\wedge, \vee, \exists\}$.

Beispiele.

(i) Jeder Homomorphismus erhält alle positiv existentiellen Formeln.
(ii) Jede Einbettung erhält alle existentiellen Formeln.

Die Aussage aus Lemma 3.1.3 kann natürlich etwas verschärft werden, wenn man weiß, daß h surjektiv ist:

Lemma 3.1.5. *Sei* Φ *eine Menge von* L*-Formeln,* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{C}$ L*-Strukturen,* $B \subseteq A$*, und* $h\colon B \to C$ *eine surjektive* Φ*-erhaltende Funktion. Dann erhält* h *auch den Abschluß von* Φ *unter* $\{\wedge, \vee, \forall\}$*, und falls zusätzlich* $A = B$ *gilt, auch den Abschluß von* Φ *unter* $\{\wedge, \vee, \forall, \exists\}$*.*

Beweis. Analog zum Beweis von 3.1.3. Zu zeigen ist nur noch: Ist φ persistent unter h, so auch $\forall x(\varphi)$. Sei dazu $\varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ wieder eine Erweiterung von φ, sowie $a_1, \dots, a_n \in B$ mit $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi)(a_1, \dots, a_n)$. Sei $c \in C$; dann existiert ein $b \in B$ mit $h(b) = c$. Damit $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b)$, und also:

$$\mathfrak{C} \models \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n), h(b)) = \varphi(h(a_1), \dots, h(a_n), c)$$

Da $c \in C$ beliebig war, folgt $\mathfrak{C} \models \forall x(\varphi)(h(a_1), \dots, h(a_n))$. □

Wir wenden dieses Lemma nun auf At_L und Ba_L an. Zuerst jedoch:

Definition 3.1.6. Der Abschluß der Menge At_L aller atomaren Formeln über L unter $\{\wedge, \vee, \exists, \forall\}$ wird als die Menge $\mathsf{Pos} = \mathsf{Pos}_L$ der *positiven Formeln* bezeichnet.

Beispiele. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ L-Strukturen. Dann erhalten wir sofort aus Lemma 3.1.5:

(i) Ist $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ ein surjektiver Homomorphismus, so erhält h die Menge Pos.

(ii) Ist $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ ein Isomorphismus, so erhält h alle L-Formeln.

3.2. Elementare Erweiterungen

Wir spezialisieren uns nun auf den Fall, daß für L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ der Inklusionshomomorphismus $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ eine Formel φ bzw. eine Formelmenge Φ erhält.

Definition 3.2.1. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ L-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, sowie φ eine L-Formel und Φ eine Menge von L-Formeln. Dann sagen wir, *die Erweiterung* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ *erhalte* φ *(bzw.* Φ*)* oder auch $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ *ist eine* φ*- (bzw.* Φ*-) Erweiterung,* falls $\mathrm{id}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ die Formel φ (bzw. die Formelmenge Φ) erhält, und schreiben dafür $\mathfrak{A} \underset{\varphi}{\preceq} \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A} \preceq_\varphi \mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{A} \underset{\Phi}{\preceq} \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A} \preceq_\Phi \mathfrak{C}$). Man nennt $\mathfrak{A}$ oft auch eine φ*- (bzw.* Φ*-) Substruktur* von $\mathfrak{C}$.

Eine Erweiterung $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ heißt *elementare Erweiterung,* falls sie alle Formeln erhält; dafür schreibt man dann $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$.

(Der Begriff der elementaren Erweiterung rührt von Tarski und Vaught her [**169**].)

Beispiel. Jede Erweiterung $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ zwischen L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ist eine Ba-Erweiterung (siehe [**25**], Lemma 1.2.7) und somit auch eine $\exists_1$-Erweiterung.

Der folgende Satz ist oft hilfreich beim Nachweis, daß eine Struktur elementare Substruktur einer anderen ist.

Satz 3.2.2. (Tarski-Vaught-Test, [**169**]) *Seien* $\mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{B}$ *L-Strukturen. Dann ist* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *und gilt:*

(TV) *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*,* $\varphi(x, \mathbf{x})$*,* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *und* $\mathbf{a} \in A^n$*: Ist* $(\mathfrak{B}, A) \models \exists x(\varphi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$*, so existiert ein* $b \in A$ *mit* $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \mathbf{a})$.

Beweis. Daß $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ die angegebene Bedingung impliziert, ist trivial. Umgekehrt zeigen wir durch Induktion über den Formelaufbau, daß für alle erweiterten L-Formeln $\psi(y_1, \dots, y_m)$ gilt: Ist $\mathbf{a} \in A^m$, so gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \psi(\mathbf{a})$. Für atomare Formeln ψ ist dies klar wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Im Induktionsschritt ist einzig der Fall $\psi(\mathbf{y}) = \exists(\varphi(x, \mathbf{y}))$ nichttrivial. Aber nun gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \exists x(\varphi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ d.u.n.d., wenn ein $b \in A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(b, \mathbf{a})$, was nach Induktionsvoraussetzung gleichbedeutend ist mit $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \mathbf{a})$ für ein $b \in A$, und das nach Voraussetzung (TV) mit $(\mathfrak{B}, A) \models \exists x(\varphi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$. □

Korollar 3.2.3. *Sei* $\mathfrak{B}$ *eine* L*-Struktur.*

(i) *Sei* $A \subseteq B$, $A \neq \varnothing$ *derart, daß* (TV) *erfüllt ist. Dann ist* $\langle A \rangle_{\mathfrak{B}} \preceq \mathfrak{B}$ *eine elementare Substruktur mit Universum* A*.*

(ii) *Sei* $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$*. Gibt es für jede endliche Teilmenge* $A \subseteq B$ *und jedes* $c \in C$ *einen* A *punktweise festlassenden Automorphismus von* $\mathfrak{C}$ *mit* $f(c) \in B$*, so folgt* $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$*.*

Beweis. Für (i) wende den Tarski-Vaught-Test auf die Formeln $x = c$ (c Konstante von L) und $x = f(a_1, \ldots, a_n)$ (f ein n-stelliges Operationssymbol aus L, $a_1, \ldots, a_n \in A$) an.

Zu (ii) verwende ebenfalls Tarski-Vaught: Sei $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel, $\mathbf{b} \in B^n$ mit $(\mathfrak{C}, C) \models \exists x(\varphi)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$; zu zeigen ist die Existenz eines $c \in B$ mit $\mathfrak{C} \models \varphi(c, \mathbf{b})$. Wir erhalten zunächst nur die Existenz eines $c \in C$ mit $\mathfrak{C} \models \varphi(c, \mathbf{b})$. Wähle aber nun $f \colon \mathfrak{C} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{C}$, $f|\{b_1, \ldots, b_n\} = \mathrm{id}$ mit $f(c) \in B$. Es folgt $\mathfrak{C} \models \varphi(f(c), f(\mathbf{b}))$, d.h. $\mathfrak{C} \models \varphi(f(c), \mathbf{b})$. □

Übung. Sei $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}})$ bzw. $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$ die Ordnung der rationalen bzw. reellen Zahlen als $\{<\}$-Strukturen. Zeige mit Kor. 3.2.3, (ii), daß $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}) \preceq (\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}})$. Beweise anhand von $(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}})$, daß (ii) nicht umkehrbar ist. (Hinweis: Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski, [**25**], Satz 2.4.17, oder §9.4.)

3.3. Eine naive Vermutung zur Persistenz

Wir interessieren uns nun für folgende Fragestellung: Gegeben sei eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen und eine L-Formel φ, welche unter *allen* Erweiterungen zwischen Strukturen in $\mathcal{K}$ persistent ist; obiges Beispiel (nach Def. 3.1.4) legt dann die Vermutung nahe: Jede solche Formel φ ist in $\mathcal{K}$ äquivalent zu einer existentiellen Formel, d.h. es gibt ein $\psi \in \exists_1$ derart, daß $\mathcal{K} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Diese ist jedoch i.a. falsch, wie das folgende Gegenbeispiel demonstriert.

Beispiel. Betrachte $L = \{R\}$ mit dem binären (infix notierten) Relationssymbol R. Wir wiederholen einige Grundbegriffe der Graphentheorie: Sei $\mathfrak{G}$ ein *Graph,* d.h. eine L-Struktur derart, daß $\mathfrak{G}$ die beiden Axiome

$$\forall x(\neg(xRx)) \qquad \text{und} \qquad \forall x \forall y(xRy \leftrightarrow yRx)$$

(Azyklizität und Ungerichtetheit) erfüllt; die Elemente $v \in G$ nennen wir *Knoten.* Ein *Weg* in $\mathfrak{G}$ ist eine endliche Folge $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ von Knoten derart, daß $v_0 R^{\mathfrak{G}} v_1, v_1 R^{\mathfrak{G}} v_2, \ldots, v_{n-1} R^{\mathfrak{G}} v_n$; die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die *Länge* des Wegs w. w heißt *geschlossen* oder ein *Kreis* in $\mathfrak{G}$, falls $v_0 = v_n$ und $n > 0$ ist. (Offensichtlich hat jeder Kreis eine Länge von mindestens 2.) Wir sagen, w sei ein *echter Kreis,* falls w ein Kreis einer Länge $n \geq 3$ ist, so daß nur Anfangs- und Endpunkt desselben übereinstimmen, falls also für alle $0 \leq i < j \leq n$ mit $v_i = v_j$ folgt: $i = 0$, $j = n$. Wir nennen ferner $\mathfrak{G}$ *kreisfrei,* falls es in $\mathfrak{G}$ keinen echten Kreis gibt, und *zusammenhängend,* falls es zu zwei Knoten $v, v' \in G$ stets einen Weg $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_0 = v$ und $v_n = v'$ gibt. Zusammenhängende, kreisfreie Graphen nennt man *Bäume.* Einelementige Bäume nennen wir *trivial.*

Sei $\mathcal{B}$ die Klasse aller nichttrivialen Bäume, und sei

$$\varphi(x, y) := \neg \exists z(xRz \wedge zRy).$$

(φ besagt anschaulich: „Die Knoten x und y sind nicht durch einen Weg der Länge 2 miteinander verbindbar.“) Wir behaupten nun:

Proposition 3.3.1. *φ ist persistent unter Erweiterungen in $\mathcal{B}$.*

Beweis. Seien $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$ Graphen in $\mathcal{B}$, und $a, b \in G$ mit $\mathfrak{G} \models \varphi(a,b)$. Dann existiert ein a und b verbindender Weg $(a = v_0, v_1, \ldots, v_n = b)$ minimaler Länge in $\mathfrak{G}$; es ist nach Voraussetzung $n \neq 2$. Angenommen nun, in $\mathfrak{H}$ existiere ein c mit $aR^{\mathfrak{H}}cR^{\mathfrak{H}}b$; dann ist $c \notin G$, und $(v_0, \ldots, v_n, c, v_0)$ ist ein echter Kreis in $\mathfrak{H}$, im Widerspruch zur Kreisfreiheit von $\mathfrak{H} \in \mathcal{B}$. Damit auch $\mathfrak{H} \models \varphi(a,b)$. $\square$

Übung. Man zeige, daß $\varphi(x,y)$ in $\mathcal{B}$ äquivalent zu einer unendlichen Disjunktion $\psi(x,y) \in L_\infty$ von existentiellen Formeln ist.

Jedoch gilt:

Proposition 3.3.2. *Es gibt keine existentielle L-Formel $\psi(x,y)$, die in $\mathcal{B}$ äquivalent ist zu $\varphi(x,y)$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein derartiges $\psi(x,y)$. Sei ψ von der Form

$$\psi = \exists z_1 \cdots \exists z_n \big(\varrho(x, y, z_1, \ldots, z_n)\big),$$

wobei ϱ quantorenfrei, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten den Graphen $\mathfrak{G} = (G, R^{\mathfrak{G}})$ mit $G := \{0, 1, \ldots, n+3\}$ und

$$R^{\mathfrak{G}} := \big\{(0,1), (1,2), \ldots, (n+2, n+3)\big\} \cup \big\{(1,0), (2,1), \ldots, (n+3, n+2)\big\}.$$

Es ist $\mathfrak{G} \in \mathcal{B}$, und $\mathfrak{G} \models \varphi(a,b)$ für $a := 0$, $b := n+3$. Nach Annahme gilt $\mathfrak{G} \models \psi(a,b)$, d.h. es gibt $j_1, \ldots, j_n \in \{0, \ldots, n+3\}$ derart, daß

$$\mathfrak{G} \models \varrho(a, b, j_1, \ldots, j_n).$$

Sei nun $\mathfrak{G}_0$ derjenige Teilgraph von $\mathfrak{G}$ mit Universum $\{a, b, j_1, \ldots, j_n\}$, und sei $\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{G}_0$ definiert durch

$$H := G_0 \cup \{c\}, c > n+3 \quad \text{und} \quad R^{\mathfrak{H}} := R^{\mathfrak{G}} \cup \big\{(a,c), (c,b), (c,a), (b,c)\big\},$$

also $aR^{\mathfrak{H}}cR^{\mathfrak{H}}b$. In $\mathfrak{G}_0$ existiert kein Weg von a nach b, da $|G_0| \leq n+2 < n+4 = |G|$. $\mathfrak{H}$ ist folglich kreisfrei. Erweitere nun $\mathfrak{H}$ zu einem zusammenhängenden, kreisfreien Graphen mit gleicher Knotenmenge $H = \{a, b, c, j_1, \ldots, j_n\}$ (durch „Auffüllen" aller bis auf eine „Lücke" in $\mathfrak{G}_0$ durch Wege der Länge 1); sei $\mathfrak{H}_1$ der so entstandene Graph. Nach Konstruktion ist einerseits $\mathfrak{H}_1 \in \mathcal{B}$ und $\mathfrak{H}_1 \models \neg\varphi(a,b)$, aber andererseits auch $\mathfrak{H}_1 \models \psi(a,b)$, wie man sich leicht überlegt. $\square$

Damit haben wir zwar zunächst nur gezeigt, daß es keine existentielle L-Formel in denselben freien Variablen gibt, die zu φ äquivalent ist. Ist aber $\psi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ irgendeine in $\mathcal{B}$ zu $\varphi(x,y)$ äquivalente L-Formel, so ist auch $\psi[x/z_1, \ldots, x/z_n]$ eine existentielle L-Formel in den freien Variablen x, y, die in $\mathcal{B}$ zu φ äquivalent ist, im Widerspruch zu Prop. 3.3.2.

Wir haben anhand dieses ausführlichen Beispiels gesehen, daß für beliebige Klassen $\mathcal{K}$ von Strukturen die Persistenz einer Formel φ unter Erweiterungen in $\mathcal{K}$ zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Eigenschaft von φ, in $\mathcal{K}$ gleichwertig mit einer existentiellen Formel zu sein, ist. Für elementare Klassen $\mathcal{K}$ von Strukturen ist die Situation aber anders; dies ist der Inhalt des ersten wichtigen Satzes dieser Vorlesung, für dessen Herleitung wir jedoch noch ein für die Modelltheorie zentrales Hilfsmittel brauchen, die sog. *Diagrammethode.*

3.4. Das Diagrammlemma

Wie bereits in §2.2 rekapituliert, bezeichnet $L(B)$ für eine Menge B — typischerweise eine Teilmenge einer L-Struktur $\mathfrak{A}$ — die durch Hinzunahme neuer Konstanten $\overline{b}$ für alle Elemente b von B erweiterte Sprache, und $(\mathfrak{A}, B)$ die natürliche Expansion von $\mathfrak{A}$ zu einer $L(B)$-Struktur $\mathfrak{A}'$, d.h. $\overline{b}^{\mathfrak{A}'} := b$ für alle $b \in B$. Ferner bezeichnen wir mit $\Phi(B)$ für eine Formelmenge Φ über L die Menge aller $L(B)$-Sätze, die man aus den Formeln $\varphi \in \Phi$ durch Ersetzen der in φ frei vorkommenden Variablen durch Konstanten $\overline{b}$ mit $b \in B$ erhalten kann.

Definition 3.4.1. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $B \subseteq A$ und Φ eine Menge von L-Formeln. Dann heißt

$$\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B) := \{\varphi \in \Phi(B) : (\mathfrak{A}, B) \models \varphi\}$$

das Φ-*Diagramm von* $(\mathfrak{A}, B)$. Ist speziell $\Phi = \mathsf{Ba}$, so heißt

$$\mathrm{D}(\mathfrak{A}, B) := \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{A}, B)$$

das *Diagramm* von $(\mathfrak{A}, B)$. Ist $\Phi = \mathsf{Fo}$, so ist offensichtlich $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, B)$ die (elementare) Theorie von $(\mathfrak{A}, B)$. (Vgl. Def. 2.7.2.)

Beispiel.

(i) Sei $\mathfrak{A} := \mathbb{C}$ über der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, $B := \varnothing$, $\Phi := \mathsf{Ba}$. Dann enthält $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B) = \mathrm{D}(\mathbb{C}, \varnothing)$ alle korrekten Gleichungen und Ungleichungen zwischen ganzen Zahlen, repräsentiert durch konstante Terme. $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, \mathbb{C})$ „kodiert“ $\mathbb{C}$ bis auf Isomorphie.

(ii) Die bekannten Multiplikationstafeln von (beispielsweise endlichen) Gruppen („Cayleytafeln“) sind im wesentlichen nichts anderes als Diagramme in besonders übersichtlicher Anordnung.

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ L-Strukturen, $B \subseteq A$, Φ eine Formelmenge. Dann sagen wir, $\mathfrak{C}$ *läßt sich zu einem Modell des Diagramms* $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$ *expandieren,* falls es eine $L(B)$-Expansion $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ gibt, so daß $\mathfrak{C}' \models \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$. Damit können wir nun das Diagrammlemma formulieren, das Persistenzeigenschaften zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ *in termini* des Diagramms von $(\mathfrak{A}, B)$ auszudrücken gestattet:

Diagrammlemma. *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ L-Strukturen, $B \subseteq A$, Φ eine Formelmenge. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Φ-erhaltende Abbildung $h\colon B \to C$.*

(ii) *$\mathfrak{C}$ läßt sich zu einem Modell $\mathfrak{C}'$ von $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$ expandieren.*

Bei (i) $\Rightarrow$ (ii) *gilt dabei $\overline{b}^{\mathfrak{C}'} := h(b)$ für alle $b \in B$, bei* (ii) $\Rightarrow$ (i) *gilt $h(b) := \overline{b}^{\mathfrak{C}'}$ für alle $b \in B$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Definiere $\mathfrak{C}'$ durch $\overline{b}^{\mathfrak{C}'} := h(b)$ für alle $b \in B$ als $L(B)$-Expansion von $\mathfrak{C}$. Sei nun $\varphi \in \Phi$ so daß $\psi := \varphi[\overline{b}_1/x_1, \ldots, \overline{b}_n/x_n] \in \Phi(B)$. Falls $(\mathfrak{A}, B) \models \psi$, so folgt $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$, also $\mathfrak{C} \models \varphi(h(b_1), \ldots, h(b_n))$, somit $\mathfrak{C}' \models \psi$, d.h. $\mathfrak{C}' \models \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Definiere $h\colon B \to C$ durch $h(b) := \overline{b}^{\mathfrak{C}'}$ für alle $b \in B$. Sei $\varphi \in \Phi$ mit Erweiterung $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in B$, so daß $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Definiere nun $\psi := \varphi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n]$; dann gilt $(\mathfrak{A}, B) \models \psi$, m.a.W. $\psi \in \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$. Es folgt $\mathfrak{C}' \models \psi$, und nach Definition von h also $\mathfrak{C} \models \varphi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. h erhält somit Φ. $\square$

Mittels einer geeigneten kanonischen isomorphen Identifizierung kann man im folgenden stets annehmen, daß im Fall $\mathsf{Ba} \subseteq \Phi$, $A = B$ ein $\mathfrak{C}$, welches eine der beiden äquivalenten Bedingungen des Diagrammlemmas erfüllt, bereits $\mathfrak{A}$ als Φ-Substruktur enthält; dies ist ein Spezialfall des folgenden Korollars.

KOROLLAR 3.4.2. *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ L-Strukturen, $B \subseteq A$, Φ eine Menge von L-Formeln mit $\mathsf{Ba} \subseteq \Phi$, sowie $\mathfrak{C}'$ eine Expansion von $\mathfrak{C}$ zu einem Modell von $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, B)$. Dann existiert eine zu $\mathfrak{C}$ isomorphe L-Struktur $\mathfrak{D}$ mit $D \supseteq B$, so daß $\mathrm{id}\colon B \to D$ Φ-erhaltend ist.— Insbesondere gilt also im Fall $A = B$: Erfüllen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, Φ die Voraussetzungen des Diagrammlemmas, so kann man stets ein $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \underset{\Phi}{\preceq} \mathfrak{D}$ wählen.*

BEWEIS. Nach dem Diagrammlemma existiert eine Φ-erhaltende Abbildung $h\colon B \to C$. h besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer Einbettung $\overline{h}\colon \langle\mathfrak{B}\rangle \hookrightarrow \mathfrak{C}$. Insbesondere ist $\overline{h}(\langle\mathfrak{B}\rangle)$ isomorph zu $\langle\mathfrak{B}\rangle$. $\mathfrak{D}$ entsteht aus $\mathfrak{C}$, indem man jedes $\overline{h}(c)$ durch sein Urbild c ersetzt ($c \in \langle B\rangle$). Dann gilt $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{C}$, $B \subseteq D$, und $\mathrm{id}\colon B \to D$ ist Φ-erhaltend, da $h\colon B \to C$ Φ-erhaltend ist. □

3.5. Das Kriterium von Henkin

Eine Anwendung der Diagrammethode:

KOROLLAR 3.5.1. (Henkins Kriterium, [**81**]) *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Genau dann kann $\mathfrak{A}$ zu einer Struktur aus $\mathcal{K}$ erweitert werden, wenn dies* lokal *der Fall ist, d.h. wenn jede endlich erzeugte Substruktur von $\mathfrak{A}$ zu einer Struktur aus $\mathcal{K}$ erweitert werden kann.*

BEWEIS. Nur der Schluß vom Lokalen aufs Globale muß bewiesen werden. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, Σ eine L-Satzmenge. Betrachte $\Phi := \Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$. Nach dem Diagrammlemma und dem Kompaktheitssatz reicht es zu zeigen, daß jede endliche Teilmenge von Φ ein Modell besitzt. Jede solche ist aber in einer Menge $\Phi_0 := \Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}_0, A_0)$ enthalten, wobei $\mathfrak{A}_0$ eine endlich erzeugte Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist. Nach Voraussetzung hat Φ_0 aber stets ein Modell. □

BEISPIELE.

(i) Jede Halbordnung kann zu einer linearen Ordnung fortgesetzt werden. (Szpilrajn, [**157**])

(ii) Jede lineare Ordnung kann in eine dichte lineare Ordnung eingebettet werden.

(iii) Jede abelsche Gruppe kann in eine teilbare abelsche Gruppe eingebettet werden (vgl. auch Kor. 7.8.12, Prop. 7.8.13). (Erinnerung: Eine abelsche Gruppe G heißt *teilbar,* falls für alle $g \in G$ ein $g' \in G$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $ng' = g' + g' + \cdots + g' = g$.)

BEWEIS. (ii) ist klar. (Betrachte die dichte lineare Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$.)

Zu (i): Es genügt zu zeigen, daß jede partiell geordnete Menge $(M, <)$ in eine linear geordnete Menge $(M', <')$ eingebettet werden kann, denn $(M, <'|M \times M)$ ist dann eine lineare Ordnung, die $<$ auf M fortsetzt. Nach Henkins Kriterium können wir M als endlich annehmen, etwa $M = \{m_0, \ldots, m_n\}$ mit $|M| = n+1$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir führen Induktion nach n. Die Fälle $n = 0, 1$ sind trivial. Zum Schritt $n \to n+1$: Da mit $N := \{m_0, \ldots, m_n\}$ auch $(N, <|N \times N)$ eine partielle Ordnung ist, können wir diese nach Induktionsannahme zu einer linearen Ordnung $\prec$ fortsetzen.

Sei σ eine Permutation von $\{0, \dots, n\}$ derart, daß $m_{\sigma(0)} \prec m_{\sigma(1)} \prec \dots \prec m_{\sigma(n)}$. Betrachte $M^- := \{m_i : m_i < m_{n+1}\}$ und $M^+ := \{m_i : m_{n+1} < m_i\}$. Für alle $0 \leq i, j \leq n$ mit $m_i \in M^-$, $m_j \in M^+$ gilt $m_i < m_j$, also auch $m_i \prec m_j$. Somit existiert ein $k \in \{0, \dots, n+1\}$ mit $M^- \subseteq \{m_{\sigma(i)} : 0 \leq i < k\}$ und $M^+ \subseteq \{m_{\sigma(i)} : k \leq i \leq n\}$. Wir definieren $<'$ als Erweiterung von $\prec$ so, daß $m_{\sigma(k-1)} <' m_{n+1}$ (falls $k > 0$) und $m_{n+1} <' m_{\sigma(k)}$ (falls $k < n+1$).

Zu (iii): Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen (siehe Satz 7.10.5) ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe direkte Summe von gewissen zyklischen Gruppen ($\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, mit p prim und $n \in \mathbb{N}$), und da direkte Summen teilbarer abelscher Gruppen wieder teilbar sind, bleibt einzusehen, daß jede der dort auftretenden zyklischen Gruppen in eine teilbare Gruppe eingebettet werden kann; dies ist aber leicht: Für $\mathbb{Z}$ wähle $\mathbb{Q}$, für $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die p-te Prüfergruppe (siehe §7.10.2). □

3.6. Charakterisierung von Φ-Erweiterungen

Als eine weitere Anwendung der Diagrammethode beweisen wir den folgenden Satz 3.6.2, der es ermöglicht, die Klasse aller Φ-Substrukturen einer elementaren Klasse $\mathcal{K}$ zu charakterisieren; insbesondere werden wir sehen, daß diese Klasse ebenfalls elementar ist.

Definition 3.6.1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, Φ eine Menge von L-Formeln. Definiere dann

$$\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K}) := \left\{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ L\text{-Struktur, und es existiert } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\text{: } \mathfrak{A} \underset{\Phi}{\preceq} \mathfrak{B} \right\}.$$

Wir nennen $\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K})$ *die zu $\mathcal{K}$ gehörige Klasse aller Φ-Substrukturen.*

Beispiel. Sei $\Phi := \mathsf{Ba}$. Dann ist $\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K}) = \mathrm{S}(\mathcal{K})$, wobei

$$\mathrm{S}(\mathcal{K}) = \left\{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ L\text{-Struktur, und es existiert } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}\text{: } \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \right\}$$

die aus [**25**] (Def. 1.3.13) bekannte Klasse aller Substrukturen von $\mathcal{K}$ ist.

Übung. Sei $\mathcal{AG}$ die Klasse aller abelschen Gruppen über der Sprache $L = \{1, \cdot\}$. Zeige: $\mathrm{S}(\mathcal{AG})$ ist die Klasse aller kommutativen Monoide mit Kürzungsregel.

Satz 3.6.2. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, wobei Σ eine Menge von L-Sätzen. Sei Φ eine Menge von L-Formeln mit $\mathsf{Ba} \subseteq \Phi$ und Φ' der Abschluß von $\neg\Phi := \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$ unter $\{\vee, \forall\}$, sowie $\Phi'' := \{\varphi \in \Phi' : \Sigma \models \varphi\}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Phi'')$$

Im Fall $\Phi = \mathsf{Ba}$ erhält man also $\mathrm{S}(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Psi)$ mit

$$\Psi := \{\varphi \in \forall_1 : \Sigma \models \varphi\}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K})$. Dann gibt es also ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \preceq_\Phi \mathfrak{B}$. Es gilt $\mathfrak{B} \models \Phi''$; dann gilt aber auch $\mathfrak{A} \models \Phi''$. Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, d.h. es existiere ein Satz $\varphi \in \Phi''$ mit $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$. O.B.d.A. sei φ von der Form

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i \right) \qquad (\varphi_i \in \Phi).$$

Dann gibt es also gewisse $a_1, \ldots, a_n \in A$, so daß für alle $1 \le i \le m$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$. Damit haben wir aber nach Voraussetzung auch

$$\mathfrak{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(a_1, \ldots, a_n),$$

im Widerspruch zu $\mathfrak{B} \models \Phi''$. Dies zeigt $\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi'')$.

Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{A} \models \Phi''$ vorausgesetzt. Es genügt zu zeigen, daß $\Sigma \cup \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$ ein Modell hat; dann hat nämlich ein solches Modell $\mathfrak{B}$ bis auf Isomorphie die Eigenschaft $\mathfrak{A} \preceq_\Phi \mathfrak{B}$, es ist $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathcal{K}$, und die Behauptung folgt. Angenommen, $\Sigma \cup \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$ hat kein Modell. Der Kompaktheitssatz besagt dann: Es gibt eine endliche Teilmenge $\{\varphi_1', \ldots, \varphi_m'\} \subseteq \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$, wobei die φ_i' die Form

$$\varphi_i' = \varphi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n] \quad \text{mit } \varphi_i \in \Phi,\ a_j \in A \text{ paarweise verschieden}$$

haben, so daß $\Sigma \cup \{\varphi_1', \ldots, \varphi_m'\}$ kein Modell hat. D.h. wir haben $\Sigma \models \bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i'$. Umgang mit Konstanten (Kor. 2.6.3) liefert:

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{i=1}^{m} \neg\varphi_i \right) =: \psi$$

Dann ist $\psi \in \Phi''$, also (da $\mathfrak{A} \models \Phi''$): $\mathfrak{A} \models \psi$. Nach Wahl von $\varphi_i' \in \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$ gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi_i'$ für $i = 1, \ldots, m$, also

$$\mathfrak{A} \models \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \right) (a_1, \ldots, a_n),$$

im Widerspruch zu $\mathfrak{A} \models \psi$. $\square$

Wir sagen, $\mathcal{K}$ *sei gegen Substrukturbildung abgeschlossen,* wenn $\mathrm{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ ist. Damit folgt aus Satz 3.6.2 unmittelbar:

Satz 3.6.3. (Erhaltungssatz von Łoś-Tarski, [**96**], [**167**]) *Eine elementare Klasse $\mathcal{K}$ ist genau dann gegen Unterstrukturbildung abgeschlossen, wenn sie eine Axiomatisierung mittels $\forall_1$-Sätzen besitzt.*

Beweis. Sei Σ eine Menge von universellen Sätzen mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Substruktur; sei $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_n(\varrho)$ mit quantorenfreier Formel $\varrho(x_1, \ldots, x_n)$, und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi$. Ist dann $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ eine Stelle in $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, so gilt $\mathfrak{A} \models \varrho(b_1, \ldots, b_n)$, und nach Definition der Substrukturbeziehung folgt auch $\mathfrak{B} \models \varrho(b_1, \ldots, b_n)$, also insgesamt $\mathfrak{B} \models \varphi$, und $\mathrm{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{K}$ gegen Substrukturbildung abgeschlossen; mit Satz 3.6.2 folgt dann $\mathcal{K} = \mathrm{S}(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Psi)$ für eine Menge Ψ universeller L-Sätze. $\square$

Ebenso unmittelbar folgt:

Korollar 3.6.4. *Sei L abzählbar und effektiv gegeben. Ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare Klasse mit rekursiv aufzählbarer Axiomenmenge $\Sigma \subseteq \mathsf{Sa}_L$, und Φ eine rekursiv aufzählbare Menge von Formeln, so besitzt auch $\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K})$ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem, i.e. eine rekursiv aufzählbare Satzmenge Ψ mit $\mathrm{S}_\Phi(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Psi)$.*

Beweis. Übung. $\square$

3.7. Der erste Persistenzsatz

Die §§3.5 und 3.6 waren nur Zwischenstationen auf dem Weg zu folgendem wichtigen Resultat über die Charakterisierung persistenter Formeln. (*Ad hoc* nennen wir hier eine L-Formelmenge Φ *gleichungsumfassend,* falls Φ alle Gleichungen der Form $x = y$ mit beliebigen Variablen x, y enthält und gegen Variablensubstitution abgeschlossen ist, d.h. mit φ auch $\varphi[y/x]$ enthält, und *negationsfähig für* Σ, falls ein $\varphi \in \Phi$ existiert mit $\Sigma \models \neg\varphi$, wobei Σ eine L-Satzmenge sei.)

Erster Persistenzsatz. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer Menge Σ von L-Sätzen. Φ sei eine gleichungsumfassende, für Σ negationsfähige Menge von L-Formeln und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel, die unter allen Φ-erhaltenden Abbildungen $h\colon A \to C$, wobei $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, persistent ist. Sei Φ' der Abschluß von Φ unter $\{\wedge, \vee, \exists\}$. Dann existiert ein $\varphi \in \Phi'$ derart, daß φ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu ψ, d.h. $\Sigma \models (\psi \leftrightarrow \varphi)$ gilt.*

Beweis. O.B.d.A. sei $n \geq 1$. Seien $d_1, \ldots, d_n$ paarweise verschiedene neue Konstanten. Wir schreiben für die Dauer der Beweises $\hat{\varphi}$ statt $\varphi[d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]$, für L-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$; $\hat{\varphi}$ ist dann ein Satz in $L(D)$, $D := \{d_1, \ldots, d_n\}$. Sei ferner

$$\Phi'' := \left\{\neg\hat{\varphi} : \varphi \in \Phi', \Sigma \models (\varphi \to \psi)\right\}.$$

Da Φ negationsfähig für Σ ist, ist $\Phi'' \neq \varnothing$. Wir zeigen:

1. Die $L(D)$-Satzmenge $\Sigma \cup \Phi'' \cup \left\{\hat{\psi}\right\}$ hat kein Modell.

Hieraus folgt mit dem Kompaktheitssatz: Es existieren $\varrho_1, \ldots, \varrho_m \in \Phi'$ mit $\neg\hat{\varrho}_i \in \Phi''$, so daß $\Sigma \cup \{\neg\hat{\varrho}_1, \ldots, \neg\hat{\varrho}_m\} \cup \left\{\hat{\psi}\right\}$ kein Modell besitzt. (Wegen $\Phi'' \neq \varnothing$ o.B.d.A. $m \geq 1$.) Dann

$$\Sigma \models \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \neg\hat{\varrho}_i \to \neg\hat{\psi}\right), \quad \text{also} \quad \Sigma \models \left(\hat{\psi} \to \bigvee_{i=1}^{m} \hat{\varrho}_i\right).$$

Somit folgt $\Sigma \models \forall\mathbf{x}(\psi \to \varrho)$, wobei $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$, $\varrho := \bigvee_{i=1}^{m} \varrho_i \in \Phi'$. Nach Wahl der ϱ_i folgt $\Sigma \models \forall\mathbf{x}(\varrho_i \to \psi)$ für jedes $i = 1, \ldots, m$. Damit

$$\Sigma \models \forall\mathbf{x}\left(\bigvee_{i=1}^{m} \varrho_i \to \psi\right),$$

also $\Sigma \models \forall\mathbf{x}(\varrho \leftrightarrow \psi)$, und der Satz ist bewiesen.

Es verbleibt der Nachweis der Behauptung (1.): Wir argumentieren indirekt; angenommen, $\Sigma \cup \Phi'' \cup \left\{\hat{\psi}\right\}$ hat ein Modell $\mathfrak{A}'$. $\mathfrak{A}'$ ist eine $L(D)$-Struktur; sei $\mathfrak{A}$ die Einschränkung von $\mathfrak{A}'$ auf L. Sei $a_i := d_i^{\mathfrak{A}'}$. Dann gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \Sigma$, $(\mathfrak{A}, A) \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ und $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ für alle $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi'$ mit der Eigenschaft $\Sigma \models (\varphi \to \psi)$. Nun wollen wir beweisen:

2. $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A) \cup \Sigma \cup \{\neg\psi'\}$ mit $\psi' := \psi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n] \in \mathsf{Sa}_{L(A)}$ hat kein Modell.

Hieraus erhalten wir dann (1.) wie folgt: Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \Phi$ (wegen $n \geq 1$ und $(x_1 = x_1) \in \Phi$ o.B.d.A. $l \geq 1$) und paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_k \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ sowie Variable $y_1, \ldots, y_k$ dergestalt, daß mit

$$\varphi_i' := \varphi_i[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n, \overline{b}_1/y_1, \ldots, \overline{b}_k/y_k] \in \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$$

auch schon $\Sigma \cup \{\neg\psi', \varphi'_1, \ldots, \varphi'_l\}$ kein Modell hat. Damit also

$$\Sigma \models \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi'_i \to \psi' \right).$$

Beseitigen der b_j gemäß Kor. 2.6.3 liefert, da diese paarweise verschieden sind (mit $\mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_k)$):

$$\Sigma \models \left(\exists \mathbf{y} \left(\bigwedge_{i=1}^{l} \varphi_i[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n] \right) \to \psi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n] \right)$$

Beseitigen der a_j gemäß Satz 2.6.2 ($\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\Sigma \models \forall \mathbf{x} \left(\exists \mathbf{y} \left(\left(\left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ \overline{a}_i = \overline{a}_j}} x_i = x_j \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \varphi_i \right) \to \psi \right) =: \tilde{\varphi} \right.$$

Es gilt $\mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}$, da $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Sei

$$\varphi := \exists y_1 \cdots \exists y_k \left(\left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ \overline{a}_i = \overline{a}_j}} x_i = x_j \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \varphi_i \right).$$

Wegen der Eigenschaft von Φ, gleichungsumfassend zu sein, ist $\neg\hat{\varphi} \in \Phi''$, ferner $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ wegen $\varphi'_i \in \mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A)$. Aber auch $\mathfrak{A}' \models \neg\hat{\varphi}$, also $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, Widerspruch.

Es ist also nun noch der Beweis der Behauptung (2.) zu leisten. Sei dazu $\mathfrak{C}'$ eine $L(A)$-Struktur, die Modell von $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A}, A) \cup \Sigma \cup \{\neg\psi'\}$ ist; sei $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}'|L$. Dann ist $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$. Mit dem Diagrammlemma existiert eine Φ-erhaltende Abbildung $h\colon A \to C$ mit $h(a_i) := \overline{a}_i^{\mathfrak{C}'}$. Da $\mathfrak{C}' \models \neg\psi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n]$, gilt $\mathfrak{C} \models \neg\psi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. Wegen $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ und der Voraussetzung des Satzes bzgl. ψ folgt $\mathfrak{C} \models \psi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$, und dies ist widersprüchlich. □

Bemerkung 3.7.1. Die Voraussetzungen „Φ gleichungsumfassend“ und „Φ negationsfähig für Σ“ sind zwingend erforderlich, wie folgende Beispiele demonstrieren. Sei $L := \varnothing$, $\Sigma := \{\forall x \forall y (x = y)\}$, also $\mathcal{K} := \mathrm{Mod}(\Sigma)$ die Klasse der einelementigen Mengen.

(i) Ist $\Phi := \{x \neq x\}$, $\psi := (x = x)$, so ist ψ persistent unter allen Abbildungen $B \to C$ mit $B \subseteq A$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, aber in $\mathcal{K}$ nicht äquivalent zu einer Formel aus Φ', da $\Sigma \models \neg\varphi$ für alle $\varphi \in \Phi'$, aber $\Sigma \models \psi$. Φ ist nicht gleichungsumfassend, obwohl negationsfähig für Σ.

(ii) Ist Φ die Menge aller Gleichungen $x = y$ zwischen Variablen x, y, und $\psi := (x \neq x)$, so ist ψ persistent unter allen Abbildungen $B \to C$, wobei $B \subseteq A$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, aber in $\mathcal{K}$ nicht äquivalent zu einer Formel aus Φ', weil $\Sigma \models \Phi'$, aber $\Sigma \models \neg\psi$. Φ ist zwar gleichungsumfassend, aber nicht negationsfähig für Σ.

Korollar 3.7.2. *Falls man in obigem Satz zusätzlich* $\mathsf{Ba} \subseteq \Phi$ *voraussetzt, kann man die Bedingung des Satzes über* ψ *(*ψ *persistent unter allen* Φ*-erhaltenden Abbildungen zwischen Strukturen in* $\mathcal{K}$*) ersetzen durch:* ψ *ist persistent unter allen* Φ*-Erweiterungen* $\mathfrak{A} \underset{\Phi}{\preceq} \mathfrak{C}$ *mit* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$.

Beweis. Die eine Richtung ist trivial, da $\mathfrak{A} \preceq_\Phi \mathfrak{C}$ bedeutet, daß $\mathrm{id}\colon A \to C$ Φ-erhaltend ist. Zur Umkehrung sei $h\colon A \to C$ Φ-erhaltend mit Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ aus $\mathcal{K}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Mit Kor. 3.4.2 zum Diagrammlemma folgt: Es existiert ein $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{C}$, etwa mit Isomorphismus $j\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, so daß $\mathfrak{A} \preceq_\Phi \mathfrak{D}$ und $j|h(A) = h^{-1}$. Dann folgt $\mathfrak{D} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$, also $\mathfrak{C} \models \psi(j^{-1}(a_1), \ldots, j^{-1}(a_n))$ und damit $\mathfrak{C} \models \psi(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. $\square$

Korollar 3.7.3. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer Satzmenge Σ und ψ eine L-Formel. Dann gilt:*

(i) *ψ ist persistent unter Einbettungen zwischen Strukturen in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn ψ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu einer existentiellen Formel.*
(ii) *ψ ist persistent unter Erweiterungen zwischen Strukturen in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn ψ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu einer existentiellen Formel.*
(iii) *Ist zusätzlich* At *negationsfähig für Σ, so gilt: ψ ist persistent unter Homomorphismen zwischen Strukturen in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn ψ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu einer positiv existentiellen Formel.*

Beweis. Wähle $\Phi := \mathsf{Ba}$ für (i), (ii) bzw. $\Phi := \mathsf{At}$ für (iii) im ersten Persistenzsatz; für (ii) verwende das vorhergehende Kor. 3.7.2. $\square$

Übung. Sei $\mathcal{H}$ die Klasse der Halbordnungen bzgl. der Sprache $L = \{\leq\}$. Man charakterisiere die L-Formeln, die in $\mathcal{H}$ persistent sind unter injektiven Homomorphismen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch ein zum Erhaltungssatz von Łoś-Tarski analoges Ergebnis herleiten, für dessen Beweis wir jedoch etwas mehr Arbeit leisten müssen. Wir nennen im folgenden eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen *abgeschlossen gegen Erweiterungen,* falls für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und Strukturen $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ folgt, daß auch $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Satz 3.7.4. (Erhaltungssatz von Łoś, [**96**]) *Eine elementare Klasse $\mathcal{K}$ ist genau dann gegen Erweiterungen abgeschlossen, wenn sie eine Axiomatisierung mittels einer $\exists_1$-Satzmenge Σ zuläßt.*

Beweis. Wegen der Definition der Substrukturrelation ist nur die eine Richtung der Aussage wirklich beweisbedürftig (vgl. auch Bsp. zu Lemma 3.1.3): Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare, erweiterungsabgeschlossene Strukturklasse, mit Σ Satzmenge über L. Zunächst beweisen wir folgende einfache Hilfsbehauptung:

($*$) Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Modelle $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \exists_1$ ist
$$\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$$
widerspruchsfrei.

Beweis von ($*$): Sei $\psi := \varphi[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_n/x_n]$ eine endliche Konjunktion von Aussagen aus $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$, also $\varphi \in \mathsf{Qf}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $(\mathfrak{A}, A) \models \psi$. Dann gilt also $\mathfrak{A} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n(\varphi)$, also $\exists x_1 \cdots \exists x_n(\varphi) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \exists_1$. Da $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \exists_1$, so haben wir $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n(\varphi)$. Also existieren $b_1, \ldots, b_n \in B$ mit $(\mathfrak{B}, B) \models \varphi[\overline{b}_1/x_1, \ldots, \overline{b}_n/x_n]$, und wir gelangen durch Erweiterung von $\mathfrak{B}$ zu einer $L(A)$-Struktur $\mathfrak{B}'$ mittels $\overline{a}_i^{\mathfrak{B}'} := b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\overline{a}^{\mathfrak{B}'} := c$ (mit $c \in B$ beliebig) für alle anderen $a \in A$ zu einem Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cup \{\psi\}$; also gilt nach Kompaktheitssatz auch ($*$).

Wir zeigen nun, daß für $\Psi := \{\varphi \in \exists_1 : \Sigma \models \varphi\}$ gilt: $\mathcal{K} \models \mathrm{Mod}(\Psi)$. Wegen nachfolgendem allgemeineren Lemma reicht es, dafür nachzuweisen, daß $\mathfrak{B} \models \Sigma$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \exists_1$. Seien also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dergestalt gewählt. Mit $(*)$ erhalten wir ein Modell $\mathfrak{C}'$ von $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ über $L(A)$, für dessen L-Redukt $\mathfrak{C}$ wir wegen Kor. 3.4.2 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ annehmen können. Damit folgt $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ gegen Erweiterungen, und wegen $\mathfrak{C} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ schließlich $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. □

Lemma 3.7.5. *Sei Δ eine gegen $\vee$ abgeschlossene Menge von L-Sätzen, $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse, etwa $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit Satzmenge Σ; sei $\Sigma_\Delta := \{\varphi \in \Delta : \Sigma \models \varphi\}$. Dann gilt $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma_\Delta)$ genau dann, wenn für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \Delta$ gilt $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Es sei zum Beweis der nichttrivialen Richtung $\mathfrak{B} \models \Sigma_\Delta$; zu zeigen ist $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Dazu müssen wir nach Voraussetzung lediglich ein $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \Delta$ finden. Setze wie üblich $\neg\Delta := \{\neg\varphi : \varphi \in \Delta\}$. Es reicht offenbar, die Widerspruchsfreiheit von $\Sigma \cup (\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cap \neg\Delta)$ zu verifizieren: Denn ist $\mathfrak{A} \models \Sigma \cup (\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cap \neg\Delta)$, so gilt $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \Delta$; ist nämlich $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \Delta$ mit $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, so folgt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ wegen $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \cap \neg\Delta$, ein Widerspruch zu $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Seien also $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Delta$ und $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{i=1}^n \neg\varphi_i$. Sei $\varphi := \bigvee_{i=1}^n \varphi_i$. Dann ist $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, und $\varphi \in \Delta$ nach Voraussetzung. Wäre $\Sigma \cup \{\neg\varphi_i : i = 1, \ldots, n\}$ nicht widerspruchsfrei, so hätten wir $\Sigma \models \varphi$, also $\varphi \in \Sigma_\Delta$, und somit $\mathfrak{B} \models \varphi$, Widerspruch. □

In den anschliessenden Übungen beschäftigen wir uns mit der Charakterisierung elementarer Erweiterungen mittels sog. Sandwiches.

Definition 3.7.6. Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ein *n-Sandwich in $\mathcal{K}$ zu $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$* ist eine Kette von L-Strukturen $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}$$

derart, daß stets $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_{i+2}$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Eine *alternierende Kette in $\mathcal{K}$* ist eine Kette von L-Strukturen

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3 \subseteq \cdots \tag{3.7.1}$$

derart, daß stets $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_{i+2}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen die Kette (3.7.1) eine *alternierende Kette in $\mathcal{K}$ zu $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$,* falls sie alternierend und $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}$ ist.

Übung. Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

> $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ erhält alle $\forall_{n+1}$-Formeln genau dann, wenn ein $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \underset{\forall_n}{\preceq} \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$,

und beweise damit den folgenden Satz:

Satz 3.7.7. *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann:*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Es ist $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$ dann und nur dann, wenn in $\mathcal{K}$ ein n-Sandwich zu $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ existiert.*

(ii) *Genau dann gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, wenn es in $\mathcal{K}$ eine alternierende Kette zu $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gibt.* □

3.8. Drei lokale Sätze aus der Gruppentheorie

Bereits mit den sehr geringen modelltheoretischen Grundlagen, die wir bis jetzt erarbeitet haben, sind interessante algebraische Anwendungen möglich. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß man mit dem Kompaktheitssatz unter anderem über ein sehr flexibles Instrument zur Übertragung von Sätzen von endlich erzeugten Strukturen auf unendliche Strukturen verfügt. Dazu betrachten wir exemplarisch die Sprache $L = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ und die Klasse $\mathcal{G}$ der Gruppen als L-Strukturen. Eine Menge Γ von L-Sätzen heißt *erblich,* wenn für alle Gruppen G und jede Untergruppe H von G gilt: $G \models \Gamma \Rightarrow H \models \Gamma$. (Z. B. ist Γ sicher erblich, wenn $\Gamma \subseteq \forall_1$.)

Beispiele. Die Mengen $\{\alpha\}$, $\{\pi_n\}$, $\{\omega_m\}$ mit den L-Sätzen $\alpha := \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$, $\pi_n := \forall x \left(\bigvee_{i=0}^n x^i = 1\right)$ (für $n \in \mathbb{N}_0$) und

$$\omega_m := \forall x_0 \cdots \forall x_m \left(\bigvee_{0 \le i < j \le m} x_i = x_j \right) \qquad \text{(für } m \in \mathbb{N}_0\text{)}$$

sind erblich. Man sagt, die *Eigenschaft,* abelsch zu sein (bzw. nur Elemente mit Ordnung $\le n$ zu besitzen, bzw. von einer Ordnung $\le m$ zu sein), ist erblich.

Bekanntlich heißt ein Turm

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\} \tag{3.8.2}$$

von Untergruppen G_i einer Gruppe G eine *Normalreihe von G,* wenn G_{i+1} Normalteiler von G_i ist, für $i = 0, \ldots, n-1$. Sind $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ erblich, so heißt G *vom Typ* $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$*,* wenn es eine Normalreihe (3.8.2) von G gibt, so daß $G_i/G_{i+1} \models \Gamma_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Beispiele. G ist vom Typ $(\{\alpha\}, \ldots, \{\alpha\})$ genau dann, wenn es in G eine Normalreihe (3.8.2) der Länge n gibt, in der die Faktorgruppen G_i/G_{i+1} sämtlich abelsch sind, d.h. wenn G eine *auflösbare* Normalreihe der Länge n besitzt. G ist vom Typ $(\{\omega_m\}, \{\alpha\})$ genau dann, wenn sie einen abelschen Normalteiler mit Index $\le m$ besitzt.

Durch folgenden Trick kann man in Untersuchungen von Gruppen mittels der Logik erster Stufe nicht nur Eigenschaften, die in L elementar formulierbar sind, mit einbeziehen: (Für eine allgemeine Fassung dieser *Methode der Interpretationen* siehe [**8**], §5.)

Satz 3.8.1. *Sei G eine Gruppe, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ erblich. G ist vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ genau dann, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von G vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ ist.*

Beweis. Man erweitere die Sprache L zu der Sprache L^* durch Hinzunahme von $n+1$ neuen einstelligen Relationssymbolen $R_0, \ldots, R_n$. Ist G vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ und (3.8.2) die zugehörige Normalreihe, so definieren wir die L^*-Struktur G^* als die Expansion von G, in der R_i jeweils als G_i interpretiert wird. Σ_0 bestehe aus folgenden L^*-Sätzen:

(i) $\forall x \forall y \big(R_i x \wedge R_i y \to R_i x^{-1} \wedge R_i(x \cdot y)\big)$, für $i = 1, \ldots, n$ („R_i ist Untergruppe von G“);

(ii) $\forall x \forall y \big(R_{i-1} x \wedge R_i y \to R_i(x \cdot y \cdot x^{-1})\big)$, für $i = 1, \ldots, n$ („R_i ist Normalteiler von R_{i-1}“);

(iii) $\forall x(R_0 x)$ („$R_0 = G$“);

(iv) $\forall x(R_n x \leftrightarrow x = 1)$ („$R_n = \{1\}$“);

(v) $\forall x(R_i x \to R_{i-1} x)$, für $i = 1, \ldots, n$ („$R_i \subseteq R_{i-1}$“).

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ist φ eine L-Formel, so sei $\varphi^*_{(i)}$ diejenige L^*-Formel, die aus φ entsteht, indem jede Gleichung $t_1 = t_2$ zwischen L-Termen t_1, t_2 durch $R_i(t_1 \cdot t_2^{-1})$ ersetzt wird, und jede Teilformel der Form $\exists x(\psi)$ durch $\exists x(R_{i-1} x \wedge \psi)$; es sei $\Gamma_i^* := \{\varphi^*_{(i)} : \varphi \in \Gamma_i\}$. G^* ist ein Modell von $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathcal{G}) \cup \Sigma_0 \cup \Gamma_1^* \cup \cdots \cup \Gamma_n^*$, und ist umgekehrt H mit den Interpretationen $H_i \subseteq H$ für R_i $(i = 0, \ldots, n)$ ein Modell von Σ, so ist H eine Gruppe vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$. Ferner gilt:

($*$) Ist H eine Untergruppe der Gruppe G und G vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$, so ist auch H vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$. (Denn kanonisch ist $G_{i-1} \cap H / G_i \cap H \hookrightarrow G_{i-1}/G_i$, und Γ_i ist erblich.)

Damit folgt insbesondere: Ist G vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ und H eine endlich erzeugte Untergruppe von G, so ist auch H vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$.

Sei nun umgekehrt jede endlich erzeugte Untergruppe H von G vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$. Wir zeigen: Φ, bestehend aus dem Ba-Diagramm von G zusammen mit Σ, ist erfüllbar. Sei dazu Δ eine endliche Teilmenge von Φ, $g_1, \ldots, g_m$ die in Δ vorkommenden Konstanten aus G. Sei H die von $g_1, \ldots, g_m$ erzeugte Untergruppe in G. Da $H \subseteq G$, ist H als $L(H)$-Struktur ein Modell von $\Delta \setminus \Sigma$. Nach Voraussetzung ist H vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$, und es existieren also Teilmengen $H_0, \ldots, H_n$ von H, so daß H^* mit den Interpretationen H_i für R_i Modell von Σ ist. Also ist H^* Modell von Δ. Mit dem Kompaktheitssatz folgt, daß nun auch Φ erfüllbar ist, es existiert also eine Gruppe G' vom Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$, die G als Untergruppe enthält (nach Diagrammlemma). Mit ($*$) folgt, daß auch G von Typ $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ ist. $\square$

Als Spezialfall $\Gamma_i := \{\alpha\}$ folgt:

Korollar 3.8.2. (Malcev, [**109**]) *G hat eine auflösbare Normalreihe der Länge n genau dann, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von G eine auflösbare Normalreihe der Länge n hat.* $\square$

Sagt man, eine Gruppe besitze eine gewisse Eigenschaft *lokal,* falls jede endlich erzeugte Untergruppe die besagte Eigenschaft hat, so hat also eine Gruppe G eine auflösbare Normalreihe der Länge n genau dann, wenn G lokal eine auflösbare Normalreihe der Länge n besitzt.

Eine Gruppe heißt *fast abelsch,* wenn sie einen abelschen Normalteiler von endlichem Index besitzt. Für $n := 2$, $\Gamma_1 := \{\omega_m\}$, $\Gamma_2 := \{\alpha\}$ erhält man dann aus Satz 3.8.1:

Korollar 3.8.3. *Eine Gruppe G ist fast abelsch genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß G lokal stets einen abelschen Normalteiler vom Index $\leq m$ besitzt.* $\square$

Wir verwenden nochmals die Beweismethode von Satz 3.8.1, um folgendes Resultat herzuleiten, wahrscheinlich der erste rein algebraische Satz überhaupt, dessen Beweis in essentieller Weise Modelltheorie verwendete. Man sagt, eine Gruppe G ist eine *lineare Gruppe n-ten Grades.* falls G in $\mathrm{GL}(n; K)$ eingebettet werden kann, wobei K ein Körper ist. ($n \in \mathbb{N}$.)

Satz 3.8.4. (Malcev, [**108**]) *Sei $n \in \mathbb{N}$, G eine Gruppe. G ist eine lineare Gruppe n-ten Grades genau dann, wenn dies lokal der Fall ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}_n$ die Klasse aller linearen Gruppen n-ten Grades. Erweitere L zu $L^* = \{1, \cdot, ^{-1}, 0, +, -, *, \pi_{ij}\}$, wobei $+$, $*$ binäre Operationssymbole seien, 0 ein Konstantensymbol und $-$ sowie π_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ unäre Operationssymbole. Sei $\mathcal{GL}_n$ die Klasse aller L^*-Strukturen $(G, 1, \cdot, ^{-1}, +, -, *, 0, \pi_{ij})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ sind gleich gdw. $\pi_{ij}(g_1) = \pi_{ij}(g_2)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
(ii) Ist $K := \{\pi_{ij}(g) : g \in G, 1 \leq i, j \leq n\}$, so ist $(K, 0, 1, +, -, *)$ ein Körper.
(iii) Es ist $\pi_{ij}(1) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$.
(iv) Die Operation $\cdot$ ist die Matrixmultiplikation.
(v) Für jedes $g \in G$ ist $\big(\pi_{ij}(g)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}(n; K)$, und ist $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ aus $\mathrm{GL}(n; K)$, so existiert ein $a \in G$ mit $\alpha_{ij} = \pi_{ij}(a)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{GL}_n$ ist elementar bzgl. L^*. (Der Leser gebe übungshalber L^*-Sätze an, die (i)–(v) formalisieren.) Ferner gilt: $G \in \mathcal{G}$ ist eine lineare Gruppe n-ten Grades genau dann, wenn G zu einer L^*-Struktur $G^* \in \mathrm{S}(\mathcal{GL}_n)$ erweitert und expandiert werden kann. $\mathrm{S}(\mathcal{GL}_n)$ ist universell axiomatisierbar durch $\Sigma \subseteq (\forall_1)_{L^*}$ nach dem Satz von Łoś-Tarski. Wir zeigen, daß $\mathcal{L}_n = \{G^*|L : G^* \in \mathrm{S}(\mathcal{GL}_n)\}$ durch

$$\Phi := \big\{\varphi \in (\forall_1)_L : \text{für alle } G^* \in \mathrm{S}(\mathcal{GL}_n)\text{: } G^*|L \models \varphi\big\}$$

axiomatisiert werden kann. Daraus folgt dann sofort die Behauptung, denn ist $G \in \mathcal{G}$ lokal eine lineare Gruppe n-ten Grades, G selbst aber nicht, so existiert ein $\varphi \in \Phi$, etwa $\varphi = \forall \mathbf{x}(\psi)$ mit $\psi(\mathbf{x})$ quantorenfrei, so daß $G \models \exists \mathbf{x}(\neg\psi)$; wähle ein Tupel $\mathbf{g}$ mit $G \models \neg\psi(\mathbf{g})$. Dann ist die Untergruppe $\langle \mathbf{g} \rangle \subseteq G$ nicht aus $\mathcal{L}_n$, Widerspruch.— Zunächst ist sicherlich $\mathcal{L}_n \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$. Umgekehrt sei $G \models \Phi$, $G \in \mathcal{G}$; betrachte die $L^*(G)$-Satzmenge Ψ, bestehend aus Σ und dem Diagramm von G. Angenommen, Ψ habe kein Modell; wähle mit dem Kompaktheitssatz $\Psi' \subseteq \Psi$ endlich ohne Modell, und bezeichne $g_1, \ldots, g_m$ $(m \geq 1)$ die in Ψ' vorkommenden Konstanten von G, sowie $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ die Konjunktion aller Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ mit $\varphi[g_1/x_1, \ldots, g_m/x_m] \in \Psi' \backslash \Sigma$. (Es ist $\Psi' \backslash \Sigma \neq \varnothing$, da Ψ' inkonsistent.) Dann gilt also $\Sigma \models \neg\psi[g_1/x_1, \ldots, g_m/x_m]$); mit Kor. 2.6.3 folgt $\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_m(\neg\psi) =: \vartheta$. Aber ϑ ist damit aus Φ, müßte also in G gelten, im Widerspruch zu $G \models \psi(g_1, \ldots, g_m)$. Mit dem Diagrammlemma existiert also eine $L^*(G)$-Struktur aus $\mathrm{S}(\mathcal{GL}_n)$, deren L-Redukt G als Untergruppe enthält; also $G \in \mathcal{L}_n$. □

Korollar 3.8.5. *Sei G eine Gruppe. Genau dann ist G die multiplikative Gruppe eines Körpers, wenn G lokal die multiplikative Gruppe eines Körpers ist.* □

Man vgl. in diesem Zusammenhang auch Satz 7.10.23.— Wir wenden uns geordneten Gruppen zu: Eine *geordnete Gruppe* ist eine Gruppe G, zusammen mit einer linearen Ordnung, die mit der Gruppenoperation verträglich ist, d.h.

$$g < h \quad \Rightarrow \quad k \cdot g < k \cdot h, \ g \cdot k < h \cdot k \qquad \text{für alle } g, h, k \in G.$$

G heißt *anordbar,* falls eine Ordnung auf G existiert, so daß $(G, <)$ eine geordnete Gruppe ist. Eine anordbare Gruppe ist notwendig torsionsfrei. Wir beschäftigen uns mit der Umkehrung im kommutativen Fall; zunächst gilt nur:

Proposition 3.8.6. *Jede endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe ist anordbar.*

Beweis. Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen (siehe Satz 7.10.5) hat jede endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe G die Form $G \cong \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. G ist damit anordbar, indem man von der in kanonischer Weise geordneten abelschen Gruppe $\mathbb{Z}$ ausgeht und $\mathbb{Z}^n$ mit der induzierten lexikographischen Ordnung versieht. □

Ein weiterer lokaler Satz, aus dem wir dann die gewünschte Umkehrung erhalten werden, ist:

Satz 3.8.7. (Łoś, [**94**]) *Eine Gruppe G ist anordbar genau dann, wenn G lokal anordbar ist.*

Beweis. Die Richtung „G anordbar $\Rightarrow$ G lokal anordbar“ ist trivial. Zur Umkehrung: Sei G lokal anordbar. Erweitere L zu $L^* = \{1, \cdot, ^{-1}, <\}$ mit dem binären Relationssymbol $<$. Betrachte die $L^*(G)$-Satzmenge

$$\Phi := \big\{g < h \rightarrow k \cdot g < k \cdot h \wedge g \cdot k < h \cdot k : g, h, k \in G\big\},$$

und definiere Σ als die Vereinigung von $\mathrm{Th}(\mathcal{G}) \cup \Phi$ mit dem Diagramm von G. Jede endliche Teilmenge von Σ ist nach Voraussetzung erfüllbar, also auch Σ selbst wegen Kompaktheit. Das heißt: Es existiert eine Gruppe G' mit $G \subseteq G'$ und eine Relation $<$ auf G', die Φ erfüllt; also ist $\big(G, <|G \times G\big)$ eine geordnete Gruppe. □

Direkt aus Prop. 3.8.6 erhält man nun:

Korollar 3.8.8. (Tarski, [**158**]) *Eine abelsche Gruppe ist anordbar d.u.n.d., wenn sie torsionsfrei ist.* □

Satz 3.8.7 kann verschärft werden:

Übung. Zeige, daß die Klasse aller anordbaren Gruppen durch eine universelle L-Satzmenge axiomatisiert werden kann.

Mehr über lokale Sätze in der Gruppentheorie findet man in [**11**] und [**16**].— Ein weiteres schönes Beispiel für die Möglichkeit, mit dem Kompaktheitssatz vom Endlichen auf das Unendliche zu schliessen, ist das folgende:

Übung. Angenommen, es wurde bewiesen, daß jede Karte (in der Ebene) mit endlich vielen Ländern mit nur vier Farben so eingefärbt werden kann, daß zwei benachbarte Länder nie dieselbe Farbe besitzen. Beweise, daß dies dann auch für eine Karte mit unendlich vielen Ländern richtig ist (wobei natürlich jedes Land nur endlich viele Nachbarn besitze).

KAPITEL 4

Modellvollständigkeit

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit einer Spezies von Strukturklassen mit besonders schönen semantischen Eigenschaften, den sog. modellvollständigen Klassen; als Anwendung zeigen wir die Modellvollständigkeit der Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper sowie die Vollständigkeit der Klasse algebraisch abgeschlossener Körper fester Charakteristik und demonstrieren die Nützlichkeit dieses Ergebnisses anhand einer einfachen Herleitung des allgemeinen affinen Satzes von Bézout aus der Gültigkeit des Satzes in $\mathbb{C}$.

DEFINITION 4.0.1. Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{K}$ heißt *modellvollständig,* falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$$

(Dieser Begriff wurde von Robinson eingeführt, vgl. [**14**], S. 13, [**15**], S. 91, [**124**].)

BEMERKUNG 4.0.2. $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ ist modellvollständig genau dann, wenn für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ die $L(A)$-Satzmenge $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ vollständig ist.

BEWEIS. Übung. □

4.1. Robinsons Test

Der folgende Satz geht auf Robinson [**15**] zurück und ist landläufig als *Robinsons Test* bekannt. ([**14**], S. 16, 21; [**121**])

SATZ 4.1.1. (Charakterisierung der Modellvollständigkeit) *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{K}$ ist modellvollständig.*
(ii) *Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ gilt: Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} \underset{\forall_1}{\preceq} \mathfrak{B}$.*
(iii) *Jede universelle Formel ist in $\mathcal{K}$ äquivalent zu einer existentiellen Formel.*
(iv) *Jede L-Formel ist in $\mathcal{K}$ äquivalent zu einer existentiellen Formel.*
(v) *Jede Einbettung $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ erhält alle L-Formeln.*

BEWEIS. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) sind trivial; bei (ii) $\Rightarrow$ (iii) handelt es sich um einen Spezialfall des Charakterisierungssatzes für persistente Formeln (Erster Persistenzsatz) aus dem vorigen Abschnitt. Es bleibt somit nur noch (iii) $\Rightarrow$ (iv) nachzuweisen. Dazu genügt es offensichtlich, zu zeigen, daß jede pränexe Formel

$$\varphi = \mathrm{Q}_1\mathbf{x}_1 \cdots \mathrm{Q}_n\mathbf{x}_n(\psi)$$

mit quantorenfreiem ψ und alternierenden Quantorenblöcken $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n$ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu einer existentiellen L-Formel. Wir beweisen dies durch Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei $n > 0$. Wir schreiben φ als $\varphi = \mathrm{Q}_1\mathbf{x}_1(\varphi_1)$ mit

$\varphi_1 := (\mathrm{Q}_2\mathbf{x}_2 \cdots \mathrm{Q}_n\mathbf{x}_n(\psi))$. Es ist $\neg\varphi_1$ äquivalent zu $\tilde{\mathrm{Q}}_2\mathbf{x}_2 \cdots \tilde{\mathrm{Q}}_n\mathbf{x}_n(\neg\psi)$, wobei $\tilde{\exists} := \forall$, $\tilde{\forall} := \exists$. Nach Induktionsannahme existieren dann existentielle Formeln

$$\begin{array}{ll} \exists z_1 \cdots \exists z_k(\varrho) & \text{äquivalent zu } \varphi_1 \text{ in } \mathcal{K},\ \varrho \in \mathsf{Qf}, \\ \exists u_1 \cdots \exists u_l(\sigma) & \text{äquivalent zu } \neg\varphi_1 \text{ in } \mathcal{K},\ \sigma \in \mathsf{Qf}. \end{array}$$

Man unterscheide nun zwei Fälle:

1. $\mathrm{Q}_1 = \exists$: Dann ist φ äquivalent zu $\exists\mathbf{x}_1\exists z_1 \cdots \exists z_k(\varrho)$.
2. $\mathrm{Q}_1 = \forall$: Da φ_1 in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu $\forall u_1 \cdots \forall u_l(\neg\sigma)$, folgt, daß φ äquivalent ist in $\mathcal{K}$ zu $\forall\mathbf{x}_1\forall u_1 \cdots \forall u_l(\neg\sigma)$. Diese Formel ist nach (iii) aber in $\mathcal{K}$ gleichwertig mit einer existentiellen Formel.

Dies vervollständigt den Induktionsschritt. □

Definition 4.1.2. Eine *primitive* L-Formel ist eine existentielle L-Formel der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i \right) \qquad \text{mit } \psi_i \in \mathsf{Ba}.$$

Korollar 4.1.3. *Unter den Voraussetzungen des Satzes hat man folgende weitere, zu* (i)–(v) *äquivalente Bedingung:*

(vi) *Für alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ *mit* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *und alle* $b_1, \ldots, b_m \in A$ *und primitiven* L*-Formeln* $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ *gilt:*

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_m) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (vi): Nach (ii) gilt, da $\neg\varphi$ äquivalent ist zu einer $\forall_1$-Formel: Ist $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(b_1, \ldots, b_m)$, so auch $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(b_1, \ldots, b_m)$.

(vi) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi)$ eine universelle L-Formel mit ψ quantorenfrei. ψ ist logisch äquivalent zu einer Formel in konjunktiver Normalform, etwa $\bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{l_i} \psi_{ij}$ mit $\psi_{ij} \in \mathsf{Ba}$. φ ist damit logisch äquivalent zu $\bigwedge_{i=1}^{k} \varrho_i$ mit $\varrho_i := \forall x_1 \cdots \forall x_n(\bigvee_{j=1}^{l_i} \psi_{ij})$. Jedes $\neg\varrho_i$ ist äquivalent zu einer primitiven Formel σ_i. Wegen (vi) bleibt jedes ϱ_i unter Erweiterungen zwischen Strukturen aus $\mathcal{K}$ erhalten, und damit ebenso φ. □

4.2. Algebraisch abgeschlossene Körper

Wir betrachten die Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ der Ringe. Es sei $\mathcal{K}$ö die Klasse der Körper (als L-Strukturen). $\mathcal{K}$ö ist eine elementare Klasse.

Übung. Man gebe ein $\forall_2$-Axiomensystem für die Klasse der Körper an.

Sei $\mathcal{AAK}$ die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper als Strukturen über L; es ist $\mathcal{AAK} \neq \varnothing$, da etwa $\mathbb{C} \in \mathcal{AAK}$. $\mathcal{AAK}$ ist eine elementare Klasse mit einem rekursiv aufzählbaren (aber unendlichen) Axiomensystem; man nehme nämlich einfach die Axiome für Körper zusammen mit

$$\left\{ \forall Y_1 \cdots \forall Y_d \left(Y_d \neq 0 \to \exists X \left(\sum_{i=0}^{d} Y_i X^i = 0 \right) \right) : d \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Im Zusammenhang mit Polynomen verwenden wir auch Großbuchstaben als Variablen.)

Wir wollen nun die Modellvollständigkeit der Klasse $\mathcal{AAK}$ herleiten; dazu verwenden wir den in der kommutativen Algebra bewiesenen, fundamentalen *Hilbertschen Nullstellensatz* (vgl. [**33**], I, Prop. 3.7). Zur Erinnerung:

DEFINITION 4.2.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Dann heißt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R : \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in \mathfrak{a}\}$$

das *Radikalideal* von $\mathfrak{a}$. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *radikal,* falls $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Daß $\sqrt{\mathfrak{a}}$ tatsächlich ein Ideal ist, sieht man so ein: Sind $f, g, p, q \in R$, und ist $f^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $g^m \in \mathfrak{a}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so folgt

$$(pf + qg)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} (pf)^i (qg)^{m+n-i} \in \mathfrak{a}$$

wegen $i \geq n$ oder $m + n - i \geq m$ für alle $i = 0, \ldots, m + n$.— Ferner:

DEFINITION 4.2.2. Sei K ein Körper, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann nennt man

$$V(\mathfrak{a}) := \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : \forall f \in \mathfrak{a} : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\big\}$$

die durch $\mathfrak{a}$ definierte (affine) *algebraische K-Varietät* oder *algebraische Mannigfaltigkeit* (im affinen Raum $\mathbb{A}^n(K) \simeq K^n$). Ist umgekehrt $V = V(\mathfrak{a})$ eine algebraische Varietät, so setze

$$I(V) := \big\{f \in K[X_1, \ldots, X_n] : \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\big\}.$$

Wegen dem Hilbertschen Basissatz ([**33**], I, Prop. 2.3) ist $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ genau dann eine K-Varietät, wenn es endlich viele Polynome $f_1, \ldots, f_m$ gibt derart, daß

$$V = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, m\big\}.$$

$I(V)$ ist ein Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $I(V) \supseteq \mathfrak{a}$. Es ist sehr wohl $I(V) \neq \mathfrak{a}$ möglich. (Ist etwa $\mathfrak{a} = (X_1^2)$, so ist $X_1 \in I(V(\mathfrak{a}))$, aber $X_1 \notin \mathfrak{a}$.) Jedoch gilt für algebraisch abgeschlossene Körper:

HILBERTSCHER NULLSTELLENSATZ. *Sei K algebraisch abgeschlossen. Für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ von $K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.* □

ÜBUNG. Bilden $I(\,\cdot\,)$ und $V(\,\cdot\,)$ eine Galois-Verbindung? (Vgl. Prop. 2.7.3.)

Wir benötigen für unsere Zwecke folgendes (in der Tat zum Hilbertschen Nullstellensatz äquivalentes, siehe Bem. nach Lemma 4.2.6) Korollar, bekannt auch als „schwacher Nullstellensatz“:

KOROLLAR 4.2.3. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein System*

$$\begin{aligned} f_1(X_1, \ldots, X_n) &= 0, \\ &\cdots \\ f_m(X_1, \ldots, X_n) &= 0 \end{aligned}$$

von Polynomgleichungen über K hat dann und nur dann keine Lösung in K^n, wenn das konstante Polynom 1 als Linearkombination

$$1 = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i$$

mit $p_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ausgedrückt werden kann.

Beweis. Nach dem Nullstellensatz ist, falls $V(f_1,\dots,f_m)=\varnothing$, die 1 im Radikal von $(f_1,\dots,f_m)$. Die Umkehrung liegt auf der Hand. $\square$

Wir sind nun in der Lage, damit die Modellvollständigkeit der Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper zu beweisen; erstmals wurde dies von Robinson [**124**] nachgewiesen. (Später — in §5.5.2 — werden wir einen alternativen Zugang zur Modellvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$ erhalten, der dieses algebraische Hilfsmittel vermeidet und sogar zu einem Beweis desselben führt; vgl. aber Bem. 4.2.7.)

Satz 4.2.4. *Die Klasse $\mathcal{AAK}$ ist modellvollständig.*

Beweis (mit Kriterium (vi) des Robinson-Tests). L-Terme in Variablen X_i können geschrieben werden als Polynome aus $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$; atomare Formeln können geschrieben werden als Polynomgleichungen

$$f(X_1,\dots,X_n)=0 \qquad \text{mit } f\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n].$$

Primitive Formeln haben dann die Gestalt

$$\exists X_1\cdots\exists X_n\left(\bigwedge_{i=1}^{k}\varphi_i\right)(X_1,\dots,X_n)(Y_1,\dots,Y_m);$$

o.B.d.A. ist jedes φ_i von der Form

$$f(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)=0 \quad \text{oder} \quad f(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)\neq 0$$

mit $f\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m]$.

Seien K, K' algebraisch abgeschlossene Körper, $K\subseteq K'$, $b_1,\dots,b_m\in K$, so daß (mit $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$, $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_m)$ und $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_m)$)

$$K'\models\exists\mathbf{X}\left(\bigwedge_{i=1}^{k_1}f_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})=0\wedge\bigwedge_{i=k_1+1}^{k_2}f_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})\neq 0\right)(\mathbf{b}).$$

Setze $f_i(\mathbf{X},\mathbf{b})=:g_i(X_1,\dots,X_n)\in K[X_1,\dots,X_n]$. Nach Voraussetzung ist

$$K'\models\exists\mathbf{X}\left(\bigwedge_{i=1}^{k_1}g_i(\mathbf{X})=0\wedge\bigwedge_{i=k_1+1}^{k_2}g_i(\mathbf{X})\neq 0\right).$$

Wir setzen $g:=\prod_{i=k_1+1}^{k_2}g_i$, erhalten so

$$K'\models\exists\mathbf{X}\left(\bigwedge_{i=1}^{k_1}g_i(\mathbf{X})=0\wedge g(\mathbf{X})\neq 0\right),$$

und bringen den *Rabinowitsch-Trick* zum Einsatz: Sei Z eine neue Variable ungleich $X_1,\dots,X_n$; setze $h:=(1-Zg)\in K[X_1,\dots,X_n,Z]$. Damit verwandelt sich die Ungleichung in eine Gleichung, und wir erhalten:

$$K'\models\exists\mathbf{X}\exists Z\left(\bigwedge_{i=1}^{k_1}g_i(\mathbf{X})=0\wedge h(\mathbf{X},Z)=0\right)$$

Also gibt es — trivialerweise — keine $p_1,\dots,p_{k_1},p\in K[X_1,\dots,X_n,Z]$, so daß $1=\sum_{i=1}^{k_1}p_ig_i+gh$. Mit Korollar 4.2.3 erhalten wir, da $K\subseteq K'$,

$$K\models\exists\mathbf{X}\exists Z\left(\bigwedge_{i=1}^{k_1}g_i(\mathbf{X})=0\wedge h(\mathbf{X},Z)=0\right),$$

und eine geeignete Stelle in K ist Lösung des ursprünglichen Systems von Gleichungen und Ungleichungen in K. $\square$

Bemerkung 4.2.5. In der Tat ist der Hilbertsche Nullstellensatz in einem gewissen Sinne äquivalent mit der Modellvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$, denn es gilt: Sei $\mathcal{AAK}$ als modellvollständig angenommen; ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sind $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit gemeinsamer Nullstelle a in einem Erweiterungskörper L von K, so ist $a \in L^n \subseteq \overline{L}^n$ auch Nullstelle der f_i im algebraischen Abschluß $\overline{L}$ von L, und also haben $f_1, \ldots, f_m$ auch in K eine gemeinsame Nullstelle. Das nachfolgende einfache Lemma und die anschließende Übung vervollständigen dann den Beweis der ausgesprochenen Behauptung.

Lemma 4.2.6. *Sei K ein Körper und $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ derart daß $(f_1, \ldots, f_m) \neq K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann existiert ein Erweiterungskörper L von K, in dem die f_i eine gemeinsame Nullstelle besitzen.*

Beweis. Wegen $(f_1, \ldots, f_m) \neq K[X_1, \ldots, X_n]$ existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$, das alle f_i enthält. $L := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}$ ist ein Körper; man hat die kanonische Injektion $\phi\colon K \to L$, $a \mapsto a + \mathfrak{m}$, also o.E. $K \subseteq L$. Offensichtlich ist nun $(X_1 + \mathfrak{m}, \ldots, X_n + \mathfrak{m})$ gemeinsame Nullstelle der $f_1, \ldots, f_m$ in L. $\square$

Übung. Beweise den Hilbertschen Nullstellensatz unter der Voraussetzung des schwachen Nullstellensatzes (Kor. 4.2.3). (Hinweis: Rabinowitsch-Trick.)

Bemerkung 4.2.7. Mit Hilfe des obigen Lemmas 4.2.6 kann man, wenn man will, einen modelltheoretischen Beweis für den schwachen (und also auch den Hilbertschen) Nullstellensatz erbringen (sein Verständnis ist für das Nachfolgende nicht wesentlich). Sei K algebraisch abgeschlossen, und seien $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $(f_1, \ldots, f_m) \neq K[X_1, \ldots, X_n]$; wähle L gemäß Lemma 4.2.6. Sei κ eine Kardinalzahl echt größer als $\max(\operatorname{card}(K), \operatorname{card}(L))$, etwa $\kappa := \max(\operatorname{card}(K), \operatorname{card}(L))^+$. Mit dem Satz von Löwenheim-Skolem „aufwärts“ (§9.4) existieren elementare Erweiterungen L' und K' von L bzw. K mit Mächtigkeit κ. Sei B Transzendenzbasis von L'/K, C Transzendenzbasis von K'/K. Mit einer mengentheoretischen Überlegung (siehe nachfolgende Übung) erkennt man, daß für eine Körpererweiterung k'/k, $\operatorname{card}(k) \geq \aleph_0$, mit Transzendenzbasis B' gilt: $\operatorname{card}(k') = \operatorname{card}(k(B'))$, da $k'/k(B')$ algebraisch ist, sowie $\operatorname{card}(k(B')) = \max(\operatorname{card}(k), \operatorname{card}(B'))$. Somit folgt $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(C) = \kappa$. Man kann nun jede Bijektion $B \to C$ auf genau eine Weise zu einem K-Isomorphismus $K(B) \to K(C)$ fortsetzen, und diesen — da L' bzw. K' die algebraischen Abschlüsse von $K(B)$ bzw. $K(C)$ sind — zu einem K-Isomorphismus $L' \to K'$. Nun besitzt unser algebraisches Gleichungssystem $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, in L' eine Lösung, damit auch in K' und wegen $K \preceq K'$ schließlich auch in K selbst.

Übung. Man beweise die folgenden in obiger Bemerkung verwendeten Tatsachen: Sei L/K eine Körpererweiterung und $\operatorname{card}(K) \geq \aleph_0$.

(i) Ist L/K algebraisch, so ist $\operatorname{card}(K) = \operatorname{card}(L)$.
(ii) Ist $B \subseteq L$, so ist $\operatorname{card}(K(B)) = \max(\operatorname{card}(B), \operatorname{card}(K))$.

4.3. Axiomatisierung modellvollständiger Klassen

Wir wenden uns nun den Axiomatisierungseigenschaften modellvollständiger Klassen zu.

Satz 4.3.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine modellvollständige Klasse, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, von L-Strukturen. Dann existiert eine Menge Δ von $\forall_2$-Sätzen in L, so daß $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Delta)$. Falls L abzählbar und effektiv gegeben sowie Σ rekursiv aufzählbar ist, so kann man auch Δ rekursiv aufzählbar wählen.*

Beweis. Sei
$$\Delta_0 := \{\varphi \in \mathsf{Sa}_L \cap \forall_1 : \Sigma \models \varphi\}.$$
Dann gilt $\mathrm{Mod}(\Delta_0) = \mathrm{S}(\mathcal{K})$. Sei ferner Δ_1 die Menge aller $\varphi \in \mathsf{Sa}_L \cap \forall_2$, so daß $\psi \in \forall_1$, $\varrho \in \exists_1$ existieren derart, daß φ universeller Abschluß der pränexen Normalform von $\psi \to \varrho$ ist und $\Sigma \models \psi \leftrightarrow \varrho$ gilt. Setze $\Delta := \Delta_0 \cup \Delta_1$. Dann gilt $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{K})$. Es ist $\mathrm{Mod}(\Delta)$ ebenfalls modellvollständig, denn zu jeder universellen L-Formel ψ gibt es eine existentielle L-Formel ϱ (dieselbe wie für $\mathcal{K}$), so daß $\Delta \models \psi \leftrightarrow \varrho$. (Bis auf logische Äquivalenz liegt die eine Implikation liegt in Δ_1, die andere in Δ_0.) Zu zeigen ist $\mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathcal{K}$. Sei dazu $\mathfrak{A} \models \Delta$; dann ist $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$, also existiert $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Wir müssen $\mathfrak{A} \models \sigma$ für alle $\sigma \in \Sigma$ zeigen. Da $\mathrm{Mod}(\Delta)$ modellvollständig ist, gibt es einen L-Satz σ' existentiellen Typs mit $\Delta \models \neg\sigma \leftrightarrow \sigma'$. Man weiß nun, daß $\mathfrak{B} \models \sigma$, also $\mathfrak{B} \models \neg\sigma'$, damit ($\neg\sigma'$ universell bis auf logische Äquivalenz!) $\mathfrak{A} \models \neg\sigma'$, und also $\mathfrak{A} \models \sigma$. □

Übung. Man zeige, daß die erste Behauptung in obigem Satz nicht umkehrbar ist.

4.4. Induktive Strukturklassen. Der Erhaltungssatz von Lyndon

Kettenkonstruktionen sind in vielen mathematischen Beweisen zentral (vgl. etwa Satz 3.7.7). Wir erinnern an die formale Definition (vgl. [**25**], 1.2.10 ff.):

Definition 4.4.1. Eine nichtleere Menge $\mathcal{M}$ von L-Strukturen heißt eine *Kette,* falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{M}$ gilt: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. D.h.: $(\mathcal{M}, \subseteq)$ ist eine total geordnete Menge.

Bekanntlich ([**25**], Lemma 1.2.11) ist dann kanonisch die L-Struktur $\mathfrak{M} = \bigcup \mathcal{M}$ wohldefiniert, und es gilt $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$. Wir definieren ferner:

Definition 4.4.2. Sei $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Eine Kette $\mathcal{M}$ von L-Strukturen heiße *n-elementar,* falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{M}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. (Dabei stehe ab sofort „$\preceq_{\forall_\infty}$“ für „$\preceq$“.) Man nennt eine ∞-elementare Kette meist einfach nur eine *elementare Kette.*

Damit erhalten wir folgendes, auch als *Satz über elementare Ketten* bezeichnetes grundlegendes Ergebnis über das Wohlverhalten elementarer bzw. allgemeiner n-elementarer Ketten [**169**]:

Satz 4.4.3. *Sei $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ist $\mathcal{M}$ eine n-elementare Kette, so ist $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \bigcup \mathcal{M}$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M} := \bigcup \mathcal{M}$. Da $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist, genügt es, den Fall $n \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten. Durch Induktion über $0 \leq k \leq n$ zeigen wir für alle $m \in \mathbb{N}$, alle $\forall_k$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ und alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$, daß $\mathfrak{M} \models \varphi(\mathbf{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$.

Der Induktionsanfang $k = 0$ ist trivial wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$. Sei also $k \geq 1$, und die Behauptung für $k-1$ bewiesen, φ von der Form $\varphi = \forall \mathbf{y}(\psi)$ mit $\exists_{k-1}$-Formel $\psi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l)$, und gelte $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Wenn nun $\mathfrak{M} \not\models \varphi(\mathbf{a})$, so gibt es ein

$p \in M^l$ mit $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$. Es existiert ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$ mit $a_1, \ldots, a_m, p_1, \ldots, p_l \in B$, für das nach Induktionsannahme (da $\neg\psi(\mathbf{a}, p)$ einem $\forall_{k-1}$-Satz gleichwertig ist) $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ gelten muß. Nun gilt aber nach Voraussetzung $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{A}$, und in beiden Fällen erhält man einen Widerspruch.

Gelte umgekehrt $\mathfrak{M} \models \varphi(\mathbf{a})$, und angenommen, es gibt ein $\mathbf{p} \in A^l$ derart, daß $\mathfrak{A} \models \neg\psi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$; wieder ist $\neg\psi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ ein $\forall_{k-1}$-Satz, also folgt wegen $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{k-1}} \mathfrak{M}$ nach Induktionsannahme auch $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\mathbf{a}, \mathbf{p})$, ein Widerspruch. □

Dieser Satz läßt sich nicht auf beliebige Ketten übertragen, d.h. im allgemeinen ist für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und eine Kette $\mathcal{M}$ von L-Strukturen nicht $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \bigcup \mathcal{M}$ (Bsp. s.u.). Elementare Klassen von L-Strukturen, die unter Vereinigung beliebiger Ketten abgeschlossen sind, verdienen deshalb besondere Beachtung:

Definition 4.4.4. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen heißt *induktiv,* falls für jede Kette $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ gilt, daß $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{K}$.

Lemma 4.4.5. *Sei Δ eine Menge von $\forall_2$-Sätzen aus L. Dann ist* $\mathrm{Mod}(\Delta)$ *induktiv.*

Beweis. Sei $\delta \in \Delta$, etwa $\delta = \forall\mathbf{x}\exists\mathbf{y}(\delta_1)$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, δ_1 quantorenfrei. Sei $\mathcal{M}$ eine Kette in $\mathrm{Mod}(\Delta)$; dann gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$: $\mathfrak{A} \models \delta$. Sei $\mathfrak{M} := \bigcup \mathcal{M}$. Sei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$; zu zeigen ist $\mathfrak{M} \models \exists\mathbf{y}(\delta_1(\mathbf{a}, \mathbf{y}))$. Wähle $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ so, daß $a_i \in A$ für alle $1 \leq i \leq n$; es gibt dann $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in A^m$, so daß $\mathfrak{A} \models \delta_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Aber $b_i \in A \subseteq M$ für $i = 1, \ldots, m$; also folgt $\mathfrak{M} \models \delta$. □

Damit erhalten wir aus Satz 4.3.1:

Korollar 4.4.6. *Jede modellvollständige Klasse von L-Strukturen ist induktiv.* □

Wir wollen nun zeigen, daß zu obigem Lemma 4.4.5 auch die Umkehrung gilt; dies führt zu:

Satz 4.4.7. (Erhaltungssatz von Łoś-Suszko-Chang, [**97**], [**60**]) *Elementare Klassen sind induktiv dann und nur dann, wenn sie $\forall_2$-Axiomatisierungen besitzen.*

Beweis. Die eine Richtung wurde bereits in Lemma 4.4.5 erledigt.

Sei also $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, Σ L-Satzmenge, induktiv. Wir zeigen $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma')$ mit $\Sigma' := \{\varphi \in \forall_2 : \Sigma \models \varphi\}$ und haben damit den Satz bewiesen. Sei deshalb $\mathfrak{A} \models \Sigma'$; wir begründen in Kürze, daß dann ein $\mathfrak{B} \models \Sigma$ mit $\forall_1$-erhaltender Erweiterung $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ existiert; nach Satz 3.7.7 (wähle dort $n = 1$, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varnothing)$) erhalten wir dann ein $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \preceq_{\forall_1} \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, sukzessive also eine Kette

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots$$

mit $\mathfrak{A}_{2i} \preceq \mathfrak{A}_{2(i+1)}$, $\mathfrak{A}_{2i+1} \in \mathcal{K}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz 4.4.3 gilt $\mathfrak{M} := \bigcup\{\mathfrak{A}_{2i} : i \in \mathbb{N}_0\} \succeq \mathfrak{A}$. Da $\mathcal{K}$ induktiv ist, haben wir aber auch $\mathfrak{N} := \bigcup\{\mathfrak{A}_{2i+1} : i \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{K}$. Aber offenbar ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, und es folgt $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Es verbleibt uns damit die Konstruktion einer $\forall_1$-erhaltenden Erweiterung $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Es genügt offensichtlich der Nachweis, daß $\Sigma \cup \mathrm{D}_{\forall_1}(\mathfrak{A}, A)$ widerspruchsfrei ist. Nach Kompaktheitssatz und wegen der Abgeschlossenheit von $\forall_1$ gegenüber endlichen Konjunktionen bis auf logische Äquivalenz reicht es weiterhin, die Erfüllbarkeit von

$$\Sigma \cup \{\forall\mathbf{x}(\psi)[\bar{\mathbf{a}}/\mathbf{y}]\}$$

mit $\psi \in \mathsf{Qf}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$, $a_1, \dots, a_m$ paarweise verschieden und $(\mathfrak{A}, A) \models \forall \mathbf{x}(\psi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{y}]$ zu zeigen. Angenommen, dies sei nicht der Fall, d.h. es gelte $\Sigma \models \exists \mathbf{x}(\neg\psi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{y}]$. Umgang mit Konstanten liefert uns $\Sigma \models \forall \mathbf{y} \exists x(\neg\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) =: \varphi$ mit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Da $\mathfrak{A} \models \Sigma'$ und $\varphi \in \Sigma'$, folgt $\mathfrak{A} \models \varphi$, was $(\mathfrak{A}, A) \models \forall \mathbf{x}(\psi)[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{y}]$ widerspricht. $\square$

Beispiel. Die Klasse $\mathcal{TZ}$ der torsionsfreien zyklischen Gruppen bzgl. $L = \{0, +\}$ ist nicht induktiv, also auch nicht $\forall_2$-axiomatisierbar.

Beweis. Jede Gruppe $G \in \mathcal{TZ}$ ist isomorph zu der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +)$ der ganzen Zahlen. Sei $(\mathbb{Q}, 0, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen und $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Jede nichttriviale endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$, etwa auch $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ mit $n > 1$, ist unendlich zyklisch, also mit $\mathbb{Z}$ isomorph. Es gilt $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle r_1, \dots, r_n \rangle$. In $\mathbb{Q}$ gilt der Satz $\forall x \exists y(x = ny)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, nicht aber in $\mathbb{Z}$. (Betrachte $n = 2$.) $\square$

(Dies ist nicht sehr erstaunlich, denn $\mathcal{TZ}$ ist, etwa nach Löwenheim-Skolem-Tarski, [**25**], Satz 2.4.17, oder §9.4, überhaupt nicht axiomatisierbar.)

Aus dem Satz über elementare Ketten erhalten wir nun noch als Zugabe einen weiteren Erhaltungssatz. Wir sagen, eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen sei *abgeschlossen unter homomorphen Bildern,* falls für alle L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und surjektive Homomorphismen $h \colon \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{B}$ aus $\mathcal{K}$ ist, d.h. falls $\mathrm{H}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, wobei

$$\mathrm{H}(\mathcal{K}) := \big\{\mathfrak{B} : \text{es existiert } \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \text{ und } h \colon \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}\big\}.$$

Wir wissen nach Lemma 3.1.5, daß surjektive Homomorphismen die Formelmenge Pos erhalten. Umgekehrt gilt:

Satz 4.4.8. (Erhaltungssatz von Lyndon, [**99**]) *Eine elementare Klasse $\mathcal{K} \neq \varnothing$ ist abgeschlossen unter homomorphen Bildern genau dann, wenn sie eine Axiomatisierung durch positive Sätze besitzt.*

Vor dem Beweis ein Lemma:

Lemma 4.4.9. *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ L-Strukturen, und existiere eine $(\mathsf{Pos} \cap \mathsf{Sa})$-erhaltende Abbildung $A \to B$. Dann existiert ein $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}$ und eine Pos-erhaltende Abbildung $f \colon A \to B'$ sowie ein $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ und eine $\neg\mathsf{Pos}$-erhaltende Abbildung $g \colon B \to A'$.*

Beweis. Indem wir zu isomorphen Kopien übergehen, können wir $A \cap B = \varnothing$ erreichen. Wir zeigen, daß $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}, B) \cup \mathrm{D}_{\mathsf{Pos}}(\mathfrak{A}, A)$ widerspruchsfrei ist. Aufgrund des Kompaktheitssatzes und der konjunktiven Abgeschlossenheit von $\mathrm{D}_{\mathsf{Pos}}(\mathfrak{A}, A)$ genügt es, die Konsistenz von $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}, B) \cup \{\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]\}$ für $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}] \in \mathrm{D}_{\mathsf{Pos}}(\mathfrak{A}, A)$ zu zeigen; angenommen, dies wäre nicht der Fall. Da die Konstanten $\overline{a}_i$ disjunkt zu $L(B)$ gewählt sind, folgt dann mit Satz 2.6.2

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{B}, B) \models \forall \mathbf{x}(\psi) \quad \text{mit} \quad \psi := \left(\left(\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le n \\ a_i = a_j}} x_i = x_j \right) \to \neg\varphi \right),$$

also $\mathfrak{B} \models \neg\exists \mathbf{x}(\neg\psi)$. Da $\varphi \in \mathsf{Pos}$, ist $\exists \mathbf{x}(\neg\psi) \in \mathsf{Pos} \cap \mathsf{Sa}$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{A} \models \neg\exists \mathbf{x}(\neg\psi)$, im Widerspruch zu $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Mit dem Diagrammlemma folgt die Behauptung.— Den zweiten Teil beweist man analog. $\square$

Beweis (Satz 4.4.8, nach [**16**], §10.3). Zum Beweis der nichttrivialen Richtung ist wegen Lemma 3.7.5 zu zeigen, daß für alle $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \mathsf{Pos}$, wobei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, auch $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ ist. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer L-Satzmenge Σ. Wir verwenden ein Kettenargument: Setze $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}_0^{**} := \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{B}_0^{***} := \mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \mathsf{Pos}$, existiert nach obigem Lemma ein $\mathfrak{B}_1^* \succeq \mathfrak{B}_0^{***}$ und ein Pos-erhaltendes $f_0 \colon A_0^{**} \to B_1^*$. Expandiere $\mathfrak{A}_0^{**}$, $\mathfrak{B}_1^*$ zu $L(A_0)$-Strukturen $\mathfrak{A}_0^{***} := (\mathfrak{A}_0^{**}, A_0)$ und $\mathfrak{B}_1^{**} := (\mathfrak{B}_1^*, f_0(A_0))$. Offensichtlich übertragen sich positive Sätze von $\mathfrak{A}_0^{***}$ nach $\mathfrak{B}_1^{**}$, und nach dem zweiten Teil des obigen Lemmas existiert $\mathfrak{A}_1^* \succeq \mathfrak{A}_0^{***}$ und $g_1 \colon B_1^{**} \to A_1^*$ $\neg\mathsf{Pos}$-erhaltend. Expandiere zu $L(A_0 \cup B_1)$-Strukturen $\mathfrak{A}_1^{**} := (\mathfrak{A}_1^*, g_1(B_1))$, $\mathfrak{B}_1^{***} := (\mathfrak{B}_1^{**}, B_1)$. Positive Sätze übertragen sich von $\mathfrak{A}_1^{**}$ nach $\mathfrak{B}_1^{***}$, wir finden also $\mathfrak{B}_2^* \succeq \mathfrak{B}_1^{***}$ und $f_1 \colon A_1^{**} \to B_2^*$ Pos-erhaltend, usw. (Man mache sich ein Bild!) Es gilt $\mathfrak{A}_n^*|L = \mathfrak{A}_n^{**}|L = \mathfrak{A}_n^{***}|L =: \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_n^*|L = \mathfrak{B}_n^{**}|L = \mathfrak{B}_n^{***}|L =: \mathfrak{B}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten so zwei elementare Ketten $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \preceq \mathfrak{A}_1 \preceq \cdots$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \preceq \mathfrak{B}_1 \preceq \cdots$ mit Pos-erhaltenden Abbildungen $f_n \colon A_n \to B_{n+1}$ und $\neg\mathsf{Pos}$-erhaltenden Abbildungen $g_{n+1} \colon B_{n+1} \to A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setze nun $\mathfrak{A}_\infty := \bigcup\{\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathfrak{B}_\infty := \bigcup\{\mathfrak{B}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Mit dem Satz über elementare Ketten ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}_\infty$, $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{B}_\infty$. Man betrachte nun für $n \in \mathbb{N}$ die $L(A_{n-1} \cup B_n)$-Strukturen

$$\mathfrak{A}_n^{**} = \left(\mathfrak{A}_n^*, \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \cup \bigcup_{k=1}^{n} g_k(B_k)\right), \qquad \mathfrak{B}_n^{***} = \left(\mathfrak{A}_n^*, \bigcup_{k=0}^{n-1} f_k(A_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n} B_k\right).$$

Für alle $a \in A_{k-1}$, $b \in B_k$, $1 \leq k \leq n$ gilt $\overline{a}^{\mathfrak{A}_n^{**}} = a$, $\overline{a}^{\mathfrak{B}_n^{***}} = f_{k-1}(a)$ und $\overline{b}^{\mathfrak{A}_n^{**}} = g_k(b)$, $\overline{b}^{\mathfrak{B}_n^{***}} = b$. Da $f_n \colon A_n^{**} \to B_{n+1}^*$ als Pos-erhaltende Abbildung ein Homomorphismus $\mathfrak{A}_n^{**} \to \mathfrak{B}_{n+1}^*$ ist ($\mathsf{At} \subseteq \mathsf{Pos}$!), gilt $f_n\left(\overline{a}^{\mathfrak{A}_n^{**}}\right) = \overline{a}^{\mathfrak{B}_{n+1}^*}$, und wegen $\mathfrak{B}_n^{***} \preceq \mathfrak{B}_{n+1}^*$ auch $\overline{a}^{\mathfrak{B}_{n+1}^*} = \overline{a}^{\mathfrak{B}_n^{***}}$, also $f_n\left(\overline{a}^{\mathfrak{A}_n^{**}}\right) = \overline{a}^{\mathfrak{B}_n^{***}}$ für alle $a \in A_{n-1}$. Ist $a \in A_{k-1}$ mit $1 \leq k \leq n$, so folgt $f_{k-1}(a) = \overline{a}^{\mathfrak{B}_n^{***}} = f_n\left(\overline{a}^{\mathfrak{A}_n^{**}}\right) = f_n(a)$, also $f_{k-1} = f_n|A_{k-1}$. Somit definiert $f_\infty := \bigcup_{n=0}^\infty f_n$ einen Homomorphismus $\mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{B}_\infty$. Dieser ist sogar surjektiv, da für $b \in B_k$, $1 \leq k \leq n$ gilt: $f_n(g_k(b)) = f_n\left(\overline{b}^{\mathfrak{A}_n^{**}}\right) = \overline{b}^{\mathfrak{B}_{n+1}^*}$, wegen $\mathfrak{B}_n^{***} \preceq \mathfrak{B}_{n+1}^*$ weiter $\overline{b}^{\mathfrak{B}_{n+1}^*} = \overline{b}^{\mathfrak{B}_n^{***}} = b$, also $f_n \circ g_k = \mathrm{id}_{B_k}$. Da $\mathfrak{A} \models \Sigma$, folgt $\mathfrak{A}_\infty \models \Sigma$, also $\mathfrak{A}_\infty \in \mathcal{K}$ und nach Voraussetzung also auch $\mathfrak{B}_\infty \in \mathrm{H}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, somit $\mathfrak{B}_\infty \models \Sigma$, und schließlich $\mathfrak{B} \models \Sigma$, d.h. $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. □

Übung. Sei $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Zeige: Die einelementigen L-Strukturen sind die einzigen homomorphen Bilder von Körpern, die keine Körper sind.

4.5. Vollständigkeit

Zur Erinnerung: Wir nannten eine Menge Φ von L-Sätzen vollständig, falls für jeden Satz ψ über L gilt: Entweder $\Phi \models \psi$ oder $\Phi \models \neg\psi$ (vgl. Def. 2.5.1). Nun übertragen wir diesen Begriff auf Strukturklassen.

Definition 4.5.1. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen heißt *vollständig,* falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ gilt: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent, i.Z. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, d.h. für alle L-Sätze φ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

(Vgl. Def. 2.4.15 in [**25**].)

Bemerkungen. Offensichtlich gilt:

(i) Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent d.u.n.d., wenn ihre Theorien dieselben sind, und d.u.n.d., wenn die leere Abbildung $\varnothing\colon A \to B$ alle L-Sätze erhält.
(ii) Es ist $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. (Beweis!)
(iii) Eine elementare Klasse $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ ist d.u.n.d. vollständig, wenn die L-Satzmenge Σ vollständig ist.

(Der Begriff der elementaren Äquivalenz stammt von Tarski [**162**].)

Übung. Sind $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ elementar äquivalent als geordnete Mengen? Ist $\mathbb{N}_0$ eine elementare Erweiterung (als geordnete Menge) von $\mathbb{N}$?

Übung. Sind der Polynomring $\mathbb{C}[X]$ und sein Quotientenkörper $\mathbb{C}(X)$ elementar äquivalent? Ist $\mathbb{C}(X)$ elementare Erweiterung von $\mathbb{C}[X]$?

Es bedarf wohl keiner weiteren Begründung mehr, warum zu erwarten ist, daß vollständige elementare Klassen besonders schöne Eigenschaften besitzen: Hat man die Vollständigkeit einer Klasse algebraischer Strukturen einmal nachgewiesen, so hat man wegen der elementaren Äquivalenz je zweier ihrer Instanzen ein mächtiges Beweisprinzip in der Hand: Um eine in der Logik erster Stufe formulierbare Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen, genügt es, dies für eine beliebig gewählte, günstigerweise besonders einfach „aussehende“ Struktur zu tun; mit der Vollständigkeit überträgt sich dieses Ergebnis dann auf *jede* andere algebraische Struktur aus dieser Klasse.

Wir geben nun eine einfache hinreichende Bedingung dafür an (nach [**14**], S. 74, [**15**], S. 95, [**124**]), daß Modellvollständigkeit Vollständigkeit impliziert. (Eine weitere wird in den nachstehenden Übungen behandelt.)

Definition 4.5.2. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ heißt eine *Primstruktur von* $\mathcal{K}$*,* falls es zu jedem $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ eine Einbettung $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ gibt.

Beispiel. Die Klasse $\mathcal{K}$ö aller Körper besitzt keine Primstruktur. Betrachte hierzu $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Q}$. Angenommen, es gäbe $K \in \mathcal{K}$ö mit Einbettungen $K \hookrightarrow \mathbb{F}_2$, $K \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Dann würde einerseits $K \models (1+1=0)$ folgen, andererseits aber auch $K \models (1+1 \neq 0)$, was absurd ist.

Satz 4.5.3. *Sei* $\mathcal{K}$ *eine modellvollständige Klasse von* L*-Strukturen, und* $\mathcal{K}$ *besitze eine Primstruktur. Dann ist* $\mathcal{K}$ *vollständig.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ eine Primstruktur in $\mathcal{K}$, seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ beliebig. Zu zeigen ist $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. Seien nun $f\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, $g\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ nach Voraussetzung gewählte Einbettungen. Da $\mathcal{K}$ modellvollständig ist, erhalten f und g alle Formeln (vgl. Kriterium (v) des Modellvollständigkeitstests). Sei φ ein L-Satz und $\mathfrak{B} \models \varphi$. Da $\neg\varphi$ unter f erhalten wird, ergibt sich $\mathfrak{A} \models \varphi$; da φ unter g persistent ist, folgt $\mathfrak{C} \models \varphi$. Analog erhält man $\mathfrak{B} \models \varphi$ aus $\mathfrak{C} \models \varphi$. □

In den folgenden Übungen geht es um den Begriff der sog. gemeinsamen Einbettungseigenschaft einer Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen und seinen Zusammenhang zu Modellvollständigkeit und Vollständigkeit.

Definition 4.5.4. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{K}$ hat die *gemeinsame Einbettungseigenschaft,* falls es zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ stets ein $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit zugehörigen Einbettungen $\mathfrak{A} \overset{f}{\hookrightarrow} \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \overset{g}{\hookrightarrow} \mathfrak{C}$ gibt.

Übung. Ist eine Klasse $\mathcal{K}$ modellvollständig mit gemeinsamer Einbettungseigenschaft, so ist $\mathcal{K}$ vollständig.

Übung. Man beweise folgenden Satz:

Satz 4.5.5. *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{K}$ hat die gemeinsame Einbettungseigenschaft.*
(ii) *Für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ mit $A \cap B = \varnothing$ gibt es eine $L(A \cup B)$-Expansion $\mathfrak{C}'$ einer Struktur $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{C}' \models \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{B}, B)$.*
(iii) *Für alle existentiellen L-Sätze φ, ψ gilt: Falls φ ein Modell $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ besitzt und ψ ein Modell $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ besitzt, so besitzt auch $\varphi \wedge \psi$ ein Modell $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$.* □

Übung. Man entscheide folgende Fragen für eine elementare Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen:

(i) Ist $\mathcal{K}$ vollständig, so hat $\mathcal{K}$ die gemeinsame Einbettungseigenschaft.
(ii) Ist $\mathcal{K}$ vollständig, so ist $\mathcal{K}$ auch modellvollständig.

4.6. Algebraisch abgeschlossene Körper fester Charakteristik

Wir wollen uns nun den Klassen $\mathcal{K}\ddot{o}_p$ der Körper einer bestimmten Charakteristik p (wobei $p = 0$ oder p eine Primzahl sei) über der Sprache der Ringe $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ zuwenden. Mit $\mathcal{K}\ddot{o}$ ist auch $\mathcal{K}\ddot{o}_p$ für jedes p elementar. Zunächst zeigen wir:

Proposition 4.6.1. *Jedes $\mathcal{K}\ddot{o}_p$ ($p = 0$ oder p Primzahl) hat eine Primstruktur K, und zwar ist dies $K = \mathbb{Q}$ für $p = 0$ und $K = \mathbb{F}_p$ für $p > 0$. Offensichtlich ist das isomorphe Abbild von K in einem Körper L mit $\mathrm{char}(L) = p$ genau der* Primkörper *von L, d.h. der kleinste in L enthaltene Körper.*

Beweis. Zu $p = 0$: Jeder Körper $L \in \mathcal{K}\ddot{o}_0$ mit $\mathrm{char}(L) = 0$ enthält vermöge $\frac{p}{q} \mapsto (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1}$ eine isomorphe Kopie von $\mathbb{Q}$. Sei $p > 0$ prim, $L \in \mathcal{K}\ddot{o}_p$. In L gilt $p \cdot 1 = 0$ und für $n < p$: $n \cdot 1 \neq 0$; also ist $\varphi\colon \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to L$, $n \mapsto n \cdot 1$ eine Einbettung. □

Man weiß aus der Körpertheorie: Jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluß, d.h. zu jedem Körper k existiert ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper $\overline{k}$, so daß jedes Element aus $\overline{k}$ algebraisch ist über k. Zu jeder algebraischen Erweiterung K/k existiert ferner ein k-Homomorphismus $f\colon K \to \overline{k}$, d.h. ein Körperhomomorphismus (der als solcher injektiv, also eine Einbettung, ist) mit $f|k = \mathrm{id}_k$. (Damit ist $\overline{k}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, denn sind $\overline{k}$ und k' zwei algebraische Abschlüsse von k und $f\colon k' \to \overline{k}$ ein k-Homomorphismus, so ist der Zwischenkörper $f(k')$ von $\overline{k}/k$ algebraisch abgeschlossen, und da $\overline{k}/f(k')$ algebraisch also notwendig $\overline{k} = f(k')$, d.h. $f\colon k' \to \overline{k}$ ein k-Isomorphismus.)

Beispiel. Der algebraische Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ ist der Körper der *algebraischen Zahlen.* $\overline{\mathbb{Q}}$ kann als Teilkörper von $\mathbb{C}$ aufgefaßt werden und ist abzählbar. (Vgl. [**34**].)

Proposition 4.6.2. *Sei $p = 0$ oder $p > 0$ prim. $\mathcal{K}\ddot{o}_p$ ist nicht modellvollständig.*

Beweis. Sei $p = 0$. Die Erweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ etwa ist nicht elementar, wie der Satz $\exists x(x^2 + 1 = 0)$ zeigt. Sei p Primzahl, und wähle eine weitere Primzahl $q > p$. Sei K der algebraische Abschluß $K = \overline{\mathbb{F}}_p$ von $\mathbb{F}_p$. Dann hat $X^q - 1$ in K q

verschiedene Nullstellen (denn ist $f := X^q - 1$, so ist $f' = qX^{q-1}$, und $f'(c) = 0$ gdw. $c = 0$), aber unmöglich in $\mathbb{F}_p$, da $p < q$. $\square$

Wir spezialisieren uns nun in ähnlicher Weise bei $\mathcal{AAK}$: Es bezeichne $\mathcal{AAK}_p$ die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper, wobei wieder $p = 0$ oder p prim sei. Hier ist die Sachlage viel schöner als im Fall von $\mathcal{K}ö_p$:

Satz 4.6.3. *Für jedes p ($p = 0$ oder p prim) ist die Klasse $\mathcal{AAK}_p$ vollständig.*

Beweis. $\mathcal{AAK}_p$ ist modellvollständig, da $\mathcal{AAK}_p \subseteq \mathcal{AAK}$ elementare Teilklasse von $\mathcal{AAK}$ und $\mathcal{AAK}$ modellvollständig ist.

$\mathcal{AAK}_p$ besitzt eine Primstruktur. Denn: Sei $p = 0$; dann ist $\mathbb{Q}$ Primstruktur von $\mathcal{K}ö_p$, und wir behaupten: $\overline{\mathbb{Q}}$ ist Primstruktur von $\mathcal{AAK}_p$. Denn sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$; es gibt eine Einbettung $h\colon \mathbb{Q} \to K$, und da $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ algebraisch und K algebraisch abgeschlossen ist, läßt sich diese fortsetzen zu einer Einbettung $\overline{h}\colon \overline{\mathbb{Q}} \to K$.— Analog argumentiert man im Fall p prim: $\mathbb{F}_p$ ist Primstruktur in $\mathcal{K}ö_p$, und $\overline{\mathbb{F}}_p$ Primstruktur in $\mathcal{AAK}_p$. $\square$

Wir nennen eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen *entscheidbar,* falls $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ entscheidbar ist, d.h. $\{\varphi : \mathcal{K} \models \varphi\}$ rekursiv.

Korollar 4.6.4. *Für jedes p ($p = 0$ oder p prim) ist $\mathcal{AAK}_p$ entscheidbar.*

Beweis. Nach Satz 2.5.2 ist jede vollständige, rekursiv aufzählbare Satzmenge entscheidbar. $\square$

Korollar 4.6.5. *Zwei algebraisch abgeschlossene Körper sind genau dann elementar äquivalent, wenn sie gleiche Charakteristik besitzen.*

Beweis. Übung. $\square$

Wir haben also eine numerische Invariante, nämlich die Charakteristik, gefunden, anhand derer sich algebraisch abgeschlossene Körper bis auf elementare Äquivalenz charakterisieren lassen; ähnliche Invarianten existieren auch für andere Klassen algebraischer Strukturen (siehe [**9**]; vgl. auch §7.8). Man vergleiche auch mit dem folgenden klassischen Resultat (vgl. den Beweis mit dem in Bem. 4.2.7):

Satz 4.6.6. (Steinitz, [**154**]) *Zwei algebraisch abgeschlossene Körper überabzählbarer Mächtigkeit sind isomorph genau dann, wenn sie gleiche Charakteristik und gleiche Mächtigkeit besitzen.*

Beweis. Seien K, L algebraisch abgeschlossen mit $\mathrm{char}\, K = \mathrm{char}\, L$, $\mathrm{card}\, K = \mathrm{card}\, L \geq \aleph_1$. K und L besitzen dann denselben Primkörper P; wir spalten die Körpererweiterungen K/P und L/P auf in einen rein transzendenten Teil $P(B) =: K'/P$ bzw. $P(C) =: L'/P$ und einen algebraischen Teil K/K' bzw. L/L'. Es ist $\mathrm{card}\, K' = \mathrm{card}\, K = \mathrm{card}\, L = \mathrm{card}\, L'$ wegen $\mathrm{card}\, K', \mathrm{card}\, L' \geq \aleph_0$ (vgl. Übung (i) nach Bem. 4.2.7), sowie $\mathrm{card}\, K' = \max(\aleph_0, \mathrm{card}\, B)$. $\mathrm{card}\, K' = \aleph_0$ ist unmöglich wegen $\mathrm{card}\, K \geq \aleph_1$; somit $\mathrm{card}\, K' = \mathrm{card}\, B$, analog $\mathrm{card}\, L' = \mathrm{card}\, C$, mithin $\mathrm{card}\, B = \mathrm{card}\, C$. Jede Bijektion $B \to C$ kann zu einem Isomorphismus $K' \xrightarrow{\cong} L'$ fortgesetzt werden, und da K bzw. L die algebraischen Abschlüsse von K' bzw. L' sind, folgt $K \cong L$. $\square$

Zum Abschluß demonstrieren wir den Einsatz der Vollständigkeit von $\mathcal{AAK}_0$ durch eine einfache Übertragung des sog. affinen Satzes von Bézout für beliebige algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik 0 aus der Gültigkeit dieses Satzes für $\mathbb{C}$. (Für $\mathbb{C}$ ist dieser selbstredend — unter Verwendung der in $\mathbb{C}$ zur Verfügung stehenden analytischen Methoden — einfacher zu beweisen als für allgemeine algebraisch abgeschlossene Körper mit Charakteristik 0, wo für dessen Beweis nur Mittel der Algebra verwendet werden können; für einen analytischen Beweis siehe [**136**], für einen algebraischen [**143**].)

Die „klassische" Form des *Satzes von Bézout* lautet [**29**]: Seien C_1, C_2 zwei algebraische Kurven vom Grad d_1 bzw. d_2 in der projektiven Ebene über einem algebraischen abgeschlossenen Körper K; haben C_1, C_2 keine gemeinsame Komponente, so ist die Summe ihrer Schnittmultiplizitäten genau $d_1 \cdot d_2$, insbesondere schneiden sie sich in höchstens $d_1 \cdot d_2$ Punkten. Sind $C_1 = V(f)$, $C_2 = V(g)$ ebene algebraische Kurven ohne gemeinsame Komponente vom Grad d_1 bzw. d_2 im affinen Raum $\mathbb{A}^2(K)$, so bettet man sie in $\mathbb{P}^2(K)$ ein und erhält ihre Abschlüsse $\overline{C_1} = (F)$, $\overline{C_2} = (G)$, wobei F, G die Homogenisierungen von f bzw. g seien. Es ist $\text{grad}(F) = \text{grad}(f) = d_1$ und $\text{grad}(G) = \text{grad}(g) = d_2$, und auf der unendlich fernen Geraden liegen nur höchstens endlich viele Punkte von $\overline{C_i}$, $i = 1, 2$, denn ist etwa $[0 : x_1 : x_2] \in \overline{C_1}$ ein solcher, d.h. $F(0, x_1, x_2) = 0$, so gilt für die d_1-te homogene Komponente $f_{(d_1)}$ von f dann $f_{(d_1)}(x_1, x_2) = 0$, also (falls o.B.d.A. $x_1 \neq 0$) auch $f_{(d_1)}(1, \frac{x_2}{x_1}) = 0$, und dies kann nur für endlich viele $\lambda := \frac{x_2}{x_1} \in K$ der Fall sein. Analog folgt die Endlichkeit von $\overline{C_2} \setminus C_2 \subseteq \mathbb{P}^2(K) \setminus \mathbb{A}^2(K)$, $\overline{C_1}$ und $\overline{C_2}$ haben keine gemeinsame Komponente, und die projektive Version des Satzes Bézout ergibt

$$\text{card}(C_1 \cap C_2) \leq \text{card}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = \text{grad}(F) \cdot \text{grad}(G) = \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(g).$$

Diese (im Fall ebener Kurven — wie gezeigt — leicht aus dem Projektiven ableitbare) Tatsache wird oft als *affine Bézout-Ungleichung* bezeichnet. Der Satz von Bézout kann auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden; uns interessiert hier die affine Variante:

Satz von Bézout. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper,* $\text{char}(K) = 0$. *Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit* $\text{grad}(f_i) =: d_i > 0$*; sei $d := \prod_{i=1}^n d_i$. Haben $f_1, \ldots, f_n$ mehr als d viele gemeinsame Nullstellen in K^n, so haben sie bereits unendlich viele Nullstellen gemeinsam.*

(Anders formuliert: Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und $\mathfrak{a}$ ein nulldimensionales Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit einer Basis $f_1, \ldots, f_n$, so gilt stets $\text{card}(V(\mathfrak{a})) = \dim_K K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \leq \prod_{i=1}^n \text{grad}(f_i)$.)

Beweis (unter Annahme des Satzes für $K = \mathbb{C}$). Wir schreiben das allgemeine Polynom in $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ vom Grad d_i als

$$f_i = \sum_{\mathbf{j}} a_{i,\mathbf{j}} \mathbf{X}^{\mathbf{j}},$$

wobei $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ alle Indizes mit $j_k \geq 0$ und $\sum j_k \leq d_i$ durchlaufe; sei $\mathbf{a} = \{a_{i,\mathbf{j}}\}_{i,\mathbf{j}}$ ein die endlich vielen $a_{i,\mathbf{j}}$ enthaltender Vektor. Für gegebene $d_1, \ldots, d_n, d =$

$d_1 \cdots d_n$ und $m > d$ seien die Formeln

$$\varphi_{n,d,d_1,\ldots,d_n,m}\Big(\mathbf{a}, \mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(m)}\Big) :=$$

$$\left(\bigwedge_{1\le i<j\le m} \mathbf{X}^{(i)} \neq \mathbf{X}^{(j)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{X}^{(i)}) = 0\right) \rightarrow$$

$$\exists \mathbf{X}^{(m+1)}\left(\bigwedge_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{X}^{(m+1)}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \mathbf{X}^{(i)} \neq \mathbf{X}^{(m+1)}\right)$$

(dabei seien $\mathbf{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)})$ für $i = 1, \ldots, m$) und

$$\psi_{n,d,d_1,\ldots,d_n}\Big(\mathbf{a}, \mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}\Big) :=$$

$$\left(\bigwedge_{1\le i<j\le d} \mathbf{X}^{(i)} \neq \mathbf{X}^{(j)}\right) \rightarrow \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{d}\bigwedge_{k=1}^{n} f_k(\mathbf{X}^{(i)}) = 0\right)$$

definiert. Man weiß nach dem Satz von Bézout für $\mathbb{C}$, daß in $\mathbb{C}$ der L-Satz β_m mit

$$\beta_m := \big(\forall \mathbf{a}(\forall \mathbf{X}(\psi_{n,d,d_1,\ldots,d_n}) \vee \forall \mathbf{X}(\varphi_{n,d,d_1,\ldots,d_n,m}))\big)$$

für alle $m > d$ erfüllt ist. Dann folgt für jedes $K \in \mathcal{AAK}_0$: $K \models \beta_m$ für $m > d$. $\square$

Wir haben die Vollständigkeit von $\mathcal{AAK}_0$ zur Übertragung einer Aussage von $\mathbb{C}$ in jeden anderen Körper aus $\mathcal{AAK}_0$ verwendet. Solche Beweismethoden nennt man Übertragungsprinzipien. Wir werden sie und weitere körpertheoretische und algebraisch-geometrische Anwendungen der Modelltheorie in §5.5 nach Weiterführung der allgemeinen Theorie näher behandeln. (Einen Überblick über den Einsatz der Modellvollständigkeitseigenschaft in der Algebra gibt [**103**]. Die Modelltheorie der Körper im speziellen behandeln [**5**] und [**10**].)

KAPITEL 5

Substrukturvollständigkeit und Quantorenelimination

Im vorhergehenden Abschnitt der Vorlesung haben wir uns mit Theorien bzw. Modellklassen beschäftigt, für die jede L-Formel zu einer existentiellen L-Formel äquivalent war. Nun wollen wir als zweite wichtige Eigenschaft von Modellklassen die sog. Substrukturvollständigkeit untersuchen; es wird sich zeigen, daß diese gleichwertig ist mit der Tatsache, daß jede Formel sogar zu einer quantorenfreien Formel äquivalent ist. Dies ermöglicht weitreichende algebraische Anwendungsmöglichkeiten.

5.1. Der zweite Persistenzsatz

Der erste Persistenzsatz lieferte eine semantische Charakterisierung von existentiellen Formeln. Gesucht ist nun eine entsprechende Kennzeichnung der quantorenfreien Formeln. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare Klasse, Σ eine Satzmenge. Wir fragen uns: Was ist eine typische Erhaltungseigenschaft quantorenfreier Formeln bzgl. Strukturen in $\mathcal{K}$? Dazu seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B}$ (nicht notwendigerweise aus $\mathcal{K}$) sowie eine quantorenfreie Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ über L und eine Stelle $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ betrachtet. Dann gilt bekanntlich:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{b})$$

Wir vermuten deshalb, die gewünschte charakterisierende Eigenschaft für Qf könnte sein:

> Eine Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ ist dann und nur dann in $\mathcal{K}$ äquivalent zu einem $\varphi \in \mathsf{Qf}$, falls $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{C} \models \psi(\mathbf{b})$ für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Unterstruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ und alle $\mathbf{b} \in B^n$.

Der folgende (allgemeinere) Satz bestätigt die Richtigkeit dieser Vermutung. (Zur Definition einer gleichungsumfassenden bzw. für eine Satzmenge negationsfähigen Formelmenge vgl. §3.7.)

Zweiter Persistenzsatz. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, Φ eine gleichungsumfassende und für Σ negationsfähige Menge von L-Formeln, Φ' der Abschluß von Φ unter $\{\wedge, \vee\}$, ψ eine L-Formel. Dann ist ψ persistent unter allen Φ-erhaltenden Abbildungen $h\colon B \to C$, wobei $B \subseteq A$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, genau dann, wenn ψ in $\mathcal{K}$ zu einer Formel $\varphi \in \Phi'$ äquivalent ist.*

Beweis. Sei ψ in $\mathcal{K}$ äquivalent zu $\varphi \in \Phi'$; da ja jede Formel in Φ unter partiellen Φ-erhaltenden Abbildungen $h\colon B \to C$ mit Definitionsbereich $B \subseteq A$ zwischen Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ erhalten bleibt, bleibt auch $\varphi \in \Phi'$ und somit auch ψ unter h erhalten.

Umgekehrt sei jetzt $\psi(x_1,\dots,x_n)$ eine die geforderte Persistenzeigenschaft erfüllende L-Formel, o.B.d.A. $n \geq 1$. Wir gehen analog zum Beweis des ersten Persistenzsatzes vor. Wähle eine Menge $D = \{d_1,\dots,d_n\}$ paarweise verschiedener neuer Konstanten (d.h. welche nicht in L vorkommen mögen) und setze $\hat{\psi} := \psi[d_1/x_1,\dots,d_n/x_n]$; $\hat{\psi}$ ist dann ein Satz in $L(D)$. (Ebenso definiere man wieder für eine beliebige erweiterte Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ im folgenden stets $\hat{\varphi} := \varphi[d_1/x_1,\dots,d_n/x_n]$.) Sei $\Phi'' := \{\neg\hat{\varphi} : \varphi \in \Phi', \Sigma \models (\varphi \to \psi)\}$. Da Φ für Σ negationsfähig ist, ist $\Phi'' \neq \varnothing$. Wir zeigen zunächst:

1. $\Sigma \cup \Phi'' \cup \left\{\hat{\psi}\right\}$ hat kein Modell (bzgl. $L(D)$).

Angenommen nämlich, es existiere eine $L(D)$-Struktur $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{A}' \models \Sigma \cup \Phi'' \cup \left\{\hat{\psi}\right\}$. Sei $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}'|L$; dann ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Seien $a_i := d_i^{\mathfrak{A}'}$ für $i = 1,\dots,n$ und $B := \{a_1,\dots,a_n\}$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models (\psi \wedge \neg\varphi)(a_1,\dots,a_n)$ für alle $\varphi \in \Phi'$ mit $\Sigma \models (\varphi \to \psi)$. Wir benötigen nun:

2. $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A},B) \cup \Sigma \cup \{\neg\psi'\}$ hat kein Modell, wobei $\psi' := \psi[\overline{a}_1/x_1,\dots,\overline{a}_n/x_n]$.

Aus (2.) folgt dann nämlich mit Kompaktheitssatz: Es existieren $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \Phi$, so daß $\varphi_i' := \varphi_i[\overline{a}_1/x_1,\dots,\overline{a}_n/x_n]$ in $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A},B)$ liegen ($i = 1,\dots,m$), und so daß $\Sigma \models (\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i' \to \psi')$. Da die $\overline{a}_i$ in Σ nicht vorkommen, folgt dann

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, (\varphi \to \psi) \quad \text{mit} \quad \varphi := \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ \overline{a}_i = \overline{a}_j}} x_i = x_j \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i.$$

Da Φ gleichungsumfassend ist, gilt $\varphi \in \Phi'$, also $\neg\hat{\varphi} \in \Phi''$. Aber $\mathfrak{A}' \models \neg\hat{\varphi}$, also $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a_1,\dots,a_n)$, und für $1 \leq i \leq m$ gilt $(\mathfrak{A},B) \models \varphi_i'$, $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1,\dots,a_n)$, für $1 \leq i,j \leq n$ mit $a_i = a_j$ gilt $(\mathfrak{A},B) \models (\overline{a}_i = \overline{a}_j)$, $\mathfrak{A} \models \big(x_i = x_j\big)(a_1,\dots,a_n)$, also auch $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$, Widerspruch.

Dies zeigt die Richtigkeit von (1.); aus (1.) folgt dann weiter mit dem Kompaktheitssatz: Es existieren $\varrho_1,\dots,\varrho_l \in \Phi'$ mit $\neg\hat{\varrho}_i \in \Phi''$ ($1 \leq i \leq l$), so daß $\Sigma \models \left(\bigwedge_{i=1}^l \neg\hat{\varrho}_i \to \neg\hat{\psi}\right)$; wegen $\Phi'' \neq \varnothing$ kann $l > 0$ angenommen werden. Da die d_j ($j = 1,\dots,n$) in Σ nicht vorkommen und paarweise verschieden sind, erhält man

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\psi \to \bigvee_{i=1}^l \varrho_i\right).$$

Setze $\varrho := \bigvee_{i=1}^l \varrho_i$; wir haben $\varrho \in \Phi'$ wegen $\varrho_i \in \Phi'$. Nach Wahl der ϱ_i gilt aber nun $\Sigma \models (\varrho_i \to \psi)$ für $1 \leq i \leq l$, damit auch $\Sigma \models (\varrho \to \psi)$, und schließlich $\Sigma \models (\varrho \leftrightarrow \psi)$, und wir sind fertig.

Es verbleibt damit nur der Nachweis von (2.); wir argumentieren (natürlich) indirekt. Es existiere eine $L(B)$-Struktur $\mathfrak{C}'$, die Modell von $\mathrm{D}_\Phi(\mathfrak{A},B) \cup \Sigma \cup \{\neg\psi'\}$ ist. Sei $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}'|L$ ihr L-Redukt. Das Diagrammlemma besagt nun: Es gibt eine Φ-erhaltende Abbildung $h\colon B \to C$ mit der Eigenschaft, daß $h(a_i) = \overline{a}_i^{\mathfrak{C}'}$ für jedes $a_i \in B$. Da $\mathfrak{A},\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, $B \subseteq A$ sind und $\mathfrak{A} \models \psi(a_1,\dots,a_n)$ gilt, folgt nach der Persistenzvoraussetzung über ψ

$$\mathfrak{C} \models \psi(h(a_1),\dots,h(a_n)),$$

als $\mathfrak{C}' \models \psi'$, ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Wie in Bem. 3.7.1 sieht man ein, daß die Voraussetzungen bzgl. Φ nicht fallengelassen werden können.

Bevor wir Folgerungen aus diesem Satz ziehen, zunächst:

Definition 5.1.1. Sei $B \subseteq A \cap C$ für zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und Φ eine Menge von L-Formeln. Dann schreibe $(\mathfrak{A}, B) \underset{\Phi}{\equiv} (\mathfrak{C}, B)$, falls für alle $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ mit $\varphi' := \varphi[\overline{b}_1/x_1, \ldots, \overline{b}_n/x_n]$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, B) \models \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{C}, B) \models \varphi'$$

Korollar 5.1.2. (van den Dries' Test, [**68**]) *Sei* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *eine elementare Klasse von L-Strukturen mit einer Satzmenge* Σ, ψ *eine L-Formel.*

(i) *Es sei* At *negationsfähig für* Σ. *Genau dann ist* ψ *modulo* $\mathcal{K}$ *äquivalent zu einer positiven quantorenfreien Formel, wenn für alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{A}$ *und Homomorphismen* $h\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *gilt: Ist* $b_1, \ldots, b_n \in D$, *so*

$$\mathfrak{A} \models \psi(b_1, \ldots, b_n) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{C} \models \psi(h(b_1), \ldots, h(b_n)).$$

(ii) *Sei* Φ *eine Formelmenge mit* $\mathsf{Ba} \subseteq \Phi$, *und* Φ *sei* symmetrisch, *d.h. für jede Formel* $\varphi \in \Phi$ *ist* $\neg\varphi$ *logisch äquivalent zu einer Formel in* Φ, *und* abgeschlossen unter Substitution, *d.h. für* $\varphi \in \Phi$ *und einen Term* t *und eine Variable* x *ist stets auch* $\varphi[x/t] \in \Phi$. *Dann gilt die Äquivalenz der folgenden Aussagen:*
   (a) *Für alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ *mit gemeinsamer Substruktur* $\mathfrak{D}$ (*nicht notwendigerweise in* $\mathcal{K}$) *und* $b_1, \ldots, b_n \in D$ *gilt:*

$$(\mathfrak{A}, D) \underset{\Phi}{\equiv} (\mathfrak{C}, D) \quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{A}, D) \underset{\psi}{\equiv} (\mathfrak{C}, D)$$

   (b) ψ *ist in* $\mathcal{K}$ *äquivalent zu einer Formel* φ *aus dem* $\{\wedge, \vee\}$*-Abschluß von* Φ.

(iii) *Sei* $\Phi = \mathsf{Ba}$. *Dann sind äquivalent:*
   (a) *Für alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ *mit gemeinsamer Unterstruktur* $\mathfrak{D}$ *gilt*

$$(\mathfrak{A}, D) \underset{\psi}{\equiv} (\mathfrak{C}, D).$$

   (b) ψ *ist in* $\mathcal{K}$ *äquivalent zu einer quantorenfreien Formel.*

Beweis. Zu (i): Enthalte zunächst L eine Konstante. Man wende den Persistenzsatz auf $\Phi = \mathsf{At}$ an. Φ' ist dann die Menge der positiven quantorenfreien Formeln. Wir wissen ferner: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{D} = \langle B \rangle \subseteq \mathfrak{A}$ und $h\colon B \to C$ eine Abbildung, die At erhält, so hat h genau eine Fortsetzung zu einem Homomorphismus $\overline{h}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$.— Im allgemeinen Fall sei c eine neue Konstante für L. Sei $\mathcal{K}'$ die Klasse aller $L(c)$-Modelle von Σ. Die Voraussetzung gilt nun auch für $\mathcal{K}'$ anstelle von $\mathcal{K}$, und ψ ist damit nach dem eben Bewiesenen in $\mathcal{K}'$ äquivalent zu einer positiven quantorenfreien $L(c)$-Formel; wir haben also $\Sigma \models \psi \leftrightarrow (\psi'[c/x])$ mit einer positiven quantorenfreien L-Formel ψ'. Also nach Umgang mit Konstanten $\Sigma \models \psi \leftrightarrow \psi'$.

Für (ii) benutze im Fall einer Sprache L mit mindestens einer Konstanten, daß für $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{D} = \langle B \rangle \subseteq \mathfrak{A}$ jede Ba-erhaltende Abbildung $h\colon B \to C$ genau eine Fortsetzung zu einer Einbettung $\overline{h}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ besitzt; in unserem Fall wird dann Φ auch von $\overline{h}$ erhalten. Im Fall einer konstantenlosen Sprache L argumentiert man analog zu (i).

Bei (iii) handelt es sich um den Spezialfall $\Phi = \mathsf{Ba}$ von (ii). □

5.2. Substrukturvollständigkeit und Quantorenelimination

Wir untersuchen nun die Strukturklassen, für die eine der äquivalenten Bedingungen des obigen Korollars 5.1.2 für jede Formel erfüllt ist:

DEFINITION 5.2.1. Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen. Dann heißt $\mathcal{K}$ *substrukturvollständig,* falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B}$ nicht notwendig aus $\mathcal{K}$!) gilt: $(\mathfrak{A}, B) \equiv (\mathfrak{C}, B)$, d.h., falls für jede erweiterte Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, B) \models \varphi(b_1, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{C}, B) \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$$

BEMERKUNGEN. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare Klasse von L-Strukturen.

(i) Ist $\mathcal{K}$ substrukturvollständig, so trivialerweise auch modellvollständig.

(ii) $\mathcal{K}$ ist genau dann substrukturvollständig, wenn für jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}(K)$ die $L(A)$-Satzmenge $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ vollständig ist. (Beweis als Übung; vgl. auch mit Bem. 4.0.2.)

ÜBUNG. Sei $\mathcal{G}$ die Klasse aller Graphen, die zu einem der beiden folgenden isomorph sind: $\mathfrak{G}$ mit $G := \{a, b\}$ $(a \neq b)$ und $aR^{\mathfrak{G}}b$ sowie $\mathfrak{H}$ mit $H := G$ und nicht $aR^{\mathfrak{H}}b$. Ist $\mathcal{G}$ modellvollständig bzw. substrukturvollständig?

In bestimmten Fällen folgt aus der Modellvollständigkeit auch die Substrukturvollständigkeit einer Strukturklasse. Eine nichtleere Klasse von L-Strukturen heißt eine *Quasivarietät,* wenn sie unter Isomorphismen, Substrukturen und der Bildung von direkten Produkten abgeschlossen ist.

PROPOSITION 5.2.2. (Baldwin-Lachlan, [**48**]) *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Quasivarietät, und $\mathcal{K}_\infty \subseteq \mathcal{K}$ die Klasse der unendlichen Strukturen in $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}_\infty$ ist modellvollständig genau dann, wenn $\mathcal{K}_\infty$ substrukturvollständig ist.*

BEWEIS. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}_\infty$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B}$; es ist $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Seien $\iota_{\mathfrak{A}} \colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, $a \mapsto (a, a)$, $\iota_{\mathfrak{C}} \colon \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, $c \mapsto (c, c)$ die Diagonaleinbettungen und $B' := \iota_{\mathfrak{A}}(B) = \iota_{\mathfrak{C}}(B)$. Da $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ und alle drei Strukturen aus $\mathcal{K}_\infty$ sind, ist sogar $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$; analog $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}, \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. Also $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, B') \equiv (\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}, B')$. Da $\iota_{\mathfrak{A}}$ und $\iota_{\mathfrak{B}}$ elementare Einbettungen sind, folgt $(\mathfrak{A}, B) \equiv (\mathfrak{C}, B)$, was zu beweisen war. □

Den syntaktischen Aspekt des neu eingeführten Begriffs fassen wir wie folgt:

DEFINITION 5.2.3. Sei $\mathcal{K}$ elementare Klasse. Wir sagen, $\mathcal{K}$ *erlaubt Quantorenelimination (Q.E.),* falls es zu jeder L-Formel φ eine quantorenfreie L-Formel φ' gibt, die in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu φ.

Eine existentielle Formel φ heiße 1-*existentiell,* falls φ höchstens einen Existenzquantor enthält. Analog heißt φ 1-*universell,* falls φ universell mit höchstens einem Allquantor ist.

Für den folgenden Satz vgl. [**15**], S. 234–236.

SATZ 5.2.4. (Charakterisierung substrukturvollständiger Klassen) *Sei $\mathcal{K}$ elementare Klasse von L-Strukturen. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{K}$ ist substrukturvollständig.*

(ii) *Für alle 1-existentiellen L-Formeln φ und alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B}$ gilt: $(\mathfrak{A}, B) \equiv_\varphi (\mathfrak{C}, B)$.*

(iii) *Zu jeder* 1*-existentiellen* L*-Formel* φ *gibt es eine quantorenfreie Formel* φ'*, die in* $\mathcal{K}$ *äquivalent ist zu* φ*.*
(iv) $\mathcal{K}$ *erlaubt Q.E.*
(v) *Für alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$*,* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ *und jede Einbettung* $h\colon \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ *gilt:* h *erhält alle* L*-Formeln (bzgl.* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{C}$*).*

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial, und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ein Spezialfall des zweiten Persistenzsatzes.

Für (iii) $\Rightarrow$ (iv) zeigen wir für eine beliebige pränexe Formel

$$\varphi = \mathrm{Q}_1 x_1 \cdots \mathrm{Q}_n x_n(\varrho),$$

wobei $\mathrm{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$, ϱ quantorenfrei, durch Induktion nach n, daß φ in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu einer quantorenfreien Formel φ'. Der Fall $n = 0$ ist klar (setze $\varphi' := \varphi$). Zum Schritt $n \to n+1$:

Fall 1: φ hat die Form $\varphi = \exists x_1(\varphi_1)$ mit $\varphi_1 := \mathrm{Q}_2 x_2 \cdots \mathrm{Q}_{n+1} x_{n+1}(\varrho)$. Nach Induktionsannahme existiert eine quantorenfreie Formel φ_1' in L, so daß φ_1' in $\mathcal{K}$ äquivalent ist zu φ_1. Dann ist φ äquivalent zu $\exists x_1(\varphi_1')$ ist $\mathcal{K}$, und nach (iii) existiert ein zu φ in $\mathcal{K}$ logisch gleichwertiges $\varphi_2 \in \mathsf{Qf}$.

Fall 2: φ hat die Form $\varphi = \forall x_1 \mathrm{Q}_2 x_2 \cdots \mathrm{Q}_{n+1} x_{n+1}(\varrho)$. Dann ist $\neg\varphi$ äquivalent zu $\exists x_1 \tilde{\mathrm{Q}}_2 x_2 \cdots \tilde{\mathrm{Q}}_{n+1} x_{n+1}(\neg\varrho)$ (wobei $\tilde{\exists} := \forall$, $\tilde{\forall} := \exists$). Nach Fall 1 existiert eine quantorenfreie Formel φ^*, welche äquivalent ist (modulo $\mathcal{K}$) zu $\neg\varphi$, und φ ist äquivalent zu $\neg\varphi^*$.

Zu (iv) $\Rightarrow$ (v): Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ erweiterte L-Formel und $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$ eine zugehörige L-Formel ohne Quantoren, die in $\mathcal{K}$ zu φ äquivalent ist; seien $b_1, \dots, b_n \in B$, so daß $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$. Da $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ist, folgt $\mathfrak{A} \models \varphi'(b_1, \dots, b_n)$, wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ferner $\mathfrak{B} \models \varphi'(b_1, \dots, b_n)$, da φ' quantorenfrei. In $\mathfrak{C}$ gilt nun $\varphi'(h(b_1), \dots, h(b_n))$, da h Einbettung ist. Da $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, folgt $\mathfrak{C} \models \varphi(h(b_1), \dots, h(b_n))$.

Für die Implikation (v) $\Rightarrow$ (i) schließlich wähle $h := \mathrm{id}_B$. □

Definition 5.2.5. Eine 1*-primitive Formel* ist eine primitive Formel mit nur einem Existenzquantor, d.h. von der Form

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \right) \quad \text{mit } m \in \mathbb{N},\ \varphi_i \in \mathsf{Ba}.$$

Korollar 5.2.6. *Unter den Voraussetzungen des Satzes hat man folgende weitere, zu* (i)–(v) *äquivalente Bedingung:*

(vi) *Für alle* 1*-primitiven Formeln* ψ *und alle* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ *mit gemeinsamer Substruktur* $\mathfrak{B}$ *gilt:* $(\mathfrak{A}, B) \underset{\psi}{\equiv} (\mathfrak{C}, B)$*.*

Beweis. Es gilt (i) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (ii), da jede 1-existentielle Formel logisch äquivalent ist zu einer Disjunktion 1-primitiver Formeln: Ist $\varphi = \exists x(\varrho)$ mit $\varrho \in \mathsf{Qf}$, so wähle eine disjunktive Normalform $\varrho_1 = \bigvee_i \bigwedge_j \varrho_{ij}$, $\varrho_{ij} \in \mathsf{Ba}$ von ϱ; dann ist φ äquivalent zu $\bigvee_i \exists x(\bigwedge_j \varrho_{ij})$. □

Bemerkung 5.2.7. Ist $\mathcal{K}$ eine substrukturvollständige Klasse bzgl. einer konstantenlosen Sprache L, so gibt es zu einer L-Formel φ nicht notwendig eine bzgl. $\mathcal{K}$ äquivalente quantorenfreie L-Formel *in höchstens denselben freien Variablen wie* φ*.*

Als Beispiel betrachte man die Sprache $L = \{P\}$ mit dem unären Relationssymbol P und die Klasse $\mathcal{K}$ aller unendlichen L-Strukturen, die dem Axiom

$$\forall x\big(P(x)\big) \vee \forall x\big(\neg P(x)\big)$$

genügen. Diese ist elementar und substrukturvollständig, wie der Leser leicht zeigt, aber zu dem L-Satz $\varphi := \forall x\big(P(x)\big)$ kann es keinen in $\mathcal{K}$ äquivalenten L-Satz ψ geben. Enthält hingegen L mindestens eine Konstante c, so können derartige Phänomene nicht auftreten: Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben und ψ quantorenfrei und äquivalent zu φ in $\mathcal{K}$, etwa mit $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, so setze $\psi' := \psi[c/y_1, \ldots, c/y_n]$; es gilt immer noch $\mathcal{K} \models (\varphi \leftrightarrow \psi')$, aber ψ' hat nur noch freie Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Oftmals nützlich ist auch folgendes hinreichende Kriterium:

Korollar 5.2.8. (Shoenfield-Test, [**149**], [**150**]) *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen, welche den folgenden zwei Bedingungen* (Existenz von $\mathcal{K}$-Abschlüssen *und* 1-Modellvollständigkeit) *genügt:*

(i) *Für alle* $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ *existiert ein* $\mathcal{K}$-Abschluß $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$, *d.h. ein* $\overline{\mathfrak{A}} \in \mathcal{K}$ *mit* $(\overline{\mathfrak{A}}, A) \hookrightarrow (\mathfrak{B}, A)$ *für alle* $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

(ii) *Für je zwei* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ *in* $\mathcal{K}$ *gilt* $\mathfrak{A} \underset{1-\forall_1}{\preceq} \mathfrak{B}$, *wobei* $1\text{–}\forall_1 \subseteq \forall_1$ *die Menge der* 1-*universellen Formeln sei.*

Dann ist $\mathcal{K}$ *substrukturvollständig.*

Beweis. Wir zeigen, daß (ii) in Satz 5.2.4 erfüllt ist. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B}$. Sei $\varphi(\mathbf{x}, y)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Formel, $\mathbf{b} \in B^n$ mit $(\mathfrak{A}, B) \models \big(\exists y(\varphi)\big)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$; wir müssen zeigen, daß $(\mathfrak{C}, B) \models \big(\exists y(\varphi)\big)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$. Sei $\overline{\mathfrak{B}} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \overline{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{A}$ gemäß (i) ein $\mathcal{K}$-Abschluß von $\mathfrak{B}$, o.E. $\overline{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{C}$. Mit (ii) folgt $(\overline{\mathfrak{B}}, B) \models \big(\exists y(\varphi)\big)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$ wegen $(\mathfrak{A}, B) \models \big(\exists y(\varphi)\big)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$ und $\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}} \in \mathcal{K}$, also auch $(\mathfrak{C}, B) \models \big(\exists y(\varphi)\big)[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$ wegen $\overline{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{C}$. □

Übung. Sei $L = \{<\}$ die Sprache der Ordnungen.

(i) Sei $\mathcal{DLO}$ die Klasse aller dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte bzgl. L. Man zeige: $\mathcal{DLO}$ ist substrukturvollständig.

(ii) Sei $\mathcal{K} \neq \varnothing$ eine substrukturvollständige Klasse von linearen Ordnungen (als L-Strukturen), in der mindestens eine nicht einelementige lineare Ordnung vorhanden ist. Man zeige, daß $\mathcal{K} = \mathcal{DLO}$. (Hinweis: Zeige zuerst $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{DLO}$, dann die Vollständigkeit von $\mathcal{DLO}$ und schließlich $\mathcal{K} = \mathcal{DLO}$.)

Für algorithmische Anwendungen zentral ist folgende Existenzaussage:

Korollar 5.2.9. *Sei L abzählbar und effektiv gegeben sowie* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *eine Klasse von L-Strukturen mit einer rekursiv aufzählbaren Axiomatisierung* Σ, *die einer der gleichwertigen Bedingungen* (i)–(vi) *aus obigem Satz genügt. Dann existiert eine rekursive Funktion, die jeder L-Formel φ eine in $\mathcal{K}$ äquivalente L-Formel φ' zuordnet. Man sagt:* $\mathcal{K}$ erlaubt effektive Q.E.

Beweis. Sei $\psi_1, \psi_2, \ldots$ eine rekursive Aufzählung aller semantischen Folgerungen aus Σ. Zu gegebener L-Formel φ stellen wir fest, ob ein ψ_i syntaktisch von der Form $\psi_i = (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ mit quantorenfreiem φ' ist. Wähle das erste solche φ' als quantorenfreies Äquivalent zu φ. □

5.3. Q.E. für algebraisch abgeschlossene Körper

Wir betrachten im folgenden wieder unser prominentes Anwendungsbeispiel $\mathcal{K} := \mathcal{AAK}$ über der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ der Ringe, und beweisen den folgenden, zuerst von Tarski (1948, nicht publiziert, vgl. [**71**]) und Robinson [**15**] bewiesenen Satz:

Satz 5.3.1. *Die Klasse $\mathcal{AAK}$ der algebraisch abgeschlossenen Körper ist substrukturvollständig und erlaubt somit effektive Q.E.*

Beweis. Wir verifizieren Bedingung (vi) des Satzes über die Charakterisierung der Q.E.: Sei φ eine 1-primitive Formel,

$$\varphi = \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{m} f_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \wedge g(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0 \right)$$

mit $f_i, g \in \mathbb{Z}[X, Y_1, \dots, Y_n]$. Seien $K, K' \in \mathcal{AAK}$ mit gemeinsamer Substruktur B; B ist ein Integritätsbereich. Seien nun $b_1, \dots, b_n \in B$ mit $K \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$. Setze $f_i(X) := f_i(X, b_1, \dots, b_n) \in B[X]$, $g(X) := g(X, b_1, \dots, b_n) \in B[X]$.

Wir können annehmen, daß alle $f_i \neq 0$ sowie $g \neq 0$ in $B[X]$. Denn sind alle $f_i = 0$, $g \neq 0$, so gilt $K \models \exists x(g(x) \neq 0)$; man wähle $d > \mathrm{grad}(g) > 0$, so daß $\mathrm{char}(K)$ nicht d teilt, und setze $f_1 := X^d - 1$. Dann $K \models \exists x(f_1(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0)$, denn: Es ist $f_1' = dX^{d-1}$, also haben f_1, f_1' keine gemeinsame Nullstelle, also: f_1 hat d viele paarweise verschiedene Nullstellen in K, g aber nur höchstens $\mathrm{grad}(g) < d$ viele. Damit existiert mindestens eine Nullstelle von f_1, die keine von g ist.

Wähle nun $\alpha \in K$ mit

$$K \models \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(\alpha) = 0 \wedge g(\alpha) \neq 0.$$

α ist algebraisch über dem Quotientenkörper $Q \subseteq K$ von B, etwa mit Minimalpolynom $h \in Q[X]$. Es ist $h | f_i$ für $i = 1, \dots, m$ in $Q[X]$; Division mit Rest ergibt $g = qh + g^*$ für gewisse $q, g^* \in Q[X]$ mit $g^* = 0$ oder $\mathrm{grad}(g^*) < \mathrm{grad}(h)$, damit $g^*(\alpha) \neq 0$, und h teilt g^* nicht in $Q[X]$. Da K' algebraisch abgeschlossen und $Q \subseteq K'$ ist, existiert ein $\beta \in K'$ mit $h(\beta) = 0$; es sind alle $f_i(\beta) = 0$. h ist auch Minimalpolynom von β über Q, denn h ist irreduzibel über $Q[X]$; also ist auch $g^*(\beta) \neq 0$ und daher $g(\beta) \neq 0$. Damit $K' \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$. $\square$

5.4. Effektive Q.E. für algebraisch abgeschlossene Körper

Die Q.E. für algebraisch abgeschlossene Körper eröffnet weitreichende körpertheoretische Anwendungsmöglichkeiten. Bevor wir darauf eingehen, wenden wir uns den algorithmischen Konsequenzen zu.

Definition 5.4.1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Dann sagen wir, $\mathcal{K}$ sei *quantorenfrei-entscheidbar* (kurz: *q.f.-entscheidbar*), falls es einen Algorithmus gibt, der von jedem quantorenfreien L-Satz entscheidet, ob dieser in allen Strukturen aus $\mathcal{K}$ gilt oder nicht. Wir sagen, $\mathcal{K}$ sei *quantorenfrei-vollständig* (*q.f.-vollständig*), falls für jeden quantorenfreien L-Satz φ entweder $K \models \varphi$ oder $K \models \neg\varphi$.

Man beachte, daß die Q.f.-Entscheidbarkeit nicht die Q.f.-Vollständigkeit von $\mathcal{K}$ impliziert. Offensichtlich gilt:

Proposition 5.4.2. *Sei L eine Sprache, die mindestens ein Konstantensymbol enthält, und $\mathcal{K}$ eine substrukturvollständige Klasse von L-Strukturen.*

(i) *Falls L effektiv gegeben und $\mathcal{K}$ q.f.-entscheidbar mit rekursiv aufzählbarem Axiomensystem ist, so ist $\mathcal{K}$ entscheidbar.*
(ii) *Falls $\mathcal{K}$ q.f.-vollständig ist, so ist $\mathcal{K}$ vollständig.*

Beweis. Zu (i): Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, Σ rekursiv aufzählbare L-Satzmenge. Dann gibt es einen Algorithmus, der zu jeder L-Formel φ eine quantorenfreie L-Formel φ' bestimmt, so daß φ und φ' in $\mathcal{K}$ äquivalent sind (Kor. 5.2.9), wobei o.B.d.A. φ' höchstens die frei vorkommenden Variablen von φ besitzt. (Ist φ mit genau den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$, und hat φ' freie Variablen $y_1, \dots, y_m \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, so wähle ein Konstantensymbol c in L und setze $\varphi'' := \varphi'[c/y_1, \dots, c/y_m]$. Dann gilt $K \models (\varphi \leftrightarrow \varphi'')$, und φ'' enthält höchstens die Variablen $x_1, \dots, x_n$ frei.) Insbesondere ist dann φ' ein quantorenfreier L-Satz, wenn φ ein L-Satz war. Der Entscheidungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ bestimmt nun zu gegebenem L-Satz φ einen in $\mathcal{K}$ äquivalenten L-Satz φ' und entscheidet φ'.

Zu (ii): Ist φ ein L-Satz, so existiert ein quantorenfreier L-Satz φ' mit $\mathcal{K} \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ (da L eine Konstante enthält). Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{K} \models \varphi'$ oder $\mathcal{K} \models \neg\varphi'$ und damit $\mathcal{K} \models \varphi$ oder $\mathcal{K} \models \neg\varphi$. □

Für die Klasse $\mathcal{K}$ö der Körper bzw. die Klasse $\mathcal{K}\text{ö}_p$ der Körper mit Charakteristik p (p Primzahl oder $p = 0$) erhalten wir:

Lemma 5.4.3. *Sei p eine Primzahl oder $p = 0$.*
(i) *$\mathcal{K}$ö und $\mathcal{K}\text{ö}_p$ sind q.f.-entscheidbar.*
(ii) *$\mathcal{K}\text{ö}_p$ ist q.f.-vollständig.*

Beweis. Variablenfreie L-Formeln sind äquivalent zu $n \cdot 1 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wissen:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{K}\text{ö}_0: &\quad n \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 0 \\ \text{in } \mathcal{K}\text{ö}_p,\ p > 0: &\quad n \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p | n \end{aligned}$$

Es folgt: In jeder Klasse $\mathcal{K}\text{ö}_p$ läßt sich jede variablenfreie L-Formel algorithmisch auswerten zu „wahr“ oder „falsch“; damit gilt dasselbe für alle quantorenfreien Sätze. Somit sind alle $\mathcal{K}\text{ö}_p$ q.f.-vollständig und q.f.-entscheidbar.

Es verbleibt die Q.f.-Entscheidbarkeit von $\mathcal{K}$ö. Zunächst stellen wir fest: Zu jedem quantorenfreien Satz φ kann man algorithmisch eine Primzahl p_φ bestimmen, so daß jede atomare Teilformel ψ von φ äquivalent ist zu $n \cdot 1 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $n < p_\varphi$. Für jeden Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\mathrm{char}(K) \geq p_\varphi$ hat φ in K dieselbe Auswertung zu „wahr“ oder „falsch“. Damit erhalten wir folgendes Auswertungsverfahren für φ in $\mathcal{K}$ö: Man bestimme p_φ wie eben und werte φ für alle $\mathcal{K}\text{ö}_p$ aus, wobei p die Menge

$$\{0\} \cup \{p : p \text{ prim},\ p \leq p_\varphi\}$$

durchläuft. Setze die Auswertung von φ in $\mathcal{K}$ö gleich „wahr“ d.u.n.d. wenn alle Einzelauswertungen „wahr“ ergaben. □

$\mathcal{K}$ö ist offenbar nicht q.f.-vollständig.— Unmittelbar erhält man einen erneuten Beweis von

Korollar 5.4.4. *Sei $p = 0$ oder $p > 0$ prim.*
(i) *$\mathcal{AAK}$ und $\mathcal{AAK}_p$ sind entscheidbar.*
(ii) *$\mathcal{AAK}_p$ ist vollständig.*

Beweis. Unter Beachtung der Tatsache, daß es zu jeder Primzahl p einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gibt (etwa $\overline{\mathbb{F}}_p$), kann der eben geführte Beweis für $\mathcal{AAK}$ statt $\mathcal{K}$ö und $\mathcal{AAK}_p$ statt $\mathcal{K}$ö$_p$ genauso geführt werden; mit Prop. 5.4.2 und Satz 5.3.1 folgt die Behauptung. □

Übung. In den folgenden Übungen werden weitere Beispiele substrukturvollständiger Theorien untersucht (mit steigendem Schwierigkeitsgrad).

(i) Sei $\mathcal{G}_1$ die Klasse aller nichttrivialen, torsionsfreien, teilbaren, abelschen Gruppen, betrachtet als L-Strukturen für die Sprache $L = \{0, +, -\}$. Man zeige, daß $\mathcal{G}_1$ substrukturvollständig ist, und gebe ein effektives Q.E.-Verfahren für diese Klasse an.

(ii) Sei $L = \{0, +, -, <\}$ und $\mathcal{G}_2$ die Klasse aller nichttrivialen, teilbaren, geordneten, abelschen Gruppen (als L-Strukturen). Man zeige, daß $\mathcal{G}_2$ substrukturvollständig, vollständig und entscheidbar ist.

(iii) Eine Boolesche Algebra $\mathfrak{A} = (A, 0, 1, \sqcap, \sqcup, *)$ heißt *atomfrei,* falls es zu jedem $0 \neq a \in A$ ein $b \in A$ gibt mit $0 \neq b = b \sqcap a \neq a$. Man gebe ein Beispiel für eine solche Boolesche Algebra an und zeige, daß die Klasse $\mathcal{ABA}$ der atomfreien Booleschen Algebren substrukturvollständig ist. (Schwierig.)

5.5. Übertragungsprinzipen für algebraisch abgeschlossene Körper

Wir kommen nun zu den algebraischen Anwendungen der Q.E. für $\mathcal{AAK}$; zentral hierfür sind sog. *Übertragungsprinzipien,* von denen wir einige im folgenden kennenlernen:

„Elementares" Lefschetzprinzip. *Sei L die Sprache der Ringe. Es gibt eine rekursive Funktion $\ell\colon \mathsf{Sa}_L \to \mathbb{N}$, die jedem L-Satz φ eine Primzahl $\ell(\varphi)$ mit folgender Eigenschaft zuordnet: Gilt φ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik* 0*, so gilt φ in* allen *algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik* 0 *und der Charakteristik $\geq \ell(\varphi)$.*

Beweis. Gelte $\mathbb{C} \models \varphi$. Bestimme zu φ einen quantorenfreien Satz φ', der in $\mathcal{AAK}$ äquivalent zu φ ist, und setze $\ell(\varphi) := p_{\varphi'}$, wobei $p_{\varphi'}$ wie in Lemma 5.4.3 definiert sei. Es folgt $\mathbb{C} \models \varphi'$, also nach dem Beweis von Lemma 5.4.3 auch $K \models \varphi'$ für alle $K \in \mathcal{K}$ö$_p$ mit $\mathrm{char}(K) \geq \ell(\varphi)$ oder $\mathrm{char}(K) = 0$. Falls nun sogar $K \in \mathcal{AAK}$, so gilt dasselbe für φ statt φ'. □

Für das volle Lefschetz-Prinzip vgl. [**49**]; zur Herkunft dieses Begriffs vgl. [**8**].— Zusammenfassend haben wir folgenden, in Beweisen oft einfacher anwendbaren Satz:

Satz 5.5.1. *Sei φ ein Satz in der Ringsprache.*

(i) *Es sind äquivalent:*
  (a) *φ gilt in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik* 0.
  (b) *Für jede natürliche Zahl n existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik $p > n$, für den φ gilt.*

(ii) *Sei $p = 0$ oder p prim. Es sind äquivalent:*
  (a) *φ gilt in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p.*

(b) *φ gilt in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik p.*

(iii) *Ferner sind äquivalent:*

(a) *φ gilt in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern.*

(b) *φ gilt in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern von Primzahlcharakteristik.*

(iv) *Ist φ überdies ein $\forall_2$-Satz und gilt φ in jedem endlichen Körper, so gilt φ in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper.*

Beweis. Zu (i): (a) $\Rightarrow$ (b) ist eine Folge des elementaren Lefschetzprinzips. Für (b) $\Rightarrow$ (a) ist wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{AAK}_0$ lediglich zu zeigen, daß φ in mindestens einem Körper $K \in \mathcal{AAK}_0$ gilt, was aber nichts anderes als die Erfüllbarkeit der Satzmenge

$$\Sigma := \{\varphi\} \cup \Gamma \cup \{p \cdot 1 \neq 0 : p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}$$

bedeutet, wobei Γ ein Axiomensystem für $\mathcal{AAK}$ sei. Eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ enthält nur endlich viele Aussagen $p_1 \cdot 1 \neq 0, \ldots, p_n \cdot 1 \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), und ist dann p eine Primzahl mit $p > p_1, \ldots, p_n$ und $K \in \mathcal{AAK}_p$ ein Modell von φ, so ist K auch Modell von Σ'. Mit dem Kompaktheitssatz folgt die Behauptung.

(ii) ist nichts anderes als die Vollständigkeit von $\mathcal{AAK}_p$; (iii) beweist man analog zu (i).

Zu (iv): Es sei p eine Primzahl. Der algebraische Abschluß $\overline{\mathbb{F}}_p$ von $\mathbb{F}_p$ ist bekanntlich die Vereinigung seiner eindeutig bestimmten endlichen Teilkörper $\mathbb{F}_{p^m}$ mit genau p^m Elementen ($m \in \mathbb{N}$); ferner ist $\mathbb{F}_{p^r} \subseteq \mathbb{F}_{p^s}$ genau dann, wenn $r|s$. Also ist $\mathcal{F} := \{\mathbb{F}_{p^{m!}} : m \in \mathbb{N}\}$ eine aufsteigende Kette von Körpern mit $\bigcup \mathcal{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$. Nach Voraussetzung gilt φ in allen $\mathbb{F}_{p^{m!}}$, also nach Lemma 4.4.5 auch in $\overline{\mathbb{F}}_p$. Da p beliebig war, folgt die Behauptung aus (iii) und der Vollständigkeit von $\mathcal{AAK}_p$, p Primzahl. $\square$

Übung. (Noether-Ostrowskischer Irreduzibilitätssatz) Sei K ein Körper, $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ heißt *absolut irreduzibel,* falls f in $\overline{K}[X_1, \ldots, X_n]$ irreduzibel ist. Für ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ und eine Primzahl p sei f_p das Bild von f unter dem vom kanonischen Epimorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$, $a \mapsto a + (p) =: \overline{a}$ induzierten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \mapsto \sum \overline{a}_{\nu_1 \ldots \nu_n} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}.$$

Zeige, daß $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \subseteq \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ absolut irreduzibel ist genau dann, wenn f_p für alle bis auf endlich viele Primzahlen p absolut irreduzibel ist.

Anhand einiger weiterer Beispiele (5.5.1–5.5.4) wollen wir nun die Nützlichkeit dieser Prinzipien kennenlernen.

5.5.1. Polynomabbildungen. Sei K ein Körper, $M \subseteq K^m$ nichtleer. Unter einer *polynomialen Abbildung* oder *Polynomabbildung* $F\colon M \to K^n$ verstehen wir eine Funktion F, die komponentenweise durch Polynome definiert ist, d.h. für die $f_1, \ldots, f_n \in K[X_1, \ldots, X_m]$ existieren mit

$$F(\mathbf{c}) = (f_1(\mathbf{c}), \ldots, f_n(\mathbf{c})) \quad \text{für alle } \mathbf{c} \in M.$$

Folgender von Ax [**45**] gefundene und später auch „klassisch“ [**54**] bewiesene Satz der algebraischen Geometrie läßt sich damit einfach beweisen:

Satz 5.5.2. *Sei K algebraisch abgeschlossen, $F\colon K^n \to K^n$ eine Polynomabbildung. Ist F injektiv, so auch surjektiv.*

Beweis. Für festes n und gegebene Gradschranke d für den Totalgrad der F definierenden Polynome f_i, $i = 1, \ldots, n$ läßt sich die Behauptung als $\forall_2$-Satz $\psi_{n,d}$ formulieren. Da $\psi_{n,d}$ für alle endlichen Körper trivialerweise erfüllt ist, folgt mit Satz 5.5.1, (iv) die Behauptung. □

(Offensichtlich ist die Umkehrung des obigen Satzes i.a. falsch.) Als (übungshalber zu beweisendes) Korollar hat man dann auch sofort die Verallgemeinerung:

Korollar 5.5.3. *Sei K algebraisch abgeschlossener Körper und V eine Varietät des affinen Raumes $\mathbb{A}^n(K)$ sowie $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ mit Varietäten $V_i \neq \varnothing$ und $F\colon V \to V$ eine Abbildung von V in sich derart, daß $F|V_i$ jeweils eine Polynomabbildung ist. Wenn F injektiv ist, so auch surjektiv.* □

5.5.2. Hilbertscher Nullstellensatz. Wie in §4.2 angekündigt, kann man mit Hilfe der Q.E. für die Klasse $\mathcal{AAK}$ nun leicht den Hilbertschen Nullstellensatz beweisen. Dies sieht man, indem man die aus der Substrukturvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$ folgende Modellvollständigkeit ausnutzt und dann etwa wie in Bem. 4.2.5 argumentiert, wo bereits die „Äquivalenz" von Modellvollständigkeit der $\mathcal{AAK}$ und des Nullstellensatzes erörtert wurde. Tatsächlich können wir nun sogar eine ebenfalls von Robinson [**124**] gefundene Verschärfung beweisen, die die Existenz uniformer Schranken für die Grade der auftretenden Polynome betrifft. Ist L/K eine Körpererweiterung, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$, $V \subseteq L^n$, so schreiben wir $V_L(\mathfrak{a})$ für

$$\left\{\mathbf{a} \in L^n : f(\mathbf{a}) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\right\}$$

und $I_K(V)$ für

$$\left\{f \in K[X_1, \ldots, X_n] : f(\mathbf{a}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{a} \in V\right\}.$$

(Also $V(\mathbf{a}) = V_K(\mathbf{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$, $I(V) = I_K(V)$ für $V \subseteq K^n$.)

Satz 5.5.4. *Es existiert eine Funktion $\sigma\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß für alle Körper K und alle Polynome $f, g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad $\leq d$, für die $V_L(f) \supseteq V_L(g_1, \ldots, g_k)$ in einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper L von K, gilt: Es existieren Polynome $h_1, \ldots, h_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad $\leq \sigma(n, d)$ mit $f^{\sigma(n,d)} = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$.*

Wir zeigen zunächst folgende Variante des Nullstellensatzes, bei der wir von einem beliebigen Grundkörper K ausgehen:

Satz 5.5.5. *Sei L/K eine Körpererweiterung, L algebraisch abgeschlossen, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt $I_K(V_L(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Wähle $g_1, \ldots, g_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\mathfrak{a} = (g_1, \ldots, g_k)$. Daß zunächst $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I_K(V_L(\mathfrak{a}))$, ist klar. Umgekehrt sei

$$f \in K[X_1, \ldots, X_n] \quad \text{mit} \quad V_L(f) \supseteq V_L(g_1, \ldots, g_k).$$

Zu zeigen ist, daß ein $m \in \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_k \in K[X_1, \ldots, X_n]$ existieren mit $f^m = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$. Wir verwenden den Rabinowitsch-Trick und stellen fest, daß $g_1, \ldots, g_k, 1 - fZ$ (mit der neuen Variablen Z) keine gemeinsame Nullstellen in L besitzen. Wäre $(g_1, \ldots, g_k, 1 - fZ) \neq K[X_1, \ldots, X_n, Z]$, so gäbe es nach Lemma 4.2.6 einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper M von K, in dem $g_1, \ldots, g_k, 1 - fZ$

eine gemeinsame Nullstelle besitzen, im Widerspruch zur Substrukturvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$. Also existieren $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_{k+1} \in K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \tilde{h}_i g_i + \tilde{h}_{k+1}(1 - fZ).$$

Sei jetzt $\varphi\colon K[X_1, \ldots, X_n, Z] \to K(X_1, \ldots, X_n)$ der K-Algebrenhomomorphismus mit $\varphi(X_i) := X_i$, $\varphi(Z) := 1/f$. Es gilt dann

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\tilde{h}_i) g_i \qquad \text{mit } \varphi(\tilde{h}_i) = \frac{\overline{h}_i}{f^{m_i}},\ \overline{h}_i \in K[X_1, \ldots, X_n],\ m_i \in \mathbb{N}_0.$$

Mit $m := \max\{m_1, \ldots, m_k\}$ folgt

$$f^m = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i \qquad \text{mit } h_i := \overline{h}_i f^{m-m_i} \in K[X_1, \ldots, X_n],$$

wie gewünscht. □

Damit:

Beweis (Satz 5.5.4). Die Polynome vom Grad $\leq d$ bilden einen K-Vektorraum V der Dimension $\delta(d)$, wobei $\delta(d)$ der Anzahl der Monome in $X_1, \ldots, X_n$ vom Grad $\leq d$ entspricht. Für das Ideal $\mathfrak{a} := (g_1, \ldots, g_k)$ hat dann $V \cap \mathfrak{a}$ (als K-Vektorraum) Dimension $\leq \delta(d)$; wir können also o.B.d.A. $k \leq \delta(d)$ annehmen. Die Aussage, daß es Polynome $h_1, \ldots, h_k$ vom Grad $\leq m$ gibt mit $f^m = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i$, läßt sich als $L(K)$-Formel $\varphi_m \in \exists_1$ über die Existenz der Koeffizienten der h_i elementar formulieren. Die Aussage, daß $V_L(f) \supseteq V_L(\mathfrak{a})$ für einen (und damit alle) algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $L \supseteq K$, ist bzgl. $\mathcal{AAK}$ äquivalent zu einem quantorenfreien $L(K)$-Satz ϱ; ϱ gilt in K genau dann, wenn $V_L(f) \supseteq V_L(\mathfrak{a})$. Also folgt aus Satz 5.5.5 (wobei Σ ein L-Axiomensystem für die Körper sei)

$$\Sigma \cup \{\varrho\} \models \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m.$$

Nach Kor. 2.4.3 existiert jetzt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\Sigma \cup \{\varrho\} \models \bigvee_{m \leq m_0} \varphi_m.$$

Wegen $\Sigma \models (\varphi_m \to \varphi_{m'})$ für $m \leq m'$ haben wir sogar $\Sigma \cup \{\varrho\} \models \varphi_{m_0}$, und mit $\sigma(n, d) := m_0$ die gesuchte uniforme Schranke, die nur von n, d abhängt. □

(Mehr über die Anwendung der Modelltheorie zum Nachweis der Existenz uniformer Schranken findet man z.B. in [**74**], §7 und [**8**], §11.4.)

Als weitere Anwendung der erzielten Ergebnisse werden wir nun zwei fundamentale Sätze der algebraischen Geometrie auf modelltheoretische Weise herleiten: Den „Hauptsatz der klassischen Eliminationstheorie“ und den Satz von Chevalley über konstruktible Mengen im affinen Raum. Der Beweis des ersten Satzes verwendet lediglich den zweiten Persistenzsatz, für den zweiten benötigen wir die Q.E. für $\mathcal{AAK}$.

5.5.3. Der Hauptsatz der Eliminationstheorie*. In diesem Beispiel werden Grundkenntnisse der kommutativen Algebra vorausgesetzt; es sei deshalb hier nur an die Definition einer projektiven Varietät erinnert: Der n-dimensionale *projektive Raum* $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K)$ über einem Körper K ist bekanntlich die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume („Geraden durch den Nullpunkt") in K^{n+1}. Ein Punkt $x \in \mathbb{P}^n(K)$ kann durch ein $(n+1)$-Tupel $(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ im K^{n+1} dargestellt werden, und $(x'_0, \ldots, x'_n) \in K^{n+1}$ definiert denselben Punkt d.u.n.d. wenn es ein $\lambda \in K^*$ gibt mit $(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, \ldots, x'_n)$; die Äquivalenzklasse von $(x_0, \ldots, x_n)$ bzgl. der dadurch definierten Äquivalenzrelation auf $K^{m+1} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir mit $[x_0 : \ldots : x_n]$ und nennen $(x_0, \ldots, x_n)$ ein System *homogener Koordinaten* von x. Kanonisch ist $\mathbb{A}^n(K) \subseteq \mathbb{P}^n$ vermöge $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$. Ist $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$, so heißt f *homogen,* falls ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in K^{n+1}$, $\lambda \in K$; ein Punkt $x \in \mathbb{P}^n(K)$ mit homogenen Koordinaten $[x_0 : \ldots : x_n]$ heißt *Nullstelle* von f, falls $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ (da f homogen ist, ist dies offenbar wohldefiniert). $V \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ wird eine *projektive algebraische K-Varietät* oder *projektive algebraische Mannigfaltigkeit* genannt, falls es homogene Polynome $f_1, \ldots, f_m \in K[X_0, \ldots, X_n]$ gibt, so daß V die Menge aller gemeinsamen Nullstellen von f_i in $\mathbb{P}^n(K)$ ist. Eine Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen projektiven Varietäten $V \subseteq \mathbb{P}^m$, $W \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt (*homogen*) *polynomial,* falls homogene $f_0, \ldots, f_n \in K[X_0, \ldots, X_m]$ mit gleichem Grad $d \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß $F(c) = [f_0(c) : \ldots : f_n(c)]$ für alle $c \in V$. (Insbesondere ist $V \cap V(f_0, \ldots, f_n) = \varnothing$.)

Für grundlegende Eigenschaften affiner bzw. projektiver K-Varietäten vgl. [**33**], Chap. I, oder [**38**]. Insbesondere sei daran erinnert, daß die affinen (projektiven) K-Varietäten die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n$ (bzw. $\mathbb{P}^n$) sind, der sog. *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{A}^n$ (bzw. $\mathbb{P}^n$). Für die Beschreibung des sog. *Segre-Produkts* $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ zweier projektiver Varietäten gilt: $V \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist genau dann abgeschlossen, wenn k Polynome $f_i \in K[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m]$ $(1 \leq i \leq k)$ existieren, so daß die f_i homogen in den $X_0, \ldots, X_n$ und den $Y_0, \ldots, Y_m$ getrennt sind und V die Menge der Nullstellen von $f_1, \ldots, f_k$ ist (vgl. etwa [**38**], I, Th. 5.1). Analoges gilt für das Produkt $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ eines projektiven und eines affinen Raums: $V \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ ist abgeschlossen genau dann, wenn in $X_0, \ldots, X_n$ homogene Polynome $f_1, \ldots, f_k \in K[X_0, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ existieren, deren Nullstellenmenge gerade V ist.

Damit können wir formulieren:

Hauptsatz der klassischen Eliminationstheorie. *Ist V eine* (*projektive oder affine*) *Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und W eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $V \times \mathbb{P}^n$, so ist das Bild von W unter der Projektion auf V ebenfalls Zariski-abgeschlossen.*

Wir verschieben den Beweis, bis wir einige technische Hilfsmittel bereitgestellt haben.— Man bemerkt sofort, daß allgemeiner gilt:

Korollar 5.5.6. *Das Bild einer projektiven Varietät unter einer polynomialen Abbildung ist abgeschlossen. Genauer: Sind $V \subseteq \mathbb{P}^m$ und $W \subseteq \mathbb{P}^n$ projektive Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und $\pi\colon K^{m+1} \to K^{n+1}$ eine polynomiale Abbildung mit $\pi(V) \subseteq W$, dann ist $\pi(V)$ eine abgeschlossene Teilmenge von W in der Zariski-Topologie.*

Beweis. Sei $X := \{(\pi(x), x) : x \in V\} \subseteq W \times V$ der Graph von $\pi|V$. Da $\pi(V)$ gleich dem Bild von X unter der Projektion auf W ist, reicht es zu zeigen, daß X

abgeschlossen ist in $W \times V$. Das Produkt $W \times W$ ist eine abgeschlossene Teilmenge im projektiven Raum $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, ebenso die Diagonale

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} := \{(x, x) : x \in \mathbb{P}^n\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n.$$

(Für $x = [x_0 : \ldots : x_n]$ und $y = [y_0 : \ldots : y_n]$ aus $\mathbb{P}^n$ ist $(x, y) \in \Delta_{\mathbb{P}^n}$ gdw. $x_i y_j = x_j y_i$ für alle $i, j = 0, \ldots, n$.) Damit ist auch

$$\Delta_W := \Delta_{\mathbb{P}^n} \cap W \times W \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$$

abgeschlossen. Aber X ist nun das Urbild von Δ_W in $W \times V$ unter der polynomialen Abbildung id $\times \pi$ und also abgeschlossen. $\square$

Der Leser macht sich durch den Versuch, etwa das Bild von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ unter der Abbildung

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\ [x : y] \mapsto [x^3 : x^2 y + xy^2 : y^3]$$

durch Polynome zu beschreiben, leicht klar, daß damit ein nichttrivialer Sachverhalt postuliert wird.

Für affine Varietäten ist der Satz i.a. falsch: $V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist abgeschlossen, aber die Projektion etwa auf die erste Komponente ist $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ und also keine abgeschlossene Teilmenge.

Zur Vorbereitung für den Beweis des Hauptsatzes benötigen wir ein Ergebnis über die Erweiterung von Ringhomomorphismen. Dabei nennen wir einen Unterring R eines Körpers K — aus hier nicht näher zu diskutierenden Gründen, vgl. [**34**], VII, §3, XII — einen *Bewertungsring* in K, falls für jedes $x \in K^*$ stets $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$ ist. Auf K definiere man eine Teilbarkeitsrelation durch $x|y$ gdw. $xz = y$ für ein $z \in R$ $(x, y \in R)$. Damit hat man eine totale, reflexive und transitive Relation mit $1|0$ und den Eigenschaften

$$x|y \ \Rightarrow\ xz|yz,\quad z|x \wedge z|y \ \Rightarrow\ z|x + y \quad \text{für alle } x, y, z \in K,$$

eine sog. *Bewertungsteilbarkeit* auf K.— Im folgenden seien R, T kommutative Ringe (mit 1). (Kommutative Ringe seien im weiteren Verlauf des Skriptums immer mit 1 zu verstehen, auch wenn dies hinfort nicht mehr stets explizit erwähnt wird.)

Proposition 5.5.7. *Sei R Unterring von T und T ganz über R. Sei $\varphi\colon R \to K$ ein Homomorphismus in einen algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann besitzt φ eine Erweiterung zu einem Homomorphismus von T nach K.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ der Kern von φ, $S := R \setminus \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal in R. Wir haben das kommutative Diagramm (mit Injektionen $R \hookrightarrow R_\mathfrak{p}$, $T \hookrightarrow S^{-1}T$)

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & S^{-1}T \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & S^{-1}R = R_\mathfrak{p} \end{array}$$

und wir können φ zu einem Homomorphismus $\varphi\colon R_\mathfrak{p} \to K$ erweitern vermöge $\varphi(x/y) := \varphi(x)/\varphi(y)$ für $x \in R$, $y \in S$. Es ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \{x/y : x \in \mathfrak{p}, y \notin \mathfrak{p}\} = \ker(\varphi)$. Ferner ist auch $S^{-1}T$ ganz über $S^{-1}R$. Also kann man o.B.d.A. schon von vornherein R als lokalen Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker(\varphi)$ annehmen. Nach dem "going-up"-Theorem ([**33**], Prop. 2.10) existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ von T über $\mathfrak{m}$, d.h. so daß $\mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{m}$. Dann sind $T/\mathfrak{M}$ und $R/\mathfrak{m}$ Körper, und $T/\mathfrak{M}$ ist algebraisch über $R/\mathfrak{m}$; ferner ist $R/\mathfrak{m}$ isomorph zu dem Unterkörper $\varphi(R)$ von K, da $\ker(\varphi) = \mathfrak{m}$; also existiert ein Isomorphismus

$\psi\colon R/\mathfrak{m} \to \varphi(R)$, $r + \mathfrak{m} \mapsto \varphi(r)$, so daß die Komposition $R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\psi} K$ mit φ identisch ist ist. Nun kann man wegen $T/\mathfrak{M}$ algebraisch über $R/\mathfrak{m}$ ein $\psi'\colon T/\mathfrak{M} \to K$ finden, das

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & T/\mathfrak{M} & \xrightarrow{\psi'} & K \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \mathrm{id} \\ R & \longrightarrow & R/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\psi} & K \end{array}$$

kommutativ macht, und damit einen φ fortsetzenden Homomorphismus $T \to K$. $\square$

Satz 5.5.8. *Sei R ein Unterring eines Körper K und $x \in K^*$. Sei $\varphi\colon R \to L$ ein Homomorphismus von R in einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann besitzt φ eine Fortsetzung zu einem Homomorphismus von $R[x]$ oder $R[x^{-1}]$ nach L.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} = \ker\varphi$. Da man φ zu einem Homomorphismus $\varphi\colon R_\mathfrak{p} \to L$ fortsetzen kann, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker\varphi$ ist. Angenommen nun, $\mathfrak{m}R[x^{-1}] = R[x^{-1}]$. Dann schreiben wir

$$1 = a_0 + a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n} \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{m}.$$

Multiplikation mit x^n ergibt

$$(1 - a_0)x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_n = 0.$$

Da $a_0 \in \mathfrak{m}$, ist $(1 - a_0) \notin \mathfrak{m}$ und also $(1 - a_0)$ eine Einheit, weil R lokal. Teilt man durch $1 - a_0$, so sieht man, daß x ganz über R ist, und damit kann φ nach Prop. 5.5.7 auf $R[x]$ fortgesetzt werden. (Vgl. [**33**], II, Cor. 2.3, 2.4.)

Ist andererseits $\mathfrak{m}R[x^{-1}] \neq R[x^{-1}]$, so existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ von $R[x^{-1}]$ mit $\mathfrak{m}R[x^{-1}] \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{M} \cap R$. Da $\mathfrak{m}$ maximal und $\mathfrak{M} \cap R \neq R$, ist $\mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{m}$. Man definiert nun die Einbettung $\psi\colon R/\mathfrak{m} \to L$, $r + \mathfrak{m} \mapsto \varphi(r)$, so daß die zusammengesetzte Abbildung $R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \xrightarrow{\psi} L$ gleich φ ist. Es ist kanonisch $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow T/\mathfrak{M}$, wobei $T := R[x^{-1}]$, und man kann ψ zu einem Homomorphismus $\psi\colon T/\mathfrak{M} \to L$ erweitern, gleichgültig, ob $x^{-1} + \mathfrak{M}$ algebraisch oder transzendent über $R/\mathfrak{m}$ ist. Damit liefert die Komposition $T \longrightarrow T/\mathfrak{M} \xrightarrow{\psi} L$ das Gewünschte. $\square$

Korollar 5.5.9. *Sei R Unterring eines Körpers K und $\varphi\colon R \to L$ ein Homomorphismus in den algebraisch abgeschlossenen Körper L. Sei T maximaler Unterring von K, so daß $R \subseteq T$ und φ auf T fortgesetzt werden kann. Dann ist T ein lokaler Bewertungsring.*

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Paare (A, ψ), wobei A ein Unterring von K mit $R \subseteq A$ und der Homomorphismus $\psi\colon A \to L$ eine Fortsetzung von φ ist. Dann ist $\mathcal{S} \neq \varnothing$ wegen $(R, \varphi) \in \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ in offensichtlicher Weise induktiv geordnet bzgl. Inklusion und Restriktion. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $(T, \gamma) \in \mathcal{S}$. Dann ist T lokal, da man sonst γ auf $T_\mathfrak{p} \subseteq K$ mit $\mathfrak{p} := \ker\varphi$ fortsetzen könnte, und wegen dem vorhergehenden Satz 5.5.8 ist für $x \neq 0$ stets $x \in T$ oder $x^{-1} \in T$. $\square$

Daß der Ring T aus dem letzten Korollar lokal ist, ist nicht verwunderlich, denn es gilt:

Bemerkung. Jeder Bewertungsring ist ein lokaler Ring.

Beweis. Sei $A \subseteq K$ ein Bewertungsring des Körpers K. Wir zeigen, daß $\mathfrak{m} := A \setminus A^*$ ein Ideal von A ist. Für alle $a \in A$ ist $a\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Sind ferner $0 \neq a, b \in \mathfrak{m}$, o.B.d.A. $ab^{-1} \in A$, so ist $a - b = (ab^{-1} - 1)b \in \mathfrak{m}$. $\mathfrak{m}$ ist also ein Ideal, und damit das eindeutig bestimmte maximale Ideal von A. □

Insbesondere besagt der Beweis des Korollars, daß man einen Ringhomomorphismus von einem Unterring eines Körpers K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper stets auf einen Bewertungsring in K fortsetzen kann. Dies ist die Tatsache, die wir im Beweis des Hauptsatzes der Eliminationstheorie benötigen.

Beweis des Hauptsatzes (nach **[68]**). Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir haben zu zeigen:

> Sind die Polynome $f_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \ldots, f_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in K[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ mit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$, $\mathbf{Y} = (Y_0, \ldots, Y_n)$ homogen in $(Y_0, \ldots, Y_n)$, so existieren Polynome $g_1(\mathbf{X}), \ldots, g_l(\mathbf{X}) \in K[\mathbf{X}]$ derart, daß für jedes $\mathbf{c} \in K^m$ das System $f_1(\mathbf{c}, \mathbf{Y}) = \cdots = f_k(\mathbf{c}, \mathbf{Y}) = 0$ genau dann eine nichttriviale Lösung in K besitzt, falls $g_1(\mathbf{c}) = \cdots = g_l(\mathbf{c}) = 0$.

(Im Fall der Projektion auf eine projektive Varietät benötigt man homogene Polynome g_i; durch Zerlegen der g_i in homogene Komponenten kann man solches stets erreichen.)

Sei dazu

$$\varphi(\mathbf{X}) := \exists \mathbf{Y} \left(\bigvee_{j=1}^{m} Y_j \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} f_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \right).$$

φ ist eine $L(K)$-Formel; durch Ersetzen der Konstanten aus K durch neue Variable $Z_1, \ldots, Z_p$ können wir φ in eine L-Formel umformen. Wir müssen beweisen, daß $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ in $\mathcal{AAK}$ äquivalent ist zu einer positiv quantorenfreien Formel. Nach Kor. 5.1.2, (i) reduziert sich dies auf den Nachweis, daß für einen beliebigen Homomorphismus $f \colon R \to L$ von einem Unterring R eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L und $\mathbf{c} \in R^m$, $\mathbf{d} \in R^p$ gilt: Hat das System

$$f_1(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{Y}) = \cdots = f_k(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{Y}) = 0$$

eine nichttriviale Lösung in k, so hat das System

$$f_1(f(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \mathbf{Y}) = \cdots = f_k(f(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \mathbf{Y}) = 0$$

eine nichttriviale Lösung in L. Wegen Kor. 5.5.9 können wir o.B.d.A. R bereits als Bewertungsring in k annehmen. Multipliziert man eine nichttriviale Lösung in k mit einer geeigneten Konstanten λ, so kann man eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \in R^{n+1}$ erhalten, bei der mindestens eine Koordinate x_i in R invertierbar ist. (Ist $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ und m maximal bzgl. der Bewertungsteilbarkeit unter den nichtverschwindenden x_i, so wähle $\lambda := 1/m$.) Wendet man nun f auf $f_1(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}) = \cdots = f_k(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x}) = 0$ an, so erhält man eine Lösung $f(\mathbf{x})$ von $f_1(f(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \mathbf{Y}) = \cdots = f_k(f(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \mathbf{Y}) = 0$ in L, und f bildet die invertierbare Koordinate von $\mathbf{x}$ auf ein von Null verschiedenes Element von L ab. □

5.5.4. Der Satz von Chevalley. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir nennen die Elemente der Booleschen Mengenalgebra, die von den Mengen der Form

$$\big\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n(K): f(a_1,\dots,a_n)=0\big\}\subseteq\mathbb{A}^n(K)\quad\text{mit } f\in K[X_1,\dots,X_n]$$

(den affinen *Hyperflächen*) im $\mathbb{A}^n(K)$ erzeugt wird, *konstruktible Mengen.* Die konstruktiblen Mengen sind offensichtlicherweise genau die durch quantorenfreie $L(K)$-Formeln definierbaren Mengen (wobei L die Sprache der Ringe bezeichne). Damit gilt [**35**]:

SATZ 5.5.10. (Chevalley) *Sei K algebraisch abgeschlossen, $m<n$ aus $\mathbb{N}$. Jede Projektion einer konstruktiblen Menge aus $\mathbb{A}^n(K)$ auf $\mathbb{A}^m$ ist konstruktibel in $\mathbb{A}^m$.*

BEWEIS. Ist $X\subseteq\mathbb{A}^n(K)$ etwa durch die q.f. Formel $\varphi(X_1,\dots,X_n)$ definiert, so ist die Projektion auf $\mathbb{A}^m\hookrightarrow\mathbb{A}^m\times 0\subseteq\mathbb{A}^n$ definiert durch die Formel

$$\psi(X_1,\dots,X_m):=\exists X_{m+1}\cdots\exists X_n\big(\varphi(X_1,\dots,X_n)\big).$$

Man ersetzt in ψ die Konstanten aus K durch neue Variable $Z_1,\dots,Z_k$ und erhält die L-Formel ψ'. Wegen Satz 5.3.1 ist diese in $\mathcal{AAK}$ wieder äquivalent zu einer quantorenfreien Formel ϱ', und nach Wiedereinsetzen der Konstanten anstelle der Z_i erhält man eine zu ψ in $\mathcal{AAK}$ äquivalente q.f. $L(K)$-Formel ϱ. □

Eine Funktion $\pi\colon\mathbb{A}^n(K)\to\mathbb{A}^m(K)$ heißt *konstruktibel,* wenn es ihr Graph in $\mathbb{A}^{n+m}(K)$ ist. Ähnlich wie nach dem Hauptsatz der Eliminationstheorie folgt:

KOROLLAR 5.5.11. *Das Bild einer konstruktiblen Menge unter einer konstruktiblen Abbildung ist konstruktibel.*

BEWEIS. Seien $X\subseteq\mathbb{A}^n(K)$ und $\pi\colon\mathbb{A}^n(K)\to\mathbb{A}^m(K)$ konstruktibel mit definierender q.f. $L(K)$-Formel $\varphi(X_1,\dots,X_n)$ bzw. $\psi(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$. Dann ist $\pi(X)$ gegeben als die Projektion der Menge $\tilde{X}:=\{(\pi(x),x):x\in X\}\subseteq\mathbb{A}^{m+n}$ auf $\mathbb{A}^m$, so daß es reicht, die Konstruktibilität von $\tilde{X}$ einzusehen. Aber $\tilde{X}=G_f\cap\mathbb{A}^m\times X$ mit den beiden konstruktiblen Mengen $G_f=\{(\pi(x),x):x\in\mathbb{A}^m\}$, definiert durch ψ, und $\mathbb{A}^m\times X$, definiert durch φ. □

5.6. Die Amalgamierungseigenschaft

Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse. Wir beschäftigen uns mit der Frage: Unter welchen einschränkenden Bedingungen ist $\mathcal{K}$ modellvollständig genau dann, wenn $\mathcal{K}$ substrukturvollständig ist? Als eine solche Bedingung stellt sich die sog. Amalgamierungseigenschaft von $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ heraus.

DEFINITION 5.6.1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Dann hat $\mathcal{K}$ die *Amalgamierungseigenschaft (A.E.),* falls für alle $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}\in\mathcal{K}$ mit Einbettungen $\mathfrak{B}\overset{f}{\hookrightarrow}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\overset{g}{\hookrightarrow}\mathfrak{C}$ gilt: Es existieren $\mathfrak{D}\in\mathcal{K}$ und Einbettungen $\mathfrak{A}\overset{h}{\hookrightarrow}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}\overset{k}{\hookrightarrow}\mathfrak{D}$, so daß $h\circ f=k\circ g$, d.h. derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{A} \arrow[d, "\exists h"] \\ \mathfrak{C} \arrow[r, "\exists k"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

Bemerkung 5.6.2. Sei $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter Isomorphismen. Dann hat $\mathcal{K}$ die A.E. d.u.n.d., wenn für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, $B = A \cap C$ gilt: Es gibt Einbettungen $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $k\colon \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ in ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ mit $h|B = k|B$.

Beweis. Die angegebene Eigenschaft ist zunächst ein Spezialfall der A.E. ($f = \mathrm{id}_B$, $g = \mathrm{id}_B$). Falls allgemein $\mathfrak{A} \overset{f}{\hookleftarrow} \mathfrak{B} \overset{g}{\hookrightarrow} \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, so existieren $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}' \cong \mathfrak{C}$, so daß $A' \cap C' = B$, und mit Voraussetzung haben wir Einbettungen $h'\colon \mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $k'\colon \mathfrak{C}' \hookrightarrow \mathfrak{D}$ mit $h'|B = k'|B$. Wähle $i\colon \mathfrak{A} \overset{\cong}{\to} \mathfrak{A}'$ und $j\colon \mathfrak{C} \overset{\cong}{\to} \mathfrak{C}'$ mit $i|B = f^{-1}|B$, $j|B = g^{-1}|B$, und setze einfach $h := h' \circ i\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$, $k := k' \circ j\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$. Wir wissen, daß $i \circ f = \mathrm{id}_B = j \circ g$, also $h \circ f = h' \circ i \circ f = h' \circ \mathrm{id}_B = h'|B$, ebenso $k \circ g = k'|B$, somit $h \circ f = k \circ g$. $\square$

Satz 5.6.3. *Sei $\mathcal{K}$ elementare Klasse von L-Strukturen. Dann ist $\mathcal{K}$ substrukturvollständig genau dann, wenn $\mathcal{K}$ modellvollständig ist und* $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ *die A.E. besitzt.*

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{K}$ modellvollständig, und $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ habe die A.E.; seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine erweiterte L-Formel, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Zu zeigen ist: $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ impliziert $\mathfrak{C} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Mit A.E. existiert ein $\mathfrak{D} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ und Einbettungen $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $k\colon \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, so daß $h|B = k|B$. Es gibt nun $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{E} \in \mathcal{K}$ wegen $\mathfrak{D} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$. Die Abbildungen $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{E}$, $k\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{E}$ erhalten wegen der Modellvollständigkeit alle L-Formeln; da $\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$, folgt $\mathfrak{E} \models \varphi(h(b_1), \ldots, h(b_n))$. Aber $\varphi(h(b_1), \ldots, h(b_n)) = \varphi(k(b_1), \ldots, k(b_n))$. Damit erhalten wir $\mathfrak{C} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$.

Sei jetzt $\mathcal{K}$ substrukturvollständig, also auch modellvollständig. Zu zeigen bleibt die A.E. für $\mathrm{S}(\mathcal{K})$.— Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, $B = A \cap C$. Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer L-Satzmenge Σ. O.B.d.A. seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$. Wir behaupten: $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{C}, C)$ hat ein Modell (bzgl. $L(A \cup C)$). Hieraus folgt dann: Falls $\mathfrak{D}'$ ein Modell dieser Menge ist und $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}'|L$, so ist $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$, und mit dem Diagrammlemma existieren Einbettungen $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $k\colon \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, so daß für alle $b \in B$ gilt: $h(b) = \overline{b}^{\mathfrak{D}'} = k(b)$, d.h. $h|B = k|B$.— Es bleibt der Beweis der Behauptung: Angenommen, $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{C}, C)$ hat kein Modell; damit erhält man via Kompaktheitssatz auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathsf{Ba}$, paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_k \in A \setminus B$, $b_1, \ldots, b_l \in B$ sowie $c_1, \ldots, c_p \in C \setminus B$, so daß mit paarweise verschiedenen Variablen $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_l$, $z_1, \ldots, z_p$ und

$$\begin{aligned} \varphi_i' &:= \varphi_i[\overline{b}_1/y_1, \ldots, \overline{b}_l/y_l], & \varphi_i'' &:= \varphi_i'[\overline{a}_1/x_1, \ldots, \overline{a}_k/x_k], \\ \psi_i' &:= \psi_i[\overline{b}_1/y_1, \ldots, \overline{b}_l/y_l], & \psi_i'' &:= \psi_i'[\overline{c}_1/z_1, \ldots, \overline{c}_p/z_p] \end{aligned}$$

gilt: Zwar sind alle $\varphi_i'' \in \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$, $\psi_j'' \in \mathrm{D}(\mathfrak{C}, C)$, aber $\Sigma \models \neg(\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i'' \wedge \bigwedge_{j=1}^n \psi_j'')$. Damit folgt

$$\Sigma \models \neg \exists x_1 \cdots \exists x_k \exists z_1 \cdots \exists z_p \left(\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i' \wedge \bigwedge_{j=1}^n \psi_j' \right),$$

sogar

$$\Sigma \models \forall y_1 \cdots \forall y_l \left(\neg \left(\exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i \right) \wedge \exists z_1 \cdots \exists z_p \left(\bigwedge_{j=1}^m \psi_j \right) \right) \right),$$

also mit $\varphi := \exists x_1 \cdots \exists x_k (\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i)$ und $\psi := \exists z_1 \cdots \exists z_p (\bigwedge_{j=1}^m \psi_j)$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_l), \quad \mathfrak{C} \models \psi(b_1, \ldots, b_l),$$

wobei $\varphi(y_1, \ldots, y_l)$, $\psi(y_1, \ldots, y_l)$ erweiterte Formeln zu φ und ψ seien. Da $\mathcal{K}$ substrukturvollständig ist, folgt $\mathfrak{C} \models (\varphi \wedge \psi)(b_1, \ldots, b_l)$; aber $\mathfrak{C} \models \Sigma$, Widerspruch. $\square$

Als Anwendungsbeispiel betrachte man etwa die Klasse $\mathcal{I}$ aller Integritätsbereiche. Da $\mathcal{I} = \mathrm{S}(\mathcal{AAK})$, erhält man aus Satz 5.6.3 die A.E. für $\mathcal{I}$.

Für die nächste Übung definieren wir:

Definition 5.6.4. Eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *ultrahomogen,* falls jeder Isomorphismus zwischen endlich erzeugten Substrukturen von $\mathfrak{A}$ zu einem Automorphismus von $\mathfrak{A}$ fortgesetzt werden kann.

Übung. Sei $\mathfrak{A}$ eine feste endliche L-Struktur. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ isomorphen L-Strukturen.

(i) Sei L endlich. Man zeige: Es ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$, und $\mathcal{K}$ ist eine modellvollständige elementare Klasse. Ferner ist $\mathcal{K}$ substrukturvollständig genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ ultrahomogen ist.

(ii) Man bearbeite (i) für eine beliebige Sprache L.

Ist $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, so sagen wir, $\mathfrak{A}$ *erlaubt Quantorenelimination,* falls dies für $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A})) = \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$ zutrifft. Als Korollar zur letzten Übung erhalten wir:

Korollar 5.6.5. *Jeder endliche Körper K erlaubt Q.E.*

Beweis. Wir haben die Ultrahomogenität von K nachzuweisen. Seien R, S isomorphe Unterringe von K; jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper, also sind R, S Körper. Sei $f\colon R \xrightarrow{\cong} S$; wir müssen zeigen, daß sich f zu einem Automorphismus von K fortsetzen läßt. Da $\mathrm{card}(R) = \mathrm{card}(S)$, sind die multiplikativen Gruppen von R, S dieselbe Untergruppe der multiplikativen Gruppe von K, die eine endliche zyklische Gruppe ist; es folgt $R = S$. Damit müssen wir nur zeigen, daß sich jeder Automorphismus eines Teilkörpers $L \subseteq K$ auf K fortsetzen läßt. Sei $F \subseteq L$ der Primkörper von K, etwa $F = \mathbb{F}_p$, $p := \mathrm{char}\, K$, sowie $L = \mathbb{F}_{p^n}$, $K = \mathbb{F}_{p^k}$ mit $n|k$. $\mathrm{Aut}(L)$ und $\mathrm{Aut}(K)$ sind zyklisch von Ordnung n bzw. k ([**34**], V, Th. 5.4) und werden jeweils vom Frobenius-Automorphismus $\varphi_n\colon L \to L, x \mapsto x^p$ bzw. $\varphi_k\colon K \to K, x \mapsto x^p$ erzeugt; aber $\varphi_k|L = \varphi_n$, und die Behauptung folgt. $\square$

5.7. Der Satz von Macintyre-McKenna-van den Dries*

Wir haben gesehen, daß $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, $p > 0$ prim, sowie jeder endliche Körper K bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ Q.E. erlauben (Satz 5.3.1, Kor. 5.6.5); es gilt auch die Umkehrung.

Satz 5.7.1. (Macintyre-McKenna-van den Dries, [**105**]) *Sei K ein Körper. Genau dann erlaubt K Q.E., wenn K endlich oder algebraisch abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei K ein unendlicher Körper mit Q.E.; mit dem Satz von Löwenheim-Skolem „aufwärts“ (vgl. §9.4) können wir annehmen, daß K unendlichen Transzendenzgrad über seine Primkörper besitzt (s. auch Bem. 4.2.7). Wir zeigen zunächst:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \in K$ hat $X^n - a$ eine Nullstelle in K.

Denn wähle θ algebraisch unabhängig von a; dann ist auch θ^n algebraisch unabhängig von a, und $X^n - \theta^n$ hat die Nullstelle θ. Mit Q.E. folgt, daß jedes von a algebraisch unabhängige Element eine n-te Wurzel besitzt, da alle solche Elemente dieselben quantorenfreien Formeln über $L(\{a\})$ erfüllen. Insbesondere hat $a\theta^n$ eine n-te Wurzel $b\theta$ mit $b^n = a$, und dies zeigt (1.).

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und algebraisch unabhängige Elemente $a_1, \dots, a_n \in K$ hat
$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$
eine Nullstelle in K.

Denn wähle $b_0, \dots, b_{n-1} \in K$ algebraisch unabhängig, $p := \prod_{i=0}^{n-1}(X - b_i)$; schreibe
$$p = X^n + s_1 X^{n-1} + \dots + s_n,$$
wobei die $s_1, \dots, s_n$ algebraisch unabhängig über K sind; es handelt sich nämlich (bis auf das Vorzeichen) um die elementarsymmetrischen Funktionen in $b_0, \dots, b_{n-1}$ ([**34**], IV, §6). p hat Nullstellen in K; mit Q.E. folgt, daß auch f eine Nullstelle in K besitzen muß, weil $a_1, \dots, a_n$ denselben quantorenfreien Formeln wie $s_1, \dots, s_n$ genügen muß. (2.) ist bewiesen.

Angenommen nun, K wäre nicht algebraisch abgeschlossen, $K(\alpha) \supsetneq K$ eine echte algebraische Erweiterung von K mit Minimalpolynom p, $\operatorname{grad} p =: n$. Da K nach (1.) vollkommen ist, ist p separabel, und α besitzt n paarweise verschiedene Konjugierte $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. Wähle algebraisch unabhängige Elemente $t_0, \dots, t_{n-1}$ von K und setze
$$f := \prod_{i=0}^{n-1} \left(X - \sum_{j=0}^{n-1} t_j \alpha_i^j \right).$$
f ist aus $K[t_0, \dots, t_{n-1}][X]$, denn es ist symmetrisch in den α_i, mithin als Polynom der elementarsymmetrischen Funktionen in $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ darstellbar ([**34**], IV, Th. 6.1); diese sind aber die Koeffizienten von p, also aus K. Damit können wir f schreiben als
$$f = X^n + g_1 X^{n-1} + \dots + g_n \qquad \text{mit } g_i \in K[t_0, \dots, t_{n-1}].$$
Wir behaupten:

3. Die g_i sind algebraisch unabhängig über K.

Um dies einzusehen, reicht es zu zeigen, daß $K(g_1, \dots, g_n)$ Transzendenzgrad n über K besitzt, also wegen $\operatorname{trdeg}(K(t_0, \dots, t_{n-1})/K) = n$,
$$K(t_0, \dots, t_{n-1}) \supseteq K(g_1, \dots, g_n) \supseteq K$$
und der Transzendenzgradformel ([**34**], VIII, Exercise 3), daß jedes t_i algebraisch über $K(g_1, \dots, g_n)$ ist. Seien $\varrho_0, \dots, \varrho_{n-1}$ die Wurzeln von f, also $\varrho_i := \sum t_j \alpha_i^j$. Dann gilt also:
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \dots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_0 \\ \varrho_1 \\ \dots \\ \varrho_{n-1} \end{pmatrix}$$
Die Matrix linker Hand ist aber invertierbar: Sie ist die Vandermondesche der paarweise verschiedenen α_i; also erhalten wir nach Multiplikation mit ihrer Inversen die t_j als Linearkombination der ϱ_i. Letztere sind aber sicherlich algebraisch über $K(g_1, \dots, g_n)$. Dies zeigt (3.)

Nach (2.) hat aber nun f eine Nullstelle in K, sagen wir β, also $\beta = \sum_j t_j \alpha_i^j$ für ein $i \in \{0, \dots, n-1\}$, und α_i wäre Nullstelle eines Polynoms vom Grad $< n$, im Widerspruch zu $\operatorname{grad} \operatorname{Irr}(\alpha_i, K) = \operatorname{grad} p = n$. □

KAPITEL 6

Reell abgeschlossene Körper

Als etwas weiter ausgeführte algebraische Fallstudie für das modelltheoretische Material der letzten Abschnitte werden wir nun die Klasse der reell abgeschlossenen Körper näher untersuchen. Wir werden viele Parallelen zum Beispiel der algebraisch abgeschlossenen Körper feststellen, wenngleich auch die Modelltheorie in dem Zweig der Algebra, welcher sich mit angeordneten Körpern im allgemeinen und reell abgeschlossenen Körpern im speziellen beschäftigt, sowie im zugehörigen Bereich der Geometrie, der semialgebraischen Geometrie, eine wesentlich wichtigere Rolle spielt. (Vgl. [**36**], [**28**] und §6.6.)

6.1. Angeordnete Körper und reelle Abschlüsse

Unsere Motivation ist zunächst die Suche nach Axiomen für $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ bzgl. der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ der Ringe mit einem zusätzlichen Ordnungssymbol $<$, d.h. eine Charakterisierung derjenigen geordneten Körper K, die elementar äquivalent sind zum geordneten Körper der reellen Zahlen.

Definition 6.1.1. Ein *prägeordneter Ring* $(R, <)$ ist ein nichttrivialer (nicht notwendig kommutativer) Ring R (mit 1) zusammen mit einer Ordnungsrelation $<$, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist, d.h. für alle $a, b, c \in R$

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c \tag{6.1.3}$$

$$a < b, 0 < c \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \tag{6.1.4}$$

und für die gilt:

$$0 < a^2 \qquad \text{für alle } a \in R^*. \tag{6.1.5}$$

Ein *prägeordneter Körper* ist ein prägeordneter Ring, der ein Körper ist. Ein *geordneter Ring* (Körper) ist ein Ring (Körper) mit einer linearen Ordnungsrelation $<$, die (6.1.3), (6.1.4) erfüllt. Ein geordneter Körper heißt *archimedisch angeordnet,* wenn es zu jedem Körperelement a ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \cdot 1 > a$. Wir schreiben kurz $a \leq b$ für $(a < b) \vee (a = b)$, wobei $a, b \in R$.

(Wir verwenden die Begriffe „Anordnung“ und „Ordnung“ synonym.)

Bemerkung 6.1.2. Man zeigt leicht:

(i) Jeder kommutative geordnete Ring ist ein Integritätsbereich.
(ii) Die additive Gruppe jedes geordneten Rings ist torsionsfrei, also hat jeder geordnete Körper Charakteristik 0.
(iii) Jeder geordnete Ring erfüllt (6.1.5), ist also auch ein prägeordneter Ring.
(iv) Der angeordnete Ring $\mathbb{Z}$ läßt sich in jeden angeordneten Ring, der angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ läßt in jeden angeordneten Körper kanonisch einbetten.

(v) In einem nichtarchimedisch angeordneten Körper gibt es *unendlich große* Elemente, d.h. Elemente, die größer als jede rationale Zahl, und *unendlich kleine* Elemente, d.h. Elemente, die kleiner als jede positive rationale Zahl, aber größer als Null sind.

Die Klasse der geordneten Integritätsbereiche und die Klasse der geordneten Körper sind beide elementar (bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$). Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{GI}$ bzw. $\mathcal{GK}$ö. Ersichtlich gilt, wie man beispielhaft am Übergang von dem geordneten Integritätsbereich $\mathbb{Z}$ zum geordneten Körper $\mathbb{Q}$ erkennt:

Proposition 6.1.3. *Ist K Quotientenkörper des geordneten Integritätsbereichs R, so kann K auf eine und nur eine Weise so angeordnet werden, daß die Anordnung von R erhalten bleibt. Insbesondere ist* $\mathrm{S}(\mathcal{GK}\text{ö}) = \mathcal{GI}$.

Beweis. Übung. □

Für einen geordneten Körper K gelten im wesentlichen die aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln über $+, -, \cdot, ^{-1}, <$.— Die Menge $P := \{a \in K : a \geq 0\}$ erfüllt die Axiome

(K1) $P + P \subseteq P$, $P \cdot P \subseteq P$;
(K2) $P \cap (-P) = \{0\}$;
(K3) $P \cup (-P) = K$.

P wird *der positive Kegel von* $<$ genannt (obwohl $0 \in P$). Gilt für eine Teilmenge P von K (K1) und (K3), so ist (K2) äquivalent mit $-1 \notin P$. Eine Teilmenge $P \subseteq K$ eines Körpers K, welche (K1)–(K3) erfüllt, heißt auch ein *positiver Kegel* in K. Es ist leicht zu sehen, daß für einen positiven Kegel P durch

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P \setminus \{0\}$$

eine Ordnungsrelation auf K definiert wird, so daß K ein geordneter Körper wird. Man sieht auch sofort, daß die angegebenen Zuordnungen zwischen Ordnungsrelation und positiven Kegeln invers zueinander sind, was uns berechtigt, beide Begriffe — solange es sich um algebraische und nicht um modelltheoretische Betrachtungen handelt — austauschbar zu handhaben. Ist K ein prägeordneter Körper, so gilt

(K1′) $P + P \subseteq P$, $P \cdot P \subseteq P$;
(K2′) $P \cap (-P) = \{0\}$;
(K3′) $K^2 \subseteq P$.

P wird dann *der präpositive Kegel von* $<$ genannt. Erfüllt $P \subseteq K$ die Axiome (K1′) und (K3′), so ist (K2′) äquivalent mit $-1 \notin P$. Eine Teilmenge $P \subseteq K$ eines Körpers K, welche (K1′)–(K3′) erfüllt, heißt auch ein *präpositiver Kegel* in K. Wieder sieht man leicht, daß es sich bei präpositiven Kegeln und Präordnungen eines Körpers im wesentlichen um ein und dieselbe Sache handelt.

Beispiele.

(i) $\mathbb{R}$ mit der gewohnten Anordnung — damit auch jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$, wie z.B. $\mathbb{Q}$ — ist ein geordneter Körper.
(ii) $\mathbb{C}$ kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden. (Übung!)
(iii) Sei $\vartheta \in \mathbb{R}$ eine über $\mathbb{Q}$ transzendente Zahl. Durch

$$P := \{f \in \mathbb{Q}(X) : f(\vartheta) \leq 0\}$$

erhält man einen positiven Kegel im Funktionenkörper $\mathbb{Q}(X)$, bzgl. dessen $\mathbb{Q}(X)$ zu einem geordneten Körper wird. (Übung!) Es handelt sich um die durch die Einbettung $\mathbb{Q}(X) \hookrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(\vartheta)$ auf $\mathbb{Q}(X)$ induzierte Ordnung.

(iv) Definiert man die Teilmenge $P \subseteq \mathbb{Q}[X]$ als die Menge aller Polynome $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit $a_n > 0$, zusammen mit dem Nullpolynom, so erhält man eine Anordnung von $\mathbb{Q}[X]$ und daher auch von $\mathbb{Q}(X)$. (Übung!) Letztere ist nichtarchimedisch. (X ist unendlich groß.)

Es sei ΣK^2 die Menge aller Elemente von K, die sich als Summe von Quadraten schreiben lassen:

$$\Sigma K^2 := \left\{a_1^2 + \cdots + a_n^2 : n \in \mathbb{N}_0, a_1, \ldots, a_n \in K\right\}$$

Proposition 6.1.4.

(i) *ΣK^2 ist in jedem präpositiven Kegel von K enthalten.*
(ii) *ΣK^2 ist genau dann ein präpositiver Kegel, wenn $-1 \notin \Sigma K^2$.*
(iii) *ΣK^2 ist unter Addition abgeschlossen.*
(iv) *$\Sigma K^2 \setminus \{0\}$ ist eine multiplikative Untergruppe von K^*.*

Beweis. (i), (ii), (iii) sind trivial. Zu (iv) beachte, daß aus $\sum a_i^2 \neq 0$ folgt, daß $(\sum a_i^2)^{-1} = \sum \left(a_i / \sum a_j^2\right)^2$. □

Definition 6.1.5. Ein Körper K heißt *formal reell,* wenn $-1 \notin \Sigma K^2$ ist.

Ein Körper ist also formal reell genau dann, wenn er eine Präordnung besitzt; ΣK^2 ist dann der kleinste präpositive Kegel von K. Offenbar besitzen alle formal reellen Körper Charakteristik 0.

Lemma 6.1.6. *Sei P ein präpositiver Kegel des Körpers K und $a \in K \setminus P$. Dann ist auch $P - aP$ ein präpositiver Kegel von K.*

Beweis. (K1′) und (K2′) sind offensichtlich. Wäre $-1 \in P - aP$, etwa $-1 = b - ac$ mit $b, c \in P$, so wäre $c \neq 0$ und daher $a = c^{-2} \cdot c(1+b) \in P$, Widerspruch. □

Lemma 6.1.7. *Zu jedem präpositiven Kegel P von K gibt es einen positiven Kegel P' von K mit $P \subseteq P'$.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller P enthaltenden präpositiven Kegel. $\mathcal{M}$ ist nichtleer und bzgl. der Inklusion induktiv geordnet; nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximaler präpositiver Kegel P' in $\mathcal{M}$. Dieser ist ein positiver Kegel von K, denn ist $a \in K \setminus P'$, so ist $P' = P' - aP'$ wegen Lemma 6.1.6 und der Maximalität von P', also $-a \in P'$. □

Korollar 6.1.8. *Genau dann kann K zu einem geordneten Körper gemacht werden, wenn K formal reell ist. (Formal reelle Körper heißen deshalb auch* anordbar.) □

Satz 6.1.9. *Sei P ein präpositiver Kegel in dem Körper K. Dann ist P der Schnitt aller P enthaltenden positiven Kegel von K.*

Beweis. Die eine Inklusion ist trivial. Sei $a \in K \setminus P$ in allen P enthaltenden positiven Kegeln von K enthalten. Nach Lemma 6.1.6 ist $P - aP$ ein präpositiver Kegel, der nach Lemma 6.1.7 in einem positiven Kegel P' enthalten ist. Nun ist aber $a \in P'$ und $-a \in P'$, aber $a \neq 0$, Widerspruch. □

Korollar 6.1.10. (Artin, [**43**]) *Sei* $\mathrm{char}(K) \neq 2$ *und* $a \in K$. *Genau dann ist* a *in jedem positiven Kegel enthalten, wenn* a *als Summe von Quadraten darstellbar ist.* (*Die Elemente von* ΣK^2 *heißen deshalb auch* total positiv.)

Beweis. Ist K formal reell, also ΣK^2 ein präpositiver Kegel, so folgt die Behauptung aus dem Satz. Ist K nicht formal reell, also $-1 \in \Sigma K^2$, so ist $\Sigma K^2 = K$, da dann

$$a = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + (-1) \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

für jedes $a \in K$. □

Definition 6.1.11. Ein Körper K heißt *reell abgeschlossen,* falls gilt:

(RA1) $K^2 = \{a^2 : a \in K\}$ ist ein positiver Kegel in K.

(RA2) Jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad ≥ 3 zerfällt in $K[X]$, d.h. es existieren Polynome $g, h \in K[X]$, so daß $f = gh$ und $g, h \notin K$.

Proposition 6.1.12. *Sei* K *ein Körper.*

(i) *Ist* K *ein Körper, der*

(RA1′) K *ist formal reell, und für jedes* $a \in K$ *besitzt* a *oder* $-a$ *in* K *eine Quadratwurzel.*

und (RA2) *erfüllt, so ist* K *reell abgeschlossen, u.u. Ist* K *reell abgeschlossen, so ist überdies* K^2 *der einzige positive Kegel in* K *und die induzierte Ordnung die einzige, so daß* K *ein angeordneter Körper wird.*

(ii) *Die Bedingung* (RA2) *kann äquivalent ersetzt werden durch*

(RA2′) *Jedes nichtkonstante Polynom* $f \in K[X]$ *ist ein Produkt aus seinem höchsten Koeffizienten, Linearfaktoren* $(X - c)$ *mit* $c \in K$ *und quadratischen Faktoren der Form* $(X - d)^2 + e^2$ *mit* $d, e \in K$.

Beweis. Die Eindeutigkeitssaussage bzgl. K^2 ist klar wegen (RA1), da $K^2 \subseteq P$ für jede Anordnung P ist; ist dann $a \in P \setminus K^2$, so wäre $-a \in K^2 \subseteq P$, ein Widerspruch zu $a \neq 0$. (RA1) $\Leftrightarrow$ (RA1′) ist klar.

(RA2′) $\Rightarrow$ (RA2) ist trivial. Zu (RA2) $\Rightarrow$ (RA2′) führt man Induktion nach $n = \mathrm{grad}(f) > 0$: $n = 1$ ist klar. Sei $n = 2$. Hat f eine Nullstelle in K, dann ist f Produkt seines höchsten Koeffizienten und zweier Linearfaktoren. Hat f keine Nullstelle in K, dann hat f die Form

$$f = a(X^2 + bX + c) = a\left(\left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)\right),$$

und dies ist eine Darstellung wie gewünscht: Da f keine Nullstelle hat und Quadratwurzeln existieren, folgt nämlich $c - (b/2)^2 \geq 0$, und daher hat $c - (b/2)^2$ eine Wurzel. Für $n \geq 3$ zerfälle f in g, h und wende die Induktionsannahme auf beide an. □

Bemerkung 6.1.13. Wegen (RA1) kann man K auch als (in eindeutiger Weise) geordneten Körper betrachten, was wir ab jetzt auch tun werden. Die Klasse $\mathcal{RAK}$ der reell abgeschlossenen Körper ist elementar bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$. Wähle nämlich für (RA1′) das Axiom

$$\forall x(x > 0 \rightarrow \exists y(y^2 = x))$$

und für (RA2) folgendes rekursiv aufzählbares Axiomenschema:

$$\forall \mathbf{y} \left(y_n \neq 0 \to \bigvee_{d=1}^{n-1} \exists \mathbf{z} \exists \mathbf{u} \left(\bigwedge_{i=0}^{n} y_i = \sum_{j=0}^{i} z_j u_{i-j} \right) \right) \tag{6.1.6}$$

für alle $n \geq 3$, mit $\mathbf{y} := (y_0, \ldots, y_n)$, $\mathbf{z} := (z_0, \ldots, z_d)$, $\mathbf{u} := (u_0, \ldots, u_{n-d})$.

Wir schreiben $R, S, \ldots$ für reell abgeschlossene Körper.— Bekanntlich ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ mit $i = \sqrt{-1}$ algebraisch abgeschlossen; allgemein gilt (mit $C := R[i] := R[X]/(X^2+1)$):

Fundamentalsatz der Algebra. *Sei R ein Körper. R ist reell abgeschlossen genau dann, wenn C algebraisch abgeschlossen und $C \neq R$ ist.*

Beweis. Sei zunächst R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$ von positivem Grad. Aus (RA2′) erhalten wir eine Darstellung von f in $R[X]$ als Produkt seines höchsten Koeffizienten, Linearfaktoren und quadratischen Faktoren der Form $(X-d)^2+e$ mit $d, e \in R$, $e > 0$. In $C[X]$ zerfällt jeder dieser quadratischen Faktoren weiter in Linearfaktoren, nämlich

$$(X - (d + i\sqrt{e}))(X - (d - i\sqrt{e})),$$

wobei $\sqrt{e} \in R$. Angenommen, $C = R(i)$ wäre nicht algebraisch abgeschlossen. Dann existiert ein Erweiterungskörper $L \supseteq C$ (etwa der algebraische Abschluß von C) und ein $\alpha \in L \setminus C$, das algebraisch über C ist. Dann ([**34**], V, Prop. 1.7) ist α auch algebraisch über R selbst, etwa mit Minimalpolynom $f \in R[X]$. f zerfällt in $C[X]$ wie gezeigt in Linearfaktoren, es ist also $\alpha \in C$, im Widerspruch zur Annahme. Da $-1 \notin R^2$, ist $C \neq R$.

Sei nun umgekehrt $C \neq R$ algebraisch abgeschlossen. Zu (RA1′): Wir zeigen als erstes, daß $R^2 + R^2 \subseteq R^2$. Für alle $a, b \in R$ gibt es nach Voraussetzung $c, d \in R$ mit $a + bi = (c + di)^2$, also durch Koeffizientenvergleich ($1, i$ ist Basis von C über R!) $a = c^2 - d^2$, $b = 2cd$. Damit $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2 \in R^2$, also insgesamt $\Sigma R^2 = R^2$. Da $R(i) = C \neq R$, ist $-1 \notin \Sigma R^2$, d.h. R ist formal reell. Ist ferner $a \in R^*$ beliebig, $b := 0$, so sieht man, falls $c = 0$, daß folgt $-a = d^2$, und falls $d = 0$, daß $a = c^2$. Zu (RA2′): Sei $f \in K[X]$ von positivem Grad. f zerfällt in $C[X]$ in Linearfaktoren vom Typ $(X - (c + di))$. Wir betrachten die Konjugationsabbildung $C \to C, c + di \mapsto \overline{c + di} := c - di$; diese ist ein K-Automorphismus von C, der in natürlicher Weise auf $C[X]$ fortgesetzt werden kann. Betrachten wir die Linearfaktorzerlegung $f = \prod g_k$ mit $g_k \in C[X]$, so folgt $f = \overline{f} = \prod \overline{g}_k$, d.h. zu jedem Linearfaktor $(X - (c + di))$ in der Zerlegung von f erscheint auch der Faktor $(X - (c - di))$, da $C[X]$ faktoriell ist. Zusammenfassung konjugierter Paare ergibt

$$(X - (c + di))(X - (c - di)) = (X - c)^2 + d^2,$$

also (RA2′). □

Wir sprechen im folgenden bei einem Polynom $f \in R[X]$ über einem reell abgeschlossenen Körper R von einem a mit $f(a) = 0$ als einer *reellen Nullstelle,* falls $a \in R$, und als einer *komplexen Nullstelle,* falls $a \in C = R(i)$.

Korollar 6.1.14. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $K \subseteq R$ ein Teilkörper. Dann ist der algebraische Abschluß $\overline{K}^R$ von K in R wieder reell abgeschlossen.*

Beweis. O.B.d.A. sei K algebraisch abgeschlossen in R; sei $i = \sqrt{-1}$. Dann ist $K(i)$ in $R(i)$ algebraisch abgeschlossen. Denn ist $\alpha = a + bi \in R(i)$ algebraisch über $K(i)$, wobei $a, b \in R$, so auch über K, und dasselbe gilt für $\overline{\alpha} = a - bi$, also auch für $a = (\alpha + \overline{\alpha})/2$ und $b = i(\alpha - \overline{\alpha})/2$. Folglich sind $a, b \in K$, also $\alpha \in K(i)$. Nach dem Fundamentalsatz ist $R(i)$, wegen dem eben Gezeigten also auch $K(i)$, algebraisch abgeschlossen; da $i \notin K$, ist — wieder aufgrund des Satzes — auch K reell abgeschlossen. □

Kann man jeden geordneten Körper in einen reell abgeschlossenen Körper einbetten, und geht dies „mit minimalen Aufwand", etwa so wie bei der Konstruktion eines algebraischen Abschlusses? Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir eine weitere körpertheoretische Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Zunächst zur Frage der Fortsetzung von Ordnungen auf Erweiterungskörper.

Lemma 6.1.15. (Serre, [**147**]) *Seien $L \supseteq K$ Körper. Ein positiver Kegel P von K kann zu einem positiven Kegel von L erweitert werden genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in P \setminus \{0\}$ keine nichttriviale Nullstelle in L^n besitzt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Sie ist auch hinreichend: Betrachte die Menge

$$P_0 := \{a_1 v_1^2 + \cdots + a_n v_n^2 : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in P \setminus \{0\}, v_1, \ldots, v_n \in L\}.$$

Offensichtlich ist $P_0 + P_0 \subseteq P_0$, $P_0 \cdot P_0 \subseteq P_0$ und $L^2 \subseteq P_0$. Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^2 \in -P_0$ mit $a_i \in P \setminus \{0\}$, $v_i \in L$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es also $b_j \in P \setminus \{0\}$, $w_j \in L$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{m} b_j w_j^2 = 0$. Nach Voraussetzung folgt $v_i = 0$, $w_j = 0$. Also ist $P_0 \cap (-P_0) = \{0\}$. Mithin ist $P_0 \supseteq P$ ein präpositiver Kegel von L, der nach Lemma 6.1.7 in einem positiven Kegel von L enthalten ist. □

Lemma 6.1.16. (Springer, [**153**]) *Sei $L \supseteq K$ eine algebraische Erweiterung ungeraden Grades, und seien $a_1, \ldots, a_n \in K^*$. Hat $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ eine nichttriviale Nullstelle in L^n, so auch in K^n.*

Beweis. Es ist $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$; man sieht, daß es wegen der Gradformel für Körpererweiterungen ausreicht, den Fall einer einfachen Erweiterung $L = K(\alpha)$ zu betrachten. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K; sei $\mathrm{grad}(f) = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$. Wir beweisen durch Induktion nach m; der Fall $m = 0$ erledigt sich selbstredend. Sei deshalb $m > 0$. Da $\sum a_i X_i^2$ eine nichttriviale Lösung in L besitzt, existieren $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$, nicht alle Null, mit $\mathrm{grad}(g_i) \leq 2m$ und

$$a_1 g_1^2 + \cdots + a_n g_n^2 = fh \qquad \text{für ein } h \in K[X].$$

(Folgt mit Hilfe des kanonischen Homomorphismus $K[X] \twoheadrightarrow K[X]/(f) \cong K(\alpha) = L$.) Man kann dabei $\mathrm{ggT}(g_1, \ldots, g_n) = 1$ annehmen. Sei d das Maximum der $\mathrm{grad}(g_i)$. Angenommen, $\sum a_i X_i^2$ hätte keine nichttriviale Lösung in K; dann folgt $(2m + 1) + \mathrm{grad}(h) = 2d$, also $\mathrm{grad}(h) \leq 2m$ und ungerade. Insbesondere hat h einen irreduziblen Faktor h_1 von ungeradem Grad. Betrachtet man den Oberkörper $F := K[X]/(h_1)$ von K, so ist $[F : K] = \mathrm{grad}(h_1) \leq \mathrm{grad}(h) < 2m + 1$ und ungerade, andererseits hat $\sum a_i X_i^2$ wegen der Teilerfremdheit von $g_1, \ldots, g_n$ eine nichttriviale Lösung in F. Das steht im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. □

Korollar 6.1.17. *Sei $L \supseteq K$ eine endliche Körpererweiterung und P ein positiver Kegel von K. In den folgenden Fällen kann P jeweils zu einem positiven Kegel in L erweitert werden:*

(i) *Es ist $L = K(\sqrt{a})$ und $a \in P$.*
(ii) *$[L : K]$ ungerade.*

Beweis. Wir verwenden das Kriterium aus Lemma 6.1.15. Seien $a_1, \ldots, a_n \in P \setminus \{0\}$ und angenommen, es habe $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ eine nichttriviale Lösung in L.

(i) Ist $L = K(\sqrt{a})$, $a \in P \setminus \{0\}$, so folgt $0 = \sum a_i(b_i + c_i\sqrt{a})^2$ für gewisse $b_i, c_i \in K$, die nicht alle gleich Null sind. Durch Koeffizientenvergleich bzgl. der K-Basis $1, \sqrt{a}$ von L insbesondere $0 = \sum a_i b_i^2 + \sum a a_i c_i^2$ in K. Da $a, a_i \in P \setminus \{0\}$, sind auch $aa_i \in P \setminus \{0\}$, damit folgt aber $b_i = c_i = 0$, ein Widerspruch.
(ii) Ist $[L : K]$ ungerade, so hat auch $\sum a_i X_i^2$ eine nichttriviale Nullstelle in K nach Lemma 6.1.16, im Widerspruch zu $a_i \in P \setminus \{0\}$.

Damit ist die Behauptung in beiden Fällen gezeigt. $\square$

Wir erhalten folgende klassische Charakterisierung:

Satz 6.1.18. (Artin-Schreier, [**44**]) *Für einen Körper K sind äquivalent:*

(i) *K ist reell abgeschlossen.*
(ii) *K erfüllt* (RA1) *und*
(RA2$''$) *Jedes Polynom $f \in K[X]$ ungeraden Grades hat eine Nullstelle in K.*
(iii) *K ist formal reell, besitzt aber keine echte formal reelle algebraische Körpererweiterung.*
(iv) *Es gibt eine Anordnung von K, die auf keine echte algebraische Erweiterung von K fortgesetzt werden kann.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, wenn man (RA2$'$) betrachtet, (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial. Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $L \supset K$ eine echte, o.B.d.A. einfache Körpererweiterung $L = K(\alpha)$ mit $\alpha \in L$. Ist f das Minimalpolynom von α über K, so ist $\operatorname{grad}(f) = [L : K]$ nach Voraussetzung gerade. Nun existiert ein $L_1 \supseteq L$, so daß $L_1 \supseteq K$ eine Galoiserweiterung ist ([**34**], VI, Cor. 1.6), also $[L : K] = [\operatorname{Gal}(L_1/K) : \operatorname{Gal}(L_1/L)]$ und damit auch $\operatorname{ord}\operatorname{Gal}(L_1/K)$ beide gerade. Damit enthält $\operatorname{Gal}(L_1/K)$ nach dem Satz von Sylow ([**34**], I, §6) eine 2-Sylow-Untergruppe S; sei $k := \operatorname{Fix}(L_1; S)$. Dann ist $[k : K] = [\operatorname{Gal}(L_1/K) : S]$ ungerade; nach dem Satz vom primitiven Element und Voraussetzung muß $k = K$ und somit $S = \operatorname{Gal}(L_1/K)$ sein. $\operatorname{Gal}(L_1/K)$ ist also eine 2-Gruppe, daher enthält $\operatorname{Gal}(L_1/K)$ eine Untergruppe G mit $G \supseteq \operatorname{Gal}(L_1/L)$ und Index 2 in $\operatorname{Gal}(L_1/K)$, damit also L/K einen Zwischenkörper F vom Grad 2 über K. Es gibt somit ein $a \in K$ mit $F = K(\sqrt{a})$. Da K^2 ein positiver Kegel und $a \notin K^2$ ist, muß ein $b \in K^*$ existieren mit $a = -b^2$. Damit aber ist $-1 = (\sqrt{a}/b)^2$, und F nicht formal reell, also auch L nicht formal reell.— (iv) impliziert wegen Kor. 6.1.17 zunächst (ii). Gelte nun (ii); wegen (RA1) ist $\sqrt{-1} \notin K$. Ist L eine echte einfache Erweiterung von $C := K(i)$, $i := \sqrt{-1}$, so muß $[L : C]$ gerade sein wegen (RA2$''$) und $[C : K] = 2$. Wie im Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt die Existenz einer Erweiterung F/C mit $[F : C] = 2$. Wir finden also $a, b \in K$, so daß $\alpha := a + bi$ kein Quadrat in C ist; dazu muß notwendig $b \neq 0$ sein, und mit (RA1) gibt es ein $c \in K$ mit $a^2 + b^2 = c^2$, $c > 0$ bzgl. $P := K^2$, sowie $x, y \in K$ mit

$$x > 0, \quad \operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(b), \quad x^2 = (c+a)/2, \quad y^2 = (c-a)/2$$

($c \pm a > 0$ wegen $0 \neq b^2 = (c+a)(c-a)$). Damit ist

$(x+iy)^2 = (x^2-y^2)+2xyi = a+bi = \alpha$ wegen $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(b)$ und $(2xy)^2 = b^2$,

im Widerspruch zu $\sqrt{\alpha} \notin C$. Also ist C algebraisch abgeschlossen, und mit dem Fundamentalsatz folgt (i). □

Damit können wir auch — wegen (RA2″) — das Axiomenschema (6.1.6) ersetzen durch die syntaktisch etwas einfacheren Sätze

$$\forall y_0 \cdots \forall y_{2n+1} \exists x \left(y_{2n+1} \neq 0 \to \sum_{i=0}^{2n+1} y_i x^i = 0 \right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Definition 6.1.19. Sei K ein geordneter Körper. Ein *reeller Abschluß von* K ist ein über K algebraischer, reell abgeschlossener Oberkörper von K, dessen Ordnung die Ordnung auf K fortsetzt.

Aus Satz 6.1.18, (iv) folgt sofort:

Korollar 6.1.20. *Jeder geordnete Körper K besitzt einen reellen Abschluß.* (*Insbesondere ist also* $\mathrm{S}(\mathcal{RAK}) = \mathcal{GK}$ö.)

Beweis. Sei P der positive Kegel von K. Man wende das Zornsche Lemma auf die bzgl. komponentenweiser Inklusion induktiv geordnete Menge aller Paare (L, P_L), bestehend aus einem Zwischenkörper L der Erweiterung $\overline{K}/K$ und einem positiven Kegel P_L in L mit $P_L \supseteq P$, an. □

Ähnlich dem algebraischen Abschluß eines Körpers ist der reelle Abschluß bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; im Gegensatz zu ersterem ist diese sogar *eindeutig.* Wir werden dies in §6.3 beweisen (Kor. 6.3.9).

6.2. Polynomfunktionen in reell abgeschlossenen Körpern

In diesem Abschnitt notieren wir einige aus der reellen Analysis vertraute Sätze, die, wenn man sie auf Polynomfunktionen bzw. rationale Funktionen spezialisiert, auch in beliebigen anderen reell abgeschlossenen Körpern ihre Gültigkeit behalten.

Sei K ein angeordneter Körper mit positivem Kegel P. Die Intervallschreibweise, etwa $[a;b[\, = [a;b[_P$ für die Menge aller $c \in K$ mit $a \leq c < b$, übertragen wir auf K. Wie üblich sei auch $\operatorname{sgn} = \operatorname{sgn}_P \colon K \to \{-1,0,1\}$ die Vorzeichenfunktion bzgl. der von P gestifteten Ordnung auf K und $|\cdot| = |\cdot|_P \colon K \to P$, $a \mapsto a \cdot \operatorname{sgn}(a)$ der Absolutbetrag. Der Leser zeigt leicht, daß tatsächlich die gewohnten Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $|a| \leq 0$, und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
(ii) $|ab| = |a| \cdot |b|$,
(iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$,

für alle $a, b \in K$. Die offenen Intervalle $]a;b[$ ($a < b$ aus K) bilden eine offene Basis einer Topologie auf K. Die von dieser auf K^n induzierte Produkttopologie wird mit $\mathcal{O}(K^n)$ bezeichnet; sie macht K^n zu einem Hausdorffraum. Bzgl. $\mathcal{O}(K)$ wird K zu einem *topologischen Körper,* d.h. die Abbildungen $K \times K \to K, (a,b) \mapsto a-b$ und $K^* \to K^*, a \mapsto a^{-1}$ sind stetig bzgl. $\mathcal{O}(K)$. Insbesondere gilt, wenn wir für eine rationale Funktion $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ in gekürzter Darstellung $f = g/h$, $g, h \in K[X_1, \ldots, X_n]$ die Menge $D_f := \complement h^{-1}(0) \subseteq K^n$ als ihren *Definitionsbereich* bezeichnen: Rationale Funktionen über K sind auf ihrem Definitionsbereich stetig bzgl. $\mathcal{O}(K^n)$. Man beachte jedoch, daß selbst im Fall eines reell abgeschlossenen Körpers R die Topologie $\mathcal{O}(R^n)$ wesentlich andere Eigenschaften als die gewohnte $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ besitzen kann: Z.B. ist ein abgeschlossenes Intervall $[a;b]$ (mit $a < b$ in R) nicht notwendig kompakt bzgl. $\mathcal{O}(R^n)$; siehe dazu das Bsp. nach Kor. 6.6.16, ferner vgl. auch [**32**], II, §6, Satz 1.

Satz 6.2.1. (Cauchyschranke) *Sei R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$ ein Polynom, $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $a_n \neq 0$. Dann liegen alle reellen Nullstellen von f im Intervall $]-M; M[$, wobei $M := 1 + |a_{n-1}/a_n| + \cdots + |a_0/a_n|$, und es ist* $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} a_n$, $\operatorname{sgn} f(-x) = (-1)^n \operatorname{sgn} a_n$ *für $x \geq M$.*

Beweis. Man schreibe $f = a_n X^n\big(1 + (a_{n-1}/a_n)X^{-1} + \cdots + (a_0/a_n)X^{-n}\big)$. Ist $x \in R$ mit $|x| \geq M$, so $|x^{-i}| \leq M^{-i} \leq M^{-1}$ für $i \geq 1$, also

$$\big|(a_{n-1}/a_n)x^{-1} + \cdots + (a_0/a_n)x^{-n}\big| \leq \big(|a_{n-1}/a_n| + \cdots + |a_0/a_n|\big)M^{-1} < 1$$

nach Dreiecksungleichung, somit

$$|f(x)| \geq |a_n x^n| \cdot \big|1 - \big|(a_{n-1}/a_n)\, x^{-1} + \cdots + (a_0/a_n)\, x^{-n}\big|\big| > 0.$$

Ferner hat $f(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $a_n x^n$, d.h. also $\operatorname{sgn} a_n$ für $x \geq M$ und $\operatorname{sgn}(-1)^n a_n$ für $x \leq -M$. □

Satz 6.2.2. (Zwischenwertsatz für Polynome) *Sei R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$. Seien $a < b$ in R mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann existiert ein $c \in R$ mit $a < c < b$ und $f(c) = 0$.*

Beweis. Schreibe $f = d\prod_{i=1}^r (X - c_i) f_1$ mit $d, c_i \in R$ und $f_1(x) > 0$ für alle $x \in R$, nach (RA2′). Wir behaupten: Es existiert ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ mit $a < c_i < b$. Annahme: Für alle c_i, $i = 1, \ldots, r$ gilt $c_i < a$ oder $c_i > b$. Damit ist aber für alle $x \in [a;b]$ stets $\operatorname{sgn}(x - c_i)$ konstant, also auch $\operatorname{sgn}(f(x))$, und dies ist widersprüchlich. □

Definition 6.2.3. Sei K ein geordneter Körper, $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$, $M \subseteq D_f$. f heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) auf M, wenn $f(x) > 0$ (bzw. $f(x) < 0$) für alle $x \in M$. f heißt *definit* auf M, wenn es entweder positiv oder negativ definit auf M ist, und *indefinit* auf M, wenn es weder positiv noch negativ definit auf M ist. Entsprechend heißt f *positiv semidefinit,* (bzw. *negativ semidefinit*) auf M, wenn $f(x) \geq 0$ (bzw. $f(x) \leq 0$) für alle $x \in M$. Ist $M = D_f$, so spricht man oft kurz nur von der positiven bzw. negativen (Semi-) Definitheit von f.

Korollar 6.2.4. *Sei R reell abgeschlossen, $f \in K[X]$, $f \neq 0$.*

(i) *f hat in $R[X]$ eine Darstellung der Form $f = \prod_{i=1}^r (X - c_i) f_1$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, $c_i \in R$ und auf R definitem $f_1 \in R[X]$.*

(ii) *Sind $a < b$ in R* benachbarte Nullstellen von f, *d.h. ist $f(a) = f(b) = 0$, und gibt es kein $c \in]a; b[$ mit $f(c) = 0$, so ist f definit auf dem Intervall $]a; b[$.*

(iii) *Sei $f(a) > 0$ (bzw. $f(a) < 0$). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ aus R, so daß f positiv definit (negativ definit) ist auf $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$.*

Beweis. Nur (iii) bedarf einer kleinen Erläuterung: Falls f ohne Nullstellen auf ganz R ist, so ist f definit auf ganz R. Sonst beachte, daß f überhaupt nur endlich viele Nullstellen hat, und wähle benachbarte Nullstellen $c < a < d$ und wende (ii) an. □

Satz 6.2.5. (Satz von Rolle für Polynome) *Seien R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$, $a < b$ in R mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in \,]a; b[$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Sei $d := f(a)$; o.B.d.A. sei $d = 0$ und a, b als benachbarte Nullstellen von f angenommen. Schreibe f in der Form

$$f = (X - a)^r (X - b)^s f_1 \qquad (r, s \in \mathbb{N})$$

mit f_1 definit auf $[a; b]$. Formale Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} f' &= r(X-a)^{r-1}(X-b)^s f_1 + s(X-b)^{s-1}(X-a)^r f_1 + (X-a)^r (X-b)^s f_1' \\ &= (X-a)^{r-1}(X-b)^{s-1} \underbrace{(r(X-b)f_1 + s(X-a)f_1 + (X-a)(X-b)f_1')}_{=:h}, \end{aligned}$$

Auswertung an den Stellen a und b

$$h(a) = r(a - b) f_1(a), \qquad h(b) = s(b - a) f_1(b),$$

also $h(a)h(b) < 0$. Mit dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in \,]a; b[$ mit $h(c) = 0$. Es folgt $f'(c) = (c - a)^{r-1}(c - b)^{s-1} h(c) = 0$. □

Satz 6.2.6. (Mittelwertsatz für Polynome) *Sei R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$ von positivem Grad, $a < b$ in R. Dann ist*

$$(b - a) f'(c) = f(b) - f(a) \qquad \textit{für ein } c \in \,]a; b[.$$

Beweis. Der übliche Trick: Setze

$$g := (f - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(X - a) \in R[X].$$

Dann ist $g(a) = 0 = g(b)$, und mit dem Satz von Rolle folgt die Behauptung. □

Übung. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Man zeige den Zwischenwertsatz und den Mittelwertsatz für rationale Funktionen $f \in R(X)$.

Satz 6.2.7. (Monotoniekriterium) *Sei R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$ von positivem Grad, $a < b$ in R. f' sei definit auf $]a; b[$. Dann ist f streng monoton auf $[a; b]$. Insbesondere ist $f(a) < f(b)$, falls f' positiv definit, und $f(a) > f(b)$, falls f' negativ definit auf $]a; b[$ ist.*

Beweis. O.E. sei f' positiv definit auf $]a; b[$. Angenommen, es ist $f(a) \geq f(b)$. Mit dem Mittelwertsatz existiert ein $c \in \,]a; b[$ mit

$$0 < f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0,$$

Widerspruch. □

Korollar 6.2.8. *Sei R reell abgeschlossen, $f \in R[X]$. Sei $c \in R$ mit $f'(c) > 0$ (bzw. $f'(c) < 0$). Dann existiert ein $\delta > 0$ in R, so daß f streng monoton steigt (bzw. streng monoton fällt) auf $]c - \delta; c + \delta[$.*

Beweis. Man verwende Kor. 6.2.4, (iii) und das Monotoniekriterium. □

Übung. (Thomsches Lemma, [**170**]) Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $f \in R[X]$ mit $n := \operatorname{grad}(f) > 0$. Für $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^{\{0,\ldots,n-1\}}$ sei

$$M_{f,\varepsilon} := \left\{ x \in R : \operatorname{sgn}(f^{(i)}(x)) = \varepsilon_i \text{ für alle } 0 \leq i < n \right\}.$$

Man zeige: $M_{f,\varepsilon}$ ist ein Intervall in R.

6.3. Sturmsche Ketten

Sei $f \in R[X]$ ein nicht-konstantes Polynom über einem reell abgeschlossenen Körper R, und seien $a, b \in R$ mit $a < b$ und $f(a)f(b) \neq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Nullstelle im Intervall $]a; b[$. Die *Sturmsche Aufgabe* lautet: Bestimme die Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen von f im Intervall $[a; b]$! Eine klassische Methode, diese Aufgabe algebraisch zu lösen, stammt von Sturm (1829); sie wird im Beweis des Satzes von Tarski-Seidenberg eine wesentliche Rolle spielen.

Definition 6.3.1. Sei K ein geordneter Körper, $f_0, \dots, f_d \in K[X] \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{N}$. Man nennt $(f_0, \dots, f_d)$ eine *Sturmsche Kette* (zu f_0) bzgl. eines Intervalls $[a; b]$ ($a < b$ beide in K), falls folgendes gilt:

(S1) f_d ist definit auf $[a; b]$.
(S2) $f_0(a)f_0(b) \neq 0$.
(S3) Falls für ein $c \in [a; b]$ gilt, daß $f_0(c) = 0$, so folgt $f_1(c) \neq 0$.
(S4) Falls für ein $c \in [a; b]$ und $i \in \{1, \dots, d-1\}$ gilt, daß $f_i(c) = 0$, so folgt $f_{i-1}(c)f_{i+1}(c) < 0$.

Beispiele Sturmscher Ketten erhält man so:

Definition 6.3.2. Seien $f, g \in K[X]$, f nicht-konstant, $g \neq 0$, K ein geordneter Körper, $a < b$ beide in K. Ferner sei $f(a)f(b) \neq 0$ und $f, f'g$ ohne gemeinsame Nullstellen in $[a; b]$. Definiere rekursiv f_i wie folgt:

$$\begin{aligned} f_0 &:= f, \\ f_1 &:= f'g, \\ f_{i+1} &:= q_i f_i - f_{i-1} \quad \text{mit } \operatorname{grad}(f_{i+1}) < \operatorname{grad}(f_i), \text{ für } i \geq 1, \text{ falls } f_{i+1} \neq 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Folge $(f_0, \dots, f_d)$ mit $d \leq \operatorname{grad}(f)+2$ derart gewählt, daß $f_{d+1} = 0$, genannt die *Sturmsche Kette zu f unter der Nebenbedingung g*.

Die Berechnung von f_{i+1} für $i \geq 1$ erfordert also Division mit Rest in $K[X]$, wobei der Rest mit negativem Vorzeichen notiert wird. Bis auf das Vorzeichen handelt es sich bei der Konstruktion von $(f_0, \dots, f_d)$ um den Euklidischen Algorithmus; insbesondere ist $f_d = \operatorname{ggT}(f, f'g)$.

Beispiel. Sei $f := X + 1$, $g := X^2 + 1$. Es ist $d = 3 = \operatorname{grad}(f) + 2$ und

$$f_0 = X + 1, \quad f_1 = X^2 + 1, \quad f_2 = -X - 1, \quad f_3 = 2.$$

Es handelt sich in der Tat um eine Sturmsche Kette im Sinne von Def. 6.3.1: (S1) ist klar, wenn man bedenkt, daß $f_d = \operatorname{ggT}(f, f'g)$ ein gemeinsamer Teiler von f, $f'g$ ist, und f, $f'g$ nach Voraussetzung keine gemeinsamen Nullstellen in $[a; b]$ besitzen. (S2) und (S3) gelten nach Voraussetzung. Zu (S4): Sei $f_i(c) = 0$ für ein $a \leq c \leq b$, $0 < i < d$. Dann folgt nach Konstruktion $f_{i-1}(c) = q_i(c)f_i(c) - f_{i+1}(c) = -f_{i+1}(c)$, also $f_{i-1}(c)f_{i+1}(c) \leq 0$. Aber für kein $c \in [a; b]$, $0 \leq j < d$ gilt $f_j(c) = f_{j+1}(c) = 0$, wie man durch Induktion leicht zeigt: Der Fall $j = 0$ ist (S3); zum Schritt $j - 1 \to j$ sei $f_j(c) = f_{j+1}(c) = 0$ angenommen, woraus $f_{j-1}(c) = 0$ folgt, im Widerspruch zu $f_{j-1}(c) \neq 0$ nach Induktionsannahme. Damit also stets $f_{j-1}(c)f_{j+1}(c) < 0$.

Definition 6.3.3. Sei K ein geordneter Körper, $(a_0, \dots, a_d) \in K^{d+1}$, $d \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\operatorname{ZW}(a_0, \dots, a_d)$ als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$(a_0, \ldots, a_d)$ nach Streichung der Nullen, d.h.

$$\mathrm{ZW}(a_0, \ldots, a_d) := \\ \left|\left\{0 \le i < d : a_i a_{i+k} < 0 \text{ für ein } k > 0 \text{ mit } a_{i+j} = 0 \text{ für } 1 < j < k\right\}\right|$$

Beispiel. Es ist $\mathrm{ZW}(3, 0, 1, -5, \frac{7}{3}, 0, -2) = 3$ in $K = \mathbb{Q}$.

Im folgenden sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Lemma 6.3.4. *Sei* $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_d)$ *eine Sturmsche Kette bzgl.* $[a; b]$*,* $a < b$ *in* R*. Seien* $a \le \alpha < c < \beta \le b$ *mit* $f_0(c) \ne 0$*, und für alle* $\delta \in [\alpha; \beta]$ *mit* $\delta \ne c$ *sei* $f_j(\delta) \ne 0$ *für alle* $j \in \{0, \ldots, d\}$*. Dann gilt*

$$\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(\alpha)) = \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(\beta)).$$

Beweis. Wir untersuchen das Vorzeichenverhalten aller Teilketten

$$(f_{j-1}, f_j, f_{j+1}) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, d-1.$$

Ist $f_j(c) = 0$, so ist wegen (S4) $f_{j-1}(c) f_{j+1}(c) < 0$, also können wir o.E. $f_{j-1}(c) > 0$ annehmen, und somit ist nach Voraussetzung nur die Verteilung

$$\begin{array}{llll} & \alpha & c & \beta \\ f_{j-1} & + & + & + \\ f_j & \sigma_1 & 0 & \sigma_2 \\ f_{j+1} & - & - & - \end{array}$$

möglich, wobei σ_1, σ_2 für $+$ oder $-$ steht; der Zeichenwechsel in dieser Folge ist also stets 1. Ist $f_j(c) \ne 0$, etwa $f_j(c) > 0$, so können wir im Fall $1 < j < d-1$ o.E. $f_{j-1}(c) f_{j+1}(c) \ne 0$ annehmen (die andere Möglichkeit wird bereits vom eben behandelten Fall abgedeckt), und es ergibt sich die Verteilung

$$\begin{array}{llll} & \alpha & c & \beta \\ f_{j-1} & \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 \\ f_j & + & + & + \\ f_{j+1} & \sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_2, \end{array} \tag{6.3.7}$$

mit σ_1, σ_2 entweder $+$ oder $-$. Ist $j = d-1$, so haben wir wegen (S1) $f_{j+1}(c) \ne 0$, und aus demselben Grund wie eben o.E. auch $f_{j-1}(c) \ne 0$, also wieder eine Verteilung (6.3.7) vorliegen. Ist $j = 1$, so ist nach Voraussetzung $f_0(c) \ne 0$ und wieder o.E. $f_2(c) \ne 0$, also eine Verteilung (6.3.7) gegeben. □

Lemma 6.3.5. *Sei* $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_d)$ *die Sturmsche Kette zu* $f \in R[X]$ *mit Nebenbedingung* $g \in R[X]$ *bzgl.* $[a; b]$*, wobei* $a < b$ *aus* R*. Seien* $a \le \alpha < c < \beta \le b$ *mit* $f_0(c) = 0$ *und* $f_j(\delta) \ne 0$ *für alle* $\delta \in [\alpha; \beta]$ *mit* $\delta \ne c$*,* $j \in \{0, \ldots, d\}$*. Dann gilt*

$$\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(\alpha)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(\beta)) = \mathrm{sgn}(g(c)).$$

Beweis. Betrachte $(f_1, \ldots, f_d)$ auf $[\alpha; \beta]$. Dies ist immer noch eine Sturmsche Kette bzgl. $[\alpha; \beta]$. Es ist $f_1(c) \ne 0$, und die Voraussetzungen von Lemma 6.3.4 sind erfüllt. Es folgt

$$\mathrm{ZW}(f_1(\alpha), \ldots, f_d(\alpha)) = \mathrm{ZW}(f_1(\beta), \ldots, f_d(\beta)).$$

Wir betrachten das Vorzeichenverhalten von (f_0, f_1): Es ist $g(c) \ne 0$, o.B.d.A. etwa $g(c) > 0$. Dann muß $f_0(\alpha) f_0(\beta) < 0$ sein, weil sonst c eine mehrfache Nullstelle von

f, also $f'(c) = 0$ sein müßte; also o.E. $f_0(\alpha) < 0$, $f_0(\beta) > 0$, und

$$\begin{array}{lccc} & \alpha & c & \beta \\ f_0 = f & - & 0 & + \\ f' & + & + & + \\ f_1 = f'g & + & + & + \end{array}$$

mit Monotoniekriterium, und die Behauptung folgt. □

Damit folgt nun leicht:

Satz von Sturm. *Sei $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_d)$ die Sturmsche Kette zu $f \in R[X]$ bzgl. $[a;b]$ mit Nebenbedingung $g \in R[X]$, wobei $a < b$ aus R, gemäß Def. 6.3.2. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(b)) = \\ &\qquad \bigl|\bigl\{x \in \,]a;b[\, : f(x) = 0, g(x) > 0\bigr\}\bigr| - \bigl|\bigl\{x \in \,]a;b[\, : f(x) = 0, g(x) < 0\bigr\}\bigr| \end{aligned}$$

Beweis. Durch allfälliges Verschieben von a zu $a + \varepsilon$, b zu $b - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) kann man o.B.d.A. annehmen, daß alle $f_i(a)f_i(b) \neq 0$ sind für $i = 0, \ldots, d$; dies läßt wegen der lokalen Konstantheit von $x \mapsto \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(x))$ um a und b aufgrund von (S3), (S4) die Zeichenwechsel invariant, ebenso wegen (S2) die rechten Seiten der behaupteten Gleichheit. Sei $c_1, \ldots, c_m$ mit

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b$$

die Folge aller Nullstellen von $f_0, \ldots, f_d$ in $]a;b[$. Man wähle nun $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ mit

$$a = \alpha_0 < c_1 < \alpha_1 < c_2 < \cdots < \alpha_{m-1} < c_m < \alpha_m = b;$$

also $f_i(d) \neq 0$ für alle $d \in [\alpha_j; \alpha_{j+1}]$, $d \neq c_j$ mit $j = 0, \ldots, m-1$, $i = 0, \ldots, d$. Mit den Lemmata 6.3.4, 6.3.5 folgt der Satz. □

Korollar 6.3.6. (Sturm) *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(b)) = \bigl|\bigl\{x \in \,]a;b[\, : f(x) = 0\bigr\}\bigr|.$$

Beweis. Spezialfall $g = 1$. □

Korollar 6.3.7. *Sei $\mathbf{f}$ die Sturmsche Kette zu $f \in R[X]$ mit Nebenbedingung 1, $\mathbf{h}$ die Sturmsche Kette zu f mit Nebenbedingung $g \in R[X]$, beide bzgl. $[a;b]$, $a < b$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &2 \cdot \bigl|\bigl\{x \in \,]a;b[\, : f(x) = 0, g(x) > 0\bigr\}\bigr| = \\ &\qquad\qquad \bigl(\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(b))\bigr) + \bigl(\mathrm{ZW}(\mathbf{h}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{h}(b))\bigr) \end{aligned}$$

Beweis. Da f und g keine gemeinsamen Nullstellen auf $]a;b[$ besitzen, folgt mit Kor. 6.3.6 und dem Satz

$$\begin{aligned} \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(b)) &= |\{f = 0, g > 0\}| + |\{f = 0, g < 0\}| \\ &= -\bigl(\mathrm{ZW}(\mathbf{h}(a)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{h}(b))\bigr) + 2 \cdot |\{f = 0, g > 0\}|, \end{aligned}$$

also die behauptete Gleichung. □

Korollar 6.3.8. *Der Satz von Sturm (und damit Kor. 6.3.6 und 6.3.7) gilt sinngemäß auch für $a = -\infty$, $b = +\infty$, wobei wir für eine Sturmsche Kette $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_d)$ mit $f_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} X^j$, $a_{ir_i} \neq 0$*

$$\begin{aligned} \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(-\infty)) &:= \mathrm{ZW}\big((-1)^{r_0} a_{0r_0}, \ldots, (-1)^{r_d} a_{dr_d}\big) \\ \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(+\infty)) &:= \mathrm{ZW}(a_{0r_0}, \ldots, a_{dr_d}) \end{aligned}$$

definieren.

Beweis. Nach dem Satz über die Cauchyschranke existiert ein $M > 0$ so, daß sich alle Nullstellen der Polynomfunktion f im Intervall $]-M; M[$ befinden und $\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(-\infty)) = \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(-M))$, $\mathrm{ZW}(\mathbf{f}(+\infty)) = \mathrm{ZW}(\mathbf{f}(M))$ für die zugehörige Kette $\mathbf{f}$ ist; auf $[-M; M]$ kann jetzt der Satz von Sturm angewendet werden. □

Damit zum Beweis der Eindeutigkeit des reellen Abschlusses.

Korollar 6.3.9. (Artin-Schreier, [**44**]) *Sei K ein geordneter Körper, und seien R, R' zwei reelle Abschlüsse von K. Dann existiert genau ein ordnungserhaltender K-Isomorphismus $\varphi\colon R \xrightarrow{\cong} R'$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß es für jede endliche Erweiterung $R \supseteq E \supseteq K$ zumindest eine ordnungserhaltende Einbettung von E über K in R' gibt. Sei (mit dem Satz vom primitiven Element, [**34**], V, Th. 4.6) $E = K(\alpha)$ mit $\alpha \in R$ und f das Minimalpolynom von α über K. Da K vollkommen, f also quadratfrei ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Sturm erfüllt; da die Zeichenwechsel in Kor. 6.3.8 nur von den Koeffizienten von f abhängen, hat f in R und R' gleich viele verschiedene Nullstellen, mindestens also eine, sagen wir β, in R'. Dann existiert ein K-Isomorphismus $\iota\colon K(\alpha) \xrightarrow{\cong} K(\beta)$ mit $\alpha \mapsto \beta$, da f auch das Minimalpolynom von β über K ist. Wir zeigen, daß ι ordnungserhaltend ist: Sei $\sigma \in K(\alpha) \subseteq R$, $0 < \sigma$, und $\gamma \in R$ mit $\gamma^2 = \sigma$. Da R, R' (nach isomorpher Korrektur) reelle Abschlüsse des angeordneten Körpers $E = K(\alpha)$ sind und γ algebraisch über E ist, existiert eine K-Einbettung $\iota'\colon K(\alpha, \gamma) \hookrightarrow R'$ mit $\iota' = \iota$ auf $K(\alpha)$, und es ist $\iota'(\sigma) = \iota'(\gamma)^2$, also $\iota(\sigma) > 0$. ι bildet also Quadrate auf Quadrate ab, und ist somit ordnungserhaltend.

Durch Anwendung des Zornschen Lemmas auf die Menge aller ordnungserhaltenden K-Homomorphismen $E \hookrightarrow R'$, wobei E eine Zwischenkörper von R/K, erhalten wir wegen dem eben Bewiesenen einen ordnungserhaltenden K-Homomorphismus $\varphi\colon R \to R'$. φ ist zudem eindeutig bestimmt, denn ist $\alpha \in R$ die k-te Nullstelle seines Minimalpolynoms über K, so ist $\varphi(\alpha) \in R'$ notwendig auch die k-te Nullstelle von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ in R'. Umgekehrt existiert nun auch genau ein ordnungserhaltendes $\varphi'\colon R' \to R$, $\varphi'|K = \mathrm{id}_K$, und mit der Eindeutigkeit folgt $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_R$, $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{R'}$. □

Wir sind also berechtigt, in Zukunft von *dem* reellen Abschluß eines geordneten Körpers zu sprechen. Es wird dem Leser empfohlen, auch den eleganten Beweis der Eindeutigkeit des reellen Abschlußes nach einer Idee von Knebusch [**85**] zu studieren, welche den Satz von Sturm vermeidet und stattdessen auf den Sylvesterschen Trägheitssatz zurückgreift; eine Darstellung dieser Beweisvariante findet man bei [**36**], Thm. 3.10, oder in [**51**].— Die im Beweis dieses Korollars verwendete Idee, die Tatsache, daß jedes Polynoms $f \in K[X]$ über einem geordneten Körper K in allen reell abgeschlossenen Erweiterungen von K gleich viele Wurzeln besitzt, auszunutzen, wird auch im Beweis des Satzes von Tarski-Seidenberg zentral werden.

Unser nächstes Ziel ist jetzt, das Zählen von Nullstellen mit mehreren Nebenbedingungen, d.h. der Lösungen eines kombinierten Gleichungs-Ungleichungssystems

$$f = 0, g_1 > 0, \dots, g_n > 0 \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ f, g_i \in R[X] \text{ von positivem Grad}$$

auf den Fall einer Nebenbedingung zu reduzieren.

Sei dazu M eine endliche Teilmenge von R, so daß für alle $c \in M$ alle $g_i(c) \neq 0$ sind, für $i = 1, \dots, n$. Für $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^n$ sei

$$Z_{\boldsymbol{\varepsilon},M} = Z_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \left|\left\{c \in M : \operatorname{sgn} g_i(c) = \boldsymbol{\varepsilon}(i) \text{ für alle } 1 \le i \le n\right\}\right|.$$

Unser Interesse gilt natürlich der Berechnung von $Z_{\mathbf{1}^n,M}$, wobei $\mathbf{1}^n = (1, \dots, 1)$. Wir bilden aus den g_i kombinierte Polynome: Für $\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n$ sei $g_{\boldsymbol{\delta}} := g_1^{\boldsymbol{\delta}(1)} \cdots g_n^{\boldsymbol{\delta}(n)}$. Setze dann

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{\delta},M} = P_{\boldsymbol{\delta}} &:= \left|\left\{c \in M : g_{\boldsymbol{\delta}}(c) > 0\right\}\right|, \\ N_{\boldsymbol{\delta},M} = N_{\boldsymbol{\delta}} &:= \left|\left\{c \in M : g_{\boldsymbol{\delta}}(c) < 0\right\}\right|. \end{aligned}$$

Satz 6.3.10. *Sei $m := |M|$. Dann gilt:*

(i) $\sum_{\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n} P_{\boldsymbol{\delta}} = 2^{n-1}\left(m + Z_{\mathbf{1}^n}\right)$

(ii) $\sum_{\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n} N_{\boldsymbol{\delta}} = 2^{n-1}\left(m - Z_{\mathbf{1}^n}\right)$

Subtrahiert man (ii) von (i), so erhält man die gesuchte Reduktion:

Korollar 6.3.11. $\sum_{\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n} \left(P_{\boldsymbol{\delta}} - N_{\boldsymbol{\delta}}\right) = 2^n Z_{\mathbf{1}^n}$. □

Beweis (des Satzes). Wir schließen durch Induktion nach n: Für $n = 1$ ergibt sich

$$P_0 + P_1 = m + Z_1, \qquad N_0 + N_1 = 0 + Z_{-1} = m - Z_1.$$

Zum Schritt $n \to n+1$ seien jetzt $n+1$ Polynome $g_1, \dots, g_{n+1}$ gegeben. Setze

$$M_p := \{c \in M : g_{n+1}(c) > 0\}, \qquad M_n := \{c \in M : g_{n+1}(c) < 0\}$$

und $m_p := |M_p|$, $m_n := |M_n|$, also $m = m_p + m_n$. Mit Induktionsannahme erhalten wir wegen $\sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \{0,1\}^n} P_{(\boldsymbol{\gamma},0)} = \sum_{\boldsymbol{\gamma}} P_{\boldsymbol{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^{n+1}} P_{\boldsymbol{\delta}} &= \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \{0,1\}^n} P_{(\boldsymbol{\beta},1)} + \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \{0,1\}^n} P_{(\boldsymbol{\gamma},0)} \\ &= \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \{0,1\}^n} P_{(\boldsymbol{\beta},1)} + 2^{n-1}\left(m + Z_{\mathbf{1}^n}\right) \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{\beta}} P_{(\boldsymbol{\beta},1)} &= \sum_{\boldsymbol{\beta}} P_{\boldsymbol{\beta},M_p} + \sum_{\boldsymbol{\beta}} N_{\boldsymbol{\beta},M_n} \\ &= 2^{n-1}\left(m_p + Z_{\mathbf{1}^n,M_p} + m_n - Z_{\mathbf{1}^n,M_n}\right) \\ &= 2^{n-1}\left(m + Z_{\mathbf{1}^n,M_p} - Z_{\mathbf{1}^n,M_n}\right), \end{aligned}$$

also wegen $Z_{\mathbf{1}^n,M} = Z_{\mathbf{1}^n,M_p} + Z_{\mathbf{1}^n,M_n}$ und $Z_{\mathbf{1}^n,M_p} = Z_{\mathbf{1}^{n+1},M}$

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{\delta}} P_{\boldsymbol{\delta},M} &= 2^{n-1}\left(m + Z_{\mathbf{1}^n,M_p} - Z_{\mathbf{1}^n,M_n} + m + Z_{\mathbf{1}^n,M}\right) \\ &= 2^n\left(m + Z_{\mathbf{1}^n,M_p}\right) \\ &= 2^n\left(m + Z_{\mathbf{1}^{n+1},M}\right). \end{aligned}$$

Damit ist (i) gezeigt; (ii) ergibt sich analog. □

6.4. Der Satz von Tarski-Seidenberg

Wir sind nun in der Lage, folgendes fundamentale Resultat zu zeigen:

Satz 6.4.1. (Tarski-Seidenberg, [**165**], [**146**]) *Die Klasse $\mathcal{RAK}$ der reell abgeschlossenen Körper bzgl. der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ ist substrukturvollständig.*

Beweis. Sei $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ eine 1-primitive erweiterte Formel in L, R und S aus $\mathcal{RAK}$ mit gemeinsamer Substruktur K; nach Prop. 6.1.3 ist K ein geordneter Integritätsbereich; man zeigt leicht, daß der gemäß Prop. 6.1.3 kanonisch geordnete Quotientenkörper von K in R und S eingebettet werden kann, so daß wir o.B.d.A. K bereits als geordneten Körper annehmen dürfen. Zu zeigen ist: Sind $b_1, \ldots, b_n \in K$ und gilt $R \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$, so auch $S \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Sei $\varphi' := \varphi[\overline{b}_1/y_1, \ldots, \overline{b}_n/y_n]$ aus $L(K)$. Wir können φ' als folgendermaßen gegeben annehmen:

$$\varphi' = \exists x \left(\bigwedge_{j=1}^{k} f_j(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} g_i(x) > 0 \right),$$

wobei $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k + n > 0$ und $f_j, g_i \in K[X]$ mit $\mathrm{grad}(f_j), \mathrm{grad}(g_i) > 0$.

Sei zunächst $k > 0$. Setze $f := \sum_{j=1}^{k} f_j^2$; dann gilt in jedem formal reellen $K' \supseteq K$: $f(a) = 0$ gdw. $\bigwedge_{j=1}^{k} f_j(a) = 0$, für jedes $a \in K'$. Daher sei o.B.d.A. $k = 1$, also φ' von der Gestalt

$$\varphi' = \exists x \left(f(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} g_i(x) > 0 \right).$$

Da φ' nach Voraussetzung in R gilt, existiert ein $\alpha \in R$ mit $f(\alpha) = 0$, $g_i(\alpha) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei jetzt $h \in K[X]$ das Minimalpolynom von α über K. Weil $\mathrm{char}(K) = 0$, also K vollkommen, ist h quadratfrei. Division mit Rest in $K[X]$ ergibt $f = qh$, $g_i = q_i h + r_i$ mit $\mathrm{grad}(r_i) < \mathrm{grad}(h)$ und $r_i(\alpha) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Somit sind h, h' und h, r_i $(i = 1, \ldots, n)$ jeweils ohne gemeinsame Nullstelle in R. (Letzteres folgt daraus, daß $\mathrm{grad}(r_i) < \mathrm{grad}(h)$, $r_i \neq 0$ und h Minimalpolynom aller seiner Nullstellen in jedem beliebigen Erweiterungskörper von K ist.) Wir wenden Kor. 6.3.11 auf die Menge $M := \{c \in R : h(c) = 0\}$ und die Polynome h und $r_1, \ldots, r_n$ an und bekommen

$$0 < 2^n Z_{\mathbf{1}^n, M} = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n} (P_{\boldsymbol{\delta}, M} - N_{\boldsymbol{\delta}, M}).$$

Sei nun $\mathbf{h}_{\boldsymbol{\delta}}$ für $\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n$ die Sturmsche Kette zu h mit Nebenbedingung $r_{\boldsymbol{\delta}} := \prod_{i=1}^{n} r_i^{\boldsymbol{\delta}(i)}$. Die Voraussetzungen des Satzes von Sturm sind erfüllt, und mit $\sigma_{\boldsymbol{\delta}} := \mathrm{ZW}(\mathbf{h}_{\boldsymbol{\delta}}(-\infty)) - \mathrm{ZW}(\mathbf{h}_{\boldsymbol{\delta}}(+\infty))$ folgt

$$0 < \sum_{\boldsymbol{\delta}} (P_{\boldsymbol{\delta}, M} - N_{\boldsymbol{\delta}, M}) = \sum_{\boldsymbol{\delta}} \sigma_{\boldsymbol{\delta}}.$$

$\sigma_{\boldsymbol{\delta}}$ ist nun nur von den Koeffizienten der $h, g_i \in K[X]$ abhängig. Mit dem Satz von Sturm existiert also auch ein $\beta \in S$ mit $h(\beta) = 0$, $r_i(\beta) > 0$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Dann ist auch $f(\beta) = (qh)(\beta) = 0$ und $g_i(\beta) = (q_i h)(\beta) + r_i(\beta) = r_i(\beta) > 0$, d.h. es gilt $(S, K) \models \varphi'$, also $S \models \varphi$.

Nun zum Fall $k = 0$, also $\varphi' = \exists x(\bigwedge_{i=1}^n g_i(x) > 0)$. Sei etwa $\alpha \in R$ mit $g_i(\alpha) > 0$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Sei $d_i := \text{grad}(g_i) > 0$, c_i der höchste nichtverschwindende Koeffizient von g_i $(i = 1, \dots, n)$. Wir unterscheiden:

(i) Es sind alle $c_i > 0$. Wähle gemäß Satz 6.2.1 $\beta \in S$ größer als das Maximum der Cauchyschranken der g_i; dann ist $g_i(\beta) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(ii) Es sind alle $(-1)^{d_i} c_i > 0$. Wähle wieder $\beta \in S$ genügend groß, so daß $g_i(-\beta) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(iii) Sei $M := \{a \in R : g_1(a), \dots, g_n(a) > 0\}$. Liegt nicht Fall (i) oder (ii) vor, so ist M beschränkt in R; wegen $\alpha \in M$ ist M nichtleer. M ist eine endliche Vereinigung von Intervallen der Form $]\gamma; \delta[$ mit $\gamma < \delta$ aus R, derart daß $g(\gamma) = g(\delta) = 0$ und $g(\beta) \neq 0$ für $\beta \in]\gamma; \delta[$, wobei $g := \prod_{i=1}^n g_i$ sei. Fixiere ein solches Intervall $]\gamma; \delta[$. Mit dem Satz von Rolle existiert ein $\varepsilon \in]\gamma; \delta[$, so daß $g'(\varepsilon) = 0$ und $g_i(\varepsilon) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Da weder Fall (i) noch (ii) vorliegt, muß $n \geq 2$ oder $n = 1$ und d_1 gerade sein; da weiter $\text{grad}(g_i) > 0$, haben wir $\text{grad}(g) > 1$, also $\text{grad}(g') > 0$, und wir sind wieder im anfänglich behandelten Fall $k > 0$ angelangt. Wir erhalten ein $\varepsilon' \in S$ mit $g'(\varepsilon') = 0$ und $g_i(\varepsilon') > 0$ für $i = 1, \dots, n$, insbesondere $(S, K) \models \varphi'$.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Dem Beweis des Satzes entnimmt man:

KOROLLAR 6.4.2. *Ist R ein reell abgeschlossener Körper und*

$$f_1 = 0, \dots, f_n = 0, \quad g_1 > 0, \dots, g_m > 0 \tag{6.4.8}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$, $f_i, g_j \in \mathbb{Q}[X]$ ein System von Polynomgleichungen und -ungleichungen, so kann (6.4.8)*, falls lösbar, stets mit algebraischen Elementen gelöst werden.* □

Schließlich erhalten wir als unmittelbare Folgerung:

KOROLLAR 6.4.3. *$\mathcal{RAK}$ ist vollständig, entscheidbar und erlaubt effektive Q.E.*

BEWEIS. $\mathcal{RAK}$ ist rekursiv aufzählbar axiomatisiert; damit folgt die effektive Q.E. nach Kor. 5.2.9. Für den Rest genügt es (nach Prop. 5.4.2) zu zeigen, daß $\mathcal{RAK}$ q.f. vollständig und q.f. entscheidbar ist. Wir betrachten variablenfreie atomare Formeln in L; diese können als $n \cdot 1 > 0$ oder $n \cdot 1 = 0$ mit $n \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden, und sind äquivalent zu $n > 0$ bzw. $n = 0$. □

Eine Anwendung:

ÜBUNG. (Entscheidbarkeit der ebenen Geometrie) Sei $L_E = \{L, Z, K, W, G\}$ eine wie folgt definierte Sprache:

(i) L, Z seien dreistellige Relationssymbole; wir lesen $L(x, y, z)$ und $Z(x, y, z)$ als: „Die Punkte x, y, z sind kollinear“ bzw. „Die Punkte x, y, z sind kollinear, und z liegt zwischen x und y“.

(ii) K, W seien sechsstellige Relationssymbole, wobei $K(x, y, z, u, v, w)$ und $W(x, y, z, u, v, w)$ die Kongruenz von Dreiecken bzw. Winkeln ausdrücke, d.h. $\triangle xyz \cong \triangle uvw$ bzw. $\measuredangle xyz = \measuredangle uvw$.

(iii) G sei ein vierstelliges Relationssymbol, wobei $G(x, y, u, v)$ als $\overline{xy} = \overline{uv}$ zu verstehen ist.

Sei $\mathfrak{E} = (E, L^{\mathfrak{E}}, Z^{\mathfrak{E}}, K^{\mathfrak{E}}, W^{\mathfrak{E}}, G^{\mathfrak{E}})$ die L_E-Struktur, in der $E = \mathbb{R}^2$ und L, Z, K, W, G im Sinne der Elementargeometrie interpretiert werden. Der L_E-Satz

$$\begin{aligned}\forall a \forall b \forall c \forall u \forall v \forall w \big(&W(w,a,b,v,a,w) \wedge W(w,a,b,c,a,v) \wedge W(a,b,w,w,b,u) \wedge \\ &W(a,b,w,u,b,c) \wedge W(a,c,v,v,c,u) \wedge W(a,c,v,u,c,b) \to \\ &\qquad G(u,v,v,w) \wedge G(v,w,w,u)\big)\end{aligned}$$

entspricht z.B. dem in $\mathfrak{E}$ gültigen schönen *Satz von Morley* (1899):

> Drittelt man die Winkel eines Dreiecks, bilden die Schnittpunkte abwechselnder Winkeldreiteilender ein gleichseitiges Dreieck.

(Siehe [**187**], III, §3.6.) Zeige durch Reduktion auf $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$, daß $\mathrm{Th}(\mathfrak{E})$, die *ebene euklidische Geometrie,* entscheidbar ist [**165**].

Zurück zur Algebra: Wie im Fall der algebraisch abgeschlossenen Körper fester Charakteristik das Lefschetzprinzip (vgl. §5.5), erhalten wir aus der Vollständigkeit ein Beweisprinzip:

Tarski-Prinzip. *Sei L die Sprache der geordneten Ringe, φ ein L-Satz. Genau dann gilt φ in allen reell abgeschlossenen Körpern, wenn φ in einem reell abgeschlossenen Körpern gilt.* □

Zum Beweis oder zur Widerlegung elementar formulierbarer mathematischer Aussagen über alle reell abgeschlossenen Körper R reicht es also, etwa den Fall $R = \mathbb{R}$ zu betrachten.— Ein erstes Beispiel einer Anwendung dieses Prinzips:

Beispiel. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Jede Quadrik

$$\{\mathbf{a} \in R^n : f(\mathbf{a}) = 0\} \quad \text{mit } f \in R[X_1, \ldots, X_n],\ \mathrm{grad}(f) = 2$$

läßt sich in R mittels einer orthogonalen Transformation auf Hauptachsenform bringen.

Beweis. Die Aussage gilt bekanntlich in $\mathbb{R}$ und läßt sich für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ als L-Satz formulieren. Mit der Vollständigkeit von $\mathcal{RAK}$ folgt die Behauptung. □

Bevor wir uns einem Satz von van den Dries (§6.5) und weiteren Anwendungsbeispielen (§6.6) zuwenden, wollen wir eine von Robinson [**14**] stammende, kürzere Beweisvariante zum Satz von Tarski-Seidenberg wiedergeben, die jedoch wesentlich Kor. 6.1.14 und Kor. 6.3.9 verwendet:

Beweisvariante (Satz von Tarski-Seidenberg). Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis oben sieht man, daß es ausreichend ist, folgendes zu zeigen: Seien K ein geordneter Körper und R, R' reell abgeschlossene Erweiterungskörper von K. Für Polynome

$$f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_n \in K[X] \quad \text{mit } k, n \in \mathbb{N}_0,\ k+n > 0,\ \mathrm{grad}(f_i), \mathrm{grad}(g_j) > 0$$

existiert ein $a \in R$ mit

$$f_1(a) = 0, \ldots, f_k(a) = 0, \quad g_1(a) > 0, \ldots, g_n(a) > 0 \tag{6.4.9}$$

genau dann, wenn ein solches a in R' existiert.

Seien dazu $L := \overline{K}^R$ und $L' := \overline{K}^{R'}$ die algebraischen Abschlüsse von K in R bzw. R'. Nach Kor. 6.1.14 sind L und L' reell abgeschlossen, und nach Kor. 6.3.9 existiert ein ordnungserhaltender K-Isomorphismus $\varphi\colon L \to L'$. $a \in R$ erfülle (6.4.9); es reicht zu zeigen, daß ein $b \in L$ existiert, das (6.4.9) erfüllt, weil dann $\varphi(b)$ auch

(6.4.9) erfüllt. Ist nun $k > 0$, so also speziell $f_1(a) = 0$, also $a \in \overline{K}^R = L$. Ist $k = 0$, so sei M die Menge aller Nullstellen der $g_1, \ldots, g_n$ in R; es ist $M \subseteq L$. Ist $M = \varnothing$, so ist $g_i(0) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, weil wir sonst einen Widerspruch zum Zwischenwertsatz hätten. Ist $M \neq \varnothing$, so unterscheiden wir:

(i) $a > \max M$. Dann ist $g_i(\max M + 1) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
(ii) $a < \min M$. Dann ist $g_i(\min M - 1) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
(iii) Es gibt benachbarte $\alpha, \beta \in M$ mit $\alpha < a < \beta$. Aber dann hat man $g_i(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Dies vervollständigt den Beweis. □

(Man vgl. auch den kurzen Artikel [**71**] für weitere Beweise und Bedeutung des Satzes von Tarski-Seidenberg. Ein zu Satz 5.7.1 analoges Ergebnis gilt auch für reell abgeschlossene Körper; vgl. §6.5.)

Übung. Sei $\Sigma := \mathrm{Th}(\mathbb{R})$ in der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ und $\mathcal{K} := \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Ist $\mathcal{K}$ modellvollständig bzw. substrukturvollständig?

Bemerkung. In seiner Monographie [**165**] stellte Tarski das Problem, die modelltheoretischen Eigenschaften der Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, \exp)$ zu untersuchen, inbesondere die Modellvollständigkeit von $\mathcal{E} := \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, \exp))$. Dieses Problem war über 40 Jahre ungelöst, bis Wilkie in einer bedeutenden Arbeit [**182**] u.a. zeigen konnte: $\mathcal{E}$ ist modellvollständig. Macintyre und Wilkie [**106**] konnten zudem Verbindungen zu der ungelösten sog. Schanuelschen Vermutung aus der Zahlentheorie herstellen ([**34**], App. 1): Ist diese wahr, so ist $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, \exp)$ entscheidbar. Es würde zu weit führen, hier auf diese und verwandte Ergebnisse einzugehen. Wir zeigen hier nur: (Für analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher vgl. [**183**], v.a. §9.)

Proposition 6.4.4. (Osgood, nach [**69**]) *$\mathcal{E}$ ist nicht substrukturvollständig.*

Beweis. Betrachte

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y \cdot \exp(x/y).$$

Der Graph von f ist die Teilmenge

$$\mathrm{graph}(f) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0 \land \exists t(z = y \cdot \exp(t) \land t \cdot y = x)\big\}$$

des $\mathbb{R}^3$ und somit in $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <, \exp\}$ definierbar. Offenbar reicht es zu zeigen (vgl. auch §§5.5.4, 6.6):

($*$) Es gibt keine offene Kugel U um $0 \in \mathbb{R}^3$ und reell analytische Funktionen $F_1, \ldots, F_k\colon U \to \mathbb{R}$, so daß $\mathrm{graph}(f) \cap U$ zu der von den Teilmengen $\{a \in U : F_i(a) > 0\}$, $\{a \in U : F_i(a) = 0\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ in U erzeugten Booleschen Algebra gehört.

Angenommen nämlich, das Gegenteil von ($*$) wäre der Fall. Wir können annehmen, daß keines der F_i identisch Null ist. Zumindest eines der F_i, sagen wir F_1, muß jedoch auf ganz $\mathrm{graph}(f) \cap U$ verschwinden; ansonsten gäbe es ein $c \in \mathrm{graph}(f) \cap U$ mit $F_i(c) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$, und $\mathrm{graph}(f)$ enthielte eine ganze Umgebung von c im $\mathbb{R}^3$, im Widerspruch zur Rechtseindeutigkeit von $\mathrm{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Wir wählen eine offene Kugel $U' \subseteq U$ um den Ursprung so, daß die Taylorreihe von F_1 um 0 auf U' konvergiert, wir also

$$F_1(a) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(a) \qquad \text{für alle } a \in U'$$

schreiben können, wobei die $P_i \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ homogene Polynome vom Grad i seien ($i \in \mathbb{N}_0$). Sei nun $(x, y, z) \in \operatorname{graph}(f) \cap U'$ beliebig. Für alle $0 < \lambda < 1$ ist $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \operatorname{graph}(f) \cap U'$, und

$$0 = F_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x, y, z)\lambda^i$$

wegen $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$. Also folgt insbesondere $P_i(a) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \operatorname{graph}(f) \cap U'$. Wählt man $i \in \mathbb{N}_0$ mit $P_i \neq 0$ in $\mathbb{R}[X, Y, Z]$, so folgt aus der Analytizität von f: $P_i(x, y, f(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$; speziell $P_i(x, 1, f(x, 1)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und exp wäre eine algebraische Funktion, was aber bekanntlich nicht der Fall ist. $\square$

Die sich aus der Modellvollständigkeit von $\mathcal{RAK}$ und $\mathcal{E}$ ergebenden geometrischen Konsequenzen erläutert [**55**]; vgl. auch [**69**].

6.5. Ein Satz von van den Dries*

Wir zeigen zunächst in Analogie zu Satz 5.7.1:

Satz 6.5.1. (Macintyre-McKenna-van den Dries, [**105**]) *Sei K ein geordneter Körper, der bzgl. der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ der geordneten Ringe Q.E. erlaubt. Dann ist K reell abgeschlossen.*

Dem Beweis schicken wir zwei einfache modelltheoretische Tatsachen und ein algebraisches Lemma voraus:

Lemma 6.5.2. *Sei $\varphi(\mathbf{x})$ eine quantorenfreie L-Formel, $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$. Dann ist $\varphi(\mathbf{x})$ in $\mathcal{GK}$ö äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln des Typs*

$$q_1(\mathbf{x}) > 0 \wedge \cdots \wedge q_m(\mathbf{x}) > 0 \quad \textit{oder} \quad q_1(\mathbf{x}) > 0 \wedge \cdots \wedge q_m(\mathbf{x}) > 0 \wedge p(\mathbf{x}) = 0,$$

wobei $p, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, $p \neq 0$.

Beweis. Kann dem Leser überlassen werden. $\square$

Lemma 6.5.3. *Seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ modellvollständige Klassen von Strukturen bzgl. derselben Sprache L der Logik erster Stufe. Sei $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}'$ so gegeben, daß $\mathfrak{A}'$ Substruktur einer Struktur aus $\mathcal{K}$ ist und zugleich $\mathfrak{A}'$ eine Substruktur aus $\mathcal{K}$ enthält. Dann ist auch $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2$. Betrachte einen L-Satz $\varphi = \forall\mathbf{x}\exists\mathbf{y}(\psi) \in \operatorname{Th}(\mathcal{K})$ mit $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ quantorenfrei. Angenommen, $\mathfrak{A}' \models \neg\varphi$. Da $\mathcal{K}'$ modellvollständig ist, existiert nach Robinsons Test ein existentielles $\theta(\mathbf{x})$, so daß $\mathcal{K}' \models \forall\mathbf{x}\big(\neg\exists\mathbf{y}(\psi) \leftrightarrow \theta\big)$. Es folgt $\mathfrak{A}' \models \exists\mathbf{x}(\theta)$, und da θ existentiell ist, $\mathfrak{A}_2 \models \exists\mathbf{x}(\theta)$. Also auch $\mathfrak{A}_1 \models \exists\mathbf{x}(\theta)$, denn $\mathcal{K}$ ist modellvollständig. Daher exisiert ein $\mathbf{a}$ in A_1 mit $\mathfrak{A}_1 \models \theta(\mathbf{a})$, und folglich $\mathfrak{A}' \models \theta(\mathbf{a})$. Somit $(\mathfrak{A}', A_1) \models \big(\neg\exists\mathbf{y}(\psi)\big)[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$ und insbesondere $(\mathfrak{A}_1, A_1) \models \big(\neg\exists\mathbf{y}(\psi)\big)[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$. Dies ist ein Widerspruch, denn $\mathfrak{A}_1 \in \mathcal{K}$. Daher erfüllt $\mathfrak{A}'$ jeden $\forall_2$-Satz aus $\operatorname{Th}(\mathcal{K})$, und da $\mathcal{K}$ modellvollständig ist, ist dies nach 4.3.1 die Behauptung. $\square$

Korollar 6.5.4. *Sei K ein geordneter Körper, der bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ Q.E. erlaubt, und A sein Teilkörper der algebraischen Zahlen, d.h. der relative algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ in K. Ist A reell abgeschlossen, so auch K.*

Beweis. Wende Lemma 6.5.3 auf $\mathcal{K} := \mathcal{RAK}$ und $\mathcal{K}' := \operatorname{Mod}(\operatorname{Th}(K))$ an. $\square$

Lemma 6.5.5. *Sei K ein geordneter Körper, P sein positiver Kegel, A der Teilkörper der algebraischen Zahlen in K. Dann liegt $\{a^2 : a \in A\}$ dicht in $P \cap A$.*

Beweis. Es ist $\{q^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ dicht in $P \cap \mathbb{Q}$, so daß es also reicht, folgendes zu zeigen:

($*$) A ist archimedisch angeordnet, d.h. für alle $\alpha \in A$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \alpha$. (Def. 6.1.1.)

Denn aus ($*$) folgt dann wie im Beweis der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, daß $\mathbb{Q}$ dicht in A ist ([**183**], 2.2.16). Sei zum Beweis von ($*$) $\alpha \in A$, $p = \operatorname{Irr}(\alpha; \mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}[X]$, etwa $p = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$; aus dem Satz 6.2.1 über die Cauchyschranke folgt $|\alpha| \leq m$ für ein $m \in \mathbb{Q}$, und mit einem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ ist wie gewünscht $\alpha \leq |\alpha| \leq m \leq n$. □

Wir können damit direkt übergehen zu:

Beweis (Satz 6.5.1). Ähnlich wie im Beweis zu Satz 5.7.1 können wir annehmen, daß $\operatorname{trdeg}(K/\mathbb{Q}) = \infty$ ist. Angenommen, K wäre nicht reell abgeschlossen. Sei $A \subseteq K$ der Teilkörper der algebraischen Zahlen in K; nach dem Kor. 6.5.4 ist A nicht reell abgeschlossen. Sei

$$p(X, \mathbf{Y}) := X^n + Y_n X^{n-1} + \cdots + Y_1, \quad \mathbf{Y} := (Y_1, \ldots, Y_n)$$

und sei $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ derart, daß $p(X, \mathbf{a})$ ungeraden Grad und keine Nullstelle in A besitzt. Wir nehmen an, daß p über A irreduzibel ist. Sei $\varphi(\mathbf{Y})$ eine in $\operatorname{Mod}(\operatorname{Th}(K))$ zu $\forall X (p \neq 0)$ äquivalente quantorenfreie Formel. Sei

$$f := \prod_{i=0}^{n-1} \left(X - \sum_{j=0}^{n-1} t_j \alpha_i^j \right),$$

wobei $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Wurzeln von $p(X, \mathbf{a})$ im algebraischen Abschluß von A sind, und $t_0, \ldots, t_n$ neue Variable, wie im Beweis von Satz 5.7.1. Wie dort folgt, daß, falls wir f in der Form

$$f = X^n + g_n X^{n-1} + \cdots + g_1 \quad \text{mit } g_i \in A[t_0, \ldots, t_{n-1}]$$

schreiben, die $g_1, \ldots, g_n$ über A algebraisch unabhängig sein müssen. $\varphi(\mathbf{Y})$ ist mit Lemma 6.5.2 o.B.d.A. eine Disjunktion von Formeln der Art

$$q_1 > 0 \wedge \cdots \wedge q_m > 0 \quad \text{oder} \quad q_1 > 0 \wedge \cdots \wedge q_m > 0 \wedge q = 0, \tag{6.5.10}$$

mit $q, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Z}[\mathbf{Y}]$, $q \neq 0$. Ist nun $\mathbf{a}' = (a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \in A^n$ und $a'_i \neq 0$ für ein $i > 0$, so ist $a'_0 + a'_1 \alpha_j + \cdots + a'_{n-1} \alpha_j^{n-1} \notin A$ (denn $p = \operatorname{Irr}(\alpha_j; A)$). Unter diesen Voraussetzungen hat daher $f(a'_0, \ldots, a'_{n-1}) \in A[X]$ keine Nullstelle in A; deshalb auch $A \models \varphi\big(g_1(\mathbf{a}'), \ldots, g_n(\mathbf{a}')\big)$. Da $g_1, \ldots, g_n$ über A algebraisch unabhängig sind und A unendlich ist, gibt es keine echte Zariski-abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq A^n$ mit

$$X \supseteq \left\{ \big(g_1(\mathbf{a}'), \ldots, g_n(\mathbf{a}')\big) \in A^n : \mathbf{a}' \in A^n,\ a'_i \neq 0 \text{ für ein } i > 0 \right\}.$$

(Vgl. [**33**], Prop. 1.3.) Also gibt es in der φ definierenden Disjunktion von Formeln aus (6.5.10) mindestens eine Formel der Gestalt

$$\psi(\mathbf{Y}) := \big(q_1(\mathbf{Y}) > 0 \wedge \cdots \wedge q_m(\mathbf{Y}) > 0\big)$$

mit $K \models \exists \mathbf{Y}(\psi)$. Sei $X := \left\{ \mathbf{a}' \in A^n : A \models \psi(\mathbf{a}') \right\}$. Bezeichnet $\overline{K}$ den reellen Abschluß von K, so folgt $\overline{K} \models \exists \mathbf{Y}(\psi)$, also wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{RAK}$

auch $\mathbb{R} \models \exists \mathbf{Y}(\psi)$ und damit $\mathbb{Q} \models \exists \mathbf{Y}(\psi)$, denn X ist durch Ungleichungen mit rationalen Koeffizienten definiert (vgl. Kor. 6.4.2). Wähle nun $\mathbf{a}' = (a_1', \dots, a_n') \in \mathbb{Q}^n$ mit $(a_1', \dots, a_n') \in X$. Sei ϱ eine reelle Nullstelle von $p(\mathbf{a}') \in \mathbb{Q}[X]$; schreibe $p(\mathbf{a}') = (X - \varrho)\big(b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0\big)$ mit $b_{n-1}, \dots, b_0 \in \mathbb{R}$, und wähle $\varepsilon > 0$ so, daß für alle $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^n$ mit $\|\mathbf{c} - \mathbf{a}'\| \leq \varepsilon$ auch $\mathbf{c} \in X$ gilt. (Dabei sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.) Es ist $b_{n-1} = 1$; sei $b_{n-1}' := 1$, $b_{-1}' := 0 =: b_{-1}$, und $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\big(1+|\varrho|+\max_{0\leq i<n}|b_i|\big)^{-1}$ sowie $b_i' \in \mathbb{Q}$ $(i = 0.\dots, n-2)$, $\mu \in \mathbb{Q}$ so gewählt, daß $|b_i - b_i'| < \delta$, $|\mu - \varrho| < \delta$, $|\mu| \leq |\varrho|$. Sei $s_i := b_{i-2}' - \mu b_{i-1}'$ für $i = 1, \dots, n$; dann gilt:

$$s_1 + s_2X + \cdots + s_nX^{n-1} + X^n = (X - \mu)\big(b_{n-1}'X^{n-1} + \cdots + b_0\big),$$

ferner

$$\begin{aligned} |s_i - a_i'| &= \big|b_{i-2}' - \mu b_{i-1}' - b_{i-2} + \varrho b_{i-1}\big| \\ &\leq |b_{i-2}' - b_{i-2}| + |\varrho b_{i-1} - \mu b_{i-1}| + |\mu b_{i-1} - \mu b_{i-1}'| \\ &\leq \delta + |b_{i-1}|\delta + |\mu|\delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

also $\|\mathbf{s}-\mathbf{a}'\| \leq \varepsilon$ mit $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Q}^n$, somit $\mathbf{s} \in X$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme. Also haben wir gezeigt:

1. Jedes Polynom ungeraden Grades aus $A[X]$ hat in A eine Nullstelle.

Weiterhin beweisen wir:

2. Jedes positive Element von A hat eine Quadratwurzel.

Sei dazu $Y := \big\{a \in A : a > 0,\ x^2 \neq a \text{ für alle } x \in A\big\}$. Betrachtet man die durch Lemma 6.5.2 gegebene Darstellung, so folgt, daß entweder Y endlich ist oder ein offenes Intervall $\varnothing \neq\,]a; b[\, \subseteq A$ enthält; letzteres kann jedoch nicht passieren, denn $\{a^2 : a \in A\}$ ist dicht im positiven Kegel von A, nach Lemma 6.5.5. Aber mit $y \in Y$ sind auch $yn^2 \in Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher muß $Y = \varnothing$ sein.

Aus (1.) und (2.) folgt nun, daß A reell abgeschlossen ist, im Widerspruch zur Annahme. □

Tatsächlich gilt sogar folgende allgemeinere Aussage:

Satz 6.5.6. (van den Dries, [**67**]) *Jeder geordnete Ring* (*als L-Struktur, wobei* $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$) *mit Q.E. ist ein reell abgeschlossener Körper.*

Zum Beweis wieder ein Hilfssatz: (Man beachte, daß jeder geordnete Ring kanonisch den geordneten Ring $\mathbb{Z}$ enthält, Bem. 6.1.2.)

Lemma 6.5.7. *Sei $\varphi(x)$ eine quantorenfreie L-Formel, R ein geordneter Ring. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß entweder für alle $r \in R$ mit $r \geq n$ gilt, daß $R \models \varphi(r)$, oder für alle $r \in R$, $r \geq n$ gilt, daß $R \models \neg\varphi(r)$.*

Beweis. Da die für φ behauptete Eigenschaft offenbar unter Booleschen Kombinationen erhalten bleibt, reicht es, den Fall einer atomaren Formel der Form $p > 0$ mit $p \in \mathbb{Z}[X]$ zu untersuchen. Ist $p = 0$, so gilt die zweite Alternative mit $n := 1$. Sei also von nun an $p = \sum_{i=0}^{d} a_iX^i \in \mathbb{Z}[X]$, $a_d \neq 0$, etwa $a_d > 0$. (Der Fall $a_d < 0$ wird analog behandelt.) Wir zeigen, daß die erste Alternative mit

$n := \max\bigl(|a_0|, \ldots, |a_d|\bigr) + 1$ zutrifft: Sei $r \geq |a_i| + 1$ für $i = 0, \ldots, d$. Wir zeigen durch Induktion nach $i = 0, \ldots, d$, daß

$$(6.5.11) \qquad r^i \geq |a_{i-1}|r^{i-1} + \cdots + |a_0| + 1.$$

Für $i = 0$ ist dies trivial. Sei also $i < d$ und gelte (6.5.11). Dann folgt

$$\begin{array}{rcl} r^{i+1} & = & r \cdot r^i \\ & \geq & \bigl(|a_i| + 1\bigr) r^i \\ & \geq & |a_i| r^i + |a_{i-1}| r^{i-1} + \cdots + |a_0| + 1, \end{array}$$

und der Induktionsschluß ist vollzogen. Setzen wir $i := d$ in (6.5.11), so erhalten wir

$$a_d r^d \geq r^d \geq |a_{d-1}| r^{d-1} + \cdots + |a_0| + 1 > \bigl(a_{d-1} r^{d-1} + \cdots + a_0\bigr),$$

somit $p(r) > 0$. $\square$

Damit zum *Beweis* von Satz 6.5.6. Aufgrund des vorhergehenden Satzes 6.5.1 haben wir lediglich zu zeigen, daß es sich bei R um einen (kommutativen) Körper handelt. Sei $\zeta(x)$ eine quantorenfreie L-Formel mit $R \models \bigl(\zeta \leftrightarrow \forall y(yx = xy)\bigr)$, also

$$Z(R) = \bigl\{r \in R : R \models \zeta(r)\bigr\},$$

wobei $Z(R)$ das Zentrum von R sei. Da $\mathbb{N} \subseteq Z(R)$, existiert nach Lemma 6.5.7 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r \in Z(R)$ für alle $r \geq n$. Ist nun $r \in R$ beliebig, so entweder $r + n \geq n$, also $r + n \in Z(R)$, oder $-r + n \geq n$, also $-r + n \in Z(R)$, und in beiden Fällen $r \in Z(R)$. Also:

1. R ist kommutativ.

Sei nun $\sigma(x)$ eine quantorenfreie L-Formel mit $R \models \bigl(\sigma \leftrightarrow \exists y(y^2 = x)\bigr)$. Da $n \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt aus dem besagten Lemma:

(6.5.12) Es gibt ein $M_1 \in \mathbb{N}$ mit $R \models \sigma(r)$ für alle $r \in R$, $r \geq M_1$.

Ist $r \geq M_1$, so schreibe $\sqrt{r}$ für eine positive Lösung von $y^2 = r$ in R. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq M_1$: $\bigl(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\bigr)\bigl(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\bigr) = 1$. Weiter ist $\bigl\{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} : n \geq M_1\bigr\}$ nach oben unbeschränkt. Lemma 6.5.7 impliziert daher ferner:

(6.5.13) Es gibt $M_2 \in \mathbb{N}$, so daß alle $r \in R$, $r \geq M_2$ in R invertierbar sind.

Insbesondere ist M_2 selbst invertierbar, und ist $r \geq 1$, also $rM_2 \geq M_2$, so ist daher mit (6.5.13) auch r invertierbar. Also können wir o.B.d.A. annehmen, daß R den geordneten Körper $\mathbb{Q}$ enthält. Ist nun $r \in R$ mit $r \geq \frac{p}{q} > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, so folgt $rM_2 q \geq M_2$, also ist $rM_2 q$ und damit auch r invertierbar. Also:

(6.5.14) Alle $r \in R$ mit $|r| \geq s$ für ein $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ sind invertierbar.

Wir zeigen nun:

2. Jedes nichtinvertierbare Element von R ist nilpotent.

Sei $r \in R$ nichtinvertierbar, $r > 0$. (Also ist r wegen (6.5.14) infinitesimal im Vergleich zu $\mathbb{Q}$.) Sei nun $p \in \mathbb{Z}[X]$, $p \neq 0$, $p = \sum_{i=e}^{d} a_i X^i$ mit $d \geq e$, $a_d, \ldots, a_e \in \mathbb{Z}$,

$a_d \neq 0$, $a_e \neq 0$. Dann folgt $p(r) = r^e \left(\sum_{i=0}^{d-e} a_{e+i} r^i\right)$, und $\sum_{i=0}^{d-e} a_{e+i} r^i$ ist unendlich nahe an a_e, also mit (6.5.14) invertierbar. Damit gilt:

$$\text{(6.5.15)} \qquad \begin{cases} p(r) > 0 & \Leftrightarrow \quad a_e > 0 \wedge r^e \neq 0, \\ p(r) = 0 & \Leftrightarrow \quad r^e = 0, \\ p(r) < 0 & \Leftrightarrow \quad a_e < 0 \wedge r^e \neq 0. \end{cases}$$

Sei $\tau(x) := \forall y(xy \neq 1)$; τ ist in $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(R))$ zu einer quantorenfreien L-Formel äquivalent, welche wir uns — analog zu Lemma 6.5.2 — als Disjunktion von Formeln der Art

$$p_1(x) = \cdots = p_k(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge q_l(x) > 0$$

mit $k + l > 0$, $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ gegeben denken können. Es ist $R \models \tau(r)$. Mit (6.5.15) folgt: r ist nilpotent, oder alle genügend kleinen positiven rationalen Zahlen sind nicht invertierbar in R. Letzteres steht im Widerspruch (6.5.14), so daß damit (2.) bewiesen ist.— Nun zu:

3. R ist reduziert, d.h. besitzt keine Nilpotenten außer 0.

Zum Beweis dieser Aussage sei p eine Primzahl größer als M_2 und $\sqrt{p}$ eine positive Lösung von $y^2 = p$; diese existiert nach (6.5.13) und ist eindeutig, denn für $r > 0$ ist $\left(\sqrt{p} + r\right)^2 = p + 2r\sqrt{p} + r^2 > p$. Betrachte ferner die Satzmenge

$$\Delta := \mathrm{Th}(R, R) \cup \left\{0 < c \wedge c < q : q \in \mathbb{Q}, q > 0\right\}$$

in der Sprache $L(\{c\})$ mit dem neuen Konstantensymbol c. Jede endliche Teilmenge von Δ ist erfüllbar (eine geeignete Expansion von R genügt), und damit existiert mit dem Kompaktheitssatz auch ein Modell R' von Δ. Indem wir R durch $R'|L \succeq R$ ersetzen, können wir mit (6.5.14) o.B.d.A. davon ausgehen, daß R ein bzgl. $\mathbb{Q}$ infinitesimales invertierbares $\delta > 0$ enthält. Angenommen nun, R enthielte ein von 0 verschiedenes nilpotentes Element. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon^2 = 0$. Betrachte die kanonisch geordneten Teilringe $\mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon\sqrt{p}\right]$ und $\mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon(\sqrt{p} + \delta)\right]$ von R. Jedes Element von $\mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon\sqrt{p}\right]$ kann in eindeutiger Weise in der Form $a + b\varepsilon + c\varepsilon\sqrt{p}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. (Ist nämlich $a + b\varepsilon + c\varepsilon\sqrt{p} = 0$, so folgt $a\varepsilon = 0$, also $a = 0$ wegen $\varepsilon > 0$ und der Torsionsfreiheit der additiven Gruppe von R, vgl. Bem. 6.1.2, ferner also $\varepsilon(b + c\sqrt{p}) = 0$, somit $0 = \varepsilon(b + c\sqrt{p})(b - c\sqrt{p}) = \varepsilon(b^2 - c^2 p)$, somit wieder $b^2 = c^2 p$, also $b = c = 0$.) Ähnlich sieht man ein, daß jedes Element von $\mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon(\sqrt{p} + \delta)\right]$ in genau einer Weise als $a + b\varepsilon + c\varepsilon(\sqrt{p} + \delta)$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a + b\varepsilon + c\varepsilon\sqrt{p} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a > 0 \text{ oder } a = 0,\ b + c\sqrt{p} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a > 0 \text{ oder } a = 0,\ b + c(\sqrt{p} + \delta) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a + b\varepsilon + c\varepsilon(\sqrt{p} + \delta) > 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß es einen Isomorphismus $f\colon \mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon\sqrt{p}\right] \to \mathbb{Z}\left[\varepsilon, \varepsilon(\sqrt{p} + \delta)\right]$ geordneter Ringe mit $f(\varepsilon) = \varepsilon$, $f(\varepsilon\sqrt{p}) = \varepsilon(\sqrt{p} + \delta)$ gibt. Sei $\psi(y, z)$ eine quantorenfreie Formel mit $R \models \left(\psi \leftrightarrow \exists x\left(x^2 = p \wedge xy = z\right)\right)$. Es gilt $R \models \psi\left(\varepsilon, \varepsilon\sqrt{p}\right)$, und daher auch $R \models \psi\left(f(\varepsilon), f\left(\varepsilon\sqrt{p}\right)\right)$. Dies heißt aber, daß $\varepsilon\sqrt{p} = \varepsilon(\sqrt{p} + \delta)$, also $\varepsilon\delta = 0$ ist, im Widerspruch zu $\varepsilon \neq 0$ und der Invertierbarkeit von δ. Damit ist (3.) bewiesen.

Aus (1.)–(3.) folgt nun, daß R ein Körper ist, was zu beweisen war. □

6.6. Semialgebraische Mengen und Funktionen

In der semialgebraischen Geometrie spielt das Tarski-Prinzip eine wichtige Rolle; wir können dies hier nur anhand ausgewählter Beispiele (im wesentlichen Satz 6.6.8 und Kor. 6.6.26) demonstrieren. Den interessierten Leser verweisen wir auf die Übersichtsartikel [**55**] und [**66**], oder gar [**28**], [**27**]. Semialgebraische Geometrie ist die Geometrie semialgebraischer Mengen:

Definition 6.6.1. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Die Elemente der Booleschen Mengenalgebra, die von den Mengen der Form

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n(R) : f(a_1, \dots, a_n) > 0\} \subseteq \mathbb{A}^n(R) \quad \text{mit } f \in R[X_1, \dots, X_n]$$

im $\mathbb{A}^n(R) \simeq R^n$ erzeugt wird, nennt man *semialgebraische Mengen.* Die semialgebraischen Mengen sind ersichtlich genau die durch quantorenfreie $L(R)$-Formeln in R definierbaren Mengen (wobei L die Sprache der geordneten Ringe sei).

Die semialgebraischen Mengen entsprechen also den konstruktiblen Mengen im algebraisch abgeschlossenen Fall (§5.5.4).— Sei im folgenden stets R ein reell abgeschlossener Körper. Wir identifizieren $\mathbb{A}^n(R)$ mit R^n.

Beispiel. Die Menge

$$\begin{aligned} M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/25 + y^2/16 < 1 \wedge x^2 + 4x + y^2 - 2y > -4 \wedge \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y > -4 \wedge (x^2 + y^2 - 2y \neq 8 \vee y > -1)\} \end{aligned}$$

ist semialgebraisch ([**28**], Ex. 2.1.4).

Übung. Zeichne M.

Aus dem Satz von Tarski-Seidenberg folgt sofort, da $L(R)$ eine Konstante enthält:

Proposition 6.6.2. *Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine beliebige $L(R)$-Formel, so ist*

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in R^n : R \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$$

semialgebraisch. □

Insbesondere erhält man folgendes, oftmals auch als Satz von Tarski-Seidenberg bezeichnetes und zum Satz von Chevalley analoges Ergebnis, dessen Beweis wortwörtlich derselbe ist:

Satz 6.6.3. *Seien $m < n$ aus $\mathbb{N}$. Jede Projektion einer semialgebraischen Menge aus R^n auf R^m ist semialgebraisch in R^m.* □

Übung. Gib eine quantorenfreie definierende Formel für die Projektion der Menge

$$\{(a, b, c, x) : a \neq 0, ax^2 + bx + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

auf die ersten drei Komponenten an.

Die folgende Übung zeigt, daß semialgebraische Mengen bei Studium affiner Varietäten über reell abgeschlossenen Körpern in natürlicher Weise auftreten.

Übung. Man zeige, daß die semialgebraischen Mengen das kleinste System von Teilmengen von R^n bilden, das alle Bilder $\pi_m(A)$ von R-Varietäten $A \subseteq R^m$ ($m \geq n$) unter der kanonischen Projektion $\pi_m \colon R^m \to R^n, (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ (also $\pi_n = \mathrm{id}$) enthält.

Sei $M \subseteq R^n$. Eine Funktion $f\colon M \to R^m$ heißt *semialgebraisch,* wenn es ihr Graph als Teilmenge von R^{n+m} ist.

ÜBUNG. Seien $f\colon R^n \to R^m$ eine semialgebraische Funktion, $A \subseteq R^n$ und $B \subseteq R^m$ semialgebraische Mengen. Man zeige, daß $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $A \times B$ semialgebraische Mengen sind.

Eine Vielzahl weiterer mit Hilfe semialgebraischer Mengen konstruierter Mengen kann ähnlich als semialgebraisch nachgewiesen werden.

ÜBUNG. Sei $M \subseteq R^n$ eine semialgebraische Menge. Man zeige, daß auch der Abschluß, das Innere und der Rand von M (bzgl. der Topologie $\mathcal{O}(R^n)$ auf R^n, vgl. §6.2) semialgebraische Mengen sind. Man mache sich anhand von Beispielen klar, daß man den Abschluß (das Innere, den Rand) von M nicht einfach dadurch erhalten kann, daß man in der definierenden quantorenfreien Formel alle starken Ungleichungen durch schwache Ungleichungen (alle schwachen Ungleichungen durch starke bzw. alle Ungleichungen durch Gleichungen) ersetzt.

Sowohl im Beispiel der algebraisch abgeschlossenen Körper als auch der reell abgeschlossenen Körper haben wir gesehen, daß Vollständigkeit und Substrukturvollständigkeit einer Theorie implizierten, daß Projektionen quantorenfrei-definierbarer Mengen wieder quantorenfrei-definierbar sind. Dies ist kein Zufall:

ÜBUNG. (Geometrische Deutung der Quantorenelimination) Sei L eine beliebige Sprache erster Stufe und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Menge $M \subseteq A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt *quantorenfrei-definierbar,* falls es eine erweiterte quantorenfreie Formel $\varphi(\mathbf{x})$ in $L(A)$ gibt ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$), so daß

$$M = \{\mathbf{a} \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})\}.$$

Die *Projektion* einer solchen Menge M ist definiert durch

$$\pi(M) := \big\{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1} : (a_1, \dots, a_n) \in M \text{ für ein } a_n \in A\big\}.$$

Man zeige: $\mathfrak{A}$ erlaubt Q.E. genau dann, wenn das System der quantorenfrei-definierbaren Mengen von $\mathfrak{A}$ unter Projektionen abgeschlossen ist.

Die Struktur semialgebraischer Teilmengen von R ist einfach:

PROPOSITION 6.6.4. *Sei $M \subseteq R$. M ist semialgebraisch genau dann, wenn M eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen mit Endpunkten in $R \cup \{\pm\infty\}$ ist.*

BEWEIS. Wirklich beweisbedürftig ist nur eine Richtung: Sei M semialgebraisch. Falls $M = \{a \in R : f(a) > 0\}$ mit $f \in R[X]$, so ist M offensichtlich die endliche Vereinigung paarweise disjunkter offener Intervalle, an deren Endpunkten R-Nullstellen von f oder $\pm\infty$ liegen. Das System aller Teilmengen von R, die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Intervallen sind, ist abgeschlossen unter $\cap, \cup, \complement$, und die Behauptung folgt. $\square$

Zur Struktur semialgebraischer Funktionen in R:

LEMMA 6.6.5. (van den Dries, [**69**]) *Ist $f\colon R \to R$ semialgebraisch, so gibt es in jeder nichtleeren offenen Menge $U \subseteq R$ einen Punkt $x \in U$, an dem f stetig ist.*

BEWEIS. Mit dem Tarski-Prinzip reicht es, dies für $R = \mathbb{R}$ zu zeigen. Wir unterscheiden folgende Fälle:

(i) Es gibt eine offene Menge $V \subseteq U$, $V \neq \varnothing$, so daß $f(V)$ endlich ist. Sei etwa $f(V) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ und $V_i := f^{-1}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, k$. V_i ist semialgebraisch, also nach Prop. 6.6.4 eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen. Hätten alle V_i leeres Inneres, so wäre $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ eine endliche Punktmenge, was unmöglich ist; also existiert eine offene Teilmenge $W \subseteq V$ mit $f|W$ konstant, also insbesondere stetig.

(ii) Sonst. Wir definieren dann induktiv eine Folge von offenen Teilmengen $U =: V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots$ von U mit $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$. Ist dabei V_n schon definiert, so erhält man V_{n+1} wie folgt: Sei $X := f(V_n)$; nach Prop. 6.6.4 und wegen X unendlich enthält $X \subseteq R$ ein Intervall $]a;b[$, $a < b$, einer Länge $\leq \frac{1}{n+1}$. Auch $V_n \cap f^{-1}\bigl(]a;b[\bigr)$ enthält ein Intervall $[c;d]$ mit $c < d$; setze $V_{n+1} :=]c;d[$. Wähle nun $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$ beliebig. Offenbar ist f stetig im Punkt x.

Dies beweist das Lemma. □

Korollar 6.6.6. *Ist $f\colon R \to R$ semialgebraisch, so existiert eine disjunkte Zerlegung*

$$R = I_1 \cup \dots \cup I_k \cup F$$

von R in offene Mengen $I_1, \dots, I_k$ und eine endliche Menge F, so daß f auf jedem I_j stetig ist ($j = 1, \dots, k$).

Beweis. Sei $S \subseteq R$ die Menge der Stetigkeitsstellen, $U = R \setminus S$ die der Unstetigkeitsstellen von f; beide sind semialgebraisch. Wäre U nicht endlich, so hätte es nichtleeres Inneres, im Widerspruch zu Lemma 6.6.5. □

Bekanntlich heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *wegzusammenhängend,* falls es zu allen $a, b \in M$ stets einen *Weg,* d.h. eine stetige Abbildung $w\colon [0;1] \to M$ mit $w(0) = a$, $w(1) = b$ gibt. Wir definieren spezieller:

Definition 6.6.7. $M \subseteq R^n$ heißt *semialgebraisch wegzusammenhängend,* falls M semialgebraisch ist, und falls es zu allen $a, b \in M$ stets einen semialgebraischen Weg $w\colon [0;1] \to M$ mit $w(0) = a$, $w(1) = b$ gibt (mit $[0;1] \subseteq R$), dessen Graph als Teilmenge von R^{n+1} also semialgebraisch ist.

(Ein Weg $R \to R^n$ ist dabei stetig bzgl. der Topologie $\mathcal{O}(R)$ auf R und $\mathcal{O}(R^n)$ auf R^n.)

Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen, der in gewisser Weise Prop. 6.6.4 verallgemeinert:

Satz 6.6.8. (Whitney, [**181**]) *Sei $M \subseteq R^n$. M ist semialgebraisch dann und nur dann, wenn M eine endliche disjunkte Vereinigung semialgebraisch wegzusammenhängender Mengen ist. Insbesondere hat M nur endlich viele* (*Weg-*) *Zusammenhangskomponenten.*

Wir haben einige Beweisvorbereitungen zu treffen.

Lemma 6.6.9. *Sei $f = a_d Y^d + \dots + a_0 \in R[X_1, \dots, X_n][Y]$, $a_i \in R[X_1, \dots, X_n]$. Dann sind folgende Mengen semialgebraisch:*

(i) $\{b \in R^n : a_d(b) \neq 0\}$,
(ii) $\bigl\{b \in R^n : f(b) \in R[Y]$ *hat genau k versch. reelle Nullstellen*$\bigr\}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (i) ist klar; (ii) ist parametrisch definierbar in R. □

Übung. Man zeige, daß die Menge in (ii), mit komplexen statt reellen Nullstellen, auch semialgebraisch ist.

Definition 6.6.10. Seien $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n, Y]$, $b \in R^n$ mit $f_i(b) \neq 0$ in $R[Y]$ für $i = 1, \dots, m$. Der *Typ* $\tau = \tau(b)$ *von* $(f_1, \dots, f_m)$ *an der Stelle* b lege folgende Daten fest:

(i) Den Grad jedes $f_i(b) \in R[Y]$;
(ii) die Anzahl der reellen Nullstellen jedes $f_i(b) \in R[Y]$;
(iii) die relative Anordnung aller reellen Nullstellen aller $f_i(b)$, d.h.

$$|\mathcal{N}_\tau| \quad \text{mit } \mathcal{N}_\tau := \big\{a \in R : f_i(b, a) = 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq m\big\}$$

und, falls $\xi_1(b) < \cdots < \xi_{|\mathcal{N}_\tau|}(b)$ die Elemente von $\mathcal{N}_\tau$, das Tupel

$$\big(\{i : f_i(b, \xi_j(b)) = 0\}\big)_{1 \leq j \leq |\mathcal{N}_\tau|}.$$

Direkt aus Lemma 6.6.9 erhält man:

Korollar 6.6.11. *Für fixierten Typ* τ *ist die Menge*

$$\big\{b \in R^n : (f_1, \dots, f_m) \text{ hat an der Stelle } b \text{ den Typ } \tau\big\}$$

semialgebraisch. □

Wir sagen, $(f_1, \dots, f_m)$ sei *stabil unter Ableitungen,* falls für alle $j = 1, \dots, m$ mit f_j auch alle nichtverschwindenden partiellen Ableitungen $\partial f_j / \partial^k Y$ von f_j nach Y in $\{f_1, \dots, f_m\}$ enthalten sind. Für den Beweis von Satz 6.6.8 bedeutsam ist folgende Beobachtung:

Lemma 6.6.12. *Sei* $M \subseteq R^n$ *semialgebraisch und* $(f_1, \dots, f_m)$ *stabil unter Ableitungen und auf* M *von festem Typ* τ *für alle* $b \in M$. *Dann ist für jedes* $i \in \{1, \dots, |\mathcal{N}_\tau|\}$ *die Funktion* $x \mapsto \xi_i(x)$ *von* M *nach* R *semialgebraisch stetig.*

Beweis. Der Graph von ξ_i ist (mit $N := |\mathcal{N}_\tau|$)

$$\left\{(x, y) \in M \times R : \exists y_1 \cdots \exists y_N \left(\bigwedge_{k=1}^{N} \prod_j f_j(x, y_k) = 0 \wedge y_1 < \cdots < y_N \wedge y = y_i\right)\right\},$$

also semialgebraisch. Wir zeigen, daß alle $\xi_i \colon M \to R$ stetig sind. Sei $b' \in M$ fest und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es genügt, eine Umgebung U von b' in M zu finden, so daß für alle $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\xi_i(U) \subseteq \,]\xi_i(b') - \varepsilon; \xi_i(b') + \varepsilon[\,=: I_i.$$

Wir nehmen hierzu o.B.d.A. an, daß die $I_1, \dots, I_N$ paarweise disjunkt sind. Für alle $i = 1, \dots, N$ gilt nun: Da $y_i := \xi_i(b')$ einfache Nullstelle zumindest eines $f_{k_i}(b') \in R[Y]$ ist, gibt es ein $\gamma \in \,]0; \varepsilon[$, so daß für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$f_{k_i}(b', y_i - \gamma) f_{k_i}(b', y_i + \gamma) < 0.$$

Dann existiert auch eine Umgebung U_i von b' in M, so daß

$$f_{k_i}(b, y_i - \gamma) f_{k_i}(b, y_i + \gamma) < 0 \qquad \text{für alle } b \in U_i,$$

also $f_{k_i}(b)$ eine Nullstelle zwischen $y_i - \gamma$ und $y_i + \gamma$ hat. Da das für jedes y_i gilt, erhalten wir eine Umgebung $U := \bigcap_{i=1}^{N} U_i$ von b' in M so, daß $f_{k_i}(b)$ für alle $b \in U$, $i \in \{1, \dots, N\}$ eine in $I_i = \,]y_i - \varepsilon; y_i + \varepsilon[$ liegende Nullstelle hat; da $(f_1, \dots, f_n)$ auf M von festem Typ ist, sehen wir, daß diese Nullstelle stets $\xi_i(b)$ sein muß, und ξ_i stetig im Punkt b' ist. □

Bemerkung. Für eine nicht unter Ableitungen stabile Familie $(f_1, \dots, f_m)$ ist die Aussage von Lemma 6.6.12 i.a. falsch, wie das Beispiel $m := 1$, $f_1 := f$ mit

$$f := \bigl(X - (Y-1)^2\bigr)\bigl(X + (Y+1)^2\bigr)$$

zeigt; auf ganz $\mathbb{R}$ ist f vom selben Typ, die Funktionen $\xi_1, \xi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind jedoch unstetig im Nullpunkt.

Damit haben wir alle Zutaten für den Beweis von Satz 6.6.8 zusammen:

Beweis (Satz 6.6.8). Eine Richtung ist trivial; zur anderen schließen wir mit Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ wurde in Prop. 6.6.4 schon erledigt. Zum Induktionsschritt $n \to n+1$. $M \subseteq R^{n+1}$ kann in R parametrisch definiert werden durch eine $\wedge$-$\vee$-Kombination von Polynomungleichungen der Form $f_i > 0$ und $f_i \geq 0$, wobei $1 \leq i \leq m$, $f_i \in R[X_1, \dots, X_n, Y]$. O.B.d.A. sei $(f_1, \dots, f_m)$ stabil unter Ableitungen; andernfalls nehme man die nichtverschwindenden partiellen Ableitungen $\partial f_i / \partial^k Y$ zu $(f_1, \dots, f_m)$ hinzu. Es bezeichne $\pi \colon R^{n+1} \to R^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten; $\pi(M)$ ist wieder semialgebraisch. Wir können annehmen, daß $f_1(b), \dots, f_m(b) \neq 0$ in $R[Y]$ für alle $b \in \pi(M)$; ansonsten zerlege man M zunächst in die semialgebraischen Mengen

$$\bigl\{b' \in M : f_i(\pi(b')) \neq 0 \text{ für } i \in I,\ f_i(\pi(b')) = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, m\} \setminus I\bigr\},$$

wobei I die Teilmengen von $\{1, \dots, m\}$ durchläuft. Sei

$$T := \bigl\{\tau : \text{ex. } b \in \pi(M), \text{ so daß } (f_1, \dots, f_m) \text{ an der Stelle } b \text{ Typ } \tau \text{ hat}\bigr\};$$

T ist offensichtlich endlich. Mit Kor. 6.6.11 ist auch

$$M'_\tau := \bigl\{b \in \pi(M) : (f_1, \dots, f_m) \text{ hat an der Stelle } b \text{ den Typ } \tau\bigr\}$$

semialgebraisch. Da T endlich ist, ist $\pi(M)$ die endliche disjunkte Vereinigung $\bigcup_{\tau \in T} M'_\tau$ und somit $M = \bigcup_{\tau \in T} M_\tau$ mit $M_\tau := \pi^{-1}(M'_\tau) \cap M$. Für jedes $\tau \in T$ können wir nach Induktionsvoraussetzung M'_τ in endlich viele paarweise disjunkte semialgebraisch wegzusammenhängende Mengen M'_i zerlegen, also kann man M als endliche disjunkte Vereinigung $M = \bigcup_\tau \bigcup_{i_\tau} \pi^{-1}(M'_{i_\tau}) \cap M$ darstellen. Es genügt also, die Behauptung für eine Menge $M \subseteq R^{n+1}$ zu zeigen, für die $\pi(M)$ semialgebraisch wegzusammenhängend ist und $(f_1, \dots, f_m)$ auf $\pi(M)$ konstanten Typ τ hat.

Die Funktionen $b \mapsto \xi_j(b)$ (mit $1 \leq j \leq |\mathcal{N}_\tau|$) von $\pi(M)$ nach R sind stetig semialgebraisch nach Lemma 6.6.12. M ist nun (vgl. auch Prop. 6.6.4) eine disjunkte Vereinigung von Mengen der folgenden Form:

(i) $\bigl\{(b,a) \in R^{n+1} : b \in \pi(M), a = \xi_j(b)\bigr\}$
(ii) $\bigl\{(b,a) \in R^{n+1} : b \in \pi(M), a > \xi_j(b)\bigr\}$
(iii) $\bigl\{(b,a) \in R^{n+1} : b \in \pi(M), a < \xi_j(b)\bigr\}$
(iv) $\bigl\{(b,a) \in R^{n+1} : b \in \pi(M), \xi_j(b) < a < \xi_{j+1}(b)\bigr\}$

(Mengen vom Typ (i) heißen *sectors,* Mengen vom Typ (ii)–(iv) *sections.*) Da $\pi(M)$ semialgebraisch ist, ist offensichtlich jede Menge der Form (i)–(iv) auch wieder semialgebraisch. Da $\pi(M)$ zudem semialgebraisch wegzusammenhängend ist, gibt es zu zwei Punkten (b,a), (b',a') aus einer Menge der obigen Form eine semialgebraische stetige Abbildung w von $[0;1]$ in die Projektion dieser Menge auf R^n mit $w(0) = b$ und $w(1) = b'$. Wir geben nun Abbildungen w^* von $[0;1]$ in diese Mengen mit $w^*(0) = (b,a)$ und $w^*(1) = (b',a')$ an:

(i) $t \mapsto \bigl(w(t), \xi_j(w(t))\bigr)$

(ii) $t \mapsto \big(w(t), \xi_j(w(t)) + (a - \xi_j(b))(1-t) + (a' - \xi_j(b))t\big)$
(iii) $t \mapsto \big(w(t), \xi_j(w(t)) + (a - \xi_j(b))(1-t) + (a' - \xi_j(b))t\big)$
(iv) $t \mapsto \big(w(t), \xi_j(w(t)) + (a - v(t,b))(1-t) + (a' - v(t,b'))t\big)$ mit

$$v(t,x) := \xi_j(w(t)) \frac{\xi_{j+1}(w(t)) - \xi_j(w(t))}{\xi_{j+1}(x) - \xi_j(x)}.$$

In jedem Fall ist w^* offenbar semialgebraisch und stetig. □

Übung. Man mache sich anhand des Einheitskreises klar, wie in diesem Fall die in obigem Satz konstruierte Zerlegung in semialgebraische Zusammenhangskomponenten aussieht. Geht es auch mit weniger Komponenten?

Eine weitere schöne Anwendung semialgebraischer Funktionen ist nachfolgender Satz [**56**], der zunächst mit geometrischen Methoden bewiesen wurde:

Satz 6.6.13. (Kurvenauswahllemma) *Sei $X \subseteq R^n$ semialgebraisch und $a \in \overline{X}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine stetige Funktion $f\colon]0;\varepsilon[\to R^n$ mit $f\big(]0;\varepsilon[\big) \subseteq X$ und $\lim_{x\to 0} f(x) = a$.*

Zum Beweis verwenden wir

Proposition 6.6.14. (van den Dries, [**70**]) *Sei $X \subseteq R^{m+n}$ semialgebraisch mit $m, n \geq 1$. Es existiert eine semialgebraische Funktion $f\colon R^m \to R^n$ derart, daß für alle $x \in R^m$ gilt: Existiert ein $y \in R^n$ mit $(x,y) \in X$, so ist $(x, f(x)) \in X$. (Man sagt,* Th($\mathbb{R}$) *habe* definierbare Skolemfunktionen.)

Beweis. Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Sei $n = 1$; für $a \in R^m$ sei $X_a := \{y \in R : (a,y) \in X\}$. X_a ist semialgebraisch und also eine endliche Vereinigung von Punkten und Intervallen $I_1, \ldots, I_k \neq \varnothing$ mit $x_i < x_j$ für $x_i \in I_i$, $x_j \in I_j$, $1 \leq i < j \leq k$. Definiere $f(a)$ durch Fallunterscheidung:
(i) $f(a) := 0$, falls $X_a = \varnothing$ oder $X_a = R$.
(ii) $f(a) := \min X_a$, falls $\min X_a$ existiert.
(iii) $f(a) := \frac{1}{2}(c+d)$, falls $I_1 =]c;d[$ mit $c < d$ aus R.
(iv) $f(a) := d - 1$, falls $I_1 =]-\infty;d[$ mit $d \in R$.
(v) $f(a) := c + 1$, falls $I_1 =]c;+\infty[$ mit $c \in R$.

f ist semialgebraisch und hat die gewünschte Eigenschaft. Zum Induktionsschritt $1,\ldots,n \to n+1$ sei $f\colon R^{m+n} \to R$ eine definierbare Skolemfunktion zu $X \subseteq R^{(m+n)+1}$, $g\colon R^m \to R^n$ eine definierbare Skolemfunktion zu $\pi(X)$, wobei

$$\pi\colon R^{m+n+1} \to R^{m+n},\ (x,y) \mapsto x \qquad (x \in R^{m+n}, y \in R),$$

beide existent nach Induktionsvoraussetzung. Setze $h := g \times \big(f \circ (\mathrm{id} \times g)\big)$; es ist $h\colon R^m \to R^{n+1}$ semialgebraisch, und sind $x \in R^m$ und $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in R^{n+1}$ mit $(x,y) \in X$, also $\pi(x,y) = (x, y_1, \ldots, y_n) \in \pi(X)$, so folgt $(x, g(x)) \in \pi(X)$, somit $(x, g(x), z) \in X$ für ein $z \in R$, also $(x, h(x)) = (x, g(x), f(x, g(x))) \in X$ wie gewünscht. □

Beweis (Satz 6.6.13). Sei $D := \big\{(\delta, x) \in R^{1+n} : x \in X, |x - a| < \delta\big\}$. Da Th($\mathbb{R}$) definierbare Skolemfunktionen besitzt, existiert nach Prop. 6.6.14, angewendet auf die semialgebraische Menge D, ein $\eta > 0$ und ein semialgebraisches $f\colon]0;\eta[\to X$ mit $f(\delta) \in X$, $|f(\delta) - a| < \delta$ für alle $\delta \in]0;\eta[$. Nach Kor. 6.6.6 existiert ein $\varepsilon \in]0;\eta[$, so daß $\pi_i \circ f\colon]0;\varepsilon[\to \pi_i(X)$ stetig ist, wobei $\pi_i\colon R^n \to R, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, für alle $i = 1, \ldots, n$. Damit ist auch f stetig auf $]0;\varepsilon[$. □

Im Hinblick auf Zusammenhangseigenschaften semialgebraischer Mengen hat dies Konsequenzen.

DEFINITION 6.6.15. Eine semialgebraische Teilmenge $M \subseteq R^n$ heißt *semialgebraisch zusammenhängend,* falls für je zwei in M abgeschlossene semialgebraische Teilmengen A_1, A_2 von M mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cup A_2 = M$ stets $A_1 = M$ oder $A_2 = M$ ist.

BEISPIEL. Der offene Einheitswürfel $]0;1[^n \subseteq R^n$ ist semialgebraisch zusammenhängend.

BEWEIS. Angenommen nicht, also $]0;1[^n = A_1 \cup A_2$ mit A_1, A_2 semialgebraisch, abgeschlossen in $]0;1[^n$ und nichtleer, disjunkt. Sei $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ und $f\colon [0;1] \to]0;1[^n, \xi \mapsto (1-\xi)x_1 + \xi x_2$. Dann ist $[0;1] = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$ eine Zerlegung in abgeschlossene, disjunkte, nichtleere semialgebraische Mengen. Dies ist aber unmöglich nach Prop. 6.6.4. □

KOROLLAR 6.6.16. *Eine semialgebraische Teilmenge $M \subseteq R^n$ ist semialgebraisch zusammenhängend genau dann, wenn sie semialgebraisch wegzusammenhängend ist.*

BEWEIS. Ist M semialgebraisch wegzusammenhängend und $M = A_1 \cup A_2$ eine Zerlegung wie in Def. 6.6.15, und angenommen, $A_1, A_2 \neq \varnothing$, so wähle einen semialgebraischen Weg $w\colon [0;1] \to M$ zwischen beliebigen Punkten $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$; $w^{-1}(A_1) \cup w^{-1}(A_2) = [0;1]$ ist eine disjunkte Zerlegung von $[0;1] \subseteq R$ in zwei semialgebraische Mengen, die in $[0;1]$ abgeschlossen sind; da $[0;1]$ semialgebraisch zusammenhängt, folgt $A_1 = \varnothing$ oder $A_2 = \varnothing$, Widerspruch. Umgekehrt sei jetzt M semialgebraisch zusammenhängend; wähle gemäß dem Satz von Whitney eine Zerlegung von M in endlich viele disjunkte semialgebraische Wegzusammenhangskomponenten. Es reicht zu zeigen, daß eine solche Zusammenhangskomponente in M abgeschlossen ist; dies ist aber eine unmittelbare Folge von Satz 6.6.13. □

Es sei angemerkt, daß i.a. Zusammenhang (im Sinne von $\mathcal{O}(R^n)$) und semialgebraischer Zusammenhang nicht dasselbe sind.

BEISPIEL. Betrachte den (nach Kor. 6.1.14) reell abgeschlossenen Körper $\mathbb{R}_a$ der reell algebraischen Zahlen und $M :=]-\infty;\pi[\cap \mathbb{R}_a = \{x \in \mathbb{R}_a : x < \pi\}$. (Intervalle werden in diesem Beispiel in $\mathbb{R}$ gebildet.) Da π nicht algebraisch ist ([**34**], App. 1), ist M in $\mathbb{R}_a$ offen-abgeschlossen, also $\mathbb{R}_a$ unzusammenhängend bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{R}_a)$. Ferner ist sogar $N := [0;4] \cap \mathbb{R}_a = \{x \in \mathbb{R}_a : 0 \leq x \leq 4\}$ nicht kompakt bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{R}_a)$ (also der topologische Körper $\big(\mathbb{R}_a, \mathcal{O}(\mathbb{R}_a)\big)$ nicht lokalkompakt): Ist $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) eine monoton wachsend (fallend) gegen π konvergierende Folge rationaler Zahlen, so enthält die Familie $\mathcal{F} := \big\{[0;q_n[\cap \mathbb{R}_a : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{]p_n;4] \cap \mathbb{R}_a : n \in \mathbb{N}\big\}$, bestehend aus (bzgl. der auf N relativierten Topologie $\mathcal{O}(\mathbb{R}_a)$) offenen Mengen mit $\bigcup \mathcal{F} = N$, keine endliche Teilüberdeckung von N.

Dasselbe Beispiel zeigt auch, daß eine semialgebraisch wegzusammenhängende Menge nicht notwendig wegzusammenhängend im topologischen Sinne sein muß. (Betrachte z.B. wieder $N = [0;4] \cap \mathbb{R}_a$.) Das Definitionsintervall eines semialgebraischen Wegs wird nämlich im reell abgeschlossenen Körper R, das eines Wegs (im topologischen Sinne) in $\mathbb{R}$ gebildet. Jedoch gilt in $R = \mathbb{R}$:

KOROLLAR 6.6.17. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine semialgebraische Teilmenge. Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(i) *M ist zusammenhängend.*
(ii) *M ist semialgebraisch zusammenhängend.*
(iii) *M ist semialgebraisch wegzusammenhängend.*
(iv) *M ist wegzusammenhängend.*

Jede semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ besitzt also insbesondere endlich viele Zusammenhangskomponenten, die alle semialgebraisch sind.

Beweis. Ist M zusammenhängend, so auch insbesondere semialgebraisch zusammenhängend. Ist M semialgebraisch zusammenhängend, so auch semialgebraisch wegzusammenhängend nach Kor. 6.6.16, also insbesondere wegzusammenhängend in diesem Fall. Ist schließlich M wegzusammenhängend, so natürlich auch zusammenhängend. □

Wir können nun Kor. 6.6.6 auf R^n erweitern.

Korollar 6.6.18. *Sei M eine semialgebraische Teilmenge von R^n und sei $f\colon M \to R$ semialgebraisch. Dann existiert eine Zerlegung*

$$M = A_1 \cup \cdots \cup A_k$$

von M in semialgebraische Mengen, so daß $f|A_i$ stetig ist für $i = 1, \ldots, k$.

Beweis. Dem Beweis des Satzes von Whitney und Lemma 6.6.12 entnimmt man, daß man eine Zerlegung von graph f in semialgebraisch (wegzusammenhängende) Mengen $B_1, \ldots, B_k$ finden kann, für die $\zeta_i\colon \pi(B_i) \to R$, wobei $(x, \zeta_i(x)) \in B_i$ für alle $x \in \pi(B_i)$, wohldefiniert und stetig ist ($\pi\colon R^{n+1} \to R^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten). Aber $M = \pi(B_1) \cup \cdots \cup \pi(B_k)$ ist eine Zerlegung von M in semialgebraische Mengen, und $f|\pi(B_i) = \zeta_i$; also erhält man mit $A_i := \pi(B_i)$ die gesuchte Zerlegung. □

Es gilt sogar mehr.

Definition 6.6.19. Ist $M \subseteq R^n$ semialgebraisch und $f\colon M \to R$ eine Funktion, so sagen wir, f sei *algebraisch,* falls ein Polynom $p \in R[X_1, \ldots, X_n, Y]$, $p \neq 0$ existiert mit $p(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in M$.

Korollar 6.6.20. *Jede semialgebraische Funktion $f\colon M \to R$ ist algebraisch. Genauer: Es gibt eine Zerlegung von M in semialgebraische Mengen $A_1, \ldots, A_k$ und Polynome $p_1, \ldots, p_k \in p \in R[X_1, \ldots, X_n]$, $p_i \neq 0$, so daß für $i = 1, \ldots, k$ stets*

$$\frac{\partial p_i}{\partial Y}\big(x, f(x)\big) \neq 0 \quad \textit{und} \quad p_i\big(x, f(x)\big) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in A_i.$$

Beweis. Wieder aus dem Beweis von Satz 6.6.8 ergibt sich, daß eine Zerlegung $M = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ von M in semialgebraische Teilmengen $A_i \subseteq R^n$ und Polynome $p_1, \ldots, p_k \in R[X_1, \ldots, X_n, Y]$, $p_i \neq 0$ existieren, so daß $f(x)$ eine einfache Nullstelle von $p_i(x) \in R[Y]$ ist, für $x \in A_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, also $\partial p_i/\partial Y\big(x, f(x)\big) \neq 0$, $p_i\big(x, f(x)\big) = 0$ für alle $x \in A_i$. □

Bemerkung. Ist $R = \mathbb{R}$, und sind $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ semialgebraisch sowie $U \subseteq M$ eine offene semialgebraische Umgebung von $x \in M$, so folgt aus Kor. 6.6.20 und dem Satz über implizite Funktionen ([**183**], 10.2.2), daß $f|U$ $\mathcal{C}^\infty$ ist. Semialgebraische $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $g\colon V \to \mathbb{R}$, wobei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ semialgebraisch und offen ist, heißen *Nash-Funktionen.* Kor. 6.6.20 zeigt, daß man das Studium semialgebraischer Funktionen auf das von Nash-Funktionen einschränken kann. (Für eine Einführung siehe [**28**], Chap. 8, [**66**], §10.)

Aus Kor. 6.6.20 folgt:

Proposition 6.6.21. *Sei $a \in R$ und $f\colon]a;\infty[\to R$ semialgebraisch. Es existiert ein $r > a$, $n \in \mathbb{N}$ und $c \in R$, so daß $|f(x)| \le cx^n$ für alle $x \ge r$.*

Beweis. Kor. 6.6.20 sagt uns, daß ein Polynom $p \in R[X,Y]$ existiert mit

$$p(x, f(x)) = 0 \quad \text{auf }]a;\infty[.$$

Schreibe $p = \sum_{i=0}^{m} q_i Y^i$ mit $q_0, \dots, q_m \in R[X]$, $q_m \neq 0$; für genügend großes x ist $q_m(x)$ stets $\neq 0$. Für diese x folgt

$$|f(x)| \le 1 + |q_m(x)|^{-1}\big(|q_{m-1}(x)| + \dots + |q_0(x)|\big).$$

Ist n das Maximum der Grade von $q_0, \dots, q_m$, so erhält man die Existenz der Konstanten c und r wie gewünscht. □

Wie üblich sei $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Ein semialgebraisches $M \subseteq R^n$ ist genau dann offen bzgl. $\mathcal{O}(R^n)$, wenn für alle $x_0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ aus R existiert mit $x \in M$ für alle $x \in R^n$ mit $\|x_0 - x\| < \varepsilon$.

Bekanntlich nimmt jede stetige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren abgeschlossen und beschränkten, d.h. kompakten Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Maximum an. (Vgl. [**183**], 3.17.10.) Eine triviale, aber wichtige Anwendung des Tarski-Prinzips liefert:

Bemerkung 6.6.22. Sei $\varnothing \neq M \subseteq R^n$ eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Menge, $f\colon M \to R$ eine stetige semialgebraische Funktion. Dann nimmt f auf M ein Maximum an, d.h. es existiert ein $x_0 \in M$ mit $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in M$.

Damit:

Proposition 6.6.23. *Sei $f\colon M \to R$ semialgebraisch stetig, $M \subseteq R^n$ abgeschlossen. Es existieren $c \in R$, $m \in \mathbb{N}$ mit*

$$|f(x)| \le c\left(1 + \|x\|^2\right)^m \qquad \text{für alle } x \in M.$$

Beweis. Sei M_t die semialgebraische abgeschlossene Menge $\{x \in M : \|x\| = t\}$, für $t \in R$. M_t ist abgeschlossen und beschränkt, und

$$v\colon R \to R, \quad t \mapsto \begin{cases} \sup |f|(M_t), & \text{falls } M_t \neq \varnothing \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist wohldefiniert nach Bem. 6.6.22. v ist semialgebraisch, und mit Prop. 6.6.21 existieren $r \in R$, $m \in \mathbb{N}$ und $c_1 \in R$ mit $v(t) \le c_1 t^m$ für $t \ge r$. Sei ferner c_2 das Maximum von $|f|$ auf $\{x \in M : \|x\| \le r\}$, und $c := \max(c_1, c_2)$. Dann ist sicherlich $|f(x)| \le c\left(1 + \|x\|^2\right)^m$ für alle $x \in M$. □

Das Wachstum semialgebraischer Funktionen ist also durch Polynomfunktionen beschränkt. Eine schöne Anwendung dieses Ergebnisses:

Beispiel. (McKenna, nach [**69**]) Das Inverse einer bijektiven Polynomabbildung $p\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist ebenfalls eine Polynomabbildung.

Beweis. Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$. p^{-1} ist eine ganze Funktion ([**183**], 10.2.4, 9.9.6), somit

$$f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \ z \mapsto \left\|p^{-1}(x)\right\|$$

stetig und semialgebraisch. Mit Prop. 6.6.23 erhalten wir die Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $f(z) \leq c\left(1 + \|x\|^2\right)^m$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $\|z\| \leq r$. Also auch $\left\|p^{-1}(x)\right\| \leq a\left(1 + \sup_j \|z_j\|\right)^m$ mit $a := n^m c$, für $\|z\| \geq r$. Mit dem Satz von Liouville ([**183**], 9.11.1, leicht modifiziert) folgt, daß p^{-1} eine Polynomabbildung ist. □

Übung. Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine bijektive Polynomabbildung. Gib p^{-1} explizit als Polynomabbildung an.

Lemma 6.6.24. *Seien $M \subseteq R^n$ eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge und $f\colon M \to R$, $g\colon M \setminus f^{-1}(0) \to R$ semialgebraisch stetig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $h\colon M \to R$ mit*

$$h(x) := \begin{cases} \left(f^N g\right)(x), & \textit{falls } f(x) \neq 0 \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

stetig auf M ist.

Beweis. Für $x \in M$ und $u \in R$ sei

$$M_{x,u} := \left\{y \in M : \|y - x\| \leq 1 \wedge u \cdot |f(y)| = 1\right\}.$$

$M_{x,u}$ ist semialgebraisch, abgeschlossen und beschränkt. Definiere

$$v(x,u) := \begin{cases} 0, & \text{falls } M_{x,u} = \varnothing \\ \sup\left\{|g(y)| : y \in M_{x,u}\right\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dies ist wiederum nach Bem. 6.6.22 wohldefiniert.) $v\colon M \times R \to R$ ist semialgebraisch. Nach Kor. 6.6.20 ist $M \times R$ eine disjunkte Vereinigung endlich vieler semialgebraischer Mengen $A_1, \ldots, A_m$, so daß für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein Polynom $h_i \in R[X, U, V]$ gefunden werden kann, für das $h_i(x,u) \in R[V]$ nicht Null und $h_i\big(x, u, v(x,u)\big) = 0$ für alle $(x,u) \in A_i$ ist. Sei $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = 0$ fest. Sei h_{x_0} das Produkt aller derjenigen h_i mit $A_i \cap \big(\{x_0\} \times R\big) \neq \varnothing$. Das Polynom $h_{x_0}(x_0)$ ist $\neq 0$, und es ist $h_{x_0}\big(x_0, u, v(x_0,u)\big) = 0$ für alle $u \in R$. Nach Prop. 6.6.21 existiert ein $p(x_0) \in \mathbb{N}$ und Zahlen $r(x_0), c(x_0) \in R$, $r(x_0) > 0$, so daß für alle $u \geq r(x_0)$ gilt: $|v(x_0,u)| \leq c(x_0)^{p(x_0)}$. Dem Beweis von Prop. 6.6.21 entnimmt man, daß $p = p(x_0)$ von x_0 unabhängig gewählt werden kann, etwa als die Summe der Grade von $h_1, \ldots, h_m$ bzgl. der Variablen U. Für alle $x \in M$ mit $|f(x)| \leq 1/r(x_0)$ und $\|x_0 - x\| \leq 1$ gilt dann $|f(x)^p g(x)| \leq c(x_0)$. O.B.d.A. sei $c(x_0) \neq 0$. Ist nun $\varepsilon > 0$, so existiert wegen der Stetigkeit von f in x_0 ein $\delta \leq 1$ mit $|f(x)| < \min\big(\varepsilon/c(x_0), 1/r(x_0)\big)$ für alle $x \in M$ mit $\|x_0 - x\| < \delta$, also $|f(x)^{p+1} g(x)| < \varepsilon$ für alle solchen x. Damit ist $f^N g$ mit $N := p + 1$, fortgesetzt zu 0, stetig im Punkt x_0; da p unabhängig von $x_0 \in M$ ist, folgt die Behauptung. □

Satz 6.6.25. (Carral-Coste, [**58**]) *Sei $M \subseteq R^n$ eine abgeschlossene semialgebraische Menge, und seien $f, g\colon M \to R$ semialgebraisch stetig mit $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$. Dann existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und eine semialgebraisch stetige Funktion $h\colon M \to R$ mit $g^N = hf$.*

Beweis. Die Funktion $1/f$ ist semialgebraisch stetig auf $M \setminus g^{-1}(0)$. Nach Lemma 6.6.24 existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die zu 0 fortgesetzte Funktion g^N/f auf ganz M stetig und semialgebraisch ist, d.h. $h\colon M \to R$ mit $h(x) := \big(g^N/f\big)(x)$ für $x \in M$ mit $g(x) \neq 0$ und $h(x) := 0$, sonst, ist semialgebraisch und stetig auf M. Es ist $g^N = hf$, wie gewünscht. □

Als wichtige Folgerung erhalten wir eine berühmte Aussage über semialgebraische Funktionen:

KOROLLAR 6.6.26. (Ungleichung von Łojasiewicz, [**92**]) *Seien $M \subseteq R^n$ eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Menge und $f, g\colon M \to R$ zwei semialgebraische stetige Funktionen mit $f^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $c \in R$ mit $|g|^N \leq c|f|$ auf M.*

BEWEIS. Satz 6.6.25, mit $c := \sup\bigl\{|h(x)| : x \in M\bigr\}$. □

Ferner ergibt sich ein in der reellen Algebra bedeutsames Hilfsmittel (vgl. etwa [**32**], III), das auch als „offene Q.E.“ bezeichnet wird:

KOROLLAR 6.6.27. (Endlichkeitssatz) *Sei $M \subseteq R^n$ eine offene* (*bzw. abgeschlossene*) *semialgebraische Menge. Dann ist M eine endliche Vereinigung von* offenen Basismengen (*bzw.* abgeschlossenen Basismengen), *d.h. semialgebraischen Mengen der Gestalt*

$$\bigl\{x \in R^n : f_1(x)\,\varrho\,0, \dots, f_m(x)\,\varrho\,0\bigr\}$$

mit $\varrho = >$ (bzw. $\varrho = \geq$) und $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n]$.

BEWEIS. Es reicht, den Satz für offenes M zu beweisen, da sich die Behauptung für eine abgeschlossene semialgebraische Menge daraus durch Übergang zum Komplement ergibt. M ist eine endliche Vereinigung von semialgebraischen Mengen der Gestalt

$$B = \bigcap_{i=1}^{l} \bigl\{x \in R^n : f_i(x) = 0\bigr\} \cap \bigcap_{j=1}^{m} \bigl\{x \in R^n : g_j(x) > 0\bigr\} \tag{6.6.16}$$

mit Polynomen f_i, g_j. Setze $f := f_1^2 + \cdots + f_l^2$, $g := \prod_{i=1}^m \bigl(|g_i| + g_i\bigr)$. Ist $x \in R^n \setminus M$, so folgt aus $f(x) = 0$, daß $g_j(x) \leq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, m\}$, also $g(x) = 0$. Nach Satz 6.6.25 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine stetige semialgebraische Funktion $h\colon R^n \setminus M \to R$ mit $g^N = hf$ auf $R^n \setminus M$. Nach Prop. 6.6.23 gibt es fernerhin ein $c \in R$ und ein $p \in \mathbb{N}$ mit $|h(x)| \leq c\bigl(1 + \|x\|^2\bigr)^p$ für alle $x \in R^n \setminus M$. Sei nun

$$\hat{B} := \left\{x \in R^n : f(x) \cdot c\bigl(1 + \|x\|^2\bigr)^p < \left(2^m \prod_{i=1}^{m} g_i(x)\right)^N\right\} \cap \hat{\hat{B}} \tag{6.6.17}$$

mit $\hat{\hat{B}} := \bigcap_{j=1}^m \bigl\{x \in R^n : g_j(x) > 0\bigr\}$. Es ist $B \subseteq \hat{B} \subseteq M$, denn wäre $x \in \hat{B} \setminus M$, so folgte $g(x) < 2^m \prod g_i(x)$, also $2^m > \prod\bigl(\operatorname{sgn} g_i(x) + 1\bigr) = 2^m$, was widersprüchlich ist. Ersetzt man somit in der gegebenen Darstellung von M als endliche Vereinigung von Mengen B wie in (6.6.16) jedes solche B durch $\hat{B}$ wie in (6.6.17), so erhält man für M eine Darstellung wie behauptet. □

Einen modelltheoretischen Beweis des Endlichkeitssatzes nach [**68**], basierend auf der Idee zum Beweis des Hauptsatzes der Eliminationstheorie in §5.5, findet der Leser in §6.7.2.

6.7. Der reelle Nullstellensatz. Zwei Sätze von Lang

6.7.1. Der reelle Nullstellensatz. Seien eine Körpererweiterung K/k, wobei K algebraisch abgeschlossen ist, und ein Ideal $\mathfrak{a}$ in $k[X_1, \dots, X_n]$ gegeben. Bekanntlich gilt für beliebige $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $f(a) = 0$ für alle $a \in V_K(\mathfrak{a})$;
(ii) $f^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(Dies ist einfach der Hilbertsche Nullstellensatz, Satz 5.5.5.) Über reell abgeschlossenen Körpern K ist dies hochgradig falsch: Für $K := k := \mathbb{R}$ etwa ist mit $\mathfrak{a} := (X^2 + 1)$ die Aussage (i) für alle $f \in k[X]$ richtig, da $V_K(\mathfrak{a}) = \varnothing$, (ii) jedoch nicht. Ziel dieses kurzen Abschnitts ist es, für reell abgeschlossene Körper K eine (i) $\Leftrightarrow$ (ii) entsprechende Aussage, d.h. eine Charakterisierung von $I_k(V_K(\mathfrak{a}))$ zu geben. Wir verwenden zu deren Herleitung das Tarski-Prinzip (genauer nur die Modellvollständigkeit von $\mathcal{RAK}$).

Ist A ein kommutativer Ring (mit 1), $B \subseteq A$, so schreiben wir

$$\Sigma B \cdot A^2 := \left\{ b_1 a_1^2 + \cdots + b_n a_n^2 : n \in \mathbb{N}_0, b_i \in B, a_i \in A \right\}$$

und $\Sigma A^2 := \Sigma A^2 \cdot A^2$. (Im Fall, daß A ein Körper ist, stimmt diese Notation mit unserer früheren überein.) Ferner verallgemeinern wir den Begriff des präpositiven Kegels: $P \subseteq A$ heißt *präpositiver Kegel* von A, falls

(P1) $P + P \subseteq P$,
(P2) $P \cdot P \subseteq P$,
(P3) $-1 \notin P$,
(P4) $A^2 \subseteq P$.

Damit gilt in Verallgemeinerung von Lemma 6.1.7:

LEMMA 6.7.1. *Sei P_0 ein präpositiver Kegel von A. Dann existiert ein präpositiver Kegel $P \supseteq P_0$ mit $P \cup (-P) = A$ so, daß $P \cap (-P)$ ein Primideal ist.*

BEWEIS. Nach dem Zornschen Lemma enthält die Menge der präpositiven Kegel, die P_0 erweitern, ein maximales Element P. Wir behaupten:

$$Pa \cap (1 + P) = \varnothing \quad \text{oder} \quad -Pa \cap (1 + P) = \varnothing \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Denn wäre $p_1 a = 1 + q_1$ und $-p_2 a = 1 + q_2$ für $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$, so würde sich $-p_1 p_2 a^2 = (1+q_1)(1+q_2) \in 1+P$ ergeben, also $-1 \in P$, was wegen (P3) unmöglich ist. Nun zeigen wir:

(i) $P \cup (-P) = A$. Sei dazu $a \in A$, und angenommen, $Pa \cap (1 + P) = \varnothing$. Setze $P' := P - Pa$. Wir haben $A^2 \subseteq P \subseteq P'$, $-a \in P'$, $P' + P' \subseteq P'$, $P' \cdot P' \subseteq P'$, ferner $-1 \notin P'$ wegen $Pa \cap (1 + P) = \varnothing$. Also ist P' ein präpositiver Kegel, und aufgrund der Maximalität von P ist $P = P'$, also $-a \in P$. Ist $-Pa \cap (1 + P) = \varnothing$, so folgt analog $a \in P$.
(ii) $\mathfrak{p} := P \cap (-P)$ ist ein Primideal. Da $P \cup (-P) = A$, ist $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Seien $a_1 \cdot a_2 \in \mathfrak{p}$, $a_1, a_2 \in A$, o.B.d.A. $-a_1, -a_2 \notin P$. Nach dem Beweis von (i) ist dann aber $Pa_1 \cap (1+P) \neq \varnothing$, $Pa_2 \cap (1+P) \neq \varnothing$, etwa $p_1 a_1 = 1 + q_1$, $p_2 a_2 = 1 + q_2$ für $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$. Man erhält $p_1 p_2 a_1 a_2 \in 1 + P$, somit $-1 \in P + \mathfrak{p} \subseteq P$, Widerspruch.

Damit ist alles bewiesen. □

Zentral für das folgende ist nun:

SATZ 6.7.2. *Sei K ein geordneter Körper mit positivem Kegel P, f ein auf dem reellen Abschluß $\overline{K}$ von K positiv definites Polynom aus $A := K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann existieren $s_1, s_2 \in \Sigma P \cdot A^2$ mit $f = (1 + s_1)s_2^{-1}$.*

Beweis. Angenommen, nicht. Dann ist also $f \cdot \Sigma P \cdot A^2 \cap (1 + \Sigma P \cdot A^2) = \varnothing$. Sei $I := f \cdot \Sigma P \cdot A^2$ und $P_0 := \Sigma P \cdot A^2 - I$. Es ist $P_0 + P_0 \subseteq P_0$, $P_0 \cdot P_0 \subseteq P_0$ und $A^2 \subseteq P_0$, ferner $-1 \notin P_0$: Wäre nämlich das Gegenteil von Letzterem der Fall, so hätten wir $-1 = s_1 - fs_2$ für gewissen $s_1, s_2 \in \Sigma P \cdot A^2$, was $f \cdot \Sigma P \cdot A^2 \cap (1 + \Sigma P \cdot A^2) = \varnothing$ widerspricht. Also ist P_0 ein präpositiver Kegel von A, und nach dem vorgehenden Lemma 6.7.1 ist P_0 in einem präpositiven Kegel P_1 von A enthalten, so daß $P_1 \cup (-P_1) = A$ und $\mathfrak{p} := P_1 \cap (-P_1)$ ein Primideal von A ist. Betrachte $P_2 := P_1 + \mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{p}$; P_2 ist ein präpositiver Kegel von $A/\mathfrak{p}$ mit $P_2 \cup (-P_2) = A/\mathfrak{p}$ und $P_2 \cap (-P_2) = \{0\}$: Letzteres gilt, weil aus $a + \mathfrak{p} = b + \mathfrak{p}$ mit $a, b \in P_1$ folgt, daß $a + b \in \mathfrak{p} \subseteq (-P_1)$, also $a = (a + b) - b \in (-P_1)$ und somit $a \in P_1 \cap (-P_1) = \mathfrak{p}$. P_2 kann nun zu einem positiven Kegel P' des Quotientenkörpers K' von $A/\mathfrak{p}$ erweitert werden, und es gilt $K \subseteq K'$, $P = K \cap P'$, d.h. der durch P geordnete Körper $(K, <)$ ist Substruktur des durch P' geordneten Körpers $(K', <')$. Sei $\overline{K}$ der reelle Abschluß von K in $\overline{K'}$, wobei $\overline{K'}$ der reelle Abschluß von K' sei. Es ist $\overline{K}$ elementare Substruktur von $\overline{K'}$ nach der Modellvollständigkeit von $\mathcal{RAK}$. Nach Konstruktion ist $I \subseteq (-P_1)$. Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Bilder von $X_1, \ldots, X_n$ unter der kanonischen Einbettung $A \hookrightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow K'$, so folgt $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leq' 0$ in K'. Wir erhalten also auch Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \overline{K}$ mit $f(a_1, \ldots, a_n) \leq 0$ in $\overline{K}$. Aber das widerspricht der positiven Definitheit von f auf $\overline{K}$. □

Als Analogon zu Kor. 4.2.3 folgt damit:

Korollar 6.7.3. (Schwacher reeller Nullstellensatz) *Sei K ein geordneter Körper, $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n] =: A$ ein Ideal, $\overline{K}$ der reelle Abschluß von K. Dann gilt:*

$$V_{\overline{K}}(\mathfrak{a}) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \Sigma P \cdot A^2\right) \cap \mathfrak{a} = \varnothing$$

Beweis. Die Richtung „$\Rightarrow$" ist offensichtlich. Sei nun $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a}) = \varnothing$; schreibe $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ mit $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung folgt, daß $f := \sum_{i=1}^n f_i^2$ positiv definit auf $\overline{K}$ ist; nach Satz 6.7.2 ist also $f = (1+s_1)s_2^{-1}$ mit $s_1, s_2 \in \Sigma P \cdot A^2$, also $fs_2 \in \left(1 + \Sigma P \cdot A^2\right) \cap \mathfrak{a}$. □

Sei K ein Körper, $P \subseteq K$ ein positiver Kegel in K. Um ein zum Hilbertschen Nullstellensatz analoges Resultat zu erhalten, definieren wir für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n] =: A$

$$\sqrt[r]{\mathfrak{a}} := \left\{f : f^{2n} + s \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N},\ s \in \Sigma P \cdot A^2\right\}$$

als das *reelle Radikalideal von $\mathfrak{a}$*. (Wir werden sehen, daß es sich in der Tat um ein Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ handelt.) Es ergibt sich nun:

Reeller Nullstellensatz. (Dubois-Krivine-Risler, [**72**], [**88**], [**120**]) *Sei K ein geordneter Körper, $P \subseteq K$ der zugehörige positive Kegel, $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n] =: A$ ein Ideal, $\overline{K}$ der reelle Abschluß von K. Dann gilt:*

$$I_K(V_{\overline{K}}(\mathfrak{a})) = \sqrt[r]{\mathfrak{a}}$$

Beweis. Die Inklusion „$\supseteq$" ist trivial. Umgekehrt greifen wir wie im Beweis von 5.5.5 wieder auf den Trick von Rabinowitsch zurück: Betrachte den Ring $A' := K[X_1, \ldots, X_n, Y]$ mit der neuen Variablen $Y \neq X_1, \ldots, X_n$. Dann gilt $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a}') = \varnothing$ für das Ideal $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}A' + (1 - fY)A'$ von A'. Aber nach dem schwachen reellen Nullstellensatz 6.7.3 heißt dies

$$\left(1 + \Sigma P \cdot A'^2\right) \cap \mathfrak{a}' \neq \varnothing,$$

also

$$1 + \sum a_i {g_i'}^2 = \sum f_j h_j' + (1 - fY)h'$$

für gewisse $f_j \in \mathfrak{a}$, $a_i \in P$ und $h_j', h', g_i' \in A'$. Durch Substitution von $\frac{1}{f}$ für Y und Multiplikation mit einer geeigneten Potenz f^{2n} erhält man

$$f^{2n} + s \in \mathfrak{a} \qquad \text{mit } s := f^{2n} \sum a_i {g_i'}^2 \in \Sigma P \cdot A^2.$$

Somit $f \in \sqrt[r]{\mathfrak{a}}$, w.z.b.w. □

Insbesondere sieht man nun, daß $\sqrt[r]{\mathfrak{a}}$ ein radikales Ideal von $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist.— Der reelle Nullstellensatz ist Ausgangspunkt der reellen algebraischen Geometrie und reellen kommutativen Algebra, genauso wie der Hilbertsche Nullstellensatz Ursprung der algebraischen Geometrie über algebraisch abgeschlossenen Körpern ist; mehr dazu findet man in [**28**], [**32**]. [**174**] enthält eine Version des Dubois-Krivine-Rislerschen Satzes für Nonstandard-reell analytische Funktionskeime.

6.7.2. Die Sätze von Lang*. Wir beweisen nun zwei Sätze aus der klassischen Arbeit [**89**] von Lang; beide wurden zuerst mit „reellen Stellen“ formuliert und mit gänzlich anderen Methoden gezeigt, vgl. [**32**], II. Der erste Satz ist eine direkte Konsequenz aus dem schwachen reellen Nullstellensatz 6.7.3. Unter einer *affinen Algebra* über einem Körper K versteht man eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra.

Satz 6.7.4. (Homomorphiesatz von Artin-Lang, [**43**], [**89**]) *Sei K ein geordneter Körper, $\overline{K}$ sein reeller Abschluß, und A eine affine K-Algebra, die ein Integritätsbereich ist. Kann der Quotientenkörper $Q(A)$ von A mit einer Ordnung versehen werden, welche die von K fortsetzt, so existiert ein K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \to \overline{K}$.*

Beweis. A hat die Form $A \cong K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ mit einem endlich erzeugten Ideal $\mathfrak{a}$, etwa $\mathfrak{a} = (p_1, \ldots, p_m)$. Die Existenz von φ ist gleichbedeutend mit $V_{\overline{K}}(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$: Ist $\varphi\colon A \to \overline{K}$ ein Homomorphismus von K-Algebren, so folgt

$$p_i(\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_n)) = \varphi(p_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \varphi(p_i + \mathfrak{a}) = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m,$$

wobei $\xi_j := X_j + \mathfrak{a} \in A$ für $j = 1, \ldots, m$. Hat umgekehrt $p_1 = \cdots = p_m = 0$ eine Lösung $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overline{K}$, so erhält man mit $A \to \overline{K}, \xi_i \mapsto \alpha_i$ einen wohldefinierten Homomorphismus von K-Algebren. Die Behauptung folgt nun aus dem schwachen reellen Nullstellensatz. □

Der zweite der beiden angekündigten Sätze beschäftigt sich mit der Fortsetzbarkeit von Ringhomomorphismen von Teilringen angeordneter Körper mit Werten in reell abgeschlossenen Körpern auf konvexe Bewertungsringe. Ist $(M, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge, so heißt dabei eine Teilmenge $X \subseteq M$ *konvex in M*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$x \leq y \leq z \text{ und } x, z \in X \quad \Rightarrow \quad y \in X.$$

Beliebige Durchschnitte konvexer Teilmengen sind wieder konvex; insbesondere gibt es zu jeder Teilmenge $X \subseteq M$ eine eindeutig bestimmte kleinste konvexe Obermenge X^c von X in M, die *konvexe Hülle von X in M*. Es ist offenbar dann

$$X^c = \big\{ y \in M : \exists x, z \in X : x \leq y \leq z \big\}.$$

Sei im folgenden stets K ein geordneter Körper mit positivem Kegel P. Einige Eigenschaften konvexer Teilringe von K:

Lemma 6.7.5. *Sei A ein Teilring von K und $A^c =: B$ die konvexe Hülle von A in K.*

(i) *B ist ein Teilring von K.*
(ii) *$B = A$ (d.h. A konvex) d.u.n.d., wenn $[0;1] \subseteq A$. Mit A ist also auch jeder Oberring von A in K konvex.*
(iii) *Ist A konvex in K, so ist A ein Bewertungsring von K.*
(iv) *Ist A ein Bewertungsring von K, so ist A konvex in K gdw. $\mathfrak{m}$ konvex in A ist, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A sei.*
(v) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal von A, so ist $\mathfrak{a}^c$ ein Ideal von B. $\mathfrak{a}$ ist konvex (bzgl. der auf A eingeschränkten Ordnung $A \cap P$ von K) gdw. $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{a}^c$.*
(vi) *Ist A ein Bewertungsring und $\mathfrak{a} \neq A$ ein Radikalideal, so ist $\mathfrak{a}$ prim.*
(vii) *Zu jedem konvexen Primideal $\mathfrak{p}$ von A existiert ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.*

Beweis. (i) ist klar, ebenso (v).— Zu (ii): Offenbar ist $[0;1] \subseteq A$ für die Konvexität von A notwendig. $[0;1] \subseteq A$ ist aber dafür auch hinreichend: Seien $a, b \in A$, $c \in K$ mit $a < c < b$, also $0 < c - a < b - a$ und damit $(b-a)^{-1}(c-a) \in A$; daher folgt $c = (b-a)\big((b-a)^{-1}(c-a)\big) + a \in A$.— Zu (iii): Sei $A \subseteq K$ konvex, $a \in K^*$. Ist $|a| \leq 1$, so ist $a \in A$; andernfalls ist $a^{-1} \in A$.— Zu (iv): Sei A konvex in K. Seien $a, b \in A$ mit $0 < b < a$ und $a \in \mathfrak{m} = A \setminus A^*$. Aus $a^{-1} \notin A$ und $0 < a^{-1} < b^{-1}$ folgt $b^{-1} \notin A$, also $b \in \mathfrak{m}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}$ konvex in A und wäre $0 < b < a$ mit $a \in A$, $b \in K \setminus A$, so folgte $0 < 1 < ab^{-1} \in \mathfrak{m}$, also $1 \in \mathfrak{m}$, was unsinnig ist. Somit ist A konvex in K.— Zu (vi): Seien $a, b \in A$ mit $ab \in \mathfrak{a}$. Bezeichne „$|$“ die zu A gehörige Bewertungsteilbarkeit auf K (vgl. §5.5.3). Dann können wir o.B.d.A. $a|b$ annehmen, also $b = ac$ für ein $c \in A$. Damit $b^2 = abc \in \mathfrak{a}$, also $b \in \mathfrak{a}$.— Zu (vii): Sei $\mathfrak{p}$ ein konvexes Primideal von A. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{p}^c}$ ein Primideal von B nach (i), (iii), (v), (vi), und es ist $A \cap \sqrt{\mathfrak{p}^c} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. □

Damit:

Satz 6.7.6. (Lang, [**89**]) *Sei A ein Teilring von K, $\varphi\colon A \to R$ ein Homomorphismus geordneter Ringe mit Werten in einem reell abgeschlossenen Körper R. Dann besitzt φ eine Fortsetzung zu einem Homomorphismus geordneter Ringe $\varphi'\colon A' \to R'$ auf einen konvexen Bewertungsring $A' \subseteq K$ mit Werten in einem reell abgeschlossenen Oberkörper R' von R.*

Beweis. Sei $B := A^c$ die konvexe Hülle von A in K. $\mathfrak{p} := \ker\varphi$ ist ein konvexes Primideal von A; wähle gemäß Lemma 6.7.5, (vii) ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Betrachte $C := B_\mathfrak{q} \subseteq K$ und das maximale Ideal $\mathfrak{m} := \mathfrak{q}B_\mathfrak{q}$ von C; $\kappa(C) := C/\mathfrak{m}$ wird durch den positiven Kegel $\pi(P \cap C)$ zu einem geordneten Körper, wobei $\pi\colon C \to C/\mathfrak{m}$ die kanonische Abbildung bezeichne. Sei $\overline{\varphi}\colon A/\mathfrak{m}\cap A \to R, a + (\mathfrak{m} \cap A) \mapsto \varphi(a)$; diese ist wohldefiniert, da $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{q}B_\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p} = \ker\varphi$, und ordnungstreu, da $A/\mathfrak{m}\cap A \subseteq \kappa(C)$ durch $\pi(P \cap C) \cap (A/\mathfrak{m}\cap A)$ geordnet und φ nach Voraussetzung ordnungstreu ist. Ist S ein reeller Abschluß des geordneten Körpers $\kappa(C)$, so existiert mit der A.E. für S($\mathcal{RAK}$) (Satz 5.6.3) ein reell abgeschlossener Körper $R' \supseteq R$ und ein ordnungserhaltender Homomorphismus

$\overline{\psi}\colon S \to R'$ dergestalt, daß

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{m}\cap A & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle\overline{\varphi}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\overline{\psi}} \\ R & \longrightarrow & R' \end{array}$$

kommutierend wird. Sei $\psi\colon B \to R', b \mapsto \overline{\psi}(b/1+\mathfrak{m})$; ψ ist ordnungserhaltend, und es ist für alle $a \in A$

$$\psi(a) = \overline{\psi}(a/1+\mathfrak{m}) = \overline{\varphi}\big(a + (A \cap \mathfrak{m})\big) = \varphi(a),$$

also ψ die gesuchte Fortsetzung von φ auf A^c. □

Wie am Ende von §6.6 angekündigt, erhalten wir daraus nun noch einen weiteren Beweis für den Endlichkeitssatz 6.6.27. Die Idee dahinter ist die Beobachtung, daß die Aussage des Satzes gerade ist, daß jede Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ über $L(R)$ (L die Sprache der geordneten Ringe), die eine abgeschlossene semialgebraische Menge $M \subseteq R^n$ definiert, in $\mathcal{RAK} \cap \mathrm{Mod}(\mathrm{D}(R,R))$ zu einer positiven quantorenfreien $L(R)$-Formel äquivalent ist.

Beweis (Satz 6.6.27). Wir überprüfen, daß die Voraussetzungen von Kor. 5.1.2, (i) gelten. Gegeben die Situation

(6.7.18)
$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \Big\uparrow & & \\ A & \xrightarrow{h} & L \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\ R & & R \end{array}$$

mit reell abgeschlossenen Körpern F, L, R, ferner A einem geordneten Teilring von F und $h\colon A \to L$ einem Homomorphismus geordneter Ringe mit $h|R = \mathrm{id}$, wobei die vertikalen Pfeile Inklusionen bezeichnen, haben wir zu zeigen, daß

$$F \models \varphi(\mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad L \models \varphi\big(h(\mathbf{a})\big) \qquad \text{für alle } \mathbf{a} \in A^n.$$

Gelte also $F \models \varphi(\mathbf{a})$. Mit dem Homomorphismusfortsetzungssatz 6.7.6 von Lang und der Modellvollständigkeit von $\mathcal{RAK}$ können wir annehmen, daß A ein konvexer Bewertungsring von F ist. Ferner können wir in (6.7.18) davon ausgehen, daß A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\ker(h)$ ist. (Ansonsten ersetze man A durch seine Lokalisierung bei $\ker(h)$.) Durch Verändern von R können wir weiterhin annehmen, daß $h(R) = h(A)$. Dies sieht man wie folgt ein: Sei mit Zorns Lemma $\tilde{R}$ ein maximaler Teilkörper von A, welcher R umfaßt. Wir haben zu zeigen: $\tilde{R}$ ist reell abgeschlossen, und $h(\tilde{R}) = h(A)$. Wegen der Maximalität von $\tilde{R}$ ist $\tilde{R}$ in A algebraisch abgeschlossen. Da A ein konvexer Teilring von F und F reell abgeschlossen ist, gilt in A der Zwischenwertsatz für Polynome aus $A[X]$. Damit gilt dieser aber auch in $\tilde{R}$: Wechselt $p \in \tilde{R}[X]$, $p \neq 0$, zwischen $a, b \in \tilde{R}, a < b$ das Vorzeichen, so hat p, aufgefaßt als Polynom aus $A[X]$, eine Wurzel $c \in A$, $a < c < b$, und es folgt $c \in \tilde{R}$. Also ist $\tilde{R}$ reell abgeschlossen, und somit auch $h(\tilde{R})$. Wäre nun $a \in A$ mit $h(a) \notin h(\tilde{R})$, so wäre also $h(a)$ transzendent über $h(\tilde{R})$. Da A lokal mit maximalem Ideal $\ker(h) = A \setminus A^*$ und also $\tilde{R} \cap \ker(h) = \{0\}$ ist, gilt somit für alle $p \in \tilde{R}[X]$, $p \neq 0$ stets $p(a) \notin \ker(h)$, also $p(a) \in A^*$. Dies heißt, daß $\tilde{R}(a) \subseteq A$ mit $a \notin A$, im

Widerspruch zur Maximalität von $\tilde{R}$. Also $h(\tilde{R}) = h(A)$. Weil $h|\tilde{R}$ injektiv ist, ist sogar $\tilde{R} \cong h(A)$ via h.

Sei damit $\mathbf{a} \in A^n$ mit $F \models \varphi(\mathbf{a})$. Wegen den eben begründeten Annahmen existiert ein $\mathbf{b} \in R^n$ mit $h(\mathbf{b}) = h(\mathbf{a})$. Da $h|R$ ein Isomorphismus $R \cong h(A)$ und $\mathcal{RAK}$ modellvollständig ist, reicht es, $R \models \varphi(\mathbf{b})$ nachzuweisen. Da $\neg\varphi$ eine offene semialgebraische Teilmenge M von R^n definiert, gibt es für alle $\mathbf{b} \in M$ ein $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, so daß

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^2 < \varepsilon \to \neg\varphi \right) \tag{6.7.19}$$

in R gilt, also auch in F. Nach Lemma 6.7.5, (iv) ist das maximale Ideal $\ker(h)$ von A konvex in A. Da $\ker(h) \cap R = \{0\}$ ist, erhalten wir $a < \varepsilon$ für alle $a \in \ker(h)$. Da $a_i - b_i \in \ker(h)$, folgt $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 < \varepsilon$, und (6.7.19) impliziert $F \models \neg\varphi(\mathbf{a})$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

6.8. Die Lösung des 17. Hilbertschen Problems

Im Jahre 1900 hielt D. Hilbert auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris einen berühmt gewordenen Vortrag, in dem er 23 bis dato ungelöste mathematische Probleme als Aufgabe für das neue Jahrhundert formulierte [**83**]. Seither sind viele von ihnen z.T. in unerwarteter Weise gelöst worden. (Für einen Überblick vgl. [**84**].) Dazu zählt das 17. Problem, die „Darstellung definiter Formen durch Quadrate“, das 1927 von E. Artin [**43**] vollständig gelöst wurde; es erforderte jedoch die Schaffung einer gänzlich neuen Theorie der angeordneten Körper, die von Artin und Schreier in ihrer bahnbrechenden Arbeit [**44**] geleistet wurde, und deren Anfänge wir im §6.1 behandelt haben. Wir werden hier jedoch einen Beweis des Artinschen Satzes nach Robinson [**122**], [**123**] vorstellen, in dem die Modelltheorie reell abgeschlossener Körper voll zum Tragen kommt. (Für die klassische Lösung vgl. etwa [**32**], II, §12.) Erstaunlich ist die Kürze und Einfachheit des Beweises von Robinson:

> *Robinson made Tarski's theorem not only an immediate consequence of Artin-Schreier theory, but also it's culmination: Artin's solution of Hilbert's 17th problem* [...] *becomes in Robinson's hands a memorable one-liner* [...]. [**71**]

Das 17. Hilbertsche Problem beschäftigt sich mit der Charakterisierung semidefiniter Polynome in reell abgeschlossenen Körpern R (bei Hilbert $R = \mathbb{R}$). Prototypen (auf ganz R^n) positiv semidefiniter Polynome sind solche der Form

$$f = \sum_{i=1}^{m} g_i^2 \qquad \text{mit } g_1, \dots, g_m \in R[X_1, \dots, X_n]. \tag{6.8.20}$$

Die erste Frage, die sich stellt, ist: Ist jedes positiv semidefinite Polynom von der Form (6.8.20)? Schon 1888 hatte Hilbert gezeigt, daß gilt:

Lemma 6.8.1. *Für jedes positiv semidefinite $f \in R[X]$ existieren $g_1, g_2 \in R[X]$ mit*

$$f = g_1^2 + g_2^2.$$

Beweis. Wir schreiben

$$f = \prod_j (X - \alpha_j)^{r_j} \prod_k \left((X - (\beta_k + i\gamma_k))(X - (\beta_k - i\gamma_k))\right)^{s_k}$$

in $C[X] = R(i)[X]$ mit $\alpha_j, \beta_k, \gamma_k \in R$, $r_j, s_k > 0$ und $\alpha_j, (\beta_k + i\gamma_k), (\beta_k - i\gamma_k)$ paarweise verschieden. Da f positiv semidefinit ist, müssen alle r_j gerade sein, also gibt es $g, q, r \in R[X]$ mit

$$g^2 = \prod_j (X - \alpha_j)^{r_j}, \qquad q \pm ir = \prod_k (X - (\beta_k \pm i\gamma_k))^{s_k}.$$

Dann ist $f = g^2 \cdot (q^2 + r^2) = (gq)^2 + (gr)^2$. □

Hilbert wußte allerdings auch, daß für $n \geq 2$ i.a. f nicht in der Form (6.8.20) dargestellt werden kann. (Sein Satz liefert noch genauere Informationen, vgl. [**28**], Th. 6.4.7.) Das erste explizite Beispiel eines positiv semidefiniten Polynoms, das nicht Summe von Quadraten von Polynomen ist, wurde allerdings erst 1967 von Motzkin [**112**] angegeben, nämlich

$$f_M := 1 + X^4Y^2 - X^2Y^4 - 3X^2Y^2 \in R[X, Y].$$

Proposition 6.8.2. *f_M ist positiv semidefinit, aber keine Summe von Quadraten von Polynomen in $R[X, Y]$.*

Beweis. Sei

$$g_M := Z^6 + X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2Z^2 \in R[X, Y, Z]$$

die Homogenisierung f_M^h von f_M. Die positive Semidefinitheit von f_M folgt aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (die sich natürlich wegen von Vollständigkeit von $\mathcal{RAK}$ von $\mathbb{R}$ nach R transportieren läßt):

$$\frac{1}{3}\left(z^6 + x^4y^2 + x^2y^4\right) \geq \sqrt[3]{x^6y^6z^6} \qquad \text{für alle } (x, y, z) \in R^3.$$

Angenommen, f_M wäre eine Summe von Quadraten in $R[X, Y]$, also $f_M = \sum_{i=1}^k f_i^2$ mit $f_i \in R[X, Y]$. Durch Homogenisieren erhält man g_M als Summe von Quadraten homogener Polynome $g_i := f_i^h$: $g_M = \sum_{i=1}^k g_i^2$; dabei ist $\mathrm{grad}(g_i) = 3$. Keines der g_i enthält die Summanden X^3, Y^3, ferner nicht X^2Z, Y^2Z (da g_M X^4Z^2, Y^4Z^2 nicht enthält), und ebenso nicht XZ^2, YZ^2. Also muß jedes g_i eine Linearkombination von XY^2, X^2Y, XYZ, Z^3 sein, und in $\sum g_i^2$ muß $X^2Y^2Z^2$ mit einem nichtnegativen Koeffizienten erscheinen, so daß $g_M \neq \sum g_i^2$ folgt. Widerspruch. □

Es ist nun naheliegend, die ursprüngliche Frage dergestalt abzuschwächen, daß nun nach einer Darstellung (6.8.20) von f durch rationale Funktionen $g_i \in R(X_1, \ldots, X_n)$ gefragt wird. Das Hilbertsche 17. Problem lautet damit sinngemäß wie folgt:

Hilberts 17. Problem. *Gegeben sei ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. f sei positiv semidefinit auf $\mathbb{R}^n$. Gibt es ein $m \geq 1$ und rationale Funktionen $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$ mit $f = g_1^2 + \cdots + g_m^2$?*

Ein ebenfalls von Hilbert stammender Zusatz ist:

Zusatz. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Teilkörper, der die Koeffizienten von f enthält. Kann man dann $g_1, \ldots, g_m \in K(X_1, \ldots, X_n)$ und $p_1, \ldots, p_m \in K$, $p_i > 0$ finden derart, daß $f = p_1g_1^2 + \cdots + p_mg_m^2$?*

Zunächst einige einfache Eigenschaften positiv semidefiniter rationaler Funktionen. (Topologische Begriffe sind immer bzgl. $\mathcal{O}(R^n)$ zu verstehen.)

Satz 6.8.3. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper.*

(i) *Ist $U \subseteq R^n$ eine nichtleere offene Teilmenge sowie $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ ein auf U identisch verschwindendes Polynom, so ist $f = 0$.*
(ii) *Ist $f \in R(X_1, \ldots, X_n)$ positiv semidefinit auf einer offenen dichten Teilmenge von D_f, so ist f überhaupt positiv semidefinit.*
(iii) *Die positiv semidefiniten Funktionen bilden einen präpositiven Kegel von $R(X_1, \ldots, X_n)$.*

Beweis. Zu (i): Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Aussage klar; sei also $n > 1$. Wir setzen $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_{n-1})$ und schreiben

$$f = f(\mathbf{X}, X_n) = f_0(\mathbf{X})X_n^d + \cdots + f_d(\mathbf{X}) \qquad (d \in \mathbb{N}_0, f_0, \ldots, f_d \in R[\mathbf{X}]).$$

Man kann o.B.d.A. annehmen, daß U ein offener Quader ist, d.h. $U = \prod_{i=1}^n]a_i; b_i[$ mit $a_i < b_i$ aus R. Für jedes $(c'_1, \ldots, c'_n) = \mathbf{c}' \in U' := \prod_{i=1}^{n-1}]a_i; b_i[$ verschwindet das Polynom $f(\mathbf{c}', X_n) = f_0(\mathbf{c}')X_n^d + \cdots + f_d(\mathbf{c}')$ identisch auf $]a_n; b_n[$, woraus $f_0(\mathbf{c}') = \cdots = f_n(\mathbf{c}') = 0$ folgt. Die f_j verschwinden also identisch auf U', womit nach Induktionsvoraussetzung $f_0 = \cdots = f_d = 0$ folgt.

Zu (ii): Klar wegen der Stetigkeit von $x \mapsto f(x)$ für $x \in D_f$.

Zu (iii): Wegen (i) und der Stetigkeit von $x \mapsto f(x)$, $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ ist der Definitionsbereich jeder rationalen Funktion dicht und offen in R^n. Seien $f, g \in K(X_1, \ldots, X_n)^*$ positiv semidefinit. Da $f + g$ und fg auf der dichten offenen Teilmenge $D_f \cap D_g$ von R^n positiv semidefinit sind, sind sie positiv semidefinit auf D_{f+g} bzw. D_{fg}, also positiv semidefinit, nach (ii). Analog folgt, daß f^2 positiv semidefinit ist. □

Hier also die Lösung des Hilbertschen Problems:

Satz 6.8.4. (Artin, [**43**]) *Sei K ein geordneter Körper mit reellem Abschluß R, sei $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. f ist positiv semidefinit auf R^n genau dann, wenn $0 < p_1, \ldots, p_m \in K$ und rationale Funktionen $g_1, \ldots, g_m \in K(X_1, \ldots, X_n)$ existieren, so daß in $K(X_1, \ldots, X_n)$ gilt:*

$$f = p_1 g_1^2 + \cdots + p_m g_m^2 \tag{6.8.21}$$

Beweis. Daß jedes Polynom in der Form (6.8.21) positiv semidefinit auf R^n ist, wurde schon in Satz 6.8.3, (iii) erledigt. Sei jetzt P der positive Kegel von K und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $f \neq 0$ positiv semidefinit auf R^n. Definiere

$$T := \left\{ \sum_{i=1}^m p_i g_i^2 : m \in \mathbb{N}, 0 < p_i \in K, g_i \in K(X_1, \ldots, X_n) \right\}.$$

$T \supseteq P$ ist ein präpositiver Kegel von $K(X_1, \ldots, X_n)$ (mit (iii) aus Satz 6.8.3). Wäre $f \notin T$, so gäbe es nach Satz 6.1.9 einen positiven Kegel $Q \supseteq P$ mit $f \notin Q$, also $f < 0$ in der durch Q induzierten Ordnung. Ist S der reelle Abschluß von $K(X_1, \ldots, X_n)$ bzgl. der durch Q induzierten Ordnung, so gilt $f(X_1, \ldots, X_n) < 0$ mit $X_i \in S$, also

$$R \models \neg \exists \mathbf{x}(f(\mathbf{x}) < 0), \qquad S \models \exists \mathbf{x}(f(\mathbf{x}) < 0),$$

im Widerspruch zur Substrukturvollständigkeit von $\mathcal{RAK}$. □

Korollar 6.8.5. *Sei K ein geordneter Teilkörper von $\mathbb{R}$, $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ positiv semidefinit auf K^n. f kann geschrieben werden als $f = \sum_{i=1}^m p_i g_i^2$ mit $0 < p_i \in K$, $g_i \in K(X_1, \ldots, X_n)$. Ist $K = \mathbb{Q}$, so können alle $p_i = 1$ gewählt werden.*

Beweis. Es ist $K \supseteq \mathbb{Q}$; ist also $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ positiv semidefinit auf K^n, so auch auf $\mathbb{R}^n$, da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt. Nach Satz 6.8.4 gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < p_1, \dots, p_m \in \mathbb{Q}$, $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$ mit $f = \sum_{i=1}^m p_i g_i^2$. Es genügt zu zeigen, daß jedes p_i als Summe von Quadraten in $\mathbb{Q}$ geschrieben werden kann. Ist aber $p = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \sum_{i=1}^{ab} \left(\frac{1}{b}\right)^2$. □

Die Tatsache, daß $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, ist für Kor. 6.8.5 unabdingbar. Es gibt geordnete Körper, die nicht dicht in ihrem reellen Abschluß sind. Ein Beispiel ist der geordnete Körper $\mathbb{Q}(X)$ mit $X > r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ (vgl. Bsp. in §6.1); ist R dessen reeller Abschluß, so ist $\mathbb{Q}(X) \cap \left]\sqrt{X}; 2\sqrt{X}\right[= \varnothing$, wobei das Intervall $\left]\sqrt{X}; 2\sqrt{X}\right[$ natürlich in R gebildet wird. Betrachte das Polynom $f := (T^2 - X)(T^2 - \frac{9}{4}X) \in R[T]$. Seine Nullstellen in R sind $\pm\sqrt{X}$, $\pm\frac{3}{2}\sqrt{X}$, und f ist also positiv definit auf $\mathbb{Q}(X)$; die Nullstellen aber sind allesamt einfach, da $f' = \frac{1}{2}T(8T^2 - 13X)$, und im Intervall $\left]\sqrt{X}; 2\sqrt{X}\right[$ muß f damit das Vorzeichen wechseln. f kann also nicht als Summe von Quadraten rationaler Funktionen über $\mathbb{Q}(X)$ geschrieben werden, denn jede solche Summe ist positiv semidefinit sogar auf R.— McKenna [**110**] hat bewiesen, daß in einem geordneten Körper K d.u.n.d. jedes über K positiv semidefinite Polynom als Summe von Quadraten rationaler Funktionen dargestellt werden kann, wenn K dicht in seinem reellen Abschluß liegt und in eindeutiger Weise angeordnet ist.

Für Varianten zum 17. Hilbertschen Problem, insbesondere die Abschätzungen von Pfister über die Anzahl der benötigten Quadrate, sowie historische Bemerkungen siehe [**28**], Chap. 6.

KAPITEL 7

Existentiell abgeschlossene und generische Strukturen

7.1. Motivation. Der Eindeutigkeitssatz

Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom über $\mathbb{Q}$. Dann kann f eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ besitzen oder nicht. Zum Beispiel hat $X^2 - 4$ eine Nullstelle, während $X^2 + 1$ und $0 \cdot X^2 - 1$ keine Wurzeln besitzen. Betrachten wir Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, so können wir zwei Ursachen dafür, warum f in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt, unterscheiden:

(i) f hat aus *essentiellen Gründen* keine Wurzel in $\mathbb{Q}$, d.h. weil überhaupt kein Körper $K \supseteq \mathbb{Q}$ existiert, in dem f eine Wurzel besitzt. (Dies ist etwa der Fall für $0 \cdot X^2 - 1$.)

(ii) f hat aus *zufälligen Gründen* keine Wurzel, d.h. weil der Körper $\mathbb{Q}$ „nicht groß genug" ist — m.a.W. es gibt einen Körper $K \supseteq \mathbb{Q}$, in dem f eine Wurzel besitzt. (Dies ist der Fall für $X^2 + 1$, welches im Körper $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{Q}$ eine Nullstelle hat.)

Betrachten wir ein weiteres Beispiel. Sei R der Ring $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ und sei $a = (2, 0) \in R$. Dann haben die Polynome $X^2 - a$ und $aX - 1$ beide keine Nullstellen in R. Suchen wir nach Wurzeln dieser Polynome in beliebigen kommutativen Ringen mit 1, die R erweitern, so bemerken wir, daß $X^2 - a$ in R aus zufälligen Gründen keine Wurzel besitzt — in der Tat hat $X^2 - a$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ eine Nullstelle — während $aX - 1$ in R aus essentiellen Gründen keine Nullstelle aufweist — denn $aX - 1$ kann in keinem kommutativen Ring $R' \supseteq R$ eine Nullstelle besitzen. (Um dies einzusehen, sei $b = (0, 1) \in R$. Dann ist $ba = 0$, und $ax = 1$ impliziert $0 = bax = b \neq 0$, ein Widerspruch.)

Abstrakter ausgedrückt beschäftigen wir uns nun mit dem folgenden Problem: Angenommen wir betrachten eine feste Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen (etwa wie eben $\mathcal{K} = \mathcal{K}ö$ oder $\mathcal{K} = \mathcal{KR}$ als die Klasse der kommutativen Ringe mit 1) über einer Sprache L und eine Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$: Welche Gleichungen mit Parametern haben Lösungen in $\mathfrak{A}$, welche haben Lösungen in einer Erweiterung $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, und welche habe keine Lösung in jeder Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$? Wir können natürlich ebensogut Gleichungs- und Ungleichungssysteme in einer oder mehreren Variablen untersuchen, ferner Systeme von Basisformeln in L, wenn etwa L mindestens ein Relationssymbol enthält, oder allgemein Lösungen für irgendwelche quantorenfreie Formeln in L mit Parametern in $\mathfrak{A}$. (Im Moment wollen wir uns auf *endliche* Systeme von Basisformeln beschränken.)

Formuliert in diesem allgemeineren Rahmen lautet unser Problem also wie folgt: Entscheide für einen gegebenen existentiellen Satz $\varphi = \exists \mathbf{x}(\psi(\mathbf{x}))$ in $L(A)$,

(i) ob $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$,

(ii) oder ob es ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ gibt mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$.

Beispiel. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der geordneten kommutativen Ringe mit 1 und $\mathfrak{A}$ der geordnete Ring der ganzen Zahlen. Dann hat der Satz

$$\exists x \exists y(x^2 + y^2 = 3 \wedge x < 0 \wedge y > 0)$$

keine Lösung in $\mathbb{Z}$, wohl aber in $\mathbb{R}$ (z.B. $x = -1$, $y = \sqrt{2}$); der Satz

$$\exists x \exists y(x + y = 0 \wedge x > 0 \wedge y \not< 0)$$

hat keine Lösung in irgendeiner Erweiterung von $\mathbb{Z}$ in $\mathcal{K}$.

Es sollte nicht überraschen, daß dieses Problem im allgemeinen sehr schwierig ist — es stellt eines der grundlegenden Probleme der Algebra und Modelltheorie dar. Um einen allgemeinen Zugang zu erhalten, untersuchen wir eine verwandte Frage: Die Beispiele haben gezeigt, daß es für gegebenes $\mathcal{K}$ und $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ i.a. einige Systeme von Gleichungen und Ungleichungen gibt, die aus zufälligen Gründen keine Lösung in $\mathfrak{A}$ besitzen, oder allgemeiner gesprochen existentielle $L(A)$-Sätze φ, so daß $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$, aber $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$ für ein $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Wir können fragen, ob es Strukturen $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ gibt, für die dies nicht passieren kann, d.h. für welche gilt:

(∗) Wann immer $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\varphi \in (\exists_1)_{L(A)}$ und $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$, so $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$.

$\mathfrak{A}$ werden wir dann *existentiell abgeschlossen in* $\mathcal{K}$ nennen. Wir wissen bereits, daß für eine modellvollständige Klasse $\mathcal{K}$ die Bedingung (∗) bereits für *alle* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ erfüllt ist. Wie findet man nun in einer — i.a. nicht modellvollständigen — Klasse L-Strukturen, die existentiell abgeschlossen sind, und wie charakterisiert man existentielle Abgeschlossenheit? Ersetzt man $\exists_1$ in der „Vollständigkeitsforderung“ (∗) durch allgemeinere Formelmengen, so kann man auch fragen: Wie findet man in einer gegebenen Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen „große“ Unterklassen, die „näherungsweise“ modellvollständig — im Sinne einer modifizierten Form von (∗) — sind? Unter einer „großen“ Unterklasse verstehen wir dabei (vgl. auch Bedingung ($G3_n$) im nachfolgenden Satz, sowie Lemma 7.1.4):

Definition 7.1.1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Dann heißt $\mathcal{K}'$ *konfinal in* $\mathcal{K}$, falls sich jede Struktur aus $\mathcal{K}$ zu einer aus $\mathcal{K}'$ erweitern läßt, d.h. falls $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{K}')$.

Beispiel. $\mathcal{AAK}$ ist konfinal in $\mathcal{K}$ö, $\mathcal{RAK}$ ist konfinal in der Klasse $\mathcal{GK}$ö der geordneten Körper.

Die „näherungsweise Modellvollständigkeit“ wird durch Bedingung ($G2_n$) im nächsten Satz formalisiert; man betrachte die Definition der Modellvollständigkeit (Def. 4.0.1) und vergleiche sie für $n = \infty$ mit ($G2_n$). Dabei beachte man aber, daß hier $\mathcal{K}'$ nicht als elementar vorausgesetzt ist!

Satz 7.1.2. (Robinson, [**126**]) *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Dann gibt es höchstens eine Teilklasse $\mathcal{K}'$ von $\mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(G1) *$\mathcal{K}'$ ist konfinal in $\mathcal{K}$.*
($G2_n$) *Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$.*
($G3_n$) *Ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, so daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$, so ist sogar $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$.*

Definition 7.1.3. Falls existent, heißt $\mathcal{K}'$ die Klasse der *n-generischen Strukturen in* $\mathcal{K}$, in Zeichen $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Für $n = \infty$ sprechen wir von $\mathcal{G}(\mathcal{K}) := \mathcal{G}_\infty(\mathcal{K})$ auch als von der Klasse der *generischen Strukturen in* $\mathcal{K}$. (Offenbar gilt $\mathcal{G}_0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$.)

Beweis. Seien $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ zwei Teilklassen von $\mathcal{K}$, die die den Bedingungen (G1)–(G3$_n$) genügen. Zu zeigen ist etwa $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$. Um $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_2$ zu beweisen, genügt es wegen (G3$_n$) zu begründen, daß für alle $B \in \mathcal{K}_2$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bereits $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$; sei also $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}_2$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Da $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ konfinal in $\mathcal{K}$ sind, können wir rekursiv eine aufsteigende Kette

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots \quad \text{mit } \mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}_1,\ \mathfrak{B}_i \in \mathcal{K}_2 \text{ für } i \in \mathbb{N}_0$$

finden. Setze $\mathfrak{C} := \bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in \mathbb{N}_0\} = \bigcup\{\mathfrak{B}_i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Nach Bedingung (G2$_n$) gilt für $i < j$ stets $\mathfrak{A}_i \preceq_{\forall_n} \mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{B}_i \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}_j$. Nach dem Satz 4.4.3 über elementare Ketten gilt dann $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$. Sei nun $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ eine $\forall_n$-Formel und $\mathbf{a} \in A^m$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Angenommen, $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$. Wegen $\forall_{n-1} \subseteq \forall_n$ haben wir $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_{n-1}} \mathfrak{C}$ und damit auch $\mathfrak{B} \preceq_{\exists_n} \mathfrak{C}$. Da $\neg\varphi$ logisch äquivalent ist zu einer $\exists_n$-Formel also $\mathfrak{C} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$. Andererseits wegen $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ auch $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$, Widerspruch. □

Die Bedingung (G3$_n$) ist in Wirklichkeit eine Maximalitätsforderung, denn es gilt:

Lemma 7.1.4. *Sei $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ existiert genau dann, wenn die größte Teilklasse von $\mathcal{K}$, die* (G1) *und* (G2$_n$) *erfüllt, existiert. Im Falle der Existenz sind die beiden genannten Klassen identisch.*

Zum Beweis benötigen wir die nachfolgende Proposition. Dabei definieren wir zu $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und jeder Teilklasse $\mathcal{H}$ von $\mathcal{K}$ die Teilklasse $\mathcal{H}^{\forall_n} \subseteq \mathcal{K}$, bestehend aus allen Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, so daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ folgt: $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$.

Proposition 7.1.5. *Die Zuordnung $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^{\forall_n}$ ist ein Hüllenoperator auf der Gesamtheit aller Teilklassen $\mathcal{H}$ von $\mathcal{K}$, die* (G1) *und* (G2$_n$) *(für $\mathcal{K}' := \mathcal{H}$) erfüllen, d.h.:*

(i) *Mit $\mathcal{H}$ erfüllt auch $\mathcal{H}^{\forall_n}$ die Eigenschaften* (G1) *und* (G2$_n$).
(ii) *$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^{\forall_n}$ für alle $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, die* (G1) *und* (G2$_n$) *erfüllen.*
(iii) *Erfüllen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{K}$ die Bedingungen* (G1), (G2$_n$), *so ist $\mathcal{H}^{\forall_n} \subseteq \mathcal{H}'^{\forall_n}$.*
(iv) $(\mathcal{H}^{\forall_n})^{\forall_n} = \mathcal{H}^{\forall_n}$.

Beweis. Seien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ Teilklassen von $\mathcal{K}$, für die (G1), (G2$_n$) richtig sind.

Es folgt für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{H}$ aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, daß $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$; also $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}^{\forall_n}$, d.h. (ii) ist bewiesen. Insbesondere erfüllt $\mathcal{H}^{\forall_n}$ auch (G1). Um zu sehen, daß $\mathcal{H}^{\forall_n}$ (G2$_n$) erfüllt, seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{H}^{\forall_n}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Nach (G1) existiert eine Erweiterung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ in $\mathcal{H}$. Nach Definition von $\mathcal{H}^{\forall_n}$ ist $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ und somit $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. Damit ist (i) bewiesen.

Nun sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}^{\forall_n}$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}'^{\forall_n}$. Dann existiert eine Erweiterung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ in $\mathcal{H}$, und wir haben $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ und somit $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. Dies zeigt insbesondere $\mathcal{H}^{\forall_n} \subseteq \mathcal{H}'^{\forall_n}$.

Schließlich sei $\mathfrak{A} \in (\mathcal{H}^{\forall_n})^{\forall_n}$ und $\mathfrak{B}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{H}$. Dann $\mathfrak{B} \in \mathcal{H}^{\forall_n}$, und somit $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. Wir haben (iv) gezeigt. □

Offenbar ist (G3$_n$) äquivalent zu $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'^{\forall_n}$. Damit:

Beweis (von Lemma 7.1.4). Ist $\mathcal{K}'$ die größte unter den (G1) und (G2$_n$) erfüllenden Teilklassen von $\mathcal{K}$, so folgt aus Prop. 7.1.5, (i), (ii): $\mathcal{K}' \subseteq (\mathcal{K}')^{\forall_n} \subseteq \mathcal{K}'$. Umgekehrt nehmen wir an, daß $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Sei $\mathcal{K}''$ eine (G1), (G2$_n$) genügende Unterklasse von $\mathcal{K}$. Mit Prop. 7.1.5, (iv) und Satz 7.1.2 folgt $\mathcal{K}' = \mathcal{K}''^{\forall_n}$, also wegen (ii) $\mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}'$. $\square$

7.2. Ein Existenzsatz für generische Strukturen

Bis jetzt wissen wir noch nichts über die Existenz der generischen Klassen $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Ziel ist es nun, zu zeigen, daß für eine *induktive* Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen alle Klassen $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ $(n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ existieren. Wir tragen zunächst die formale und verallgemeinerte Definition des Begriffs der existentiellen Abgeschlossenheit, wie wir ihn einleitend entwickelt haben, nach:

Definition 7.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, so daß jede Erweiterung zwischen Strukturen in $\mathcal{K}$ eine $\forall_n$-Erweiterung ist. Dann heißt $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ $\exists_{n+1}$*-abgeschlossen in* $\mathcal{K}$, falls für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und alle $\exists_{n+1}$-Sätze $\varphi \in L(A)$ gilt:

$$(\mathfrak{B}, A) \models \varphi \quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{A}, A) \models \varphi$$

$\exists_1$-abgeschlossene Strukturen heißen *existentiell abgeschlossen.*

Wir schreiben $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K})$ für die Klasse der $\exists_{n+1}$-abgeschlossenen Strukturen und $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ für die Klasse $\mathcal{E}_1(\mathcal{K})$ der existentiell abgeschlossenen Strukturen in $\mathcal{K}$.

Beispiel. Eine triviale Quelle für Pathologien ist die (elementare) Klasse $\mathcal{K}$ aller linear geordneten Mengen mit einem linken Randpunkt bzgl. der Sprache $L = \{<\}$ der Ordnungen. Dann ist $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \varnothing$. (Übung!) Betrachtet man jedoch dieselbe Situation in der Sprache $L' = \{0, <\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol für den linken Randpunkt sei, und bezeichnet $\mathcal{K}'$ die Klasse aller geordneten Mengen $\mathfrak{D}$ mit linkem Randpunkt $0^{\mathfrak{D}}$, so enthält $\mathcal{K}'$ sehr wohl existentiell abgeschlossene Strukturen, z.B. das Intervall $[0;1[$. Der Grund für dieses Phänomen ist, daß wir durch den Wechsel der Sprache auch den Begriff der Erweiterung verändert haben: In $\mathcal{K}'$ muß jede Erweiterung $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{D}$ denselben linken Randpunkt $0^{\mathfrak{D}'} = 0^{\mathfrak{D}}$ besitzen. $\mathcal{K}'$ ist ferner induktiv, $\mathcal{K}$ hingegen nicht. (Übung!)

In der Tat gilt für induktive Strukturklassen:

Satz 7.2.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen derart, daß jede Erweiterung in $\mathcal{K}$ eine $\forall_n$-Erweiterung ist. Dann ist $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K})$ induktiv und konfinal in $\mathcal{K}$.* (*Insbesondere $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K}) \neq \varnothing$, falls $\mathcal{K} \neq \varnothing$.*)

Beweis. Zunächst zu Konfinalität. Wir zeigen als Hilfsbehauptung:

(∗) Für alle $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ gibt es ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$, so daß für jeden $\exists_{n+1}$-Satz φ aus $L(C)$ gilt: Falls $(\mathfrak{E}, C) \models \varphi$ für irgendein $\mathfrak{E} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{D}$, so gilt auch schon $(\mathfrak{D}, C) \models \varphi$.

Dazu sei also $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, λ eine Limesordinalzahl und $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ eine (ordinale) Aufzählung aller $\exists_{n+1}$-Sätze in $L(C)$. Definiere rekursiv eine (transfinite) aufsteigende Folge $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ von L-Strukturen in $\mathcal{K}$ durch folgende Festlegungen: $\mathfrak{A}_0$ sei gleich $\mathfrak{C}$,

$$\mathfrak{A}_{\alpha+1} := \begin{cases} \mathfrak{B}, & \text{wobei } \mathfrak{B} \in \mathcal{K} \text{ mit } \mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } (\mathfrak{B}, C) \models \varphi_\alpha \\ \mathfrak{A}_\alpha, & \text{falls es kein solches } \mathfrak{B} \text{ gibt,} \end{cases}$$

falls α eine Ordinalzahl mit $\alpha + 1 < \lambda$ ist, und

$$\mathfrak{A}_\mu := \bigcup_{\alpha<\mu} \mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{K},$$

falls μ eine Limesordinalzahl ist. (Dies ist wohldefiniert, da per transfiniter Induktion $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ bereits eine Kette bildet.) Da $\mathcal{K}$ induktiv ist, sind alle $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{K}$, $\alpha < \lambda$. Setze $\mathfrak{D} := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathfrak{A}_\alpha$. Es ist $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$. Sei nun $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{E} \in \mathcal{K}$ und $(\mathfrak{E}, C) \models \varphi_\alpha$ für ein $\alpha < \lambda$. Wegen $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{E} \in \mathcal{K}$ und $(\mathfrak{E}, C) \models \varphi_\alpha$ hat man nach Konstruktion $(\mathfrak{A}_{\alpha+1}, C) \models \varphi_\alpha$. Aus $\mathfrak{A}_{\alpha+1} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$ folgt nun $(\mathfrak{D}, C) \models \varphi_\alpha$.— Damit ist $(*)$ bewiesen.

Sei nun $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Wir zeigen, daß es ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K})$ gibt mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Hierzu definieren wir eine aufsteigende Kette $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Strukturen in $\mathcal{K}$ wie folgt: Es sei $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ entspreche $\mathfrak{A}_{k+1}$ einem $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ wie in $(*)$ für $\mathfrak{C} := \mathfrak{A}_k$. Setze $\mathfrak{B} := \bigcup\{\mathfrak{A}_k : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{K}$. Es bleibt zu zeigen: $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K})$. Sei hierzu φ ein $\exists_{n+1}$-Satz in $L(B)$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ und $(\mathfrak{C}, B) \models \varphi$. Zu zeigen: $(\mathfrak{B}, B) \models \varphi$. Es gibt nun ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\varphi \in L(A_k)$. Da $\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ und $(\mathfrak{C}, A_k) \models \varphi$, haben wir nach Definition von $\mathfrak{A}_{k+1}$: $(\mathfrak{A}_{k+1}, A_k) \models \varphi$. Nach dem Satz über elementare Ketten (Satz 4.4.3) gilt aber $\mathfrak{A}_{k+1} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$, also $(\mathfrak{B}, B) \models \varphi$.

Zur Induktivität: Sei $\mathcal{M} \neq \varnothing$ eine Kette von $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ und sei $\mathfrak{C} := \bigcup \mathcal{M}$. Da $\mathcal{K}$ induktiv ist, ist zumindest $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$. Sei nun φ ein $\exists_{n+1}$-Satz aus $L(C)$ und sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ mit $(\mathfrak{D}, C) \models \varphi$. Zu zeigen ist, daß $(\mathfrak{C}, C) \models \varphi$. Es gibt ein $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ mit $\varphi \in L(A)$. Da $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ $\exists_{n+1}$-abgeschlossen ist, haben wir $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, nach Satz 4.4.3 aber auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ und daher $(\mathfrak{C}, A) \models \varphi$. □

Existenzsatz für generische Strukturen. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ existiert $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ und ist induktiv. Ferner gilt*

$$\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K})) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0$$

und

$$\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_\infty(\mathcal{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K}).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, daß $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ existiert und induktiv ist, wobei auch die behauptete Gleichheit

$$\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K})) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

abfällt. Wir haben bereits festgestellt, daß $\mathcal{G}_0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Zum Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir zeigen $\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$, indem wir die Bedingungen (G1), (G2$_{n+1}$), (G3$_{n+1}$) für $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ nachweisen:

- (G1) Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Nach Satz 7.2.2 folgt daraus die Existenz eines $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.
- (G2$_{n+1}$) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, gilt $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. Sei φ ein $\forall_{n+1}$-Satz aus $L(A)$ mit $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, und angenommen, $(\mathfrak{B}, A) \models \neg\varphi$. Da $\neg\varphi$ bis auf logische Äquivalenz einem $\exists_{n+1}$-Satz aus $L(A)$ entspricht und $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ $\exists_{n+1}$-abgeschlossen in $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ ist, folgt $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$, Widerspruch.
- (G3$_{n+1}$) Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, so daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{B}$ gilt; zu zeigen ist: $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$. Dazu begründen wir zunächst,

warum $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ ist. Hierzu reicht es wg. (G3$_n$) aus, folgendes nachzuweisen:

($*$) Für alle $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ gilt: Aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ folgt $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$.

Sei also $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ gegeben. Da wir (G1) für $\mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ schon nachgewiesen haben, können wir $\mathfrak{D} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ wählen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$. Nach Voraussetzung haben wir $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{D}$, außerdem $\mathfrak{C} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$. Es folgt $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{D}$, insbesondere also auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$. Dies zeigt ($*$).

Sei nun $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und φ ein $\exists_{n+1}$-Satz aus $L(A)$ mit $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$; zu zeigen ist $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$. Da (G1) schon bewiesen ist, finden wir ein $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Unter Beachtung der Voraussetzung und ($*$) ergibt sich $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$. Angenommen, $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$. Da $\neg\varphi$ bis auf logische Äquivalenz ein $\forall_{n+1}$-Satz aus $L(A)$ ist, haben wir $(\mathfrak{C}, A) \models \neg\varphi$. Andererseits muß mit $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ auch $\mathfrak{B} \preceq_{\exists_{n+1}} \mathfrak{C}$ gelten, also $(\mathfrak{C}, A) \models \varphi$, was widersprüchlich ist.

Die Gleichung $\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ ist also bewiesen und damit die Existenz von $\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K})$ gesichert, so daß nur noch die Induktivität verbleibt: Sei $\mathcal{M} \neq \varnothing$ eine Kette in $\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K})) \subseteq \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ und $\mathfrak{C} := \bigcup \mathcal{M}$. Da $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ nach Induktionsvoraussetzung induktiv ist, ist zumindest $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Sei nun $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$ und φ ein $\exists_{n+1}$-Satz aus $L(C)$ mit $(\mathfrak{D}, C) \models \varphi$. Zu zeigen ist dann $(\mathfrak{C}, C) \models \varphi$. Es gibt ein $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ mit $\varphi \in L(A)$. Da $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{n+1}(\mathcal{G}_n(\mathcal{K}))$ und $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, folgt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$. Ferner nach Satz 4.4.3 $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{C}$, speziell $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$ und damit $\mathfrak{A} \preceq_{\exists_{n+1}} \mathfrak{C}$. Also $(\mathfrak{C}, A) \models \varphi$.

Der Induktionsschritt ist damit vollzogen. Wir weisen als nächstes die Existenz von $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ zusammen mit der behaupteten Gleichheit $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_\infty(\mathcal{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ nach, indem wir (G1), (G2$_\infty$), (G3$_\infty$) für $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ nachweisen:

(G1) Zu $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ bauen wir rekursiv eine aufsteigende Folge $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_n \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen dann $\mathfrak{C} := \bigcup\{\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ und behaupten $\mathfrak{C} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\geq m} \mathfrak{A}_n$ und für jedes $n \geq m$ stets $\mathfrak{A}_n \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$; da $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ induktiv ist, ist $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, und weil dies für beliebiges m richtig war, folgt $\mathfrak{C} \in \bigcap \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, und wir haben in der Tat (G1).

(G2$_\infty$) Jede Formel ist bis auf logische Äquivalenz eine $\forall_n$-Formel für ein gewisses $n \in \mathbb{N}_0$. Sind also $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so gilt $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und damit $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(G3$_\infty$) Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, so daß für alle $\mathfrak{B} \in \bigcap \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ gilt. Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Sei dazu $n \in \mathbb{N}_0$. Es genügt, für alle $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ zu folgern, daß $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$. Da wir (G1) schon nachgewiesen haben, gibt es ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$. Hieraus folgert man $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_{n+1}} \mathfrak{C}$, also auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$.

Schließlich ist $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ als Schnitt von induktiven Klassen selbst wieder induktiv. □

Übung. Sei $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen, die unter Isomorphismen abgeschlossen sei, und sei $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Man zeige: $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ ist abgeschlossen unter Isomorphismen. (Hinweis: Man verwende alternierende Ketten.)

Eine im Fall einer elementaren induktiven Klasse $\mathcal{K}$ und $n \geq 1$ zu (G3$_n$) äquivalente Bedingung ist die zunächst stärker aussehende

(G3$'_n$) Sind $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$, so folgt $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$.

Satz 7.2.3. *Sei* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *induktiv und elementar mit einer* L*-Satzmenge* Σ*, und sei* $\mathcal{K}'$ *eine Teilklasse von* $\mathcal{K}$*, die* (G1), (G2$_n$) *für ein* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *erfüllt. Dann gilt* $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ *genau dann, wenn* $\mathcal{K}'$ *Eigenschaft* (G3$'_n$) *erfüllt.*

Beweis. Erfüllt $\mathcal{K}'$ (G1), (G2$_n$), (G3$'_n$), so auch (G3$_n$), so daß $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Ist $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, so sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$, und sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. O.B.d.A. sei $B \cap C = A$. Man sieht, daß $\mathfrak{C}$ jeweils zu einem Modell jeder endlichen Teilmenge von $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{C}, C) \cup \mathrm{D}(\mathfrak{B}, B)$ bzgl. $L(B \cup C)$ expandiert werden kann, weil $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_1} \mathfrak{B}$, so daß also ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ existiert; o.B.d.A. sei bereits $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. Mit (G2$_n$) und der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ unter isomorphen Bildern folgt $\mathfrak{B} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{D}$, also $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{C}$. Mit (G3$_n$) folgt $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$. □

Wie im eben durchgeführten Beweis von Satz 7.2.3 zeigt man:

Proposition 7.2.4. *Sei* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *induktiv und elementar mit einer* L*-Satzmenge* Σ*. Dann hat* $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ *die A.E.* (*für* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). □

7.3. Modelltheoretisches Erzwingen

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man die generischen Strukturen mit Hilfe der Methode des *unendlichen Erzwingens* (*infinite forcing*) charakterisieren kann, und wir lernen ein zum Begriff des *endlichen Erzwingens* (*finite forcing*) gehöriges Analogon zur Klasse $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ der generischen Strukturen einer Strukturklasse $\mathcal{K}$ kennen. Der Begriff des (endlichen) Erzwingens wurde in den sechziger Jahren von Paul J. Cohen als Werkzeug für Unabhängigkeitsbeweise in der Mengenlehre erfunden und erfolgreich beim Nachweis der Unabhängigkeit der verallgemeinerten Kontinuumshypothese eingesetzt. Robinson [**129**], [**130**] adaptierte und modifizierte diese Technik für modelltheoretische Zwecke und gelangte so zum Begriff der generischen Struktur. Der das *forcing* vermeidende Zugang zu den generischen Strukturen, den wir bislang dargelegt haben, geht auf Saracino [**141**] zurück.— Zunächst zum unendlichen Erzwingen:

Definition 7.3.1. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und φ ein $L(A)$-Satz. Wir definieren die Relation $\mathfrak{A}$ *erzwingt* φ (*bzgl.* $\mathcal{K}$), i.Z. $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ oder einfach $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, durch Induktion über den Aufbau von φ wie folgt:

(i) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ gdw. $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, falls φ atomar;
(ii) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \varphi_1$ und $\mathfrak{A} \Vdash \varphi_2$, falls $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;
(iii) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \varphi_1$ oder $\mathfrak{A} \Vdash \varphi_2$, falls $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$;
(iv) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \psi[\bar{a}/x]$ für ein $a \in A$, falls $\varphi = \exists x(\psi(x))$;
(v) $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ gdw. für keine Erweiterung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ gilt: $\mathfrak{B} \Vdash \psi$, falls $\varphi = \neg\psi$.

(In diesem Kontext betrachten wir Universalquantoren $\forall x(\dots)$ als Abkürzung für $\neg\exists x(\neg \dots)$.)

Man beachte, daß diese Definition der Erzwingungsrelation mit der üblichen Erfüllbarkeitsrelation $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ bis auf den Fall der Negation übereinstimmt. In diesem Fall gehen bei der Definition von $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ *alle* Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ ein, die Erzwingungsrelation kann also als eine modifizierte Erfüllbarkeitsrelation betrachtet werden, die nicht nur die Eigenschaften von $\mathfrak{A}$, sondern darüber hinaus auch die aller $\mathcal{K}$-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in Betracht zieht. Insbesondere stimmen

$\Vdash$ und $\models$ für alle Sätze, die keine Negationen und Universalquantoren enthalten, überein.

Das folgende Lemma enthält einige elementare Eigenschaften der Erzwingungsrelation:

LEMMA 7.3.2. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\varphi \in L(A)$ ein Satz.*

(i) *Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, so auch $\mathfrak{B} \Vdash \varphi$.*
(ii) *Niemals gilt zugleich $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$.*
(iii) *Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, so $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$.*
(iv) *Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\neg\varphi$, so $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$.*

BEWEIS. Zu (i): Induktion über den Formelaufbau.

Zu (ii): Falls $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$, so nie $\mathfrak{B} \Vdash \varphi$ für $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, insbesondere für $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}$.

Zu (iii): Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, so erzwingt jede $\mathcal{K}$-Erweiterung φ nach (i), als erzwingt keine $\mathcal{K}$-Erweiterung $\neg\varphi$ nach (ii), d.h. $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$.

Zu (iv): Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\neg\varphi$, so erzwingt keine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ $\neg\neg\varphi$. Also erzwingt nach (iii) keine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ φ, d.h. $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$. $\square$

Wir betrachten nun Strukturen, in denen Erzwingbarkeit und Erfüllbarkeit für Sätze, die aus einer vollen und symmetrischen Formelmenge entstehen, übereinstimmen. (Dabei nennen wir eine L-Formelmenge Φ *voll,* falls mit jeder Formel φ auch alle Teilformeln von φ in Φ enthalten sind, und *symmetrisch,* falls mit φ auch $\neg\varphi$ aus Φ ist.)

SATZ 7.3.3. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, Φ eine volle und symmetrische L-Formelmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$.*
(ii) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$.*
(iii) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt entweder $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$.*

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, so $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ nach (i), also $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$ nach Lemma 7.3.2, (iii). Gilt nicht $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, so $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$, also nach (i) $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$, mithin nach Lemma 7.3.2, (ii) nicht $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wegen Lemma 7.3.2, (ii) gilt niemals zugleich $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von φ, daß $\mathfrak{A} \nVdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$. Für atomares φ folgt dies aus (ii) und Lemma 7.3.2 (iv); die einzigen nichttrivialen Fälle im Induktionsschritt sind die zu $\varphi = \neg\psi$ und $\varphi = \exists x(\psi(x))$: Gilt $\mathfrak{A} \nVdash \neg\neg\psi$, so $\mathfrak{A} \nVdash \psi$ mit Lemma 7.3.2, (iii), also $\mathfrak{A} \Vdash \neg\psi$ nach Induktionsvoraussetzung, d.h. $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$. Gilt $\mathfrak{A} \nVdash \exists x(\psi(x))$, so also $\mathfrak{A} \nVdash \psi[\overline{a}/x]$ für alle $a \in A$, also mit Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A} \Vdash \neg\psi[\overline{a}/x]$ für alle $a \in A$. Nach Lemma 7.3.2, (iii) also $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\neg\psi[\overline{a}/x]$, nach (ii) also $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\psi[\overline{a}/x]$ für jedes $a \in A$; damit also $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$. Wieder mit (ii): $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\neg\varphi$; mit Lemma 7.3.2, (iv) schließlich $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen (i) durch Induktion über den Formelaufbau von φ. Der Fall eines atomaren φ ist trivial, ebenso alle Fälle im Induktionsschritt bis auf $\varphi = \neg\psi$. Hier gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\psi$ gdw. nicht $(\mathfrak{A}, A) \models \psi$, also nach Induktionsannahme gdw. $\mathfrak{A}$ nicht ψ erzwingt; dies wiederum ist nach (iii) äquivalent zu $\mathfrak{A} \Vdash \neg\psi$. $\square$

Wir wollen für den Moment die Klasse aller $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, die den äquivalenten Aussagen (i)—(iii) aus Satz 7.3.3 genügen, mit $\mathcal{K}_\Phi$ bezeichnen. Wir sagen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ *entscheide* $\varphi \in L(A)$, falls $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$. $\mathfrak{A}$ entscheidet also alle $\varphi \in \Phi(A)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_\Phi$, nach Satz 7.3.3. Damit gilt: (Vgl. die Ähnlichkeit des Beweises zu dem von Satz 7.2.2!)

Lemma 7.3.4. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen, Φ eine volle und symmetrische Formelmenge. Dann ist $\mathcal{K}_\Phi$ konfinal in $\mathcal{K}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \Phi(A)$. Nach Definition der Erzwingungsrelation hat $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung in $\mathcal{K}$, die φ entscheidet. Definiere nun $\mathfrak{A}'$ wie folgt: Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ eine Aufzählung von $\Phi(A)$, λ eine Limesordinalzahl, etwa $\lambda := \mathrm{card}(\Phi(A))$; definiere eine aufsteigende Kette $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ von L-Strukturen induktiv durch $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_\mu := \bigcup_{\alpha<\mu} \mathfrak{A}_\alpha$ für eine Limeszahl $\mu < \lambda$, und $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$ als eine Erweiterung von $\mathfrak{A}_\alpha$ in $\mathcal{K}$, die φ_α entscheidet, falls $\alpha+1 < \lambda$. Sei dann $\mathfrak{A}' := \bigcup\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \lambda\}$; sicher ist $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$. $\mathfrak{A}'$ entscheidet nun jedes $\varphi \in L(A)$, denn ist $\varphi = \varphi_\alpha$ mit $\alpha < \lambda$, so gilt $\mathfrak{A}_{\alpha+1} \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A}_{\alpha+1} \Vdash \neg\varphi$, und mit Lemma 7.3.2, (i) $\mathfrak{A}' \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A}' \Vdash \neg\varphi$. Wir definieren nun eine aufsteigende Kette $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Strukturen in $\mathcal{K}$ durch Iteration der Abbildung $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}'$, d.h. $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{n+1} := (\mathfrak{A}_n)'$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und setzen $\mathfrak{B} := \bigcup\{\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. $\mathfrak{B}$ ist aus $\mathcal{K}$, und entscheidet alle $\varphi \in \Phi(B)$. Denn es ist $\varphi \in \Phi(A_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathfrak{A}_{n+1}$ entscheidet φ, also auch $\mathfrak{B}$ selbst. Somit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\Phi$. $\square$

Nun zur gesuchten Charakterisierung:

Satz 7.3.5. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen. Dann ist $\mathcal{G}_\infty(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$ und $\mathcal{G}_0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_{\mathsf{Qf}}$, d.h. für $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}(\mathcal{K})$ (bzw. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$) d.u.n.d., wenn für alle $\varphi \in \mathsf{Fo}_L(A)$ (bzw. $\varphi \in \mathsf{Qf}_L(A)$) gilt:*

$$(\mathfrak{A}, A) \models \varphi \qquad \textit{gdw.} \qquad \mathfrak{A} \Vdash \varphi.$$

Beweis. Wir überprüfen (G1), (G2$_\infty$), (G3$_\infty$) für $\mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$. (G1) gilt nach Lemma 7.3.4. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\varphi \in L(A)$, und gelte $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$. Dann folgt $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, also $\mathfrak{B} \Vdash \varphi$ nach Lemma 7.3.2, (i), und somit $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$; also $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Schließlich sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ eine elementare Substruktur aller $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, und sei $\varphi \in L(A)$. Gilt $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$, so $\mathfrak{B} \Vdash \neg\neg\varphi$ für alle $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$, nach Lemma 7.3.2, (i) also $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$ und somit auch $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$. (Ein solches $\mathfrak{B}$ gibt es, denn (G1) wurde schon bewiesen.) Gilt umgekehrt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$, so auch $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$, also $\mathfrak{B} \Vdash \varphi$, für alle $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}_{\mathsf{Fo}}$. Damit erzwingt nach Lemma 7.3.2, (i), (ii) und Lemma 7.3.4 keine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ $\neg\varphi$, d.h. $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$. Mit Satz 7.3.3 folgt $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_\Phi$.— Den Fall $\mathcal{G}_0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_{\mathsf{Qf}}$ erledigt man analog. $\square$

Korollar 7.3.6. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und φ ein existentieller Satz in $L(A)$. Dann gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$.*

Beweis. Sei $\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_n(\psi)$ mit quantorenfreiem ψ, $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$, d.h. φ quantorenfrei, ist die Aussage klar wegen Satz 7.3.5 und $\mathcal{G}_0(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, der Schritt $n \to n+1$ ebenfalls nach Def. 7.3.1, (iv). $\square$

Wir kommen zum endlichen Erzwingen.

Definition 7.3.7. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Eine *Bedingung* (bezüglich $\mathcal{K}$) sei eine endliche Teilmenge des Diagramms $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ einer L-Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Ist C eine Bedingung, $\varphi \in L(A)$ ein Satz, so definieren wir die Relation *C erzwingt φ (bzgl. $\mathcal{K}$),* i.Z. $C \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ oder kurz $C \vdash \varphi$, durch Induktion über den Aufbau von φ:

(i) $C \vdash \varphi$ gdw. $\varphi \in C$, falls φ atomar;
(ii) $C \vdash \varphi$ gdw. $C \vdash \varphi_1$ und $C \vdash \varphi_2$, falls $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;
(iii) $C \vdash \varphi$ gdw. $C \vdash \varphi_1$ oder $C \vdash \varphi_2$, falls $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$;

(iv) $C \vdash \varphi$ gdw. $C \vdash \psi[\overline{a}/x]$, wobei a eine in C vorkommende Konstante sei, falls $\varphi = \exists x(\psi(x))$;
(v) $C \vdash \varphi$ gdw. keine Bedingung $C' \supseteq C$ erzwingt ψ, falls $\varphi = \neg\psi$.

(Wieder stehe $\forall x(\dots)$ für $\neg\exists x(\neg\dots)$.)

Bemerkung. Der Deutlichkeit halber sei angemerkt, daß es sich bei der Relation „C erzwingt φ", wie wir sie eben definiert haben, um eine Teilklasse von

$$\big\{(C,\varphi) : \text{es gibt } \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \text{ mit } C \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \text{ endlich}, \varphi \in \mathsf{Sa}_{L(A)}\big\}$$

handelt.

Beispiel. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller $\{f\}$-Strukturen, wobei f ein einstelliges Operationssymbol sei. Dann gilt $\varnothing \vdash \varphi$, wobei

$$\varphi := \forall y \exists x_1 \exists x_2 (f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \wedge x_1 \neq x_2).$$

Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Ein Beispiel für eine Klasse $\mathcal{K}$, einen Satz φ und eine Struktur $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$, aber $C \nvdash \varphi$ für alle Bedingungen C bzgl. $\mathcal{K}$ werden wir in §7.5 (Satz 7.5.8) sehen.

Analog zu Lemma 7.3.2 zeigt man:

Lemma 7.3.8. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\varphi \in L(A)$ ein Satz, $C \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ eine Bedingung.*

(i) *Gilt $C \vdash \varphi$ und ist $C' \supseteq C$ eine Bedingung in $\mathcal{K}$, so auch $C' \vdash \varphi$.*
(ii) *Niemals gilt zugleich $C \vdash \varphi$ und $C \vdash \neg\varphi$.*
(iii) *Gilt $C \vdash \varphi$, so $C \vdash \neg\neg\varphi$.*
(iv) *Gilt $C \vdash \neg\neg\neg\varphi$, so $C \vdash \neg\varphi$.* □

Wir sagen, eine Bedingung C *entscheide* φ, falls $C \vdash \varphi$ oder $C \vdash \neg\varphi$. Jede Bedingung C kann zu einer Bedingung erweitert werden, die φ entscheidet. (Denn ist C eine Bedingung mit $C \nvdash \neg\varphi$, so gibt es nach Def. 7.3.7, (v) ein $C' \supseteq C$ mit $C' \vdash \varphi$.)

Definition 7.3.9. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, φ ein $L(A)$-Satz. Wir sagen, $\mathfrak{A}$ *erzwingt* φ *(bzgl. $\mathcal{K}$)*, i.Z. $\mathfrak{A} \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ oder kurz nur $\mathfrak{A} \vdash \varphi$, falls eine Bedingung $C \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ existiert mit $C \vdash_{\mathcal{K}} \varphi$. $\mathfrak{A}$ heißt *endlich generisch in $\mathcal{K}$,* falls für alle $L(A)$-Sätze φ gilt: $\mathfrak{A} \vdash \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, A) \models \varphi$. Die Klasse der endlich generischen Strukturen in $\mathcal{K}$ werde mit $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ bezeichnet. (Man nennt $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ manchmal auch die Klasse der *unendlich generischen Strukturen in $\mathcal{K}$.*)

Man sieht anhand von Satz 7.3.5, daß $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ das Gegenstück zu $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ ist, wenn man anstelle der unendlichen von der endlichen Erzwingungsrelation ausgeht. Unmittelbar aus Lemma 7.3.8 folgt:

Lemma 7.3.10. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\varphi \in L(A)$ ein Satz.*

(i) *Gilt $\mathfrak{A} \vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, so auch $\mathfrak{B} \vdash \varphi$.*
(ii) *Niemals gilt zugleich $\mathfrak{A} \vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$.*
(iii) *Gilt $\mathfrak{A} \vdash \varphi$, so $\mathfrak{A} \vdash \neg\neg\varphi$.*
(iv) *Gilt $\mathfrak{A} \vdash \neg\neg\neg\varphi$, so $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$.* □

Daraus erhält man wie im Fall des unendlichen Erzwingens:

Satz 7.3.11. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, Φ eine volle und symmetrische L-Formelmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$.*
(ii) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \Vdash \neg\neg\varphi$.*
(iii) *Für alle $\varphi \in \Phi(A)$ gilt entweder $\mathfrak{A} \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A} \Vdash \neg\varphi$.* □

Wir wissen, daß für induktive Klassen $\mathcal{K} \neq \varnothing$ immer unendlich generische Strukturen existieren, denn $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ ist konfinal in $\mathcal{K}$. Bei endlich generischen Strukturen ist dies nicht immer zwingend der Fall: Ist L überabzählbar, so kann $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ auch leer sein. (Ein Beispiel dafür findet sich in [**3**], S. 106, Ex. 5.) Ist hingegen L abzählbar und $\mathcal{K}$ elementar, so können wir zeigen:

Satz 7.3.12. *Sei L eine abzählbare Sprache, $\mathcal{K}$ eine nichtleere elementare Klasse von L-Strukturen, C eine Bedingung bzgl. $\mathcal{K}$. Dann existiert eine in* $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ *endlich generische Struktur $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ mit $(\mathfrak{A}, A) \models C$. Insbesondere ist $\mathcal{G}^f(\mathrm{S}(\mathcal{K})) \neq \varnothing$.*

Wir benötigen zu seinem Beweis einige Hilfsaussagen. Dabei schreiben wir $\Phi \Vdash \varphi$ für eine Menge Φ von Basissätzen und einen Satz φ, falls eine Bedingung $C \subseteq \Phi$ mit $C \Vdash \varphi$ existiert.

Lemma 7.3.13. *Sei L eine Sprache der Logik erster Stufe, $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, A eine nichtleere Menge (die Menge der* Zeugen) *und Φ eine Teilmenge von $\mathsf{Ba}_{L(A)} \cap \mathsf{Sa}_{L(A)}$. Φ habe die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Jede endliche Teilmenge von Φ ist konsistent.*
(ii) *Für jeden $L(A)$-Satz φ gilt entweder $\Phi \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ oder $\Phi \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\varphi$.*
(iii) *Sind $a, b \in A$ mit $a \neq b$, so ist $(a \neq b) \in \Phi$.*

(*Man sagt, Φ sei eine* generische Menge.) *Dann existiert genau eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum A und $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) = \Phi$, genannt* das generische Modell $\mathfrak{M}(\Phi, A)$ zu Φ und A.

Beweis. Man definiere $\mathfrak{A}$ wie folgt: Ist c ein Konstantensymbol von L, so setze $c^{\mathfrak{A}} := a$ mit $a \in A$, falls $(c = a) \in \Phi$. Ein solches a existiert, da für $\varphi := \exists x(c = x)$ wegen (ii) gilt: Entweder $\Phi \Vdash \varphi$ oder $\Phi \Vdash \neg\varphi$. Gälte letzteres, also $C \Vdash \neg\varphi$ für eine Bedingung $C \subseteq \Phi$, und ist nach (i) $\mathfrak{B}$ mit $(\mathfrak{B}, B) \models C$, so folgt $C \cup \{c = c^{\mathfrak{B}}\} \Vdash \varphi$, im Widerspruch zu $C \Vdash \neg\varphi$; also $\Phi \Vdash \varphi$ und damit $(c = a) \in \Phi$ für ein $a \in A$ nach Definition von $\Vdash$. a ist zudem eindeutig bestimmt, denn sind $a, a' \in A$ mit $(c = a), (c = a') \in \Phi$, so kann $(a \neq a')$ nicht in Φ enthalten sein, mithin also $a = a'$ nach (iii). Ähnlich definiert man Funktionen und Relationen von $\mathfrak{A}$. Wir wissen dann, daß $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \subseteq \Phi$. Ist umgekehrt $\varphi \in \Phi$, so kann nicht $\varphi \notin \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ sein, weil sonst (bis auf logische Äquivalenz) $\neg\varphi \in \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$, also $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$ wäre (bis auf logische Äquivalenz), im Widerspruch zu (i). Also $\mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) = \Phi$. □

Lemma 7.3.14. *Ist L eine Sprache der Logik erster Stufe, $\mathcal{K}$ eine induktive elementare Klasse, $A \neq \varnothing$ eine Menge von Zeugen und Φ eine generische Menge, so daß jede endliche Teilmenge C von Φ ein Modell $(\mathfrak{B}, B)$ mit $\mathfrak{B}$ aus $\mathcal{K}$ besitzt. Dann ist $\mathfrak{M}(\Phi, A) \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} := \mathfrak{M}(\Phi, A)$. Wir zeigen zuerst $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Nach dem Satz von Łoś-Suszko-Chang ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer $\forall_2$-Satzmenge Σ. Betrachte einen L-Satz $\varphi = \forall\mathbf{x}\exists\mathbf{y}(\psi) \in \Sigma$ mit $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ quantorenfrei, o.B.d.A. $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j \varrho_{ij}$ mit $\varrho_{ij} \in \mathsf{Ba}_L$, und angenommen, in $\mathfrak{A}$ gilt $\neg\varphi$, d.h. $\mathfrak{A} \models \exists\mathbf{x}(\neg\exists\mathbf{y}(\psi))$. Nach Eigenschaft (ii) und Satz 7.3.11 heißt dies, daß $C \Vdash \neg\exists\mathbf{y}(\psi(\mathbf{y}))[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{y}]$ für ein Tupel $\mathbf{a}$ aus A und eine

Bedingung $C \subseteq \Phi$. Da aber $C \cup \Sigma$ konsistent ist, gibt es ein Modell $\mathfrak{B}$ von Σ mit $(\mathfrak{B}, B) \models C$, $\mathfrak{B} \models \varphi$, also $(\mathfrak{B}, B) \models \psi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}}/\mathbf{y}]$ mit $\mathbf{b}$ aus B, wobei o.B.d.A. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ aus A gewählt seien. Wir haben damit $C' \vdash \exists \mathbf{y}(\psi(\mathbf{y}))[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ für eine Bedingung $C' \supseteq C$, wobei $C' := C \cup C''$ und C'' die Menge aller Basisteilformeln $\varrho_{ij}[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}}/\mathbf{y}]$ von $\psi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}}/\mathbf{y}]$ mit $(\mathfrak{B}, B) \models \varrho_{ij}$ sei. Jetzt haben wir aber auch einen Widerspruch.

Sei nun $\mathfrak{B}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$ und $\exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$ ein existentieller $L(A)$-Satz mit quantorenfreiem Kern $\varphi(\mathbf{x})$, der in $(\mathfrak{B}, B)$ gültig ist; es sei o.B.d.A. φ in der Form $\varphi = \bigwedge_i \bigvee_j \varrho_{ij}$ mit $\varrho_{ij} \in \mathsf{Ba}_{L(A)}$ vorgelegt, und $\mathbf{b}$ ein Tupel aus B, welches φ erfüllt. Sei $C \subseteq \Phi = \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A) \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{B}, B)$ eine Bedingung; es existiert eine Bedingung $C' \supseteq C$, $C' \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{B}, B)$ mit $C' \vdash \exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$, nämlich $C' := C \cup C''$, wobei C'' die Menge aller Basisteilformen $\varrho_{ij}[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$ von φ ist, für die $(\mathfrak{B}, B) \models \varrho_{ij}[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}]$. Also $\Phi \nvdash \neg\exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$ und damit $(\mathfrak{A}, A) \models \exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$. Wir haben $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$. □

Beweis (Satz 7.3.12). Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ mit einer L-Satzmenge Σ. Sei A eine abzählbar unendliche Menge von Konstantensymbolen, die die in L und C vorkommenden Konstanten enthält, und $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung aller $L(A)$-Sätze. Wir definieren eine aufsteigende Folge $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ von L-Bedingungen C_n bzgl. $\mathcal{K}$ wie folgt: Es sei $C_0 := C$, und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei C_{n+1} eine Erweiterung von C_n, die φ_{n+1} entscheidet. Sei $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$. Wir behaupten: D ist das Diagramm einer in $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ endlich generischen Struktur $\mathfrak{A}$. Dazu zeigen wir zunächst, daß eine Struktur $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ mit Universum A existiert, so daß $D = \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$. Durch D wird sicher eine L-Struktur mit Universum A und $D = \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ definiert, da $D =: \Phi$ die in Lemma 7.3.13, (i)–(iii) geforderten Merkmale besitzt, D also generisch ist. Es gilt aber auch $\mathfrak{M}(\Phi, A) =: \mathfrak{A} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$, da $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ eine induktive elementare Klasse ist und für jede endliche Teilmenge D' von D die Menge $D' \cup \Sigma$ konsistent ist nach Konstruktion von D (Lemma 7.3.14).— Es gilt nun für alle Sätze $\varphi \in L(A)$: Entweder $\mathfrak{A} \vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$. Also mit Satz 7.3.11 $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \vdash \varphi$, für alle $L(A)$-Sätze φ. □

Korollar 7.3.15. *Sei L eine abzählbare Sprache, $\mathcal{K}$ eine nichtleere universell axiomatisierte Klasse von L-Strukturen, C eine Bedingung bzgl. $\mathcal{K}$. Dann existiert eine in $\mathcal{K}$ endlich generische Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ mit $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi$ für alle $\varphi \in C$.* □

Einige Eigenschaften von $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ übertragen sich auf $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$:

Proposition 7.3.16. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen, $\mathfrak{A}$ endlich generisch in $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ existentiell abgeschlossen in $\mathcal{K}$. (D.h. $\mathcal{G}^f(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$.)*

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$, $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ eine Erweiterung in $\mathcal{K}$, $\varphi = \exists \mathbf{x}(\psi(\mathbf{x}))$ ein existentieller $L(A)$-Satz, $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j \varrho_{ij}$ mit Basisformeln ϱ_{ij}, und gelte $(\mathfrak{B}, A) \models \varphi$. Gilt $(\mathfrak{A}, A) \models \neg\varphi$, so $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$, es existiert also eine Bedingung C in $\mathfrak{A}$ mit $C \vdash \neg\varphi$. Wähle $\mathbf{b}$ aus B mit $(\mathfrak{B}, A) \models \psi(\mathbf{b})$; es existieren j_i mit $(\mathfrak{B}, A) \models \varrho_{ij_i}(\mathbf{b})$ für alle i; sei C' die Vereinigung von C mit der Menge aller $\varrho_{ij_i}[\overline{\mathbf{b}}/\mathbf{x}] \in \mathrm{D}(\mathfrak{B}, B)$. C' ist eine Bedingung, die φ erzwingt, da $C' \vdash \varrho_{ij_i}(\mathbf{b})$. Dies widerspricht Lemma 7.3.8, (i), da $C \subseteq C'$ und $C \vdash \neg\varphi$. □

Satz 7.3.17. *Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ erfüllt* (G2$_\infty$) *und* (G3$'_n$) *für alle $n \geq 1$. Ist $\mathcal{K}$ induktiv, so auch $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$.*

Beweis. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Jeder $L(A)$-Satz φ, der in $\mathfrak{A}$ gilt, wird von $\mathfrak{A}$ erzwungen, also auch von $\mathfrak{B}$, und gilt somit in $\mathfrak{B}$. Also $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Dies zeigt (G2$_\infty$).— Zu (G3$'_n$): Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$, $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$, $n \geq 1$.

Wir haben $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ zu zeigen. Sei dazu $\varphi(\mathbf{x})$ ein L-Satz, $\mathbf{a}$ aus A; wir zeigen, daß $\mathfrak{A} \vdash \varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ oder $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$. Da $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$, existiert eine Bedingung $C = \{\psi_1[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}}/\mathbf{y}], \dots, \psi_n[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}}/\mathbf{y}]\}$ mit L-Formeln $\psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\mathbf{b}$ in B, die $\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ oder $\neg\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ erzwingt. Da $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_1} \mathfrak{B}$, existieren Elemente $\mathbf{b}'$ von A, so daß $C' = \{\psi_1[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}'}/\mathbf{y}], \dots, \psi_n[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{b}'}/\mathbf{y}]\}$ eine Bedingung in $\mathfrak{A}$ ist; C' erzwingt dann $\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ oder $\neg\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$, wie gewünscht.— Zur Induktivität: Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Kette von Strukturen in $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$, $\mathfrak{M} := \bigcup \mathcal{M}$. Ist $\varphi \in L(M)$, so existiert ein $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$ mit $\varphi \in L(A)$, also $\mathfrak{A} \vdash \varphi$ oder $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$, und damit auch $\mathfrak{M} \vdash \varphi$ oder $\mathfrak{M} \vdash \neg\varphi$, da $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$. □

Mit (G1) sieht es nicht so gut aus:

Korollar 7.3.18. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive elementare Klasse von L-Strukturen. Genau dann erfüllt $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ (G1), falls $\mathcal{G}^f(\mathcal{K}) = \mathcal{G}(\mathcal{K})$, und dann ist $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}^f(\mathcal{K}) = \mathcal{G}(\mathcal{K})$.*

Beweis. Ist $\mathcal{G}^f(\mathcal{K}) = \mathcal{G}(\mathcal{K})$, so gilt für $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ sicher (G1). Umgekehrt verwende Satz 7.3.17 und Satz 7.2.3. Ist $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ konfinal in $\mathcal{K}$, so erfüllt $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ die Eigenschaften (G1), ($G2_1$) und ($G3'_1$), also ist $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{G}^f(\mathcal{K})$. □

In §7.7 wird uns folgender Satz [**100**] zugute kommen.

Satz 7.3.19. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine nichtleere induktive elementare Klasse von L-Strukturen, wobei Σ eine Satzmenge über der abzählbaren Sprache L sei. Sei ferner $\{\varphi_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von existentiellen L-Formeln $\varphi_{mn}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, so daß für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, Bedingungen $C \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$ und $\mathbf{a} \in A^r$ sowie $m \in \mathbb{N}$ gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\Sigma \cup C \cup \{\varphi_{mn}[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]\}$$

konsistent ist. Dann existiert ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ mit

$$\mathfrak{B} \models \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{mn}(\mathbf{b})$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b} \in B^r$.

Beweis. O.B.d.A. seien die φ_{mn} in der Form $\exists\mathbf{y}(\psi_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ mit quantorenfreien ψ_{mn} in konjunktiver Normalform angenommen. Sei A eine abzählbar unendliche Menge von Zeugen. Offenbar gilt:

(∗) Ist $\varphi(\mathbf{x}) = \exists\mathbf{y}(\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ eine existentielle L-Formel mit $y = (y_1, \dots, y_s)$, $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j \varrho_{ij} \in \mathsf{Qf}$, $\varrho_{ij} \in \mathsf{Ba}$, $\mathbf{d} \in A^r$ und $C \subseteq L(A)$ eine Bedingung, so daß $\Sigma \cup C \cup \{\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]\}$ konsistent ist, so existiert eine Bedingung $C' \subseteq L(A)$, $C' \supseteq C$ dergestalt, daß $C' \vdash \varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]$ und $\Sigma \cup C' \cup \{\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]\}$ konsistent ist.

(Läßt sich nämlich $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ zu einem Modell von $C \cup \{\varphi(\mathbf{a})\}$ expandieren, so wähle $\mathbf{a}' \in B^s$, o.B.d.A. nach isomorpher Umbenennung $\mathbf{a}' \in A^s$, mit $(\mathfrak{B}, B) \models \psi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}'}/\mathbf{y}]$, und definiere C' als die Vereinigung von C mit allen Basisteilformeln $\varrho_{ij}[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}'}/\mathbf{y}]$ von $\psi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}'}/\mathbf{y}]$, für die $(\mathfrak{B}, B) \models \varrho[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}'}/\mathbf{y}]$.)

Wähle nun eine Abzählung $\{(m_k, \mathbf{a}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ aller Paare aus $\mathbb{N} \times A^r$ und eine Abzählung $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ aller $L(A)$-Sätze, und definiere induktiv eine aufsteigende Folge von Bedingungen $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ in $\mathcal{K}$ wie folgt: $C_1 := \varnothing$, und ist C_{2k} schon definiert, so wähle $C_{2k+1} \supseteq C_{2k}$ gemäß (∗) so, daß $C_{2k+1} \vdash \varphi_{m_k n_k}[\overline{\mathbf{a}}_k/\mathbf{x}]$, wobei $n_k \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung derart gewählt wurde, daß $\Sigma \cup C_{2k} \cup \{\varphi_{m_k n_k}[\overline{\mathbf{a}}_k/\mathbf{x}]\}$ konsistent ist; ist C_{2k+1} schon definiert, so wähle C_{2k+2} als eine Erweiterung von

C_{2k+1}, die φ_k entscheidet. Setze schließlich $\Phi := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Φ ist generisch, und $\mathfrak{B} := \mathfrak{M}(\Phi, A)$ ist nach Lemma 7.3.14 aus $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ und hat nach Konstruktion die gewünschte Eigenschaft. $\square$

KOROLLAR 7.3.20. *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine nichtleere, induktive und durch die L-Satzmenge Σ axiomatisierte Klasse, wobei L abzählbar sei. Sei Φ eine abzählbare Menge von Basisformeln in den gemeinsamen freien Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, so daß für alle Bedingungen $C \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$, $\mathbf{a} \in A^n$ mit $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ein $\varphi \in \Phi$ existiert, so daß $C \cup \{\varphi[\overline{\mathbf{a}}/\mathbf{x}]\}$ ein Modell mit L-Redukt in $\mathcal{K}$ besitzt. Dann existiert ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ derart, daß $\mathfrak{B} \models \bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi(\mathbf{b})$ für alle $\mathbf{b} \in B^n$.* $\square$

BEISPIEL. Sei Σ eine L-Satzmenge in einer abzählbaren Sprache L der Logik erster Stufe, so daß $\mathrm{Mod}(\Sigma) \neq \varnothing$ induktiv ist.

(i) Enthält L die Sprache $\{1, \cdot, ^{-1}\}$ der Gruppen und Σ die Gruppenaxiome, und erfüllt für die Familie $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$\varphi_n(x) := (x^n = 1) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$
die Menge $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Voraussetzung von Kor. 7.3.20, so hat Σ ein Modell, dessen Restriktion auf L eine Torsionsgruppe ist.

(ii) Enthält L die Sprache $\{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ der geordneten Ringe und Σ die Axiome für geordnete Körper, und erfüllt für die Familie $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$\varphi_n(x) := (x < n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$
die Menge $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Voraussetzung von Kor. 7.3.20, so hat Σ ein Modell, dessen L-Redukt archimedisch ist.

Wie wir gesehen haben, sind — falls existent — die Klassen $\mathcal{G}^f(\mathcal{K})$ und $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ zwar beide Teilklassen von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$, d.h. $\mathcal{G}^f(\mathcal{K}) \cup \mathcal{G}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$; es ist aber sehr wohl $\mathcal{G}^f(\mathcal{K}) \cap \mathcal{G}(\mathcal{K}) = \varnothing$ möglich, wie wir in §7.5 am Beispiel der kommutativen Ringe sehen werden. Sind die Klassen der endlich und unendlich generischen Strukturen disjunkt, so liefert das Studium der Unterschiede zwischen den beiden Klassen oft ein besseres Verständnis von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$. Für Anwendungen der Erzwingungsmethode in der Algebra siehe [**7**], [**3**] (Chap. IV), speziell in der Gruppentheorie [**101**] oder §7.7 dieses Skriptums. Eine Darstellung des Cohenschen *forcing* in der axiomatischen Mengenlehre gibt der entsprechende Artikel [**57**] in [**19**].

7.4. Modellbegleiter und Modellvervollständigung

Für jede induktive Klasse $\mathcal{K}$ haben wir nach dem auf Satz 7.2.2 folgenden Existenzsatz eine absteigende Kette

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_1(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{G}_2(\mathcal{K}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{G}(\mathcal{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n(\mathcal{K}) \tag{7.4.22}$$

von Teilklassen von $\mathcal{K}$. Man weiß nun allerdings nicht, ob die Klassen in dieser Kette elementar sind, und ob die Hierarchie echt ist, d.h. ob $\mathcal{G}_n(\mathcal{K}) \neq \mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{K})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Der erste Schritt $\mathcal{G}_1(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{G}_2(\mathcal{K})$ allerdings ist (im Fall einer elementaren induktiven Klasse $\mathcal{K}$) nie echt:

ÜBUNG. Sei $\mathcal{K}$ induktive und elementare Klasse von L-Strukturen. Man zeige, daß stets $\mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_2(\mathcal{K})$.

Wir werden nun zeigen, daß, falls $\mathcal{K}$ elementar und induktiv und nur *eine* der Klassen in (7.4.22) elementar ist, alle Klassen $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ übereinstimmen (und damit allesamt elementar sein müssen).

SATZ 7.4.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare, induktive Klasse von L-Strukturen, $\mathcal{K}'$ eine modellvollständige, konfinale Teilklasse von $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{K}' = \mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

BEWEIS. Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; es ist (G1), ($G2_n$), ($G3_n$) für $\mathcal{K}'$ nachzuweisen:

(G1) ist die vorausgesetzte Konfinalität von $\mathcal{K}'$.

($G2_n$) folgt aus der Modellvollständigkeit von $\mathcal{K}'$.

($G3_n$) Wir wissen (Satz 4.3.1): Da $\mathcal{K}'$ modellvollständig ist, gibt es eine Menge Σ von $\forall_2$-Sätzen aus L mit $\mathcal{K}' = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Sei nun $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, so daß für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_n} \mathfrak{B}$. Zu zeigen ist, daß auch $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$. Wegen $n > 0$ haben wir $\mathfrak{A} \preceq_{\forall_1} \mathfrak{B}$, also übertragen sich $\forall_2$-Formeln von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$. Weil $\mathfrak{B} \models \Sigma$, folgt $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Damit ist alles bewiesen. □

KOROLLAR 7.4.2. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive und elementare Klasse von L-Strukturen, und angenommen, eine der Klassen $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist elementar. Dann ist $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ ist modellvollständig.*

BEWEIS. Da $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ ($G2_1$) erfüllt, ist sicherlich $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ modellvollständig nach dem Robinson-Test. Mit dem Satz folgt die Behauptung. □

Satz 7.4.1 legt jetzt folgende Definition nahe:

DEFINITION 7.4.3. (Cherlin, [**62**]) Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen und $\mathcal{K}'$ eine modellvollständige, konfinale Teilklasse von $\mathcal{K}$. Dann heißt $\mathcal{K}'$ der *Modellbegleiter von* $\mathcal{K}$.

BEMERKUNG. Existiert ein Modellbegleiter von $\mathcal{K}$, so ist dieser eindeutig bestimmt. (Er ist also *der* Modellbegleiter.)

BEWEIS. Seien $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ zwei modellvollständige, konfinale Teilklassen von $\mathcal{K}$, und Σ' bzw. Σ'' Axiomensysteme für $\mathcal{K}'$ bzw. $\mathcal{K}''$. Aus Symmetriegründen reicht es, $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}''$ zu zeigen. Sei also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$. Unter abwechselnder Anwendung der Konfinalität von $\mathcal{K}''$ und $\mathcal{K}'$ in $\mathcal{K}$ erhält man eine Kette

$$\mathfrak{A} =: \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots \quad \text{mit } \mathfrak{A}_{2i} \in \mathcal{K}', \mathfrak{A}_{2i+1} \in \mathcal{K}'' \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Da $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ modellvollständig und somit induktiv sind, ist $\mathfrak{B} := \bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{K}' \cap \mathcal{K}''$, insbesondere $\mathfrak{B} \models \Sigma''$ und wegen der Modellvollständigkeit von $\mathcal{K}'$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A} \models \Sigma''$, d.h. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}''$. □

Ist $\mathcal{K}$ sogar induktiv und existiert der Modellbegleiter $\mathcal{K}'$ von $\mathcal{K}$, so gilt $\mathcal{K}' = \mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_n(\mathcal{K})$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wegen Kor. 7.4.2 reicht, um die Existenz eines Modellbegleiters nachzuweisen, die Elementarität eines einzigen $\mathcal{G}_n(\mathcal{K})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, zu verifizieren.

Trivialerweise ist eine elementare Klasse $\mathcal{K}$ modellvollständig genau dann, falls die Klasse $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ der generischen Strukturen existiert und mit $\mathcal{K}$ zusammenfällt; $\mathcal{K}$ ist dann sein eigener Modellbegleiter.

Definition 7.4.4. (Robinson, [**126**]) Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen und $\mathcal{K}'$ eine elementare, konfinale Teilklasse von $\mathcal{K}$. Dann heißt $\mathcal{K}'$ die *Modellvervollständigung von* $\mathcal{K}$, falls für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}'$ mit gemeinsamer Substruktur $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ gilt, daß $(\mathfrak{A}, B) \equiv (\mathfrak{C}, B)$.

Bemerkung. Wenn $\mathcal{K}'$ *eine* Modellvervollständigung von $\mathcal{K}$ ist, so ist $\mathcal{K}'$ auch modellvollständig und daher *der* Modellbegleiter von $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ besitzt also höchstens eine Modellvervollständigung.

Angenommen, $\mathcal{K}$ hat einen Modellbegleiter. Wann ist dieser die Modellvervollständigung von $\mathcal{K}$? Eine notwendige und hinreichende Bedingung liefert (in Verallgemeinerung von Satz 5.6.3):

Satz 7.4.5. *Sei $\mathcal{K}'$ der Modellbegleiter der Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen. Genau dann ist $\mathcal{K}'$ die Modellvervollständigung von $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ die A.E. besitzt.*

Beweis. Vergleiche den Beweis des Satzes 5.6.3, der den Spezialfall der Charakterisierung substrukturvollständiger Klassen behandelte. Man sieht leicht, daß man den Beweis analog führen kann, wobei $\mathcal{K}'$ im wesentlichen die Rolle von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ im wesentlichen die Rolle von $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ übernimmt. $\square$

Den Zusammenhang zwischen Substrukturvollständigkeit und Modellvervollständigung beleuchtet

Lemma 7.4.6. *$\mathcal{K}$ ist substrukturvollständig genau dann, wenn $\mathcal{K}$ Modellvervollständigung von* $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ *ist.*

Beweis. $\mathcal{K}$ ist Modellvervollständigung von $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ d.u.n.d., wenn $\mathcal{K}$ eine elementare, konfinale Teilklasse der elementaren Klasse $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ ist mit der Eigenschaft, daß für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$ gilt: $(\mathfrak{A}, B) \equiv (\mathfrak{C}, B)$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $\mathcal{K}$ offensichtlich substrukturvollständig. Ist umgekehrt $\mathcal{K}$ substrukturvollständig, so ist $\mathcal{K}$ elementar und konfinal in $\mathrm{S}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{K}$ mit $(\mathfrak{A}, B) \equiv (\mathfrak{C}, B)$ für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}, \mathfrak{B} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})$, so daß nur noch zu zeigen ist, daß mit $\mathcal{K}$ auch $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ elementar ist; dies wurde aber bereits in Satz 3.6.2 bewiesen. $\square$

Beispiel. Beispiele für Theorien mit Modellvervollständigungen kennen wir schon zuhauf (vgl. u.a. §5):

(i) Die Klasse $\mathcal{AAK}$ der algebraisch abgeschlossenen Körper ist Modellvervollständigung der Klasse $\mathcal{K}$ö der Körper, sogar schon der Klasse $\mathcal{I}$ der Integritätsbereiche. (Robinson, [**126**])
(ii) Die Klasse $\mathcal{RAK}$ der reell abgeschlossenen Körper ist Modellvervollständigung der Klasse $\mathcal{GK}$ö der geordneten Körper. (Robinson, [**126**])
(iii) Die Klasse der teilbaren, torsionsfreien, abelschen Gruppen ist Modellvervollständigung der Klasse der torsionsfreien abelschen Gruppen.
(iv) Die Klasse der teilbaren, geordneten, abelschen Gruppen ist Modellvervollständigung der Klasse der geordneten abelschen Gruppen. (Robinson-Zakon, [**132**])
(v) Die Klasse der atomfreien Booleschen Algebren ist Modellvervollständigung der Klasse der Booleschen Algebren.

Übung. Sei $L = \{0, 1, \sqcap, \sqcup\}$ und $\mathcal{DV}$ die Klasse der distributiven Verbände mit 0 und 1, betrachtet als L-Strukturen. Besitzt $\mathcal{DV}$ einen Modellbegleiter bzw. eine Modellvervollständigung?

Beispiel. Eine Situation, in der keine Modellvervollständigung, aber ein Modellbegleiter existiert, ist diese: Sei $L' = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ die Sprache der Ringe; sei $\mathcal{FRK}$ die Klasse der formal reellen Körper bzgl. L'; sie ist elementar mit einem rekursiv aufzählbaren Axiomensystem. Sei $\mathcal{RAK}'$ die Klasse aller formal reellen Körper, in denen (RA1'), (RA2) gilt (vgl. Def. 6.1.11, Prop. 6.1.12); sie ist ebenfalls elementar bzgl. L' (vgl. Bem. 6.1.13). Eine L'-Struktur K' ist aus $\mathcal{RAK}'$ genau dann, wenn sie (in eindeutiger Weise, vgl. 6.1.12) zu einer L-Struktur $K \in \mathcal{RAK}$ expandiert werden kann, wobei $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ die Sprache der geordneten Ringe sei; also $\mathcal{RAK}' = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathbb{R}))$ bzgl. L'. Es gilt:

Proposition 7.4.7. *$\mathcal{RAK}'$ ist Modellbegleiter von $\mathcal{FRK}$, aber nicht Modellvervollständigung.*

Beweis. Nach einer Übung in §6.4 ist $\mathcal{RAK}'$ modellvollständig, ferner konfinal in $\mathcal{FRK}$ (Kor. 6.1.20). Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Zur zweiten betrachte den Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ von $\mathbb{R}$; wir können ihn vermöge $\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$ oder vermöge $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ einbetten und erhalten so zwei verschiedene Anordnungen $<_1$ und $<_2$ für $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, wobei einerseits $0 <_1 \sqrt{2}$, andererseits $0 >_2 \sqrt{2}$ gilt; nach Kor. 6.1.20, Kor. 6.3.9 existiert ein reell abgeschlossener Teilkörper $(K_1, <_1)$ bzw. $(K_2, <_2)$ von $\mathbb{R}$, $K_i \supseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ für $i = 1, 2$, so daß $<_1$ die erste, $<_2$ die zweite Anordnung auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fortsetzt. $\mathcal{RAK}$ ist substrukturvollständig; also $K_i \models \mathrm{Th}(\mathbb{R})$ bzgl. L' für $i = 1, 2$. Die beiden Körper haben die L'-Substruktur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gemein, aber in K_1 gilt $\exists x(x^2 = \sqrt{2})$, in K_2 gilt $\neg\exists x(x^2 = \sqrt{2})$, Widerspruch. □

Beispiel. Wir untersuchen nun eine eher „spielerische“ einfache Situation, in der kein Modellbegleiter existiert: Sei $\mathcal{W}$ die Klasse der kreisfreien Graphen (*Wälder*) bzgl. $L = \{R\}$ (vgl. das Bsp. in §3.3). $\mathcal{W}$ ist zwar $\forall_2$-axiomatisierbar, also elementar und induktiv, aber:

Proposition 7.4.8. *$\mathcal{E}(\mathcal{W})$ ist nicht elementar, d.h. $\mathcal{W}$ hat keinen Modellbegleiter.*

Beweis. Zunächst:

(∗) Alle $\mathfrak{G} \in \mathcal{E}(\mathcal{W})$ sind zusammenhängend.

Sei dazu $\mathfrak{G} \in \mathcal{E}(\mathcal{W})$, $u, v \in G$. Angenommen, u und v liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathfrak{G}$; dann gilt $(\mathfrak{G}, G) \not\models \exists x(uRx \wedge xRv)$. Definiere $\mathfrak{H}$ durch $H := G \cup \{w\}$ mit $w \notin G$ und $R^{\mathfrak{H}} := R^{\mathfrak{G}} \cup \{(u, w), (w, u), (v, w), (w, v)\}$. Nach Annahme ist $\mathfrak{H}$ kreisfrei, da u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathfrak{G}$ liegen. Es gilt also $\mathfrak{H} \in \mathcal{W}$ und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$. Wegen $(\mathfrak{H}, G) \models \exists x(uRx \wedge xRv)$ also auch $(\mathfrak{G}, G) \models \exists x(uRx \wedge xRv)$, Widerspruch.

Angenommen nun, $\mathcal{E}(\mathcal{W}) = \mathrm{Mod}(\Delta)$ für eine L-Satzmenge Δ. Fügt man neue Konstanten a und b zu L hinzu, so ist also die $\{R, a, b\}$-Satzmenge

$$\Delta \cup \left\{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n(aRx_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge \ldots \wedge x_nRb) : n \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \{a \neq b\}$$

inkonsistent. Damit gibt es nach Kompaktheitssatz ein $N \in \mathbb{N}_0$ derart, daß bereits

$$\Delta \cup \left\{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n(aRx_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge \ldots \wedge x_nRb) : 0 \leq n \leq N\right\} \cup \{a \neq b\}$$

inkonsistent ist. Da a und b in Δ nicht vorkommen, gilt

$$\Delta \models \forall x \forall y \left(x \neq y \to \bigvee_{0 \leq n \leq N} \exists x_1 \cdots \exists x_n(xRx_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge \ldots \wedge x_nRy) \right).$$

Andererseits wissen wir aufgrund der Induktivität von $\mathcal{W}$, daß $\mathcal{E}(\mathcal{W}) = \mathcal{G}_1(\mathcal{W})$ und damit insbesondere $\mathcal{E}(\mathcal{W})$ konfinal in $\mathcal{W}$ ist. Also können wir den kreisfreien Graphen $\mathfrak{G}$ mit $G := \{0, \ldots, N+2\}$, $R^{\mathfrak{G}} := \{(0,1), (1,2), \ldots, (N+1, N+2)\} \cup \{(1,0), (2,1), \ldots, (N+2, N+1)\}$ zu einem Graphen $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H} \models \Delta$ erweitern. Da $\mathfrak{H}$ kreisfrei ist, können 0 und $N+2$ in $\mathfrak{H}$ nicht durch einen Weg einer Länge $\leq N+1$ verbunden sein, und wir haben einen Widerspruch. $\square$

Übung. Man bestimme $\mathcal{E}(\mathcal{W})$. (Schwierig.)

Ein weiteres einfaches Beispiel für eine elementare Klasse ohne Modellbegleiter erhält man wie folgt:

Übung. Sei $L = \big\{\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}, <\big\}$ die Sprache der Ordnungen zusammen mit paarweise verschiedenen neuen Konstanten c_n. Sei $\mathcal{L}$ die Klasse aller L-Strukturen $\mathfrak{O}$, die lineare Ordnungen sind, in denen $c_0^{\mathfrak{O}} < c_1^{\mathfrak{O}} < c_2^{\mathfrak{O}} < \cdots$ ein zu $(\mathbb{N}_0, <)$ isomorphes Anfangsstück von $\mathfrak{O}$ bilden. Man zeige:

(i) $\mathcal{L}$ ist eine elementare Klasse.
(ii) $\mathcal{L}$ besitzt keinen Modellbegleiter.

In den nachfolgenden Paragraphen wollen wir einige weniger triviale algebraische Beispiele für Klassen existentiell abgeschlossener Strukturen studieren. Zuvor kehren wir nochmals zu den motivierenden Bemerkungen im §7.1 zurück: Algebraisch abgeschlossene Körper sind *per definitionem* solche, in denen jede Polynomgleichung in einer Variablen, die in einem Erweiterungskörper eine Lösung besitzt, eine solche schon im Ausgangskörper hat. Jedoch ist die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper auch die Modellvervollständigung der Klasse aller Körper, d.h. *jede* existentielle Formel, also jedes „verallgemeinerte" polynomiale Gleichungs- und Ungleichungssystem in endlich vielen Variablen, das in einem Oberkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers lösbar ist, ist auch schon im Grundkörper selbst lösbar. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 7.4.9. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ *algebraisch abgeschlossen in* $\mathcal{K}$, falls für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und alle positiv existentiellen Sätze $\varphi \in L(A)$ gilt:

$$(\mathfrak{B}, A) \models \varphi \quad \Rightarrow \quad (\mathfrak{A}, A) \models \varphi$$

Die Teilklasse der algebraisch abgeschlossenen Strukturen von $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(\mathcal{K})$.

Proposition 7.4.10. *Sei $\mathcal{I}$ die Klasse der Integritätsbereiche. Es ist*

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{AAK} = \mathcal{E}(\mathcal{I}) \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{A}(\mathcal{K}\ddot{o}) = \mathcal{AAK} = \mathcal{E}(\mathcal{K}\ddot{o}).$$

Beweis. Die Inklusion $\mathcal{AAK} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I})$ ist trivial: Ist K algebraisch abgeschlossen, $K \subseteq R$ eine Erweiterung in $\mathcal{I}$ und $\exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$ eine positiv existentielle $L(K)$-Formel, die in R eine Lösung besitzt, so kann man wegen der Konfinalität von $\mathcal{AAK}$ in $\mathcal{I}$ o.B.d.A. R als algebraisch abgeschlossenen Körper annehmen, und aus der Modellvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$ folgt, daß $\exists \mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x}))$ auch in K eine Lösung besitzt, also $K \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$.

Sei nun $K \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$; also $K \in \mathcal{K}\ddot{o}$, da in K die positiv existentielle Formel $\exists x(xa = 1)$ für jedes $a \in K^*$ wahr ist. (Jeder Integritätsbereich hat seinen Quotientenkörper.) M.a.W. $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{K}\ddot{o})$. Sei $f \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom.

Dann existiert ein Oberkörper $K' \supseteq K$ und ein $a' \in K'$ mit $f(a') = 0$ (Lemma 4.2.6), so daß wegen $K \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$ auch ein $a \in K$ mit $f(a) = 0$ existiert und somit K algebraisch abgeschlossen sein muß. Damit ist $\mathcal{AAK} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{K}\ddot{o}) \subseteq \mathcal{AAK}$ bewiesen. Mit $\mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathcal{E}(\mathcal{K}\ddot{o}) = \mathcal{AAK}$ folgt die Behauptung. □

Im Körperfall sind also die Begriffe der algebraischen und existentiellen Abgeschlossenheit identisch; dies ist ein Spezialfall folgenden allgemeinen Phänomens:

Übung. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ heißt *einfach in* $\mathcal{K}$, falls $\mathrm{card}(A) > 1$ und für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und jeden Homomorphismus $h \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gilt: $\mathrm{card}(h(A)) = 1$ oder h ist eine Einbettung. Die Klasse der in $\mathcal{K}$ einfachen Strukturen werde mit $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ bezeichnet.

(i) Man bestimme die einfachen abelschen Gruppen und die einfachen kommutativen Ringe mit 1.
(ii) Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse nichttrivialer (d.h. mindestens zweielementiger) L-Strukturen in einer algebraischen Sprache L. Sei die Klasse $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ elementar und konfinal in $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \mathcal{E}(\mathcal{K})$. Hinweis: Erweitere L um zwei neue Konstanten, und wende den ersten Persistenzsatz an. (Modelltheoretisches Analogon des Rabinowitsch-Tricks.)

7.5. Existentiell abgeschlossene kommutative Ringe

Sei $\mathcal{KR}$ die Klasse der kommutativen Ringe (mit 1) in der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. (Alle vorkommenden kommutativen Ringe seien im folgenden mit 1.) Wir werden zeigen, daß, obwohl $\mathcal{KR}$ mit $\forall_2$-Sätzen axiomatisiert werden kann und somit induktiv ist, kein Modellbegleiter von $\mathcal{KR}$ existiert. Der Beweis beruht auf den nachfolgenden drei einfachen Lemmata. (Wir verstehen unter einem *idempotenten Element* eines kommutativen Rings R ein $r \in R$ mit $r^2 = r$, unter einem *nilpotenten Element* ein $r \in R$, so daß $r^n = 0$ für ein $n \geq 1$.)

Lemma 7.5.1. *Sei r ein Element eines kommutativen Rings R. Dann sind äquivalent:*

(i) *r ist nicht nilpotent.*
(ii) *In einer Erweiterung $S \in \mathcal{KR}$ von R teilt r ein idempotentes Element $\neq 0$.*

Beweis. Zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, r sei nilpotent, etwa $r^n = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wähle nun einen Ring $S \supseteq R$ und ein $s \in S$ mit $0 \neq rs = (rs)^2$. Es ist $r^{2^n} = 0$, also existiert ein minimales $m \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $(rs)^{2^m} = 0$; wegen $rs \neq 0$ ist $m \geq 1$. Dann ist aber $0 = ((rs)^2)^{2^{m-1}} = (rs)^{2^{m-1}}$, im Widerspruch zur Wahl von m.

Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Setze $S := R[X]/((rX)^2 - rX)$. Die kanonische Abbildung $R \to S$ ist eine Einbettung. (Ist $t \in R$ mit $t \in ((rX)^2 - rX)$, also $t = grX(rX-1)$ für ein $g \in R[X]$, so folgt $t = 0$.) Schreiben wir $\underline{f}$ anstelle $f + ((rX)^2 - rX)$ für $f \in R[X]$, so gilt in S nun $\underline{rX} = (\underline{rX})^2$, so daß nur $\underline{rX} \neq 0$ zu zeigen bleibt. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall, d.h. es existiere ein $g \in R[X]$ mit $rX = g(r^2X^2 - rX)$, etwa $g = \sum_{i=0}^n a_iX^i$ mit $a_i \in R$, $a_n \neq 0$. Daraus erhält man

$$rX = \left(\sum_{i=0}^n a_iX^i\right)\left(r^2X^2 - rX\right) = \sum_{i=2}^{n+2} r^2a_{i-2}X^i - \sum_{i=1}^{n+1} ra_{i-1}X^i,$$

und durch Koeffizientenvergleich gewinnt man

$$r = -ra_0, \quad r^2a_0 = ra_1, \quad r^2a_1 = ra_2, \quad \dots, \quad r^2a_{n-1} = ra_n, \quad r^2a_n = 0.$$

Also folgt $0 = r^2a_n = r^3a_{n-1} = \dots = r^{n+2}a_0 = -r^{n+2}$. Dies kann nicht sein, da r nicht nilpotent ist. □

LEMMA 7.5.2. *Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein kommutativer Ring $S \supseteq R$ und ein $s \in S$ mit $s^n = 0$, $s^{n-1} \neq 0$.*

BEWEIS. Setze $S := R[X]/(X^n)$. □

LEMMA 7.5.3. *Sei $R \in \mathcal{E}(\mathcal{KR})$, $r \in R$. Dann ist r nicht nilpotent genau dann, wenn ein $s \in R$ existiert mit $rs = (rs)^2 \neq 0$.*

BEWEIS. Direkt aus Lemma 7.5.1. □

Wir sind damit in der Lage zu zeigen:

SATZ 7.5.4. (Cherlin, [**63**]) *Die Klasse der kommutativen Ringe besitzt keinen Modellbegleiter.*

BEWEIS. Angenommen, $\mathcal{E}(\mathcal{KR}) = \mathrm{Mod}(\Delta)$ für eine L-Satzmenge Δ. Fügt man eine neue Konstante c zu L hinzu, so ist die Satzmenge

$$\Delta \cup \{c^n \neq 0 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\exists x(0 \neq cx = (cx)^2)\}$$

nach Lemma 7.5.3 unerfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß bereits

$$\Delta \cup \{c^n \neq 0 : 1 \leq n \leq N\} \cup \{\neg\exists x(0 \neq cx = (cx)^2)\}$$

unerfüllbar ist. Da c in Δ nicht vorkommt, haben wir also

$$\Delta \models \forall y \left(\bigwedge_{n=1}^{N} y^n \neq 0 \to \exists x\big(0 \neq yx = (yx)^2\big) \right).$$

Wegen Lemma 7.5.2 existiert aber aufgrund der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{KR})$ in $\mathcal{KR}$ (vgl. Satz 7.2.2) ein $R \in \mathcal{E}(\mathcal{KR})$ und ein $r \in R$ mit $r^N \neq 0 = r^{N+1}$. Wegen $R \models \Delta$ gibt es also ein $s \in R$ mit $0 \neq rs = (rs)^2$. Nach Lemma 7.5.1 ist damit r nicht nilpotent, im Widerspruch zu $r^{N+1} = 0$. □

Wir zeigen nun noch, daß $\mathcal{G}^f(\mathcal{KR}) \cap \mathcal{G}(\mathcal{KR}) = \varnothing$, daß es also keinen zugleich endlich und unendlich generischen kommutativen Ring gibt.

DEFINITION 7.5.5. Sei R ein kommutativer Ring, $r \in R$.

(i) r heißt *regulär,* falls r von r^2 geteilt wird.
(ii) r heißt *potentiell nilpotent,* falls r kein idempotentes Element außer Null teilt (vgl. Lemma 7.5.1).
(iii) ϕ sei definiert als

$$\phi := \forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \forall z \big(x = y_1 + y_2 \wedge y_1^2 y_3 = y_1 \wedge ((y_2z)^2 = y_2z \to y_2z = 0)\big).$$

(ϕ besagt: „Jedes Element x ist die Summe eines regulären Elements y_1 und eines potentiell nilpotenten Elements y_2.“)

LEMMA 7.5.6. *Sei R ein kommutativer Ring, $r \in R$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *r^{n+1} teilt r^n.*

(ii) $r = r_1 + s$ *mit* r_1 *regulär,* $s^n = 0$.
(iii) $r = r_1 + s$ *mit* r_1 *regulär,* $s^n = 0$, $r_1 s = 0$.

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Nimm $b \in R$ mit $r^{n+1}b = r^n$. Setze $r_1 := r^n b^{n-1}$, $s := r - r_1$. Dann $r = r_1 + s$,

$$r_1^2 b = r^{2n} b^{2n-1} = r^{n-1}(r^{n+1}b)b^{2n-2} = r^{2n-1}b^{2n-2} = \cdots = r^n b^{n-1} = r_1,$$

sowie

$$s^n = \sum_i \binom{n}{i}(-1)^i r^{n-i} r^{in} b^{i(n-1)} = \sum_i \binom{n}{i}(-1)^i r^n = 0.$$

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $r = r_1 + s$ mit $r_1^2 b = r_1$, $b \in R$, und $s^n = 0$, so setze $r_1' := r_1(1+bs)$, $s' := s(1-r_1 b)$. Dann $r_1' + s' = r$ und ${s'}^n = s^n(1-r_1b)^n = 0$; man überprüft leicht unter Ausnutzung von $s^n = 0$, daß r_1' regulär ist. Es ist

$$r_1' s' = r_1(1+bs)s(1-r_1b) = r_1 s(1 - r_1 b + bs - r_1 b^2 s) = 0.$$

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Ist $r = r_1 + s$ mit $r_1^2 b = r_1$, $b \in R$, und $s^n = 0$, $r_1 s = 0$, so

$$r^{n+1} b = \sum_i \binom{n+1}{i} r_1^i s^{n+1-i} b = r_1^{n+1} b + s^{n+1} b = r_1^{n-1} r_1^2 b = r_1^n.$$

Aber $r^n = \sum_j \binom{n}{j} r_1^j s^{n-j} = r_1^n + s^n = r_1^n$. $\square$

Lemma 7.5.7. *Für Elemente r, s eines kommutativen Rings R sind äquivalent:*
(i) *r teilt s in einer Erweiterung von R.*
(ii) *Für alle $x \in R$: $rx = 0 \Rightarrow sx = 0$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar. Umgekehrt gelte (ii) und sei $S := R[X]/(rX - s)$. Offensichtlich reicht es nachzuweisen, daß die kanonische Abbildung $R \to S$ ein Monomorphismus ist. Sei $c \in R$ und $c = (rX - s)p$ mit $p \in R[X]$, $p = \sum_{i=0}^n p_i X^i$. Wir erhalten eine Reihe von Gleichungen

$$-c = sp_0, \quad rp_0 = sp_1, \quad rp_1 = sp_2, \quad \ldots, \quad rp_n = 0.$$

Mit (ii) ist $0 = sp_n = rp_{n-1}$, und induktiv folgt $rp_n = rp_{n-1} = \cdots = rp_0 = 0$, also mit (ii) $0 = sp_0 = -c$. $\square$

Satz 7.5.8. (Cherlin, [**63**]) *Es gilt $\mathcal{G}^f(\mathcal{KR}) \models \phi$, $\mathcal{G}(\mathcal{KR}) \models \neg\phi$. Insbesondere ist $\mathcal{G}^f(\mathcal{KR}) \cap \mathcal{G}(\mathcal{KR}) = \varnothing$.*

Beweis. Sei $R \in \mathcal{G}(\mathcal{KR})$. Wir konstruieren eine Erweiterung in $\mathcal{G}(\mathcal{KR})$, in der ϕ nicht gilt; wegen (G2$_\infty$) gilt dann ϕ auch in R nicht. Wir definieren

$$S' := R[Y, \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$$

als den Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten $Y, X_1, X_2, \ldots$; sei $\mathfrak{a}$ das von $Y^{n+1}X_n$ ($n \in \mathbb{N}$) erzeugte Ideal in S' und $S := S'/\mathfrak{a}$. Dann gilt kanonisch $R \hookrightarrow S$, und mit $r := Y + \mathfrak{a}, s_n := X_n + \mathfrak{a} \in S$: $r^{n+1}s_n = 0 \neq r^n s_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Damit teilt r^{n+1} niemals r^n in einer Erweiterung T von S, nach Lemma 7.5.7. Ist $T \in \mathcal{G}(\mathcal{KR})$ mit $T \supseteq S$, so gilt $T \in \mathcal{E}(\mathcal{KR})$, und mit Lemma 7.5.1, 7.5.6 folgt $T \models \neg\phi$.

Wir zeigen schließlich, daß $\mathcal{G}^f(\mathcal{KR}) \models \phi$. Dazu schreibe man $\phi = \forall x(\varphi)$ mit

$$\varphi(x) := \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \forall z \big(x = y_1 + y_2 \wedge y_1^2 y_3 = y_1 \wedge ((y_2 z)^2 = y_2 z \rightarrow y_2 z = 0)\big).$$

Sei R also ein endlich generischer kommutativer Ring, und angenommen, $R \vdash \neg\varphi[\overline{r}/x]$ für ein $r \in R$. Wähle C als eine endliche Teilmenge des Diagramms von R

mit $C \vdash \neg\varphi[\overline{r}/x]$. Wir beweisen, daß ein $T \in \mathcal{KR}$, $s \in T$ und ein $n \in \mathbb{N}$ existieren, so daß $C \cup \{\overline{r}^{n+1}\overline{s} = \overline{r}^n\}$ eine Bedingung bzgl. $\mathcal{KR}$ ist. $\mathcal{KR}$ ist universell axiomatisiert, also $\mathrm{S}(\mathcal{KR}) = \mathcal{KR}$; daher existiert dann nach Satz 7.3.12 ein $S \in \mathcal{G}^f(\mathcal{KR})$ mit $r^{n+1}s = r^n$ in S, und nach Lemma 7.5.6 hat r in S eine Darstellung als Summe eines regulären und eines nilpotenten Elements, im Widerspruch zu $C \vdash \neg\varphi[\overline{r}/x]$. Um s, n wie behauptet zu finden, sei $R_0 \subseteq R$ der von den Konstanten von C und r erzeugte Unterring von R; R_0 erfüllt C. Ferner ist R_0 endlich erzeugt und somit insbesondere noethersch (als homomorphes Bild eines Polynomrings $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$). Sei $I_n := \mathrm{ann}(r^n) \subseteq R_0$; da R_0 noethersch ist, wird $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ stationär, d.h. wir haben $I_n = I_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und nach Lemma 7.5.7 wird r^n in einer Erweiterung von R_0 von r^{n+1} geteilt; speziell existieren n, s wie behauptet. □

Wir haben damit — wie in §7.3 behauptet — ein Beispiel, das den Unterschied zwischen endlichem und unendlichem Erzwingen zu klären hilft: Es gibt zwar einen Ring R mit $R \Vdash \neg\phi$, etwa nach Satz 7.5.8 einen beliebigen unendlich generischen Ring; aber keine Bedingung C bzgl. $\mathcal{KR}$ erzwingt $\neg\phi$, denn sonst gäbe es nach Satz 7.3.12 einen endlich generischen Ring $S \in \mathcal{KR}$ mit $S \models C$, also $S \vdash \neg\phi$ und damit $S \models \neg\phi$, im Widerspruch zur Aussage des Satzes 7.5.8.

7.6. Semiprime Ringe*

Anhand des Beispiels der kommutativen Ringe haben wir also jetzt zwei Extrema, die bei der modelltheoretischen Untersuchung algebraischer Theorien auftreten können, kennengelernt: Die „gute“ Situation, in der ein Modellbegleiter, ja sogar eine Modellvervollständigung existiert: Die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper ist Modellvervollständigung der Klasse der Integritätsbereiche. Und die „schlechte“ Situation, in der kein Modellbegleiter existiert, wie es für die Klasse aller kommutativen Ringe der Fall ist. Im Beweis der letzten Tatsache spielte die Existenz von Null verschiedener nilpotenter Elemente eine wesentliche Rolle. Natürlich besitzt ein Integritätsbereich keine von Null verschiedene nilpotente Elemente, da er ja keine Nullteiler besitzt. Man kann sich deshalb fragen, wie sich die Klasse $\mathcal{SKR}$ der nichttrivialen *semiprimen* kommutativen Ringe (mit 1) verhält (bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$), wobei wir einen Ring *semiprim* oder auch *reduziert* nennen, wenn er außer der Null keine weiteren nilpotenten Elemente enthält. Da etwa der semiprime Ring $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ außer 0 und 1 noch weitere idempotente Elemente hat, ist sicherlich $\mathcal{AAK}$ nicht konfinal in $\mathcal{SKR}$, also kein Modellbegleiter, schon gar keine Modellvervollständigung von $\mathcal{SKR}$. In gewisser Weise verhindern also die idempotenten Elemente, die Substrukturvollständigkeit von $\mathcal{AAK}$ bei der Suche nach einem Modellbegleiter von $\mathcal{SKR}$ auszunutzen. Andererseits haben wir in einer Übung im Anschluß an Kor. 5.4.4 die Substrukturvollständigkeit für die Klasse der atomfreien Booleschen Algebren nachgewiesen. Wir stellen fest:

Lemma 7.6.1. *Sei R ein kommutativer Ring. Dann bildet $(B(R), 0, 1, \sqcap, \sqcup, *)$, wobei $B(R)$ die Menge der idempotenten Elemente von R bezeichnet und*

$$x \sqcap y := xy, \quad x \sqcup y := x + y - xy, \quad x^* := 1 - x \qquad (x, y \in B(R))$$

sei, eine Boolesche Algebra, die sog. Boolesche Algebra der idempotenten Elemente in R.

Beweis. Nachrechnen. (Übung) □

Im Rest dieses Abschnitts werden wir herleiten, daß $\mathcal{SKR}$ in der Tat einen Modellbegleiter besitzt; es wird dies eine gewisse Klasse kommutativer Ringe R sein, deren Boolesche Algebra $B(R)$ atomfrei ist. (Die Darstellung lehnt sich v.a. an [**3**], III, §5 an.)

Definition 7.6.2. Ein kommutativer Ring R wird *regulär* genannt (*im von Neumann'schen Sinne*), falls alle Elemente von R regulär sind, also für alle $r \in R$ gilt: r^2 teilt r, d.h. es gibt ein $s \in R$ mit $r^2 s = r$. (Ein solches s nennt man *quasiinvers* zu r.)

Wir untersuchen nun die Struktur von Neumann-regulärer Ringe. Sofort bemerkt man: Von Neumann-reguläre Ringe besitzen keine nichttrivialen Nilpotenten, denn ist $0 \neq r \in R$ nilpotent und $n \geq 2$ minimal mit $r^n = 0$, so existiert ein Quasiinverses s zu r, also $0 = r^n s = r^{n-2}(r^2 s) = r^{n-1}$, was absurd ist. Reguläre Ringe sind also semiprim.

Beispiele regulärer Ringe sind die direkten Produkte $\prod_{i \in I} K_i$ von Körpern K_i; für diese ist

$$B\left(\prod_{i \in I} K_i\right) = \left\{x \in \prod K_i : x(i) \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in I\right\}.$$

Weniger triviale Exemplare erhält man über sog. Stonesche Räume:

Definition 7.6.3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge von X heißt *offen-abgeschlossen,* falls sie sowohl offen als auch abgeschlossen ist.
(ii) $(X, \mathcal{O})$ heißt *nulldimensional,* falls er eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen besitzt.
(iii) $(X, \mathcal{O})$ heißt ein *Stonescher Raum*, falls er ein nichtleerer kompakter nulldimensionaler Hausdorff-Raum ist. (Ein topologischer Raum soll dabei wie gewohnt kompakt heißen, falls jede Überdeckung des Raums durch offene Teilmengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt, und Hausdorffsch, falls sich je zwei verschiedene Punkte durch disjunkte offene Mengen trennen lassen.)

Proposition 7.6.4. *Dann und nur dann ist ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *Stonesch, wenn er nichtleer, kompakt und total-unzusammenhängend in dem Sinne ist, daß für je zwei verschiedene Punkte* x_1, x_2 *von* X *eine Zerlegung von* X *in offene Mengen* $U, V \in \mathcal{O}$ *existiert mit* $x_1 \in U$, $x_2 \in V$.

Beweis. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Stoneraum. Da dieser Hausdorffsch ist, existieren zu $x_1 \neq x_2$ offene Mengen U_1', U_2' mit $x_1 \in U_1', x_2 \in U_2'$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Da er überdies nulldimensional ist, kann man U_1' als offen-abgeschlossen wählen; $U := U_1'$ und $V := \complement U_1$ ist dann die gewünschte Zerlegung von X. Ist umgekehrt $(X, \mathcal{O})$ nichtleer, kompakt und total-unzusammenhängend, so sicher auch Hausdorffsch. Zudem bildet die Menge der offen-abgeschlossenen Teilmengen von X eine Basis der Topologie: Ist U mit $\varnothing \subset U \subset X$ offen und $x \in U$, so wähle zu jedem $y \in \complement U$ offene Mengen U_y, V_y um x bzw. y mit $U_y \cap V_y = \varnothing$, $U_y \cup V_y = X$, und setze $V := \bigcap_{y \in \complement U} U_y$. Da $\complement U$ als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums selbst kompakt ist, gibt es schon endlich viele $y_1, \ldots, y_n \notin U$ mit $V = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. V ist somit offen-abgeschlossen, enthält x und ist in U enthalten. $\square$

Sei K ein Körper, X ein topologischer Raum. Wir nennen $f\colon X \to K$ *lokal konstant,* wenn es um jeden Punkt $x \in X$ eine offene Menge gibt, auf der f konstant ist. $C(X;K)$ bezeichne die Menge der lokal konstanten Funktionen $X \to K$. Bzgl. der punktweisen Operationen ist $C(X;K)$ offensichtlich ein kommutativer Ring.

Proposition 7.6.5. *Sei X ein Stonescher Raum, K ein Körper. Dann gilt:*

(i) *$C(X;K)$ ist ein regulärer Ring.*

(ii) *Die idempotenten Elemente von $C(X;K)$ sind genau die charakteristischen Funktionen χ_U offen-abgeschlossener Mengen $U \subseteq X$.*

(iii) *Die Punkte $x \in X$ entsprechen eineindeutig den Primidealen $\mathfrak{p}$ des Ringes $C(X;K)$ vermöge den Zuordnungen*

$$\begin{aligned} x &\mapsto \mathfrak{p}_x := \{f \in C(X;K) : f(x) = 0\},\\ \mathfrak{p} &\mapsto x_{\mathfrak{p}} \in \bigcap_{f\in\mathfrak{p}} f^{-1}(0). \end{aligned}$$

(iv) *Ist $x \in X$ und $\mathfrak{p}_x$ das zugehörige Primideal, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} C(X;K) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & C(X;K) \arrow[d, "\varepsilon_x"] \\ C(X;K)/\mathfrak{p}_x \arrow[r, "\cong"] & K \end{tikzcd}$$

wobei π die kanonische Projektion und $\varepsilon_x\colon f \mapsto f(x)$ die Auswertungsabbildung ist. Insbesondere ist jedes Primideal von $C(X;K)$ maximal.

Beweis. Zu (i): Ist $f \in C(X;K)$, so definiere $1/f\colon X \to K$ durch

$$1/f(x) := \begin{cases} 1/f(x), & \text{falls } f(x) \neq 0,\\ 0, & \text{falls } f(x) = 0. \end{cases}$$

Dann ist $1/f \in C(X;K)$ und $f^2(1/f) = f$.

Zu (ii): Sei $f \in C(X;K)$. Sei $\lambda \in K$; da f lokal konstant ist, existiert um jeden Punkt $x \in f^{-1}(\lambda)$ eine offene Menge $U_x \subseteq f^{-1}(\lambda)$, also ist $f^{-1}(\lambda) = \bigcup_{x\in f^{-1}(\lambda)} U_x$ offen. Damit ist f stetig bzgl. der Topologie auf X und der diskreten Topologie auf K. Ist f also idempotent, so nimmt f wegen $f(f-1) = 0$ nur Werte aus $\{0,1\}$ an, und also sind $f^{-1}(1)$ und $\complement f^{-1}(1) = f^{-1}(0)$ offen in X, mithin, $f = \chi_{f^{-1}(1)}$.

Zu (iii): Für jedes $x \in X$ ist $\mathfrak{p}_x$ offenbar ein Primideal. Sei umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $C(X;K)$. Wir zeigen, daß für je endlich viele $f_1,\ldots,f_n \in \mathfrak{p}$, o.B.d.A. f_i idempotent, immer $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0) \neq \varnothing$ ist; mit der Kompaktheit von X folgt dann $\bigcap_{f\in\mathfrak{p}} f^{-1}(0) \neq \varnothing$. Wäre aber $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0) = \varnothing$, so wäre $1 = \max(f_1,\ldots,f_n)$. Aber induktiv ist $\max(f_1) = f_1 \in \mathfrak{p}$ und

$$\max(f_1,\ldots,f_{i+1}) = \max(f_1,\ldots,f_i) + f_{i+1} - \max(f_1,\ldots,f_i)f_{i+1} \in \mathfrak{p}$$

für $i = 1,\ldots,n-1$, so daß $1 \in \mathfrak{p}$ folgen würde, was wegen $\mathfrak{p} \neq C(X;K)$ aber nicht möglich ist. Es ist also $\bigcap_{f\in\mathfrak{p}} f^{-1}(0) \neq \varnothing$. Gäbe es ferner zwei Punkte $x \neq y$ in $\bigcap_{f\in\mathfrak{p}} f^{-1}(0)$, so wähle ein idempotentes $f \in \mathfrak{p}$ und disjunkte offen-abgeschlossene Umgebungen U_x, U_y von x bzw. y, auf denen f konstant 0 ist. Für $g_x := f + \chi_{U_x}$, $g_y := f - \chi_{U_y}$ ist dann aber

$$g_x g_y = f^2 + f\chi_{U_x} - f\chi_{U_y} + \chi_{U_x}\chi_{U_y} = f \in \mathfrak{p},$$

aber $g_x, g_y \notin \mathfrak{p}$ wegen $g_x(x) = 1$, $g_y(y) = 1$, im Widerspruch zu $\mathfrak{p}$ prim. Also existiert in der Tat genau ein $x_\mathfrak{p} \in \bigcap_{f\in\mathfrak{p}} f^{-1}(0)$. Es verbleibt nachzuweisen, daß die angegebenen Abbildungen invers zueinander sind. Wir zeigen $\mathfrak{p}_{x_\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Die Inklusion „$\supseteq$" ist trivial. Sei umgekehrt $f \in C(X;K)$ mit $f(x_\mathfrak{p}) = 0$. Um jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine o.B.d.A. offen-abgeschlossene Menge U_x, so daß $f|U_x$ konstant ist, wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_x\}_{x\in I}$, die wir dann sogar als paarweise disjunkt annehmen können. Wir können also f als endliche Summe idempotenter Elemente darstellen, und man sieht, daß $f \in \mathfrak{p}$ sein muß. $x_{\mathfrak{p}_x} = x$ schließlich ist klar.

Zu (iv): Trivial, weil ε_x surjektiv mit Kern $\mathfrak{p}_x$ ist. □

Wir werden nun zeigen, daß jeder reguläre Ring dem eben vorgestellten Beispiel ähnelt.— Für einen kommutativen Ring R bezeichne $\mathrm{Spec}(R)$ das *Spektrum* von R, i.e. die Menge seiner Primideale, versehen mit der durch die Basismengen

$$D(r) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : r \notin \mathfrak{p}\} \qquad (r \in R)$$

erzeugten Topologie, der *Zariski-Topologie* auf $\mathrm{Spec}(R)$. Für grundlegende Eigenschaften derselben vgl. [**33**]; insbesondere benötigen wir die wohlbekannten Aussagen:

Lemma 7.6.6. *Sei R ein kommutativer Ring. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Spec}(R)$ *ist kompakt.*
(ii) $\sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$.
(iii) $N(R) := \sqrt{(0)}$ *ist die Menge aller nilpotenten Elemente von R. (Man nennt $N(R)$ auch das* Nilradikal *von R.)*

Beweis. (iii) klar; (i) findet sich als III, Prop. 1.3 und (ii) als I, Cor. 4.5 in [**33**]. □

Übung. Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring.

(i) Ist $1 = e_1 + e_2$ mit Nichteinheiten $e_1, e_2 \in R$ und $e_1 \cdot e_2 \in N(R)$, so ist $B(R) \neq \{0,1\}$.
(ii) $\mathrm{Spec}(R)$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $B(R) = \{0,1\}$.
(iii) Ist R ein lokaler Ring, so ist $\mathrm{Spec}(R)$ zusammenhängend.

Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring. Wir nennen die kanonische Abbildung

$$R \to \prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)} R/\mathfrak{p}, \quad r \mapsto (r \bmod \mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)}$$

die *kanonische Repräsentation* von R. Ihr Kern ist $N(R)$ nach Lemma 7.6.6 (ii), sie ist also injektiv genau dann, wenn R semiprim ist. Wir schreiben im folgenden kurz $r(\mathfrak{p})$ für $r \bmod \mathfrak{p}$.

Satz 7.6.7. (Struktursatz für von Neumann-reguläre Ringe) *Sei $R \neq \{0\}$ ein regulärer kommutativer Ring. Dann gilt:*

(i) *Unter der kanonischen Repräsentation ist R isomorph zu einem Ring von Funktionen auf* $\mathrm{Spec}(R)$ *mit Werten in Körpern $R/\mathfrak{p}$. Dabei wird jedes idempotente Element e mit der charakteristischen Funktion von $D(e)$ identifiziert.*
(ii) $\mathrm{Spec}(R)$ *ist ein Stonescher Raum, und eine Basis seiner Topologie ist durch die Mengen $D(e)$, $e \in B(R)$ gegeben.*

(iii) $B(R)$ *ist isomorph zur Booleschen Mengenalgebra aller offen-abgeschlossenen Teilmengen von* $\mathrm{Spec}(R)$.

BEWEIS. Zu (i): Da R semiprim ist, führt die kanonische Repräsentation R in einen Ring von Funktionen auf $\mathrm{Spec}(R)$ mit Werten in Integritätsbereichen $R/\mathfrak{p}$ über. Man überprüft sofort, daß mit R auch $R/\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, regulär ist, und jeder reguläre Integritätsbereich ein Körper ist. Für jedes idempotente Element $e \in R$ ist $e(\mathfrak{p})$ idempotent in $R/\mathfrak{p}$. Also ist $e(\mathfrak{p}) \in \{0,1\}$, und $e(\mathfrak{p}) = 0$ gdw. $\mathfrak{p} \notin D(e)$. Also ist e die charakteristische Funktion von $D(e)$.

Zu (ii), (iii): Wir bemerken zunächst, daß wir zu jedem Element $r \in R$ ein idempotentes e finden können, so daß r teilt e und e teilt r: Man wähle einfach $s \in R$ mit $r^2 s = r$ und setze $e := rs$. Damit gibt es zu jedem $r \in R$ ein assoziiertes idempotentes Element e mit $D(r) = D(e)$; insbesondere wird die Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ von einer Basis von Mengen $D(e)$, $e \in B(R)$ erzeugt. Es bezeichne $B'(R)$ diese Basis. Weil für $e, f \in B(R)$ gilt

$$D(e) \cap D(f) = D(ef) = D(e \sqcap f), \qquad D(e) \cup D(f) = D(e+f-ef) = D(e \sqcup f)$$

(da für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ aus $(e+f-ef) \in \mathfrak{p}$, $e, f \notin \mathfrak{p}$ einerseits $ef(e+f-ef) \in \mathfrak{p}$, andererseits $ef(e+f-ef) = e^2 f + ef^2 - e^2 f^2 = ef \notin \mathfrak{p}$) und

$$\mathrm{Spec}(R) \setminus D(e) = D(1-e) = D(e^*),$$

ist $(B'(R), \cap, \cup, \complement)$ eine Boolesche Algebra. Vermöge $e \mapsto D(e)$ haben wir einen Epimorphismus Boolescher Algebren von $B(R)$ auf $B'(R)$. Dieser ist auch injektiv: Beachtet man, daß die zu der Booleschen Algebra $B(R)$ gehörige kanonische Halbordnung gerade durch $e \leq f \;\Leftrightarrow\; f$ teilt e gegeben ist, so sieht man, daß $e \neq f$ d.u.n.d., wenn e nicht f teilt oder f nicht e teilt. Sei nun $e \neq f$ aus $B(R)$, o.E. teile e nicht f. Für die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S := \{f^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, f\}$ und das Ideal $I := (e)$ ist dann $I \cap S = \varnothing$, nach dem Lemma von Krull ([**33**], I, Lemma 4.4) existiert also ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq I$ von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, für das damit $\mathfrak{p} \notin D(e)$, $\mathfrak{p} \in D(f)$, mithin $D(e) \neq D(f)$ gilt. Also ist $B(R) \cong B'(R)$.

Es ist stets $\mathrm{Spec}(R) \neq \varnothing$, weil $R \neq \{0\}$, und da $B'(R)$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, besteht $B'(R)$ aus offen-abgeschlossenen Mengen, $\mathrm{Spec}(R)$ ist also nulldimensional, darüber hinaus kompakt nach Lemma 7.6.6 (i). Jede offen-abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(R)$ ist damit sogar eine endliche Vereinigung von offen-abgeschlossenen Basismengen aus $B'(R)$, und damit mit einer Menge aus $B'(R)$ identisch. $B'(R)$ ist also die Menge aller offen-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$. Es bleibt der Nachweis der Hausdorffeigenschaft für $\mathrm{Spec}(R)$ übrig. Seien $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ aus $\mathrm{Spec}(R)$, o.B.d.A. $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$, und wähle $r \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q} \in D(r)$ und $\mathfrak{p} \in \complement D(r)$. Aber $D(r)$ ist offen-abgeschlossen, also folgt, daß $\mathrm{Spec}(R)$ Hausdorffsch ist. $\square$

Ist R ein regulärer Ring, so sprechen wir nun von den Elementen $\mathfrak{p}$ von $\mathrm{Spec}(R)$ als *Punkten* und von den Elementen f von R als *Funktionen.* Wir identifizieren jedes idempotente e von R mit der charakteristischen Funktion von $D(e)$, gelegentlich sogar mit der Menge $D(e)$ selbst.

Ist ferner $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel in der Sprache L der Ringe, $\mathfrak{p}$ ein Punkt in $\mathrm{Spec}(R)$ und $f_1, \ldots, f_n$ Funktionen in R, so sagen wir, $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ sei *wahr am Punkt* $\mathfrak{p}$, falls $R/\mathfrak{p} \models \varphi(f_1(\mathfrak{p}), \ldots, f_n(\mathfrak{p}))$. Wir sagen, $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ sei *wahr auf dem idempotenten Element* $e \in B(R)$, falls $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ an *jedem* Punkt von e wahr ist; $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ ist *falsch auf* e, falls $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ an *jedem* Punkt von e

falsch ist. (Es ist also denkbar, daß eine Formel an einem gegebenem Idempotenten weder wahr noch falsch ist.) Die grundlegende modelltheoretische Tatsache über von Neumann-reguläre Ringe ist die folgende ([**91**], S. 383):

LEMMA 7.6.8. *Sei $R \neq \{0\}$ ein regulärer Ring, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Formel, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in R^n$. Es existiert dann ein idempotentes Element $e \in B(R)$, so daß $\varphi(\mathbf{f})$ auf e wahr und auf $e^* = 1 - e$ falsch ist. (R enthält also die charakteristische Funktion der Menge aller Punkte, auf denen $\varphi(\mathbf{f})$ wahr ist.)*

BEWEIS. Wir wollen sehen, daß die Menge aller Punkte, auf denen $\varphi(\mathbf{f})$ wahr ist, eine offen-abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ bildet. Da das System der offen-abgeschlossenen Teilmengen gegen Boolesche Operationen abgeschlossen ist, reicht es, dieses für atomare L-Formeln φ einzusehen. Sei also $\varphi(\mathbf{x}) = (p(\mathbf{x}) = 0)$ mit einem Polynom p über R. Wir haben bereits im Beweis von Satz 7.6.7 gesehen, daß ein $e \in B(R)$ mit $D(p(\mathbf{f})) = D(e)$ existiert. Dann ist $\varphi(\mathbf{f})$ wahr auf $1 - e$ und falsch auf e. $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, den Modellbegleiter von $\mathcal{SKR}$ zu studieren. Es sei $\mathcal{SKR}^*$ die Klasse aller L-Strukturen, die folgenden Axiomen genügen:

(R1) Den Axiomen für nichttriviale von Neumann-reguläre Ringe (mit 1);

(R2) der Aussage: „Alle normierten Polynome positiven Grades haben eine Nullstelle“, d.h.
$$\forall y_0 \cdots \forall y_{n-1} \exists x \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} y_i x^i = 0 \right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N};$$

(R3) der Aussage: „Die Boolesche Algebra der idempotenten Elemente ist atomfrei“, d.h.
$$\forall x \exists y (0 \neq x = x^2 \to 0 \neq y = y^2 \wedge y \neq x \wedge xy = y).$$

Im Lichte unserer bisherigen Ergebnisse läßt sich der Gehalt von (R1)–(R3) wie folgt fassen: Ist R Modell von (R1)–(R3), so gilt:

(R1′) R kann als ein Ring von Funktionen auf einem Stoneschen Raum $\operatorname{Spec}(R)$ mit Werten in den Körpern $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ dargestellt werden,

(R2′) jeder der Körper $R/\mathfrak{p}$ ist algebraisch abgeschlossen,

(R3′) $\operatorname{Spec}(R)$ besitzt keine isolierten Punkte.

Wir zeigen zunächst:

LEMMA 7.6.9. *Die Klasse $\mathcal{SKR}^*$ ist konfinal in $\mathcal{SKR}$.*

BEWEIS. Sei R nichttrivialer semiprimer kommutativer Ring. Es ist $\operatorname{Spec}(R) \neq \varnothing$. Es sei X ein Stonescher Raum ohne isolierte Punkte (ein *Cantorscher Raum*); ein solcher existiert (vgl. §9.5). Die kanonische Repräsentation bettet R in ein Produkt von Integritätsbereichen $R/\mathfrak{p}$ ein, welche jeweils in einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K_\mathfrak{p}$ eingebettet werden können; sei $C_\mathfrak{p} := C(X; K_\mathfrak{p})$ der Ring der lokal konstanten Funktionen von X nach $K_\mathfrak{p}$. Identifiziere $K_\mathfrak{p}$ mit dem Unterring der konstanten Funktionen aus $C_\mathfrak{p}$ und setze $S := \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} C_\mathfrak{p}$. Wir haben also Einbettungen
$$R \to \prod R/\mathfrak{p} \to \prod K_\mathfrak{p} \to \prod C_\mathfrak{p} = S.$$

Wir behaupten: S ist aus $\mathcal{SKR}^*$. Da $\mathcal{SKR}^*$ unter Produktbildung abgeschlossen ist, reicht es, dies für $C_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ nachzuweisen. (R1) ist dabei schon in Prop. 7.6.5, (i) gezeigt worden. (R2) folgt sofort aus der Hilfsbehauptung

($*$) Für jedes $f \in C_\mathfrak{p}$ existiert eine endliche Zerlegung $U_1, \dots, U_k$ von X in offen-abgeschlossene Teilmengen, so daß f auf jedem U_i konstant ist.

($*$) ergibt sich, wie in Prop. 7.6.5 schon gezeigt wurde, unmittelbar aus der Kompaktheit und Nulldimensionalität von X. (R3) schließlich folgt daraus, daß X keine isolierten Punkte besitzt und Hausdorffsch ist. □

Wir können nun den Hauptsatz dieses Abschnitts beweisen:

Satz 7.6.10. (Carson-Lipshitz-Saracino, [**59**], [**91**]) $\mathcal{SKR}^*$ *ist der Modellbegleiter von* $\mathcal{SKR}$.

Beweis. Wir zeigen $\mathcal{E}(\mathcal{SKR}) = \mathcal{SKR}^*$. Die Inklusion $\mathcal{E}(\mathcal{SKR}) \subseteq \mathcal{SKR}^*$ ist klar: Ist $R \in \mathcal{SKR}$ existentiell abgeschlossen, so wende Lemma 7.6.9 an, um ihn in einen Ring $S \in \mathcal{SKR}^*$ einzubetten. Die Definition der existentiellen Abgeschlossenheit und ein Blick auf die Form der Axiome (R1)–(R3) zeigt, daß $R \in \mathcal{SKR}^*$ sein muß.

Umgekehrt sei R jetzt ein Modell von (R1)–(R3) und $S \supseteq R$ semiprim, ferner $\varphi \in \exists_1$, etwa $\varphi(\mathbf{y}) = \exists \mathbf{x}(\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ mit quantorenfreiem Kern $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, und $\mathbf{f}$ in R mit $S \models \varphi(\mathbf{f})$. Wir wollen zeigen, daß φ schon in R an der Stelle $\mathbf{f}$ gilt. Mit den üblichen Manipulationen kann man annehmen, daß ψ die Form

$$\psi = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{m} s_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0 \right)$$

mit Polynomen r_i, s_j besitzt ($m \geq n \geq 1$). Durch Anwendung von Lemma 7.6.9 kann man darüber hinaus $S \in \mathcal{SKR}^*$, insbesondere S regulär, voraussetzen.

Erinnern wir uns an die Deutung von R als Funktionenring auf $\operatorname{Spec}(R)$, so sehen wir, daß für $\mathbf{c}$ die Gültigkeit von ψ an der Stelle $(\mathbf{c}, \mathbf{f})$ in R gleichbedeutend ist mit

(i) Für alle $i = 1, \dots, n$ verschwindet die Funktion $r_i(\mathbf{c}, \mathbf{f})$ auf $\operatorname{Spec}(R)$, und
(ii) für alle $j = n+1, \dots, m$ verschwindet die Funktion $s_j(\mathbf{c}, \mathbf{f})$ an mindestens einem Punkt von $\operatorname{Spec}(R)$ nicht.

Wir betrachten deshalb die quantorenfreien $L(R)$-Formeln

$$\varrho_0(\mathbf{x}) := \left(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i = 0 \right) [\overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}], \quad \varrho_j(\mathbf{x}) := (\varrho_0 \wedge s_j \neq 0)\, [\overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}] \qquad (j = n+1, \dots, m).$$

Wir behaupten, daß die Erfüllbarkeit von $\psi[\overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ in R äquivalent ist zu

(α) $\exists \mathbf{x}(\varrho_0(\mathbf{x}))$ ist an jedem Punkt von $\operatorname{Spec}(R)$ wahr, und
(β) $\exists \mathbf{x}(\varrho_j(\mathbf{x}))$ ist an einem Punkt von $\operatorname{Spec}(R)$ wahr, für $j = n+1, \dots, m$.

Es ist zunächst trivial, daß die Erfüllbarkeit von $\psi[\overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ in R die Bedingungen (α), (β) zur Folge hat. Umgekehrt sei angenommen, (α), (β) wären erfüllt. Für jedes j wähle einen Punkt $\mathfrak{p}_j$, so daß $\exists \mathbf{x}(\varrho_j(\mathbf{x}))$ an $\mathfrak{p}_j$ wahr ist, und $\mathbf{c}_j$ in R, so daß $\varrho_j[\overline{\mathbf{c}_j}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ an $\mathfrak{p}_j$ wahr ist. Sei nach Lemma 7.6.8 e'_j die offen-abgeschlossene Menge (das idempotente Element), auf der $\varrho_j[\overline{\mathbf{c}_j}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ wahr ist. Wegen $\mathfrak{p}_j \in e'_j$ ist $e'_j \neq \varnothing$, und da $B(R)$ atomfrei ist, können wir offen-abgeschlossene $e_j \subseteq e'_j$ so wählen, daß die e_j nichtleer und disjunkt sind. Sei $e_0 := \complement \bigcup_{j=n+1}^{m} e_j$. An jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von e_0 wähle nun Elemente $\mathbf{c}_\mathfrak{p}$ von R gemäß (α), so daß ϱ_0 an der Stelle $(\mathbf{c}_\mathfrak{p}(\mathfrak{p}), \mathbf{f}(\mathfrak{p}))$ in $R/\mathfrak{p}$ gilt, und sei $e_\mathfrak{p}$ der Schnitt von e_0 mit der offen-abgeschlossenen Menge, auf der $\varrho_0[\overline{\mathbf{c}_\mathfrak{p}}/\mathbf{x}, \overline{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ gilt. Die Überdeckung $\{e_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p} \in e_0}$ von e_0 enthält dann eine endliche Teilüberdeckung $\{e_{\mathfrak{p}_i}\}_{i=1,\dots,k}$, und durch Verfeinerung können wir sogar $e'_{\mathfrak{p}_1}, \dots, e'_{\mathfrak{p}_k}$ finden mit $e'_{\mathfrak{p}_i} \subseteq e_{\mathfrak{p}_i}$, die eine Zerlegung von e_0 bilden. Definiere die Funktionen $\mathbf{c}$ auf $\mathrm{Spec}(R)$ durch

$$\mathbf{c}(\mathfrak{p}) := \begin{cases} \mathbf{c}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{p}), & \text{falls } \mathfrak{p} \in e'_{\mathfrak{p}_i}, \\ \mathbf{c}_j(\mathfrak{p}), & \text{falls } \mathfrak{p} \in e_j. \end{cases}$$

Dann sind die $\mathbf{c}$ aus R, da ja $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{k} e'_{\mathfrak{p}_i}\mathbf{c}_{\mathfrak{p}_i} + \sum_{j=n+1}^{m} e_j\mathbf{c}_j$. Ferner gilt nach Konstruktion ψ an der Stelle $(\mathbf{c}, \mathbf{f})$, was beweist, daß $\psi[\bar{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ in R erfüllbar ist.

Wir haben damit bewiesen, daß die Erfüllbarkeit von ψ in R (bzw. S) gleichwertig ist zur Gültigkeit von (α), (β) in R (bzw. S). Damit reduziert sich die Beweislast auf

$(*)$ Gilt (α), (β) in S, so gilt (α), (β) in R.

Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Wir behaupten: $\mathfrak{p}S$ ist ein echtes Ideal in S. Denn ist dies nicht der Fall, so existieren $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{p}$ und $s_1, \dots, s_n \in S$ mit $1 = s_1 f_1 + \dots + s_n f_n$, also, falls $\mathfrak{p}_1 := (f_1, \dots, f_n) \subseteq R$: $\mathfrak{p}_1 S = S$. Nun ist aber $\mathfrak{p}_1$ ein Hauptideal, da $\mathfrak{p}_1 = (f)$, $f := f_1 f_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup f_n f_n^{-1}$, wobei f_i^{-1} dasjenige eindeutig bestimme Quasiinverse zu f_i bezeichne, für welches $f_i(\mathfrak{q}) = 0 \Leftrightarrow f_i^{-1}(\mathfrak{q}) = 0$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt. Also $fS = S$, damit f eine Einheit und $\mathfrak{p}_1 = R$, mithin $\mathfrak{p} = R$, im Widerspruch zu $\mathfrak{p}$ Primideal. $\mathfrak{p}S$ ist somit ein echtes Ideal von S mit $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$. Mit dem Zornschen Lemma sei $\mathfrak{p}'$ ein echtes Ideal von S, welches maximal im Hinblick auf diese Eigenschaft ist. $\mathfrak{p}'$ ist ein maximales Ideal von S, da $\mathfrak{p}$ maximal in R ist, und es ist $\mathfrak{p}' \cap R = \mathfrak{p}$. Damit existiert für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ eine Einbettung

$$R/\mathfrak{p} \longrightarrow S/\mathfrak{p}'. \tag{7.6.23}$$

Wegen (R2′) ist $R/\mathfrak{p}$ algebraisch abgeschlossen. Da S (α) erfüllt, zeigt (7.6.23), daß R auch (α) erfüllt. Um (β) nachzuweisen, sei $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(S)$ ein Punkt, an dem $\exists\mathbf{x}(\varrho_j)[\bar{\mathbf{f}}/\mathbf{y}]$ gilt; setze $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}' \cap R \in \mathrm{Spec}(R)$, und folgere aus (7.6.23), daß $\exists\mathbf{x}(\varrho_j(\mathbf{x}, \mathbf{f}))$ auch an der Stelle $\mathfrak{p}$ gilt. □

Wir haben damit wieder ein Beispiel für eine Strukturklasse mit Modellbegleiter, aber ohne Modellvervollständigung:

Korollar 7.6.11. *Die Klasse $\mathcal{SKR}$ der semiprimen kommutativen Ringe besitzt keine Modellvervollständigung.*

Beweis. Sei S der Ring aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $]0;1[$, die sich zu stetigen Funktionen auf $[0;1]$ fortsetzen lassen. Sei R_1 der Ring aller reellwertigen Funktionen auf $]0;1[$ und R_2 der Ring aller reellwertigen Funktionen auf $[0;1]$. Dann ist $S \subseteq R_1$ und $S \hookrightarrow R_2$. (Die stetige Fortsetzung auf $[0;1]$ ist eindeutig.) Betrachte die Funktion $\mathrm{id} \in S$. Sie ist invertierbar in R_1, aber ein Nullteiler in R_2. R_1 und R_2 können also nicht über S amalgamiert werden. Nach dem Satz von Carson-Lipshitz-Saracino und Satz 7.4.5 besitzt $\mathcal{SKR}$ keine Modellvervollständigung. □

Betrachten wir jedoch nur die Teilklasse $\mathcal{RKR} \subseteq \mathcal{SKR}$ der von Neumann-regulären Ringe, so gilt:

Satz 7.6.12. (Cohn, [**64**]) *$\mathcal{RKR}$ besitzt die A.E.*

([**64**] behandelt den weit schwierigeren nichtkommutativen Fall; für den Begriff der Regularität eines beliebigen Ringes vgl. Def. 7.9.1.)

Korollar 7.6.13. *$\mathcal{SKR}^*$ ist die Modellvervollständigung von $\mathcal{RKR}$.* $\square$

Beweis (Satz 7.6.12). Seien R, R_1, R_2 reguläre Ringe mit $R \subseteq R_1 \cap R_2$. Seien $\{K_i\}_{i\in I}$, $\left\{K_{i_k}^{(k)}\right\}_{i_k\in I_k}$ $(k = 1,2)$ die Faktoren der kanonischen Repräsentationen von R, R_1, R_2, also $R \hookrightarrow \prod_{i\in I} K_i$, $R_k \hookrightarrow \prod_{i_k\in I_k} K_{i_k}^{(k)}$ $(k = 1,2)$. Im Beweis von Satz 7.6.10 haben wir gesehen, daß zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von R ein Primideal $\mathfrak{q}_k$ von R_k existiert mit $R \cap \mathfrak{q}_k = \mathfrak{p}$, also $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R_k/\mathfrak{q}_k$; $k = 1,2$. Also erhält man surjektive Abbildungen $\varphi_k \colon I_k \to I$ mit Einbettungen $f_{i_k}^{(k)} \colon K_{\varphi_k(i_k)} \hookrightarrow K_{i_k}^{(k)}$ für alle $i_k \in I_k$. Wir haben Einbettungen $\prod_{i\in I} K_i \hookrightarrow \prod_{i_k\in I_k} K_{i_k}^{(k)}$ vermöge $(a_i)_{i\in I} \mapsto \left(f_{i_k}^{(k)}\left(a_{\varphi_k(i_k)}\right)\right)_{i_k\in I_k}$ für $k = 1,2$. Daher können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß folgende Situation vorliegt: Es ist $I = I_1 = I_2$ und $K_i \subseteq K_i^{(k)}$ für alle $i \in I$, $k = 1,2$. Amalgamiere nun $K_i^{(1)}$ und $K_i^{(2)}$ über K_i zu einem Körper L_i mit Einbettungen $g_i^{(k)} \colon K_i^{(k)} \hookrightarrow L_i$ $(i \in I,\ k = 1,2)$. Wir setzen $T := \prod_{i\in I} L_i$, $g_k := \left(g_i^{(k)}\right)_{i\in I}$ $(k = 1,2)$. Dann sind g_1 bzw. g_2 Einbettungen $\prod_{i\in I} K_i^{(1)} \hookrightarrow T$ bzw. $\prod_{i\in I} K_i^{(2)} \hookrightarrow T$, also $g_1|R_1$, $g_2|R_2$ Einbettungen $R_1 \hookrightarrow T$, $R_2 \hookrightarrow T$, und da $g_i^{(1)}|K_i = \mathrm{id} = g_i^{(2)}|K_i$ für alle $i \in I$, ist $g_1|R = \mathrm{id} = g_2|R$. $\square$

Einen weiteren Beweis für Satz 7.6.12 findet man in Bem. 7.9.6.— Im Beweis des Satzes von Carson-Lipshitz-Saracino spielte die Darstellbarkeit regulärer Ringe als Ringe von Funktionen auf ihrem Spektrum mit Werten in Körpern und die Existenz eines Modellbegleiters für die Klasse (hier $\mathcal{K}$ö) dieser „Wertebereiche“ die zentrale Rolle; Macintyre [**102**] und Weispfenning [**175**] haben diese Idee für Garben von Strukturen bzw. subdirekte Produkte verallgemeinert.

7.7. Existentiell abgeschlossene Gruppen

Sei $\mathcal{G}$ die Klasse der Gruppen bzgl. der Sprache $L = \{1, \cdot, ^{-1}\}$. $\mathcal{G}$ ist $\forall_2$-axiomatisierbar und also elementar und induktiv. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, daß die Klasse $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ der existentiell abgeschlossenen Gruppen nicht elementar ist. Der Beweis beruht sehr stark auf der Tatsache, daß in $\mathcal{G}$ die A.E. gilt; genauer werden wir dazu das „freie Produkt von Gruppen mit amalgamierter Untergruppe“ einführen. (Man kann diese Konstruktion auf andere Klassen von Strukturen verallgemeinern; siehe hierzu etwa [**18**], I, §4, oder auch [**64**]. Mehr über die Bedeutung derselben in der Gruppentheorie erfährt man in [**37**], §11.)

Definition 7.7.1. Sei $\{G_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe H. Eine *freie Komposition von $\{G_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierter Untergruppe H* ist eine Gruppe P zusammen mit einer Familie $\{j_i\}_{i\in I}$ von Homomorphismen $j_i \colon G_i \to P$ mit $j_i|H = j_{i'}|H$ für alle $i, i' \in I$, so daß es für jede Gruppe G und jede Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ von Homomorphismen $f_i \colon G_i \to G$ mit $f_i|H = f_{i'}|H$ für jedes $i, i' \in I$ genau einen Homomorphismus $\varphi \colon P \to G$ mit $\varphi \circ j_i = f_i$ für alle $i \in I$ gibt:

$$\begin{array}{ccc} G_i & = & G_i \\ {\scriptstyle j_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ P & \xrightarrow{\exists\varphi} & G \end{array}$$

$(P, \{j_i \colon G_i \to P\}_{i\in I})$ heißt *freies Produkt von $\{G_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierter Untergruppe H,* falls alle j_i sogar Einbettungen sind. $(P, \{j_i \colon G_i \to P\}_{i\in I})$ heißt *freies*

Produkt von $\{G_i\}_{i\in I}$, falls es ein freies Produkt von $\{G_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierter Untergruppe $\langle 1\rangle$ ist, wobei $\langle 1\rangle$ die triviale Gruppe bezeichne.

Die freie Komposition der Familie $\{G_i\}$ mit amalgamierter Untergruppe H ist also nichts anderes als ein Spezialfall der Fasersumme von $\{G_i\}$ über H in der Kategorie der Gruppen, die freie Komposition der G_i mit amalgamierter Untergruppe $\langle 1\rangle$ nichts anderes als das Koprodukt, ist also einfach dual zum Produkt der G_i definiert. Freie Kompositionen mit amalgamierter Untergruppe $\langle 1\rangle$ sind nichts weiter als freie Produkte:

Lemma 7.7.2. *Ist P zusammen mit $\{j_i\}_{i\in I}$ eine freie Komposition von $\{G_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierter Untergruppe $\langle 1\rangle$, so sind die Homomorphismen j_i Einbettungen. Jedes Koprodukt in der Kategorie der Gruppen ist also ein freies Produkt, u.u.*

Beweis. Sei $i_0 \in I$. Betrachte die Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ mit $f_i\colon G_i \to G_{i_0}, x \mapsto 1$ für $i \in I \setminus \{i_0\}$ und $f_{i_0} := \mathrm{id}_{G_{i_0}}$. Dann gibt es $\varphi\colon P \to G$ mit $\varphi \circ j_i = f_i$ für alle $i \in I$, insbesondere $\varphi \circ j_{i_0} = \mathrm{id}_{G_{i_0}}$, also ist j_{i_0} injektiv. $\square$

Da sich freie Kompositionen (und Produkte) mit amalgamierter Untergruppe aus freien Produkten konstruieren lassen, wie wir später sehen werden, werden wir uns also nun hauptsächlich mit freien Produkten befassen. Die Einbettungen $j_i\colon G_i \hookrightarrow P$ werden in der Notation des freien Produkts in Zukunft meist unterdrückt; wir nehmen oft gleich $G_i \subseteq P$ an.

Als Lösung eines universellen Problems ist die freie Komposition (das freie Produkt) einer Familie von Gruppen mit amalgamierter Untergruppe bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt:

Satz 7.7.3. *Sind P und Q freie Kompositionen (freie Produkte) von $\{G_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierter Untergruppe H, so ist $P \cong Q$.*

Beweis. Sind $j_i\colon G_i \to P$, $k_i\colon G_i \to Q$ die zu P bzw. Q gehörigen Homomorphismen, so wähle Homomorphismen $\varphi\colon P \to Q$ und $\psi\colon Q \to P$ mit $\varphi \circ j_i = k_i$ und $\psi \circ k_i = j_i$ für alle $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_i"'] & G_i \arrow[d, "k_i"] \\ P \arrow[r, "\varphi"] & Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, equal] \arrow[d, "k_i"'] & G_i \arrow[d, "j_i"] \\ Q \arrow[r, "\psi"] & P \end{tikzcd}$$

Auch die Diagramme

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_i"'] & G_i \arrow[d, "j_i"] \\ P \arrow[r, "\psi\circ\varphi"] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_i"'] & G_i \arrow[d, "j_i"] \\ P \arrow[r, "\mathrm{id}_P"] & P \end{tikzcd}$$

kommutieren. Also ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_P$ und analog $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Q$. $\square$

Bemerkung. Wegen des letzten Satzes dürfen wir von *dem* freien Produkt der Familie $\{G_i\}_{i\in I}$ sprechen. Wir notieren es (in Analogie zum Produkt) als $\coprod_{i\in I} G_i$; das freie Produkt endlich vieler Gruppen $G_1, \ldots, G_n$ schreibt man als $G_1 \amalg \cdots \amalg G_n$. Ebenso ist es natürlich erlaubt, *das* freie Produkt mit amalgamierter Untergruppe H zu schreiben; wir notieren dies im Fall zweier Gruppen G_1, G_2 mit amalgamierter Untergruppe H als $G_1 \amalg_H G_2$.

Beispiel. Sei $\{G_i\}_{i\in I}$ eine Familie (additiv geschriebener) abelscher Gruppen. Bekanntlich ist deren direkte Summe $G := \bigoplus_{i\in I} G_i$ die Untergruppe des direkten Produkts $\prod_{i\in I} G_i$, die aus allen Familien $\{g_i\}_{i\in I}$ mit nur endlich vielen $g_i \neq 0$ besteht; man hat kanonische Einbettungen $j_i\colon G_i \hookrightarrow G$ vermöge $(j_i(g))(k) := \delta_{ik}g$ für $k \in I$. Offenbar ist $G = \coprod_{i\in I} G_i$.

Allgemein gilt:

Satz 7.7.4. *Die Kategorie der Gruppen besitzt Koprodukte, d.h.: Zu jeder Familie $\{G_i\}_{i\in I}$ von Gruppen existiert das freie Produkt.*

Beweis. O.B.d.A. seien die $G_i^* := G_i \setminus \{1\}$ paarweise disjunkt. Betrachte Wörter über dem Alphabet $A := \bigcup_{i\in I} G_i^*$. Ein solches Wort heiße *reduziert,* falls in ihm nicht zwei Elemente aus demselben G_i^* benachbart vorkommen; es bezeichne P die Menge aller reduzierten Wörter über A. Wir definieren eine Multiplikation auf P wie folgt: Seien $v = a_1 \dots a_m, w = b_1 \dots b_n \in P$. Liegen a_m und b_1 im selben G_i^* und ist $a_m \cdot b_1 \neq 1$, so sei

$$v \cdot w := a_1 \dots a_{m-1}(a_m b_1)b_2 \dots b_n.$$

Liegen a_m und b_1 im selben G_i^* und ist $a_m \cdot b_1 = 1$, so sei rekursiv

$$v \cdot w := (a_1 \dots a_{m-1}) \cdot (b_2 \dots b_n).$$

Liegen a_m und b_1 schließlich in verschiedenen G_i^*, so sei

$$v \cdot w := a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n.$$

Daß P mit dieser Multiplikation eine Gruppe bildet, zeigen wir bequemerweise mit einem sogenannten *van-der-Waerden-Trick:* Wir zeigen nämlich, daß P isomorph zu einer gewissen Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{S}_P$ der Permutationen auf P ist. Definiere hierzu für jedes $a \in A$ die Funktion $|a|\colon P \to P$ durch

$$|a|(a_1 \dots a_m) := \begin{cases} (aa_1)a_2 \dots a_m, & \text{falls } a \text{ und } a_1 \text{ aus demselben } G_i^* \text{ und } aa_1 \neq 1,\\ a_2 \dots a_m, & \text{falls } a \text{ und } a_1 \text{ aus demselben } G_i^* \text{ und } aa_1 = 1,\\ aa_1a_2 \dots a_m, & \text{falls } a \text{ und } a_1 \text{ aus verschiedenen } G_i^*. \end{cases}$$

Da für $a \in A$ stets $|a| \circ |a^{-1}| = \mathrm{id}_P = |a^{-1}| \circ |a|$, ist $|a| \in \mathfrak{S}_P$ und $|a|^{-1} = |a^{-1}|$. Definiere nun F als die von $\{|a| : a \in A\}$ in $\mathfrak{S}_P$ erzeugte Untergruppe. Jedes Element $\sigma \in F$ läßt sich schreiben als $\sigma = |a_1| \circ \dots \circ |a_m|$, wobei $a_1 \dots a_m \in P$, da für $a \in A$ ja $|a|^{-1} = |a^{-1}|$ und für $a, b \in G_i^*$ immer $|a| \circ |b| = |ab|$. Diese Darstellung ist auch eindeutig, denn sind $a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n \in P$ mit $|a_1| \circ \dots \circ |a_m| = \sigma = |b_1| \circ \dots \circ |b_n|$, so ist $a_1 \dots a_m = \sigma(\varepsilon) = b_1 \dots b_n$, wobei ε das leere Wort in P bezeichne. Man zeigt nun leicht, daß die wohldefinierte Zuordnung $a_1 \dots a_m \mapsto |a_1| \circ \dots \circ |a_m|$ von P nach F einen Isomorphismus bildet. Also ist P auch eine Gruppe (mit neutralem Element ε).

Schließlich zeigen wir, daß P zusammen mit den kanonischen Einbettungen $j_i\colon x \mapsto x$ für $x \in G_i^*$, $1 \mapsto \varepsilon$ ein freies Produkt von $\{G_i\}_{i\in I}$ ist. Sei hierzu eine Gruppe G gegeben und eine Familie $\{f_i\}_{i\in I}$ von Homomorphismen $f_i\colon G_i \to G$. Zu zeigen ist, daß nun genau ein Homomorphismus $\varphi\colon P \to G$ existiert mit $\varphi \circ j_i = f_i$. Zum Existenznachweis definiere φ durch $a_1 \dots a_m \mapsto f_{i_1}(a_1) \cdots f_{i_m}(a_m)$, falls $a_t \in G_{i_t}^*$ $(1 \leq t \leq m)$. Die Eindeutigkeit erhält man so: Seien $\varphi, \varphi'\colon P \to G$ zwei

Homomorphismen mit $\varphi \circ j_i = f_i = \varphi' \circ j_i$. Sei $a_1 \dots a_m \in P$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 \dots a_m) &= \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_m) \\ &= f_{i_1}(a_1) \cdots f_{i_m}(a_m) \\ &= \varphi'(a_1) \cdots \varphi'(a_m) \\ &= \varphi'(a_1 \dots a_m),\end{aligned}$$

wobei die i_t $(1 \leq t \leq m)$ so gewählt seien, daß $a_t \in G_{i_t}^*$. □

KOROLLAR 7.7.5. (Normalform) *Sei $g \in \coprod_{i \in I} G_i$. Dann hat g eine eindeutige Darstellung als $g = g_1 \cdots g_m$, wobei benachbarte g_j in verschiedenen G_i^* liegen.* □

ÜBUNG. Zeige: Eine freie Gruppe F ist freies Produkt unendlicher zyklischer Gruppen.

Damit können wir nun auch freie Kompositionen mit amalgamierter Untergruppe konstruieren. Wir benötigen nur den Spezialfall (allg. vgl. [**18**], II, §7):

SATZ 7.7.6. *Seien G_1, G_2 Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe H. Dann existiert eine freie Komposition von G_1 und G_2 mit Amalgam H.*

BEWEIS. Wir gehen von G_1 und G_2 zu isomorphen disjunkten Gruppen A_1, A_2 über; seien $i_1 \colon G_1 \xrightarrow{\cong} A_1$, $i_2 \colon G_2 \xrightarrow{\cong} A_2$. Betrachte $P := (A_1 \amalg A_2)/N$, wobei N der kleinste Normalteiler von $A_1 \amalg A_2$ sei, der $\{i_1(h)i_2(h^{-1}) : h \in H\}$ umfaßt. Dann ist P zusammen mit $j_1 := \pi_1 \circ i_1 \colon G_1 \to P$ und $j_2 := \pi_2 \circ i_2 \colon G_2 \to P$, wobei $\pi_i \colon A_i \to (A_1 \amalg A_2)/N$, $a_i \mapsto a_i N$ $(i = 1, 2)$ sei, eine (und damit *die*) freie Komposition von G_1, G_2 mit amalgamierter Untergruppe H. Denn man sieht sofort, daß $j_1|H = j_2|H$. Sei nun G mit $f_1 \colon G_1 \to G$, $f_2 \colon G_2 \to G$ eine weitere Gruppe mit Homomorphismen f_1, f_2, so daß $f_1|H = f_2|H$. Die Definition des freien Produkts ergibt einen eindeutig bestimmen Homomorphismus $\psi \colon A_1 \amalg A_2 \to G$ mit $\psi|A_1 = f_1 \circ i_1^{-1}$, $\psi|A_2 = f_2 \circ i_2^{-1}$. Sind $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, so $\psi(a_1 a_2) = f_1(i_1^{-1}(a_1)) f_2(i_2^{-1}(a_2))$. Für alle $h \in H$ ist dann

$$\psi(i_1(h)i_2(h^{-1})) = f_1(h) f_2(h^{-1}) = 1,$$

da $f_1|H = f_2|H$; also $N \subseteq \ker \psi$. Damit induziert ψ einen Homomorphismus $\varphi \colon (A_1 \amalg A_2)/N \to G$ mit $\varphi(j_1(g_1)) = \varphi(i_1(g_1)N) = \psi(i_1(g_1)) = f_1(g_1)$ für $g_1 \in G_1$, analog $\varphi(j_2(g_2)) = f_2(g_2)$ für $g_2 \in G_2$. φ ist eindeutig bestimmt, da P von den N-Nebenklassen von $i_1(G_1) \cup i_2(G_2)$ erzeugt wird. □

Wir wollen nun zeigen, daß die eben konstruierte freie Komposition zweier Gruppen mit amalgamierter Untergruppe bereits ein freies Produkt mit amalgamierter Untergruppe darstellt, also in Verallgemeinerung von Lemma 7.7.2, daß — im Fall zweier Gruppen — freie Kompositionen von Strukturen mit amalgamierter Unterstruktur mit den freien Produkten von Strukturen mit amalgamierter Unterstruktur zusammenfallen. (Dies gilt allgemein auch für beliebige Familien von Gruppen, vgl. [**18**], II, §7, und I, §4.) Dazu benötigen wir eine Normalform für die Elemente von $G_1 \amalg_H G_2$.

Wir gehen aus von zwei Gruppen G_1, G_2 mit einer Untergruppe $H \subseteq G_1 \cap G_2$ und wählen Isomorphismen $i_1 \colon G_1 \to A_1$, $i_2 \colon G_2 \to A_2$ auf Gruppen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Sei $\theta := i_2 \circ i_1^{-1}|H_1 \colon H_1 \xrightarrow{\cong} H_2$ mit $H_1 := i_1(H)$, $H_2 := i_2(H)$. Für jedes $i = 1, 2$ wähle ein Repräsentantensystem der linken Nebenklassen von H_i in A_i, wobei der Repräsentant der Nebenklasse H_i gleich 1 sei; für $a \in A_i$ bezeichne

$l(a)$ den so gewählten Repräsentanten von aH_i. Eine *Normalform* wollen wir jedes Element von $A_1 \amalg A_2$ der Gestalt $l(a_1)l(a_2)\dots l(a_n)h$ nennen, wobei $h \in H_1$, $n \geq 0$, und benachbarte $l(a_j)$ in verschiedenen A_i liegen. (Man beachte, daß l sowohl die Auswahlfunktion auf A_1 als auch auf A_2 bezeichnet, also auf $A_1 \cup A_2$ definiert ist.) Im Fall $H = \langle 1 \rangle$ stimmt diese Normalform (bis auf eine rechts zu entfernende $1 \in H_1$) mit der in Kor. 7.7.5 über das reduzierte Wort hergeleiteten überein.

Satz 7.7.7. (Normalform) *Seien G_1, G_2 Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe H, und A_1, A_2, H_1, H_2, θ wie eben konstruiert. Dann besitzt jedes Element $wN \in G_1 \amalg_H G_2$ eine eindeutig bestimme Normalform $F(w)$ mit $wN = F(w)N$, wobei gemäß Satz 7.7.6 $G_1 \amalg_H G_2 \cong (A_1 \amalg A_2)/N$ mit N als dem kleinsten $\{h\theta(h^{-1}) : h \in H_1\}$ umfassenden Normalteiler sei.*

Beweis. Jede Nebenklasse von N in $A_1 \amalg A_2$ hat einen Repräsentanten $w = a_1 \dots a_n$, wobei benachbarte a_i, a_{i+1} in verschiedenen A_j liegen. (Kor. 7.7.5.) Wir zeigen durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, daß zu jeder Nebenklasse wN eine Normalform $F(w)$ mit $wN = F(w)N$ existiert.

$n = 0$ ist trivial. Sei $n = 1$, also $w = a_1$ für ein $a_1 \in A_1 \cup A_2$. Wir schreiben $a_1 = l(a_1)h$ mit $h \in H_1 \cup H_2$. Ist $h \in H_1$, so ist $F(w) := l(a_1)h$ eine Normalform für wN, ist $h \in H_2$, so wähle $F(w) := l(a_1)\theta^{-1}(h)$. Sei nun $n > 1$ und $F(a_1 \dots a_{n-1}) = l(b_1)\dots l(b_m)h$ nach Induktionsvoraussetzung. Wir definieren $F(w)$ wie folgt:

(i) Ist $a_n \in A_1$, so unterscheiden wir: Ist $m > 0$ und $l(b_m) \in A_1$, so $l(b_m)ha_n = l(l(b_m)ha_n)h'$ für ein eindeutig bestimmtes $h' \in H_1$, so daß
$$F(w) := l(b_1)\dots l(b_{m-1})l(l(b_m)ha_n)h'$$
eine Normalform in wN ist. Ist $m = 0$ oder $l(b_m) \in A_2$, so $ha_n = l(ha_n)h''$ für genau ein $h'' \in H_1$, also ist
$$F(w) := l(b_1)\dots l(b_{m-1})l(ha_n)h''$$
eine Normalform in wN.

(ii) Sei $a_n \in A_2$. Ist $m > 0$, so $l(b_m)ha_n = l(b_m)\theta^{-1}(h)a_n \pmod N$. Also wird, falls $m > 0$ und $l(b_m) \in A_2$, durch
$$F(w) := l(b_1)\dots l(b_{m-1})l(l(b_m)\theta(h)a_n)\theta^{-1}(h')$$
eine Normalform in wN gegeben, mit $h' \in H_2$ so, daß $l(l(b_m)\theta(h)a_n)h' = l(b_m)\theta(h)a_n$. Ist $m = 0$ oder $l(b_m) \in A_1$, so sei
$$F(w) := l(b_1)\dots l(b_m)l(\theta(h)a_n)\theta^{-1}(h'')$$
mit $h'' \in H_2$ dergestalt, daß $l(\theta(h)a_n)h'' = \theta(h)a_n$.

Die Eindeutigkeit dieser Normalform zeigen wir mit dem van der Waerden-Trick durch Angabe eines Homomorphismus Φ mit Urbildbereich $(A_1 \amalg A_2)/N$, für den gilt: Ist $F(w) \neq F(w')$, so $\Phi(F(w)N) \neq \Phi(F(w')N)$. Sei M die Menge aller Normalformen. Ist $a \in A_i$, so definiere die Funktion $|a|\colon M \to M$ durch
$$|a|(l(a_1)\dots l(a_n)h) := F([al(a_1)\dots l(a_n)h]),$$
wobei $[w]$ die zu einem Wort w gemäß Kor. 7.7.5 gehörige Normalform bzgl. $A_1 \amalg A_2$ sei. Offensichtlich ist $|1| = \mathrm{id}_M$, und durch Fallunterscheidung zeigt man leicht, daß für $a, a' \in A_1 \cup A_2$ stets $|a| \circ |a'| = |aa'|$. Also insbesondere $|a^{-1}| = |a|^{-1}$, und jedes $|a|$ ist eine Permutation von M. Ist $\mathfrak{S}_M$ die Gruppe der Permutationen von M, so ist $a \mapsto |a|$ ein Homomorphismus $A_i \to \mathfrak{S}_M$ für $i = 1, 2$. Insbesondere ist für $h \in H_1 \subseteq A_1$ die Abbildung $|h|\colon M \to M$ definiert, und $|h| = |\theta(h)|$. Mit der definierenden

Eigenschaft des freien Produkts können wir nun einen Homomorphismus $\varphi\colon A_1 \amalg A_2 \to \mathfrak{S}_M$ finden mit

$$\varphi(l(a_1)\dots l(a_n)h) = |l(a_1)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |h|.$$

Es ist $N \subseteq \ker\varphi$, also induziert φ einen Homomorphismus $\Phi\colon (A_1 \amalg A_2)/N \to \mathfrak{S}_M$ durch

$$\Phi(l(a_1)\dots l(a_n)hN) = \varphi(l(a_1)\dots l(a_n)h) = |l(a_1)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |h|.$$

Nun gilt $(|l(a_1)| \circ \dots \circ |l(a_n)| \circ |h|)(1) = l(a_1)\dots l(a_n)h$, also $\Phi(wN)(1) = F(w)$. Wäre also $G(w)$ eine weitere Normalform in wN, so wäre auch $\Phi(wN)(1) = G(w)$, also $G(w) = F(w)$. □

KOROLLAR 7.7.8. *Seien G_1, G_2 Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe H. Dann existiert das freie Produkt $G_1 \amalg_H G_2$ von G_1, G_2 mit amalgamierter Untergruppe H und stimmt mit der freien Komposition von G_1, G_2 mit amalgamierter Untergruppe H überein.*

BEWEIS. Seien A_1, A_2, N wie eben. Zu zeigen ist nur: $A_i \to (A_1 \amalg A_2)/N, a_i \mapsto a_iN$ ist eine Einbettung. Ist aber $a_i \in N$, so $F(a_i)N = a_iN = N = F(1)N$, also wegen der Eindeutigkeit der Normalform $F(a_i) = F(1) = 1$, und dies ist nur für $a_i = 1$ möglich. □

Wir erhalten daraus unmittelbar [**144**]:

KOROLLAR 7.7.9. *Die Klasse $\mathcal{G}$ der Gruppen besitzt die A.E.*

BEWEIS. Sind H, G_1, G_2 Gruppen mit $G_1 \cap G_2 = H$, so betrachte $P := G_1 \amalg_H G_2$ mit den kanonischen Einbettungen $G_1 \overset{j_1}{\hookrightarrow} P$, $G_2 \overset{j_1}{\hookrightarrow} P$, $j_1|H = j_2|H$. Mit Bem. 5.6.2 folgt die Behauptung. □

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir:

LEMMA 7.7.10. *Sei G eine Gruppe, A eine Untergruppe von G, $u \notin G$ und $\langle u \rangle$ die von u frei erzeugte zyklische Gruppe. Sei $P := G \amalg \langle u \rangle$, und U die von $G \cup u^{-1}Au$ erzeugte Untergruppe von P. Dann ist $U = G \amalg u^{-1}Au$.*

BEWEIS. Wähle einen Homomorphismus $\varphi\colon G \amalg u^{-1}Au \to U$ mit $\varphi|G = \mathrm{id}$ und $\varphi|u^{-1}Au = \mathrm{id}$. φ ist surjektiv, da $\varphi(G \amalg u^{-1}Au)$ eine Untergruppe von U ist, die G und $u^{-1}Au$, also ganz U enthält. φ ist auch injektiv, denn sind $g_1, \dots, g_m \in G$, $a_1, \dots, a_m \in A$ mit

$$\varphi(g_1u^{-1}a_1ug_2u^{-1}a_2u \cdots u^{-1}a_mu) = 1,$$

so $g_1u^{-1}a_1ug_2u^{-1}a_2u \cdots u^{-1}a_mu = 1$ in U und damit in P, was wegen der Eindeutigkeit der Normalform nur für $m = 0$ möglich ist. □

Wir können damit folgenden schönen Satz beweisen. (Er besagt, daß jeder Isomorphismus zwischen Untergruppen einer festen Gruppe G zu einem sog. *inneren Automorphismus* einer geeigneten größeren Gruppe H fortgesetzt werden kann, d.h. einem Automorphismus, der durch die Konjugation $x \mapsto t^{-1}xt$ mit einem festen $t \in H$ gegeben ist.)

SATZ 7.7.11. (Higman-Neumann-Neumann, [**82**]) *Seien G eine Gruppe, A, B Untergruppen von G und $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus. Dann existiert eine Gruppe $H \supseteq G$ und ein $t \in H$ derart, daß $\varphi(a) = t^{-1}at$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Sei $u \notin G$ und $\langle u \rangle$ die von u frei erzeugte zyklische Gruppe, sowie $P := G \amalg \langle u \rangle$. Wir können o.E. P als Erweiterung von G annehmen. Sei U die von $G \cup u^{-1}Au$ und V die von $G \cup u^{-1}Bu$ erzeugte Untergruppe von P. Nach Lemma 7.7.10 ist $U = G \amalg u^{-1}Au$ und $V = G \amalg u^{-1}Bu$. Die Zuordnung $u^{-1}au \mapsto u^{-1}\varphi(a)u$ für $a \in A$ definiert einen Homomorphismus von $u^{-1}Au$ nach V. Daher gibt es einen Homomorphismus $\theta\colon U \to V$ mit $\theta|G = \mathrm{id}$ und $\theta(u^{-1}au) = u^{-1}\varphi(a)u$ für alle $a \in A$. Da φ injektiv ist, überprüft man mit Hilfe der Normalform für Elemente aus V sofort, daß $\ker\theta = \{1\}$, also θ eine Einbettung ist. Da V von G und $u^{-1}Bu$ erzeugt wird und φ surjektiv ist, muß auch θ surjektiv sein. Also haben wir $\theta\colon U \xrightarrow{\cong} V$ mit $\theta|G = \mathrm{id}$ und $\theta(u^{-1}au) = u^{-1}\varphi(a)u$ für alle $a \in A$. Betrachtet man θ als eine Einbettung von U in P, so erhält man mit Kor. 7.7.9 eine Gruppe $H \supseteq P$ und eine Einbettung $\psi\colon P \to H$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & P \\ {\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ P & \xrightarrow{\exists\psi} & H \end{array}$$

mit $U \subseteq P \subseteq H$ kommutativ wird. Damit haben wir für jedes $a \in A$:

$$u^{-1}au = \psi(\theta(u^{-1}au)) = \psi(u^{-1})\psi(\varphi(a))\psi(u) = (\psi(u))^{-1}\varphi(a)\psi(u),$$

da $\psi|G = \mathrm{id}$. Somit ist $\varphi(a) = (u\psi(u)^{-1})^{-1}a(u\psi(u)^{-1})$, d.h. wir können $t := u\psi(u)^{-1}$ wählen. □

Korollar 7.7.12. *Sei G eine existentiell abgeschlossene Gruppe, A, B endlich erzeugte Untergruppen von G, und $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus. Dann existiert ein $t \in G$, so daß für alle $a \in A$ gilt: $t^{-1}at = \varphi(a)$. (Existentiell abgeschlossene Gruppen sind also insbesondere ultrahomogen im Sinne von Def. 5.6.4.)*

Beweis. Nach dem Satz von Higman, Neumann und Neumann existiert eine Gruppe $H \supseteq G$, so daß der Satz

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x^{-1}a_i x = \varphi(a_i) \right)$$

in H bzgl. $L(A)$ gilt, wobei $a_1, \ldots, a_n$ erzeugende Elemente von A seien. Da G existentiell abgeschlossen in $\mathcal{G}$ ist, gilt er auch in G. Sei t ein Element von G mit $t^{-1}a_i t = \varphi(a_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist die Abbildung $\theta\colon G \to G$, die durch $\theta(a) := t^{-1}at$ gegeben ist, ein innerer Automorphismus von G, die mit φ auf $a_1, \ldots, a_n$ und somit auf A übereinstimmt. □

Lemma 7.7.13. *Jede existentiell abgeschlossene Gruppe G enthält unendlich viele Elemente der Ordnung n für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und H das direkte Produkt unendlich vieler Kopien der zyklischen Gruppe der Ordnung n, und $G' := G \times H$. Dann gilt in G' für alle $k \in \mathbb{N}$ der Satz φ_k, wobei

$$\varphi_k := \exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \left(x_i^n = 1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} x_i^j \neq 1 \right) \wedge \bigwedge_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{k} x_r \neq x_s \right),$$

und somit auch $G \models \varphi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Damit kommen wir zum ersten wichtigen Ergebnis über $\mathcal{E}(\mathcal{G})$:

Satz 7.7.14. (Macintyre, [**101**]) *$\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ist nicht elementar, i.e. die Klasse der Gruppen besitzt keinen Modellbegleiter.*

Beweis. Sei $G \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, a und b zwei Elemente von G derselben Ordnung. Dann gibt es ein $t \in G$ mit $t^{-1}at = b$. (Kor. 7.7.12, angewendet auf $\varphi\colon \langle a\rangle \xrightarrow{\cong} \langle b\rangle$ mit $\varphi(a) = b$.)

Angenommen nun, $\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \mathrm{Mod}(\Delta)$ für eine Satzmenge Δ. Fügt man zu L neue Konstanten a und b hinzu, so ist also die $\{1, \cdot, {}^{-1}, a, b\}$-Satzmenge

$$\Delta \cup \big\{a^n \neq 1 : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{b^n \neq 1 : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{\neg\exists x(x^{-1}ax = b)\big\}$$

inkonsistent. Also gibt es nach dem Kompaktheitssatz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß bereits

$$\Delta \cup \big\{a^n \neq 1 : 1 \leq n \leq N\big\} \cup \big\{b^n \neq 1 : 1 \leq n \leq N\big\} \cup \big\{\neg\exists x(x^{-1}ax = b)\big\}$$

inkonsistent ist. Da $\mathcal{G}$ induktiv ist, ist aufgrund des Existenzsatzes für generische Strukturen wegen $\mathcal{G} \neq \varnothing$ und der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ auch $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \neq \varnothing$. Wähle also $G \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ und expandiere G zu einer $\{1, \cdot, {}^{-1}, a, b\}$-Struktur G', wobei a und b gemäß Lemma 7.7.13 durch ein Element der Ordnung $N+1$ bzw. $N+2$ interpretiert werde. Gäbe es nun ein $t \in G$ mit $t^{-1}at = b$, so wäre $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$. Daher ist G' ein Modell der obigen inkonsistenten Satzmenge. Dies ist absurd. □

Wir wollen nun ein weiteres Ergebnis von B. H. Neumann [**115**] beweisen:

Satz 7.7.15. *Keine existentiell abgeschlossene Gruppe ist endlich erzeugt.*

Zur Beweisvorbereitung benötigen wir ein Lemma. $C(X)$ bezeichnet dabei für eine Teilmenge X einer Gruppe G den *Zentralisator* von X, d.h.

$$C(X) = \{g \in G : gx = xg \text{ für alle } x \in X\}.$$

Es sei $C^2(X) := C(C(X))$ und $C(\mathbf{g}) := C(\{g_1, \ldots, g_n\})$ für $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$.

Lemma 7.7.16. *Sei $G \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Dann ist*

$$C^2(\mathbf{g}) = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle.$$

Beweis. Sei $\hat{G} := \langle g_1, \ldots, g_n\rangle \subseteq G$. Offensichtlich ist $\hat{G} \subseteq C^2(\mathbf{g})$. Ist andererseits $h \in C^2(\mathbf{g})$, so gilt in G der $L(G)$-Satz

$$\forall x\big(g_1x = xg_1 \wedge \ldots \wedge g_nx = xg_n \to hx = xh\big) =: \varphi.$$

Damit gilt φ aber auch in jeder Erweiterung von G, da $\neg\varphi$ existentiell und $G \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ ist. Sei $H := \hat{G} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; kanonisch ist $\hat{G} \subseteq H$, und in $G \amalg_{\hat{G}} H$ sind die Elemente von $\hat{G}$ die einzigen mit $(\hat{1}; 1) \in H$ kommutierenden. ($\hat{1}$ sei das neutrale Element von $\hat{G}$.) Da in $G \amalg_{\hat{G}} H \supseteq G$ aber φ gilt, folgt $h \in \hat{G}$. □

Damit erhalten wir nun unmittelbar:

Beweis (Satz 7.7.15). Ist G eine endlich erzeugte existentiell abgeschlossene Gruppe, etwa mit Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ ($\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_n)$), so ist nach Lemma 7.7.16 $G = C^2(\mathbf{g}) = C^2(G)$. Wir konstruieren eine Erweiterungsgruppe $H \supseteq G$, in der der Satz

$$\exists y\exists x(xg_1 = g_1x \wedge \ldots \wedge xg_n = g_nx \wedge yx \neq xy)$$

richtig ist; dieser gilt dann aber auch in G, besagt jedoch dort, daß es ein Element $y \notin C^2(\mathbf{g})$ gibt, was absurd ist. Als H wähle etwa $G \times M$, wobei M eine beliebige nichtabelsche Gruppe des Vertrauens bezeichne. $\square$

Wir zeigen zwei Ergebnisse über abzählbare existentiell abgeschlossene Gruppen.

KOROLLAR 7.7.17. *Jede abzählbare existentiell abgeschlossene Gruppe besitzt überabzählbar viele Automorphismen.*

BEWEIS. Sei $G \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, $\operatorname{card}(G) = \aleph_0$. Man schreibe $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ als echt aufsteigende Vereinigung endlich erzeugter echter Untergruppen von G, $G_1 := \langle 1 \rangle$. (Dies ist möglich nach Satz 7.7.15.) Wir wollen einen Isomorphismus zwischen endlich erzeugten Untergruppen von G einen *partiellen Automorphismus von G* nennen. (Dies ist durch Kor. 7.7.12 gerechtfertigt.) Zwei partielle Automorphismen h_1, h_2 sollen *kompatibel* heißen, falls eine gemeinsame Erweiterung von h_1, h_2 zu einem partiellen Automorphismus h_3 existiert. Wir behaupten:

($*$) Jeder partielle Automorphismus h besitzt zwei inkompatible Erweiterungen h', h''.

Damit erhält man die Behauptung wie folgt: Man konstruiert (ausgehend von id_{G_1}) einen Binärbaum der Höhe $\aleph_0$, an dessen Knoten partielle Automorphismen h stehen derart, daß

(i) jedes h von zwei inkompatiblen h', h'' mit h', h'' mit $h'|D(h) = h = h''|D(h)$ (wobei $D(h)$ der Definitionsbereich von h sei) gefolgt wird,
(ii) auf der n-ten Ebene des Baums jeder partielle Automorphismus einen G_n enthaltenden Definitions- und Wertebereich besitzt.

(Man sieht leicht ein, daß dies mittels ($*$) tatsächlich möglich ist.) Dann erhält man für jeden der $2^{\aleph_0}$ verschiedenen, von der Wurzel ausgehenden Pfade π durch den Baum einen Automorphismus h_π von G, und es ist $h_\pi \neq h_{\pi'}$ für Pfade $\pi \neq \pi'$.— Somit verbleibt nur noch der Nachweis von ($*$): Sei $A \subseteq G$ der Definitionsbereich von h. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $B \subseteq G$ echt größer als A (möglich nach Satz 7.7.15). h kann nun nach Kor. 7.7.12 zu einem inneren Automorphismus von G erweitert werden; seine Einschränkung h' auf B liefert die eine Erweiterung von h. Da B die Untergruppe A echt umfaßt, existiert nach Lemma 7.7.16 ein Element $b \in B$ mit $b \notin C^2(A) = A$, so daß also ein $g \in G$ existiert, das mit A, aber nicht mit b kommutiert. M.a.W.: Der durch g definierte innere Automorphismus läßt A punktweise fest, nicht aber b. Definiere nun $h''(x) := h'(g^{-1}xg)$ für alle $x \in B$. h'' ist ein partieller Automorphismus, der mit h' inkompatibel ist. $\square$

DEFINITION 7.7.18. Eine Gruppe G heißt *ω-homogen,* falls für alle endlichen Mengen $\{g_1, \ldots, g_n, h\} \subseteq G$ jeder Monomorphismus

$$\theta\colon \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \to G$$

zu einem Monomorphismus

$$\hat{\theta}\colon \langle g_1, \ldots, g_n, h \rangle \to G$$

fortgesetzt werden kann.

Jede ultrahomogene Gruppe ist offenbar ω-homogen; nach Kor. 7.7.12 ist damit speziell jede existentiell abgeschlossene Gruppe ω-homogen.

DEFINITION 7.7.19. Sei G eine Gruppe. Mit $\mathrm{Sk}(G)$ bezeichnen wir das *Skelett* von G, die Klasse aller endlich erzeugten Gruppen, die in G eingebettet werden können.

SATZ 7.7.20.

(i) *Ist G eine abzählbare Gruppe, H eine ω-homogene Gruppe mit $\mathrm{Sk}(G) \subseteq \mathrm{Sk}(H)$, so kann G in H eingebettet werden.*
(ii) *Zwei abzählbare ω-homogene Gruppen sind isomorph genau dann, wenn sie dasselbe Skelett besitzen.*

BEWEIS. Zu (i): Sei $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem für G, und setze $G_n := \langle g_1, \dots, g_n\rangle$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren eine Folge $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Einbettungen $\varphi_n : G_n \hookrightarrow H$ mit $\varphi_{n+1}|G_n = \varphi_n$; $\varphi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ ist dann eine Einbettung von G in H. Da G_n endlich erzeugt und $\mathrm{Sk}(G) \subseteq \mathrm{Sk}(H)$ gilt, existiert zumindest eine Einbettung $\theta_n : G_n \hookrightarrow H$. Setze $\varphi_1 := \theta_1$ und definiere φ_{n+1} induktiv: Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bereits konstruiert mit den gewünschten Eigenschaften, so ist $\varphi_n \circ (\theta_{n+1}|G_n)^{-1}$ eine Einbettung von $\langle \theta_{n+1}(g_1), \dots, \theta_{n+1}(g_n)\rangle \subseteq H$ in H mit $\theta_{n+1}(g_i) \mapsto \varphi_n(g_i)$ für $1 \le i \le n$. Da H ω-homogen ist, kann diese Abbildung zu einer Einbettung ψ_{n+1} von $\operatorname{im}\theta_{n+1}$ in H erweitert werden; setze $\varphi_{n+1} := \psi_{n+1} \circ \theta_{n+1}$. Es ist

$$\varphi_{n+1}(g_i) = \varphi_n \circ \theta_{n+1}^{-1} \circ \theta_{n+1}(g_i) = \varphi_n(g_i) \qquad \text{für } 1 \le i \le n,$$

also $\varphi_{n+1}|G_n = \varphi_n$, wie gewünscht.

Zu (ii): Seien $K_1 = \big\langle \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \big\rangle$ und $K_2 = \big\langle \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \big\rangle$ zwei ω-homogene Gruppen mit selbem Skelett. Setze $G_1 := \langle g_1 \rangle$ und wähle eine Einbettung $\theta_1 : G_1 \to K_2$, was wegen $\mathrm{Sk}(K_1) = \mathrm{Sk}(K_2)$ möglich ist. Dann gehört $\langle \theta_1(g_1), h_1\rangle =: H_1$ zu $\mathrm{Sk}(K_2) = \mathrm{Sk}(K_1)$, es existiert also eine Einbettung $\varphi_1 : H_1 \to K_1$. Da K_1 ω-homogen ist, können wir φ_1 so wählen, daß $\varphi_1(\theta_1(g_1)) = g_1$. Sei $G_2 := \langle \varphi_1(H_1), g_2\rangle$. Dann existiert eine Einbettung $\theta_2 : G_2 \to K_2$, und wegen der ω-Homogenität von K_2 kann man θ_2 als Fortsetzung von θ_1 wählen mit $\theta_2(\varphi_1(h_1)) = h_1$. Sei $H_2 := \langle \theta_2(G_2), h_2\rangle$. Induktiv so fortfahrend können wir φ_n als Fortsetzung von φ_{n-1} mit $\varphi_n(\theta_n(g_n)) = g_n$ wählen, sodann θ_{n+1} als Fortsetzung von θ_n mit $\theta_{n+1}(\varphi_n(h_n)) = h_n$. Wir erhalten so Einbettungen $\theta : K_1 \hookrightarrow K_2$ und $\varphi : K_2 \hookrightarrow K_1$ durch $\theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \theta_n$ und $\varphi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, für die $\theta \circ \varphi = \mathrm{id}_{K_2}$ und $\varphi \circ \theta = \mathrm{id}_{K_1}$. Also $K_1 \cong K_2$. □

Sei $\Gamma \neq \varnothing$ eine Menge und Δ eine Menge von Wörtern über Γ. Man sagt, eine Gruppe G hat die *Präsentation* (Γ, Δ) mit *Erzeugenden* Γ und *Relationen* Δ, falls $G \cong F/R$, wobei F die von Γ frei erzeugte Gruppe und R der von Δ in F erzeugte Normalteiler sei. G heißt *rekursiv präsentierbar,* wenn eine Präsentation (Γ, Δ) mit endlichem Γ und rekursivem Δ existiert. Man sagt, G habe ein *auflösbares Wortproblem,* falls G endlich erzeugt ist und für ein (und damit alle) endlichen Erzeugendensysteme Γ von G die Menge aller variablenfreien $L(\Gamma)$-Gleichungen γ, die in G gültig sind, entscheidbar ist, wobei $L = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$. (Offenbar ist jede Gruppe mit auflösbarem Wortproblem rekursiv präsentierbar.)

B. H. Neumann [**115**] bewies das erstaunliche Ergebnis, daß jede Gruppe mit auflösbarem Wortproblem in jede existentiell abgeschlossene Gruppe isomorph einbettbar ist. Mit Hilfe der Erzwingungsmethode können wir die von Macintyre [**101**] bewiesene Umkehrung zeigen:

SATZ 7.7.21. *Wenn eine endlich erzeugte Gruppe G in jede existentiell abgeschlossene Gruppe isomorph einbettbar ist, so hat sie ein auflösbares Wortproblem.*

Die vom Standpunkt der Rekursionstheorie aus „gutartigen“ Gruppen, nämlich die rekursiv präsentierbaren mit auflösbarem Wortproblem, können nach den Sätzen von Macintyre und Neumann algebraisch als diejenigen charakterisiert werden, die Untergruppen aller existentiell abgeschlossener Gruppen sind. Einen Beweis für den Satz von Neumann, der den in [**37**], §12 zu findenden Einbettungssatz von Higman verwendet, gibt [**3**], IV, §4. Einen Überblick gibt [**140**]; dort (und in [**37**], §12) findet man auch eine weitere, von Boone und Higman stammende Charakterisierung der Gruppen mit auflösbarem Wortproblem.

Beweis (Satz 7.7.21). Es sei $L = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ die Sprache der Gruppen. Sei G_0 eine von $g_1, \dots, g_n$ erzeugte Gruppe mit nicht-auflösbarem Wortproblem. Sei Φ die Menge aller quantorenfreien L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mit $G_0 \models \neg\varphi(g_1, \dots, g_n)$. Es gilt offenbar:

(i) G_0 ist in eine Gruppe G d.u.n.d. nicht einbettbar, wenn $G \models \bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi(\mathbf{g}')$ für alle $\mathbf{g}' \in G^n$.

(ii) Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Formel, so ist entweder $\varphi \in \Phi$ oder $\neg\varphi \in \Phi$.

(iii) Φ ist nicht rekursiv aufzählbar. (Denn sonst wäre nach (ii)

$$\big\{\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{Qf} : G_0 \models \varphi(g_1, \dots, g_n)\big\}$$

rekursiv, im Widerspruch zur Voraussetzung über das Wortproblem von G_0.)

Seien C eine beliebige Bedingung bzgl. der Klasse $\mathcal{G}$ der Gruppen, etwa eine endliche Teilmenge des Diagramms der Gruppe $H \in \mathcal{G}$, und $c_1, \dots, c_n \in H$. Sei Ψ_C die Menge aller quantorenfreien L-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, für die $\Sigma \cup C \cup \{\varphi(c_1, \dots, c_n)\}$ nicht erfüllbar ist (wobei Σ ein endliches Axiomensystem für $\mathcal{G}$ sei); also ist $\varphi \in \Psi_C$ genau dann, wenn $\Sigma \cup C \models \neg\varphi(c_1, \dots, c_n)$. Da C und Σ endlich sind, gilt

(iv) Ψ_C ist rekursiv aufzählbar,

ferner:

(v) Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine quantorenfreie L-Formel, so kann höchstens eine der Formeln φ, $\neg\varphi$ aus Ψ_C sein.

Wäre nun $\Phi \subseteq \Psi_C$, so wäre wegen (ii) und (v) $\Phi = \Psi_C$, im Gegensatz zu (iii) und zu (iv). Also existiert ein $\varphi \in \Phi \setminus \Psi_C$, und $\Sigma \cup C \cup \{\varphi(c_1, \dots, c_n)\}$ ist erfüllbar. Vermöge Kor. 7.3.20 existiert dann eine existentiell abgeschlossene Gruppe G mit $G \models \bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi(\mathbf{g}')$ für alle $\mathbf{g}' \in G^n$, und mit (i) sind wir am Ziel. $\square$

Ein weiteres Resultat über $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ erhält man als Anwendung der Resultantenmethode, vgl. §8.5.

7.8. Existentielle Abgeschlossenheit und Q.E. für Moduln*

Als letztes algebraisches Anwendungsbeispiel in diesem §7 wollen wir die Klasse aller Moduln über einem festen Ring im Hinblick auf die existentiell abgeschlossenen Moduln und weitere modelltheoretische Eigenschaften wie Q.E. untersuchen. (Das Standardwerk zu diesem umfangreichen Gebiet ist [**12**].)

Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit 1. Wir betrachten linke R-Moduln M. (Im folgenden sei R, falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, ein beliebiger Ring mit 1, es seien alle vorkommenden Ringe mit 1 und alle Moduln [Ideale] linke Moduln [Ideale].) Definiere dazu die Sprache $L_R := \{0, +, -, \{\mu_\lambda\}_{\lambda\in R}\}$, wobei die μ_λ einstellige Operationssymbole für die Skalarmultiplikation seien; wie gewohnt schreiben wir λx anstelle von $\mu_\lambda(x)$, für $\lambda \in R$. Es bezeichne $\mathcal{M}_R$ die Klasse der (linken) R-Moduln, aufgefaßt als L_R-Strukturen. Die Klasse $\mathcal{M}_R$ ist gleichungsdefiniert, nach dem trivialen Teil des Satzes von Birkhoff ([**25**], Satz 1.4.14) also insbesondere abgeschlossen unter Homomorphismen, Produkt- und Substrukturbildung. Ferner ist $\mathcal{M}_R$ induktiv, die Klasse der existentiell abgeschlossenen Moduln ist also nichtleer.

7.8.1. Die A.E. für Moduln. Wir zeigen als erstes:

SATZ 7.8.1. *$\mathcal{M}_R$ hat die A.E.*

Dies wird sich sofort aus Lemma 7.8.4 ergeben. In Analogie zur Gruppentheorie (vgl. Def. 7.7.1) definieren wir — für den Spezialfall zweier Moduln —:

DEFINITION 7.8.2. Seien M, N zwei R-Moduln, $\alpha_i\colon N \to M_i$ $(i = 1, 2)$ R-Modulhomomorphismen. Eine *Fasersumme von M_1 und M_2 über N* (bzgl. α_1, α_2) ist ein Tripel (S, j_1, j_2) bestehend aus einem R-Modul S und R-linearen Abbildungen $j_i\colon M_i \to S$ $(i = 1, 2)$ mit $j_1 \circ \alpha_1 = j_2 \circ \alpha_2$ derart, daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist (T, f_1, f_2) ein weiteres Tripel wie (S, j_1, j_2), so existiert eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung $l\colon S \to T$ mit $f_i = l \circ j_i$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, equal] \arrow[d, "j_i"'] & M_i \arrow[d, "f_i"'] \\ S \arrow[r, "\exists l"] & T \end{tikzcd} \qquad (i = 1, 2) \tag{7.8.24}$$

Ist $N \subseteq M_1, M_2$ und $\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{id}$, so heißt (S, j_1, j_2) eine *direkte Summe von M_1, M_2 mit amalgamiertem Untermodul N.*

(Kategorientheoretiker nennen die Fasersumme einen *pushout* in der Kategorie der R-Moduln.)

Wie im Fall der Gruppen zeigt man leicht, daß die Fasersumme, falls sie existiert, bis auf einen kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

PROPOSITION 7.8.3. *Fasersummen von Moduln existieren stets.*

BEWEIS. Seien M_1, M_2, N und α_i wie in Def. 7.8.2. Wir betrachten in $M_1 \oplus M_2$ den Untermodul U aller Elemente $(\alpha_1(n), -\alpha_2(n))$ mit $n \in N$ und setzen $S := (M_1 \oplus M_2)/U$. Sei j_i $(i = 1, 2)$ die Komposition der kanonischen Injektion $M_i \hookrightarrow M_1 \oplus M_2$ mit dem kanonischen Epimorphismus $M_1 \oplus M_2 \twoheadrightarrow S$. Nach Konstruktion von U ist $j_1(\alpha_1(n)) = j_2(\alpha_2(n))$ für $n \in N$. Ist schließlich (T, f_1, f_2) wie in (7.8.24), so haben wir eine R-lineare Abbildung $h\colon M_1 \oplus M_2 \to T$, $(m_1, m_2) \mapsto f_1(m_1) + f_2(m_2)$; und wir haben $h(U) = 0$, da $f_1 \circ \alpha_1 = f_2 \circ \alpha_2$. Damit induziert h eine R-lineare Abbildung $l\colon S \to T$ mit $l \circ j_i = f_i$ für $i = 1, 2$. Da $S = j_1(M_1) + j_2(M_2)$, ist sie zudem eindeutig bestimmt. $\square$

Sind M_1, M_2 Moduln über R mit gemeinsamen Untermodul N, so schreiben wir $M_1 \amalg_N M_2$ für die nach Prop. 7.8.3 existierende und modulo Isomorphie eindeutig bestimmte direkte Summe S von M_1, M_2 mit amalgamiertem Untermodul N. (Die Abbildungen j_1, j_2 werden in der Notation unterschlagen.)

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & M_1 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow j_1 \\ M_2 & \xrightarrow{j_2} & M_1 \amalg_N M_2 \end{array}$$

LEMMA 7.8.4. *Seien M_1, M_2, N drei R-Moduln, $\alpha_1: N \to M_1$ und $\alpha_2: N \to M_2$ lineare Abbildungen. Dann gilt:*

$$\ker(j_2) = \alpha_2(\ker(\alpha_1)), \qquad \ker(j_1) = \alpha_1(\ker(\alpha_2)).$$

Insbesondere gilt: Ist α_1 injektiv, so auch j_2, ist α_2 injektiv, so auch j_1.

BEWEIS. Sei $S = M_1 \amalg_N M_2$ und U wie im Beweis von Prop. 7.8.3. Es ist klar, daß $\alpha_2(\ker(\alpha_1)) \subseteq \ker(j_2)$. Ist $m_2 \in \ker(j_2)$ gegeben, so ist $(0, m_2) \in U$, also $(0, m_2) = (\alpha_1(n), -\alpha_2(n))$ für ein $n \in N$. Es folgt, daß $n \in \ker(\alpha_1)$ und $m_2 = \alpha_2(-n) \in \alpha_2(\ker(\alpha_1))$. Für $\ker(j_1)$ argumentiert man analog. □

Damit ist auch Satz 7.8.1 bewiesen.— Für die duale Konstruktion des Faserprodukts sowie Anwendungen in der kommutativen Algebra siehe [**33**], hier v.a. III, §5.

7.8.2. Kohärente Ringe. Wir wollen in diesem Abschnitt u.a. eine hinreichende und notwendige algebraische Bedingung an R für die Existenz eines Modellbegleiters von $\mathcal{M}_R$ herleiten. Es wird sich herausstellen, daß dies die *Kohärenz* des Ringes R ist, weshalb wir uns diesem Begriff nun als nächstes zuwenden.

DEFINITION 7.8.5. [**61**] Sei R ein Ring. R heißt *kohärent,* falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Kern jedes Homomorphismus $h: R^n \to R$ ein endlich erzeugter Untermodul von R^n ist.

PROPOSITION 7.8.6. *Sei R ein beliebiger Ring. Dann sind äquivalent:*

(i) *R ist kohärent.*
(ii) *Jedes endlich erzeugte (Links-) Ideal von R ist endlich präsentierbar.*
(iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ ist*

$$\Lambda := \{\boldsymbol{\mu} \in R^n : \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0\} \tag{7.8.25}$$

endlich erzeugt. (Dabei sei $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$ für einen beliebigen R-Modul M und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in R^n$.)

BEWEIS. Die Äquivalenz von (i) und (iii) sollte klar sein. Sei R kohärent und $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes (Links-) Ideal von R, etwa $\mathfrak{a} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Sei $h: R^n \to R$ der Homomorphismus mit $h(e_i) = \lambda_i$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von R^n sei. Wegen der Kohärenz ist $\ker(h)$ endlich erzeugt, und

$$0 \longrightarrow \ker(h) \longrightarrow R^n \xrightarrow{h} \mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

ist eine endliche Präsentation von $\mathfrak{a}$. Sei umgekehrt jedes endlich erzeugte Ideal von R endlich präsentierbar und $h: R^n \to R$ ein Homomorphismus, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{im}(h)$ ein Ideal von R, das von $h(e_1), \dots, h(e_n)$ erzeugt wird; wir erhalten eine endliche Präsentation

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \xrightarrow{g} \mathrm{im}(h) \longrightarrow 0$$

von $\mathrm{im}(h)$ mit einem Homomorphismus g, einem freien R-Modul F endlichen Ranges und einem endlich erzeugten Untermodul K von F. Dann (vgl. etwa [**33**], IV, Prop. 1.15; der dortige Beweis überträgt sich auf den nichtkommutativen Fall) existiert ein Automorphismus α von $R^n \oplus F$, so daß $\alpha(\ker(h) \oplus F) = R^n \oplus K$; insbesondere ist auch $\ker(h)$ endlich erzeugt. Also ist R kohärent. $\square$

Beispiele.

(i) Jeder noethersche Ring ist kohärent. Dies folgt aus dem Hilbertschen Basissatz für Moduln, vgl. [**34**], X, Prop. 1.4.

(ii) Ein einfaches Beispiel eines nichtkohärenten Rings erhält man wie folgt: Sei $S := \prod_{n \geq 3} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $R := \{\alpha \in S : \alpha \text{ beschränkt.}\}$. R ist Unterring von S und nicht kohärent. Zum Beweis sei $\lambda := 2 \in R$; betrachte $\operatorname{ann}(\lambda) = \{\mu \in R : \mu\lambda = 0\} \subseteq R$. $\operatorname{ann}(\lambda)$ ist nicht endlich erzeugt. Denn angenommen, $\mathcal{S}$ wäre ein endliches Erzeugendensystem für

$$\operatorname{ann}(\lambda) = \{\mu \in R : \forall n \geq 3 : n | 2\mu(n)\}.$$

Alle $\mu \in \operatorname{ann}(\lambda)$ haben endlichen Träger, also

$$\operatorname{supp}(\mathcal{S}) \subseteq \{3, \ldots, N\} \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}.$$

Wähle $\mu \in R$ mit $\mu(k) := N$ für $k = 2N$ und $\mu(k) := 0$, sonst; es ist $(\mu\lambda)(2N) = N \cdot 2 = 0$ und $(\mu\lambda)(k) = 0 \cdot 2 = 0$ für $k \neq 2N$, also $\mu \in \operatorname{ann}(\lambda)$, aber μ ist keine R-Linearkombination von Elementen in S, da jede solche einen in $\{3, \ldots, N\}$ enthaltenen Träger hat.

Folgendes Lemma [**75**] ist — obgleich seiner Einfachheit — für die weitere Entwicklung zentral:

Lemma 7.8.7. *Sei R ein Ring. Für einen R-Modul M, eine nichtleere Indexmenge I, eine Familie $\{a_i\}_{i \in I}$ von Elementen von M und eine Familie $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ von Elementen aus R sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert ein R-Modul $N \supseteq M$ und ein $b \in N$, so daß $\lambda_i b = a_i$ für alle $i \in I$. (Das Gleichungssystem $\lambda_i x = a_i$, $i \in I$ ist in einer Erweiterung von M lösbar.)*

(ii) *Für alle $\boldsymbol{\mu} \in R^{(I)}$ gilt: Ist $\sum_{i \in I} \mu_i \lambda_i = 0$, so ist auch $\sum_{i \in I} \mu_i a_i = 0$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei J das von allen λ_i $(i \in I)$ erzeugte Linksideal von R. Definiere die Abbildung $g\colon J \to M$ durch

$$g\left(\sum_{i \in I} \mu_i \lambda_i\right) := \sum_{i \in I} \mu_i a_i \quad \text{für alle } \boldsymbol{\mu} \in R^{(I)}.$$

g ist wohldefiniert wegen (ii) und linear. Sei (N, j_1, j_2) die Fasersumme von M und R über J bzgl. g, id_J. Nach Lemma 7.8.4 ist $j_1\colon M \to N$ eine Einbettung; für $b := j_2(1)$ gilt:

$$\lambda_i b = \lambda_i j_2(1) = j_2(\lambda_i) = j_1(g(\lambda_i)) = j_1(a_i)$$

Damit erfüllt $x := b$ die Gleichungen $\lambda_i x = a_i$ in N und ist das gewünschte Element. $\square$

Korollar 7.8.8. *Sei $M \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Äquivalenz folgender Aussagen:*

(i) *In M gilt $\exists x (\bigwedge_{i=1}^n \lambda_i x = a_i)$, d.h. das Gleichungsystem $\lambda_i x = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ hat eine Lösung in M.*

(ii) *Für alle $\boldsymbol{\mu} \in R^n$ gilt: Ist $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0$, so ist auch $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a} = 0$.* $\square$

Wir erhalten damit schon eine notwendige Forderung an R:

Korollar 7.8.9. *Sei R ein beliebiger Ring.*

(i) *Ist $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ eine elementare Klasse, d.h. hat $\mathcal{M}_R$ einen Modellbegleiter, so ist R kohärent.*

(ii) *Sei R kohärent, $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ und $\{\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_m\}$ ein endliches Erzeugendensystem für $\Lambda = \{\boldsymbol{\mu} \in R^n : \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0\}$. Dann gilt (mit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$):*

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \left(\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = y_i \right) \leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{y} = 0 \right)$$

Beweis. Zu (i): Sei $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ elementar, aber R nicht kohärent, d.h. es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$, so daß $\Lambda = \{\boldsymbol{\mu} \in R^n : \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0\}$ nicht endlich erzeugt ist. Sei $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) = \mathrm{Mod}(\Delta)$ mit einer L_R-Satzmenge Δ, und seien $c_1, \dots, c_n$ paarweise verschiedene neue Konstanten, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Wir zeigen, daß dann die Satzmenge

$$\Delta \cup \{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{c} = 0 : \boldsymbol{\mu} \in \Lambda\} \cup \left\{ \neg \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = c_i \right) \right\}$$

ein Modell besitzt; dies führt augenblicklich zu einem Widerspruch zu Kor. 7.8.8. Mit dem Kompaktheitssatz genügt es, für jede endliche Teilmenge $S \subseteq \Lambda$ die Konsistenz von

$$\Delta \cup \{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{c} = 0 : \boldsymbol{\mu} \in S\} \cup \left\{ \neg \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = c_i \right) \right\} \tag{7.8.26}$$

nachzuweisen. Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von R^n und $M := R^n / \langle S \rangle$, wobei wir die c_i in M als $e_i + \langle S \rangle$ interpretieren. Erweitere M zu $N \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. Dann gilt in N:

(1.) $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{c} = 0$ für alle $\boldsymbol{\mu} \in S$.

(2.) $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \neq 0$ für alle $\boldsymbol{\nu} \in \Lambda \setminus \langle S \rangle$.

Da $\Lambda \setminus \langle S \rangle \neq \varnothing$, folgt aus (2.) mit Kor. 7.8.8, daß $\neg \exists x (\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = c_i)$ in N. N ist ein Modell von (7.8.26).

Zu (ii): Die Richtung $\to$ folgt aus Kor. 7.8.8. Für die Umkehrung gelte $\boldsymbol{\mu}_j \mathbf{y} = 0$; für beliebiges $\boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{m} \varrho_j \boldsymbol{\mu}_j$ aus Λ folgt dann

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{y} = \sum_i \sum_j (\varrho_j \mu_{ji}) y_i = \sum_j \varrho_j \sum_i (\mu_{ji} y_i) = 0,$$

also mit Kor. 7.8.8 die Behauptung. □

7.8.3. Injektive Moduln. Als weiteres Konzept wird das eines injektiven Moduls bedeutsam werden; es verallgemeinert in gewisser Weise das einer teilbaren abelschen Gruppe.

Definition 7.8.10. Ein R-Modul M heißt *injektiv,* falls für alle Teilmengen I von R und Familien $\{a_\lambda\}_{\lambda \in I}$ von Elementen aus M gilt: Wenn das Gleichungssystem $\lambda x = a_\lambda$, $\lambda \in I$ in einer Erweiterung von M eine Lösung besitzt, so hat es auch schon in M selbst eine Lösung. Wir schreiben $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ für die Klasse aller injektiven R-Moduln.

Übung. Man bestimme direkt aus der Definition $\mathcal{I}(\mathcal{M}_K)$ für einen Körper K.

Einige algebraische Äquivalenzen zur Injektivität enthält das folgende Lemma [**47**], wobei (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) auch als *Baers Test für Injektivität* bekannt ist.

Lemma 7.8.11. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist injektiv.*
(ii) *M ist direkter Summand jedes R-Moduls, der M umfaßt.*
(iii′) *Jede exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

zerfällt.

(iii) *Jedes Diagramm der folgenden Form kann vervollständigt werden:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[d, "\exists h"] \\ & M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

(iv) *Jedes Diagramm der folgenden Form, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R sei, kann vervollständigt werden:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "\exists h"] \\ & M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Beweis. (iii) und (iii′) sind nicht viel mehr als Umformulierungen: Ist (iii) vorausgesetzt, so folgt (iii′) durch Anwendung von (iii) auf

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M' \arrow[d, "\exists h"] \\ & M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

sofort. ([**34**], III, Prop. 3.2.) Umgekehrt sei ein exaktes Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M' \\ & M & \end{tikzcd}$$

gegeben. Wir bilden die Fasersumme N über M'':

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[d, "j_2"] \\ & M \arrow[r, "j_1"] & N \end{tikzcd}$$

Da $M'' \hookrightarrow M'$, ist j_1 ein Monomorphismus (Lemma 7.8.4). Nach (iii′) zerfällt die Sequenz $0 \longrightarrow M \xrightarrow{j_1} N \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$, wir haben also $\varphi\colon N \to M$ mit $\varphi \circ j_1 = \mathrm{id}_M$, und mit $h := \varphi \circ j_2$ gilt $h|M'' = \varphi \circ (j_1 \circ f) = f$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i): Betrachte ein Gleichungssystem $(*)$ $\lambda x = a_\lambda$, $\lambda \in I$, $\varnothing \neq I \subseteq R$, das in einer Erweiterung N von M eine Lösung $b \in N$ besitzt. Dann ist nach

Voraussetzung $N = M \oplus M'$ mit einem R-Modul M', also $b = m + m'$ mit $m \in M$, $m' \in M'$, und es folgt

$$\lambda m' = \lambda m - a_\lambda \in M' \cap M = \{0\},$$

also ist $m \in M$ eine Lösung von $(*)$ in M.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\tilde{M}$ ein M umfassender R-Modul. Mit $M'' := M$, $M' := \tilde{M}$, $f := \mathrm{id}$ folgt aus (iii) sofort $\tilde{M} = M \oplus \ker(h)$.

Zu (iv) $\Rightarrow$ (iii): Sei ein Diagramm wie in (iii) gegeben. Wir untersuchen nun zunächst, wie man für ein $x \in M'$ die Abbildung f auf $N := M'' + \langle x \rangle$ fortsetzen kann. Dazu betrachte das Ideal

$$\mathfrak{a} := \{\lambda \in R : \lambda x \in M''\}$$

in R und die Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{a} \to M$, $\lambda \mapsto f(\lambda x)$. Nach Voraussetzung existiert ein $\psi\colon R \to M$ mit $\psi|\mathfrak{a} = \varphi$. Definiere nun $f'\colon N \to M$ wie folgt: Ist $m = m'' + \lambda x \in N$ mit $m'' \in M''$, $\lambda \in R$, so sei $f'(m) := f(m'') + \psi(\lambda)$. Dann ist f' wohldefiniert, denn ist $m = \overline{m}'' + \overline{\lambda} x$ mit $\overline{m}'' \in M''$, $\overline{\lambda} \in R$, so folgt $(\overline{\lambda} - \lambda)x = m'' - \overline{m}'' \in M''$, mithin $\overline{\lambda} - \lambda \in \mathfrak{a}$ und

$$\psi(\overline{\lambda} - \lambda) = \varphi(\overline{\lambda} - \lambda) = f((\overline{\lambda} - \lambda)x) = f(m'' - \overline{m}'');$$

offenbar ist f' ein Homomorphismus und $f'|M'' = f$.— Wir bilden jetzt die Menge aller Paare (N, g) von Moduln N und Homomorphismen $g\colon N \to M$ mit $M'' \subseteq N \subseteq M'$ und $g|M'' = f$; diese ist nichtleer und induktiv geordnet, besitzt also nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element (N', h). Wegen dem eben Bewiesenen muß $N' = M'$ sein, denn sonst könnte man h auf den echt größeren Untermodul $N' + \langle x \rangle$ von M', $x \in M' \setminus N'$ fortsetzen.

Zu (i) $\Rightarrow$ (iv): Definiere $I := \mathfrak{a}$, $a_\lambda := f(\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{a}$. Man überprüft sofort, daß die Bedingung (ii) des Lemma 7.8.7 erfüllt ist, das Gleichungssystem $\lambda x = a_\lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{a}$) also eine Lösung m in M besitzt (nach der Definition der Injektivität). Definiere nun $h\colon R \to M, \lambda \mapsto \lambda m$. Offensichtlich ist $h|\mathfrak{a} = f$, wie gewünscht. □

(Dualisiert man (iii′), so erhält man die definierende Eigenschaft eines *projektiven Moduls,* vgl. [**33**], IV,§3.)

KOROLLAR 7.8.12. *Eine abelsche Gruppe ist injektiv* (*als* $\mathbb{Z}$*-Modul*) *genau dann, wenn sie teilbar ist.— Insbesondere: Ist* G *eine injektive abelsche Gruppe und* $G' \subseteq G$ *eine Untergruppe, so ist auch* G/G' *ein injektive abelsche Gruppe, denn mit* G *ist auch* G/G' *teilbar.*

BEWEIS. Übung. □

Wir wollen nun zeigen, daß die Klasse der injektiven R-Moduln konfinal in der Klasse aller R-Moduln ist. Für $R = \mathbb{Z}$ geht das leicht:

PROPOSITION 7.8.13. (Baer, [**47**]) $\mathcal{I}(\mathcal{M}_\mathbb{Z})$ *ist konfinal in* $\mathcal{M}_\mathbb{Z}$.

BEWEIS. Sei G eine abelsche Gruppe aus $\mathcal{M}_\mathbb{Z}$. Schreibe $G = F/K$ mit einer freien abelschen Gruppe F. F ist in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $F \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ enthalten, welche offensichtlich teilbar ist. Damit ist wegen Kor. 7.8.12 G in der teilbaren abelschen Gruppe $(F \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q})/K$ enthalten. □

Interessanterweise kann man dieses Ergebnis für den allgemeinen Nachweis der Konfinalität verwenden. Dazu dient folgende Beobachtung:

Lemma 7.8.14. *Ist R eine S-Algebra, S ein Ring, und N ein injektiver S-Modul, so ist $M := \mathrm{Hom}_S(R,N)$ ein injektiver R-Modul.* (*Dabei ist M ein R-Modul vermöge $(\lambda\varphi)(\mu) := \varphi(\lambda\mu)$ für $\lambda,\mu \in R$, $\varphi \in M$.*)

Beweis. Sei $M'' \subseteq M'$ ein Untermodul und $f\colon M'' \to M$ ein Homomorphismus; nach Lemma 7.8.11, (iii) haben wir zu zeigen, daß f auf M' fortgesetzt werden kann. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $g\colon M \overset{\cong}{\to} N$ von S-Moduln via $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Sei $f' := g \circ f\colon M'' \to N$ und h' eine Fortsetzung von f' gemäß Lemma 7.8.11, (iii) auf M', aufgefaßt als S-Modul. Wir definiere die gesuchte Abbildung $h\colon M' \to M$ als diejenige Funktion, die $m' \in M'$ auf $\varphi\colon R \to N, \lambda \mapsto h'(\lambda m')$ abbildet. □

Korollar 7.8.15. (Eckmann-Schöpf, [**73**]) *Sei R ein beliebiger Ring. $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ ist konfinal in $\mathcal{M}_R$.*

Beweis. Sei M ein R-Modul. Es gibt eine Einbettung $\alpha\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$, welche m auf die Abbildung φ mit $\lambda \mapsto \lambda m$ abbildet. Betrachten wir M zeitweilig als abelsche Gruppe, so wissen wir nach Prop. 7.8.13, daß ein Monomorphismus $j\colon M \hookrightarrow G$ in eine injektive abelsche Gruppe G existiert. Damit erhalten wir auch einen Monomorphismus $j'\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G)$. Nach Lemma 7.8.14 ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G)$ ein injektiver R-Modul, und $j' \circ \alpha$ die gesuchte Einbettung von M in einen injektiven Modul. □

Tatsächlich geht es weit besser:

Satz 7.8.16. (Eckmann-Schöpf, [**73**]) *Sei M ein R-Modul. Dann kann M in einen R-Modul $\overline{M}$ mit folgenden Eigenschaften eingebettet werden:*

(i) *$\overline{M}$ ist eine injektive Erweiterung von M.*
(ii) *Für jede injektive Erweiterung N von M kann folgendes Diagramm durch eine Einbettung h vervollständigt werden:*

$$\begin{tikzcd} \overline{M} \arrow[r, "h"] & N \\ M \arrow[u] \arrow[r, equal] & M \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{7.8.27}$$

$\overline{M}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt die injektive Hülle $E(M)$ von M.

Beweis. Wir wollen hier eine Erweiterung $E \supseteq M$ eine *essentielle Erweiterung* nennen, falls der Schnitt jedes nichttrivialen Untermoduls von E mit M nichttrivial ist. Sei $F \supseteq M$ gemäß Kor. 7.8.15 eine injektive Erweiterung von M; da $M \supseteq M$ essentiell ist, ist die Menge der essentiellen Erweiterungen E von M mit $F \supseteq E \supseteq M$ nichtleer und zudem induktiv geordnet, enthält also nach dem Zornschen Lemma einen maximalen essentiellen F-Untermodul $E \supseteq M$. Wir zeigen, daß dann E injektiv ist. Sei N ein bzgl. der Eigenschaft $N \cap E = \{0\}$ maximaler Untermodul von F; ein solcher existiert nach Zorn. Wir zeigen $E+N = F$; wegen $E+N = E \oplus N$ ist dann E injektiv. Betrachte $\alpha := \pi|E$, wobei $\pi\colon F \twoheadrightarrow F/N$. α ist monomorph wegen $E \cap N = \{0\}$ und damit $\alpha(E) \subseteq F/N$ essentiell, wie sofort aus der Maximalität von N folgt. Wegen der Injektivität von F existiert eine Abbildung $\beta\colon F/N \to F$ mit $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_E$. Da $\alpha(E) \cap \ker\beta = \ker\alpha = \{0\}$, muß wegen $\alpha(E) \subseteq F/N$ essentiell $\ker\beta = \{0\}$ sein. Insbesondere ist $\beta(F/N) \supseteq E$ essentiell. Ist aber $E' \supseteq E$

eine essentielle Erweiterung von E in F, so ist offenbar $E' \supseteq M$ auch eine essentielle Erweiterung von M, also $E' = E$. Also $\beta(F/N) = E$, damit $F/N = E$ und $E + N = F$.— Wir setzen $\overline{M} := E$; (i) ist dann erfüllt, und ist $N \supseteq M$ eine injektive Erweiterung, so existiert nach Lemma 7.8.11, (iii) eine Abbildung h wie in (7.8.27); da $h|M = \mathrm{id}$ und $\overline{M} \supseteq M$ essentiell, ist h eine Einbettung. Ist darüber hinaus $\tilde{M}$ eine weitere injektive Hülle von M, so existiert eine Einbettung $\tilde{h}\colon \overline{M} \to \tilde{M}$ mit $\tilde{h}|M = \mathrm{id}$; da damit $\tilde{h}(\overline{M})$ ein injektiver Untermodul von $\tilde{M}$ ist, ist $\tilde{M} = \tilde{h}(\overline{M}) \oplus \tilde{M}'$ für einen Modul $\tilde{M}'$. Analog existiert $\overline{h}\colon \tilde{M} \hookrightarrow \overline{M}$, $\overline{h}|M = \mathrm{id}$, $\overline{M} = \overline{h}(\tilde{M}) \oplus \overline{M}' = \overline{h}(\tilde{h}(\overline{M})) \oplus (\overline{h}(\tilde{M}') \oplus \overline{M}')$. Da $M \subseteq (\overline{h} \circ \tilde{h})(\overline{M}) \subseteq \overline{M}$ und $\overline{M} \supseteq M$ essentiell ist, folgt $\overline{M}', \tilde{M}' = \{0\}$, also $\overline{M} \cong \tilde{M}$. □

Korollar 7.8.17. *Seien M, N R-Moduln. Dann ist $E(M \oplus N) = E(M) \oplus E(N)$.*

Beweis. Diagrammjagd, als Übung. □

7.8.4. Positiv primitive Formeln und Dimensionssätze. Hauptergebnis dieses §7.8 wird ein Satz sein, der es erlaubt, beliebige L_R-Formeln als Kombination von Formeln einfacheren Typs darzustellen, nämlich sog. positiv primitiven Formeln und Dimensionssätzen.

Definition 7.8.18. Eine *positiv primitive Formel* (kurz: *p.p. Formel*) in L_R ist eine Formel der Form

$$\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \right), \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0) \tag{7.8.28}$$

wobei die φ_i atomare L_R-Formeln seien.

Bemerkung 7.8.19. Wir sehen, daß wir o.B.d.A. stets davon ausgehen können, daß die φ_i in der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j = \sum_{k=1}^{t} \mu_{ik} y_k \qquad (i = 1, \dots, m)$$

mit $\lambda_{ij}, \mu_{ik} \in R$ und den freien Variablen $y_1, \dots, y_t$ von φ ($t \in \mathbb{N}_0$) gegeben sind. φ beschreibt also die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ in $\mathbf{x}$ mit den Parametern $\mathbf{y}$, wobei $A := (\lambda_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in R^{m \times n}$, $B := (\mu_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le t}} \in R^{m \times t}$.

Als Folgerung aus Kor. 7.8.9 ergibt sich: (Dabei heiße ein Ring R [*primitiv*] *rekursiv,* falls er auf einer [primitiv] rekursiven Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert ist und [primitiv] rekursive Operationen besitzt.)

Lemma 7.8.20. *Sei R kohärent. Dann ist jede p.p. L_R-Formel φ in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ äquivalent zu einer quantorenfreien p.p. Formel φ' (d.h. einer Konjunktion von Gleichungen). Ist R (primitiv) rekursiv und (primitiv) rekursiv ein endliches Erzeugendensystem für den Modul Λ aus* (7.8.25) *bestimmbar, so ist die Q.E. (primitiv) rekursiv.*

Beweis. Es sei φ wie in (7.8.28). Wir führen Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Zum Induktionsschritt sei $n > 0$. Schreibe $\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}(\psi)$ mit der p.p. Formel $\psi(x_1, \dots, x_{n-1}, \mathbf{y}) := \exists x_n(\bigwedge \varphi_i)$. Mit Kor. 7.8.9, (ii) ist ψ äquivalent zu einer quantorenfreien p.p. L_R-Formel ψ', und mit Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $\exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}(\psi')$, folgt die Behauptung. □

Für einen beliebigen Ring R ist i.a. kein zu diesem Lemma analoges Ergebnis zu erwarten. Allerdings ändert sich dies, wenn wir allgemeiner auch infinitäre Formeln zulassen.

Definition 7.8.21. Eine *infinitäre p.p. Formel* ist eine $(L_R)_\infty$-Formel der Bauart

$$\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i\in I} \varphi_i \right), \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

wobei die φ_i atomare L_R-Formeln und I eine beliebige Indexmenge sei.

Bemerkung. Wir erinnern an die Konvention, daß $\bigwedge_{i\in\varnothing} \varphi_i$ stets als wahr ausgewertet wird. Die Bem. 7.8.19 trifft auch hier sinngemäß zu.

Lemma 7.8.22. *Sei R ein beliebiger Ring. In $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ ist jede infinitäre p.p. Formel φ äquivalent zu einer quantorenfreien infinitären p.p. Formel φ'.*

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 7.8.20. Für $n = 1$ gilt nach Definition von $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ und Lemma 7.8.7

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_R) \models \left(\exists x \left(\bigwedge_{i\in I} \left(\lambda_i x = \sum_{k=1}^t \nu_{ik} y_k \right) \right) \leftrightarrow \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in I} \left(\mu_i \sum_{k=1}^t \nu_{ik} y_k \right) = 0 \right) \right),$$

wobei $y_1, \ldots, y_t$ freie Variablen, $\lambda_i, \nu_{ik} \in R$ und $\Lambda := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in R^{(I)} : \sum_{i\in I} \mu_i \lambda_i = 0 \right\}$. Der Induktionsschritt ist klar. $\square$

Korollar 7.8.23. *Sei R ein Ring. In $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist jede p.p. Formel äquivalent zu einer quantorenfreien infinitären p.p. Formel (mit denselben freien Variablen). $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ erlaubt also eine* infinitäre Q.E.

Beweis. Sei φ p.p. und φ' nach Lemma 7.8.22 eine quantorenfreie infinitäre p.p. Formel mit $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R) \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$. Ist dann $M \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$, so erweitere M nach Kor. 7.8.15 zu $M' \in \mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$. Da $M' \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$, gilt auch $M \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$, nach Definition von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. Weil L_R eine Konstante enthält, kann man ferner φ' o.B.d.A. als Formel in denselben freien Variablen wie φ annehmen. (Bem. 5.2.7.) $\square$

Wir untersuchen nun die durch p.p. Formeln definierbaren Teilmengen eines Moduls.

Sei $\varphi(x, \mathbf{y})$ eine erweiterte p.p. Formel in L_R, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_t)$, also φ von der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i \right) \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0) \tag{7.8.29}$$

mit $\varphi_i = (\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_j = \mu_i x + \sum_{k=1}^t \mu_{ik} y_k)$. Weiter sei M ein R-Modul und $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_t) \in M^t$. Definiere

$$E^M_{\varphi,\mathbf{c}} := \left\{ a \in M : M \models \varphi(a, \mathbf{c}) \right\}.$$

Dann gilt:

Proposition 7.8.24.

(i) *$E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$ ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von M. Ist R kommutativ, so ist $E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$ ein Untermodul von M. (Dabei $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in M^t$.)*

(ii) *Entweder ist $E^M_{\varphi,\mathbf{c}} = \varnothing$ oder $E^M_{\varphi,\mathbf{c}}$ eine Nebenklasse von $E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$.*

Beweis. Die $\varphi(\mathbf{0})$ haben die Form $\varphi(\mathbf{0}) = (\sum \lambda_{ij} x_j = \mu_i x)$; man sieht, daß $0 \in E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$ und mit a, b auch $a - b$ in $E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$ ist, sowie, falls R kommutativ ist, auch λa für $\lambda \in R$. Dies zeigt (i). Für (ii) überlegt man sich, daß, falls $E^M_{\varphi,\mathbf{c}} \neq \varnothing$, etwa $a_0 \in E^M_{\varphi,\mathbf{c}}$, für alle $a \in M$ gilt: $a \in E^M_{\varphi,\mathbf{c}}$ gdw. $a - a_0 \in E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$. □

Wir schreiben kürzer $M_\varphi := E^M_{\varphi,\mathbf{0}}$. M_φ wird eine *p.p. definierbare Untergruppe* von M genannt. (In der Literatur manchmal auch *matrizielle Untergruppe* oder *endlich definierbare Untergruppe.*)

Proposition 7.8.25. *Seien φ, ψ p.p.*

(i) *Ist M ein R-Modul, so ist $M_\varphi \cap M_\psi = M_{\varphi \wedge \psi}$. Endliche Durchschnitte von p.p. Untergruppen sind also stets wieder p.p.*

(ii) *Ist $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln, $I \neq \varnothing$, so ist $\left(\prod_{i\in I} M_i\right)_\varphi = \prod_{i\in I} (M_i)_\varphi$ und $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)_\varphi = \bigoplus_{i\in I} (M_i)_\varphi$.*

Beweis. (i) ist klar, da eine Konjunktion zweier p.p. Formeln äquivalent zu einer p.p. Formel ist. (ii) ergibt sich unmittelbar aus der Definition und verbleibt als Übung. □

Seien $\varphi(x, \mathbf{y}), \psi(x, \mathbf{y})$ p.p. Formeln mit zugehörigen p.p. Untergruppen $M_\varphi \supseteq M_{\varphi\wedge\psi}$ in einem R-Modul M. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\exists_2$-Satz $\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$, der in M besagt, daß $[M_\varphi : M_{\varphi\wedge\psi}] = \operatorname{ord}(M_\varphi / M_{\varphi\wedge\psi}) \geq k$ ist, nämlich

$$\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi} := \exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi[x_i/x, \mathbf{0}/\mathbf{y}] \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} \neg\big(\varphi \wedge \psi\big)[x_j - x_i/x, \mathbf{0}/\mathbf{y}] \right),$$

wobei φ, ψ wie in (7.8.29) gegeben seien. Sätze dieser Art nennen wir *Dimensionssätze.*

Aus der infinitären Q.E. für $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ nach Kor. 7.8.23 erhalten wir:

Korollar 7.8.26. *Jeder Dimensionssatz δ ist* invariant in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$, *d.h. sowohl δ als auch $\neg\delta$ sind persistent unter Erweiterungen in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$.*

Beweis. Sei $\delta = \dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und p.p. Formeln $\varphi(x, \mathbf{y})$, $\psi(x, \mathbf{y})$. Ersetze die p.p. Formel $(\varphi \wedge \psi)$ nach Kor. 7.8.23 durch eine infinitäre quantorenfreie p.p. Formel $\bigwedge_{i'\in I} \varphi_{i'}$ mit Gleichungen $\varphi_{i'}$. Dann ist δ äquivalent zu

$$\bigvee_{i'\in I} \exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi[x_i/x, \mathbf{0}/\mathbf{y}] \wedge \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{k} \neg\varphi_{i'}[x_j - x_i/x, \mathbf{0}/\mathbf{y}] \right),$$

also einer Disjunktion existentieller Sätze. Da wir uns in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ befinden, folgt die Behauptung. □

Korollar 7.8.27. *Sei R ein beliebiger Ring. Je zwei existentiell abgeschlossene Moduln erfüllen dieselben Dimensionssätze.*

Beweis. Seien $M, N \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$, δ ein Dimensionssatz, M erfülle δ. Erweitere $M \times N$ zu $L \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. Dann $M \hookrightarrow L$, $N \hookrightarrow L$; nach Kor. 7.8.26 folgt $L \models \delta$, also auch $N \models \delta$. □

Lemma 7.8.28. *Sei R ein Ring, $\varphi(x, \mathbf{y})$, $\psi(x, \mathbf{y})$ p.p. Formeln in L_R. Dann gilt in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ entweder $\neg \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi}$ oder für alle $k \in \mathbb{N}$ stets $\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$. M.a.W.: Für jedes Paar p.p. Formeln φ, ψ gilt in* allen *existentiell abgeschlossenen R-Moduln M entweder $M_\varphi = M_{\varphi\wedge\psi}$ (d.h. $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models (\varphi \to \psi)(x, \mathbf{0})$) oder $[M_\varphi : M_{\varphi\wedge\psi}] = \infty$.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein $M \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ mit $M \models \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi}$. Wegen dem vorstehenden Kor. 7.8.27 genügt es zu zeigen, daß es ein $M' \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $M' \models \dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$. Sei $N := M^{\mathbb{N}}$. Da mit Prop. 7.8.25, (ii) $N_\varphi = (M_\varphi)^{\mathbb{N}}$, $N_{\varphi\wedge\psi} = (M_{\varphi\wedge\psi})^{\mathbb{N}}$ und $[M_\varphi : M_{\varphi\wedge\psi}] \geq 2$, folgt

$$[N_\varphi : N_{\varphi\wedge\psi}] \geq k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Erweitere jetzt N zu $M' \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. In $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist $\varphi \wedge \psi$ äquivalent zu einer (i.a. unendlichen) Konjunktion ϱ von Gleichungen (Kor. 7.8.23). Damit gilt also $M \models (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varrho)$ und folglich $N \models (\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varrho)$. Somit ist in N jeder Dimensionssatz $\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$ äquivalent zu einer (i.a. unendlichen) Disjunktion existentieller Formeln, und es folgt $M' \models \dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}$. □

7.8.5. Der Satz von Baur-Monk. Wir steuern nun auf einen der grundlegenden Sätze der Modelltheorie von Moduln zu, den Satz von Baur und Monk über relative Q.E.; unsere Darstellung folgt [**178**]. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen über abelsche Gruppen. (Wie üblich schreiben wir $G' \leq G$, falls G' eine Untergruppe der Gruppe G ist, und $[G : G'] = \mathrm{ord}(G/G')$, also $[G : G'] = \mathrm{card}(G/G')$, falls $\mathrm{card}(G/G') < \aleph_0$, und $[G : G'] = \infty$, sonst, wobei G' Normalteiler von G sei; mit ∞ wird wie gewohnt gerechnet.)

Proposition 7.8.29. *Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe.*

(i) *Seien $K \leq H \leq G$, $L \leq G$. Dann ist $[H \cap L : K \cap L] \leq [H : K]$.*
(ii) *Seien $K \leq H \leq G$. Dann ist $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.*
(iii) *Seien $H, K \leq G$, E, F Nebenklassen von H bzw. K. Dann ist entweder $E \cap F = \varnothing$, oder $E \cap F$ ist eine Nebenklasse von $H \cap K$.*
(iv) *Seien $H_1, \ldots, H_n \leq G$, $[G : H_i] < \infty$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist auch $[G : \bigcap_{i=1}^n H_i] < \infty$.*
(v) *Seien $H \leq G$, $K \leq G$. Dann $[G : H] = [G/K : H/H \cap K] \cdot [K : H \cap K]$.*

Beweis. (i) ist klar. (Durch $h(K \cap L) \mapsto hK$ erhält man eine Einbettung $H \cap L/K \cap L \hookrightarrow H/K$.) Zu (ii) beachte, daß nach dem Satz von Lagrange $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(H) \cdot [G : H]$, $\mathrm{ord}(H) = \mathrm{ord}(K) \cdot [H : K]$, also $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(K) \cdot [G : H] \cdot [H : K]$, und $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(K) \cdot [G : K]$. (Oder einfach: 2. Isomorphiesatz.) Zu (iii) sei $E \cap F \neq \varnothing$, etwa $g \in E \cap F$; dann ist $E \cap F = g + H \cap K$.— Zu (iv): Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. $n = 1$ ist trivial. Sei $n > 1$. Dann

$$\left[G : \bigcap_{i=1}^n H_i\right] \underset{\text{(ii)}}{=} [G : H_1] \cdot \left[H_1 : \bigcap_{i=1}^n H_i\right] \underset{\text{(i)}}{\leq} [G : H_1] \cdot \left[G : \bigcap_{i=2}^n H_i\right],$$

und der Induktionsschritt ist vollzogen. (v) schließlich folgt unmittelbar aus den beiden Isomorphiesätzen und (ii): $[G/K : H/H \cap K] \cdot [K : H \cap K] = [G/K : HK/K] \cdot [HK : H] = [G : HK] \cdot [HK : H] \underset{\text{(ii)}}{=} [G : H]$. □

Die folgenden Aussagen stammen von B. H. Neumann [**114**].

Lemma 7.8.30. *Sei G eine abelsche Gruppe. Seien $G_1, \dots, G_k \leq G$, sowie E_i Nebenklassen von G_i, $i = 1, \dots, k$. Falls $G = E_1 \cup \dots \cup E_k$, so ist $[G : G_i] \leq k$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Beweis. Induktion über die Anzahl D der verschiedenen Gruppen unter den G_i. Ist $D = 1$, so sind die $E_1, \dots, E_k$ Nebenklassen ein und desselben G_1, und somit $[G : G_1] \leq k$. Sei also $D > 1$. Definiere eine Quasiordnung $\lesssim$ auf $\{G_1, \dots, G_k\}$ durch $G_i \lesssim G_j$ d.u.n.d., falls $[G_i : G_i \cap G_j]$ endlich ist. $\lesssim$ ist transitiv, da

$$\begin{aligned} [G_h : G_h \cap G_j] &\leq [G_h : G_h \cap G_i \cap G_j] \\ &\underset{\text{(ii)}}{=} [G_h : G_h \cap G_i] \cdot [G_h \cap G_i : G_h \cap G_i \cap G_j] \\ &\underset{\text{(i)}}{\leq} [G_h : G_h \cap G_i] \cdot [G_i : G_i \cap G_j]. \end{aligned}$$

Sei $G_i \sim G_j :\Leftrightarrow (G_i \lesssim G_j \wedge G_j \lesssim G_i)$ die induzierte Äquivalenzrelation und $\leqq$ die induzierte Halbordnung auf den Äquivalenzklassen $[G_i]$. Wähle eine bzgl. $\leqq$ maximale Klasse $[G_i]$. Wir können annehmen, daß $[G_i] = \{G_1, \dots, G_l\}$ für ein $l \in \{1, \dots, k\}$. Mit $T := G_1 \cap \dots \cap G_l$ erhalten wir $[G : T] = [G : G_j] \cdot [G_j : T]$ für $j = 1, \dots, l$, also

$$[G : T] \geq \left(\min_{1 \leq j \leq l} [G : G_j] \right) \cdot [G_i : T],$$

und somit

$$[G : T] \geq \left(\min_{1 \leq j \leq l} [G : G_j] \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq l} [G_i : T].$$

Ferner ist nach Prop. 7.8.29, (iv) $\max_{1 \leq i \leq l} [G_i : T]$ endlich.

Angenommen nun, es wären alle $[G : G_i] > k$ für $1 \leq i \leq k$. Dann folgt $[G : T] > k \cdot \max_{1 \leq i \leq l} [G_i : T]$, und letztere Zahl ist größer oder gleich der Anzahl der Nebenklassen von T, welche in $E_1 \cup \dots \cup E_l$ enthalten sind. (Ist $x + T$ in $E_i = x_i + G_i$ enthalten, so ordne $x + T$ die Nebenklasse $x_i + T$ zu.) Also existiert eine Nebenklasse $x + T$ von T mit $x \in G$, die in $E_{l+1} \cup \dots \cup E_k$ enthalten ist, und somit

$$T \subseteq (-x + E_{l+1}) \cup \dots \cup (-x + E_k). \tag{7.8.30}$$

Nach Prop. 7.8.29, (iii) ist jedes $E_i' := (-x + E_i) \cap T$ entweder leer oder eine Nebenklasse von $G_i' := G_i \cap T$, für $l + 1 \leq i \leq k$. Nach Wahl der $G_1, \dots, G_l$ ist $[G_j : T \cap G_i] \geq [G_j : G_j \cap G_i]$ unendlich für $1 \leq j \leq l < i \leq k$. Ferner sind $[G_j : T]$ endlich und $[G_j : T \cap G_i] = [G_j : T] \cdot [T : T \cap G_i]$ nach Prop. 7.8.29, (ii), und somit $[T : G_i'] = [T : T \cap G_i] = \infty$ für $l + 1 \leq i \leq k$. Ferner ist nach (7.8.30) $T = E_{l+1}' \cup \dots \cup E_k'$, wobei die E_i' leer oder Nebenklassen von G_i' sind, für $l + 1 \leq i \leq k$. Dies aber widerspricht der Induktionsannahme, denn $G_1 \neq G_{l+1}, \dots, G_k$, und damit befinden sich unter $G_{l+1}', \dots, G_k'$ höchstens $D - 1$ verschiedene Gruppen. □

Lemma 7.8.31. *Sei G eine abelsche Gruppe. Seien $G_1, \dots, G_k \leq G$ und E_i Nebenklassen von G_i für $i = 1, \dots, k$. Es sei $G = E_1 \cup \dots \cup E_k$ und $G \neq E_2 \cup \dots \cup E_k$. Dann ist $[G : G_1] \leq k^k$.*

Beweis. Wieder führen wir Induktion über die Anzahl D der verschiedenen Gruppen unter den $G_1, \dots, G_k$. Ist $D = 1$, so sind $E_1, \dots, E_k$ Nebenklassen von G_1, und $[G : G_1] \leq k$. Sei also $D > 1$. Nach Lemma 7.8.30 existiert ein $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $[G : G_i] \leq k$. Ist $[G : G_1] \leq k$, sind wir fertig; andernfalls können wir $[G : G_2] \leq k$ und somit $G_2 \neq G_1$ annehmen. Wähle $x \in G \setminus (E_2 \cup \dots \cup E_k)$ und setze

$F_i := G_2 \cap (-x + E_i)$ für $1 \leq i \leq k$. Nach Prop. 7.8.29, (iii) sind die F_i leer oder Nebenklassen von $G'_i := G_2 \cap G_i$, und

$$G_2 = G \cap G_2 = \big((-x + E_1) \cup \cdots \cup (-x + E_k)\big) \cap G_2 = F_1 \cup \cdots \cup F_k.$$

Man bemerke, daß $G_2 \neq F_2 \cup \cdots \cup F_k$, da sonst $0 \in F_i$ für ein $i \in \{2, \ldots, k\}$, und somit $x \in E_i$; ferner, daß aus $G_i = G_2$ für ein $i \in \{2, \ldots, k\}$ folgt, daß $F_i = \varnothing$ ist, weil sonst $y \in F_i$ impliziert, daß $y + x \in E_i$ und $y \in G_i$, also $x \in E_i$. Wir können o.E. annehmen, daß $G_2 = G_i$ genau für alle $i \in \{2, \ldots, h\}$ gilt, wobei $1 \leq h \leq k$ ist. Dann ist

$$G_2 = F_1 \cup F_{h+1} \cup \cdots \cup F_k, \qquad G_2 \neq F_{h+1} \cup \cdots \cup F_k,$$

und $G'_1, G'_{h+1}, \ldots, G'_k$ sind höchstens $(D-1)$ verschiedene Gruppen. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $[G_2 : G'_1] \leq (k-1)^{(k-1)}$, also

$$[G : G_1] \leq [G : G_1 \cap G_2] = [G : G_2] \cdot [G_2 : G'_1] \leq k \cdot (k-1)^{(k-1)} \leq k^k,$$

wie gewünscht. □

Korollar 7.8.32. *Sei G eine abelsche Gruppe. Seien $G_1, \ldots, G_k \leq G$ und E_i Nebenklassen von G_i für $i = 1, \ldots, k$. Sei $G = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, und sei*

$$I := \big\{i : 1 \leq i \leq k, [G : G_i] \leq k^k\big\}.$$

Dann ist $G = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Beweis. Wende Lemma 7.8.31 nacheinander auf alle G_i mit $i \notin I$ an. □

Ein in der elementaren Kombinatorik oft benütztes Prinzip ist das folgende.

Lemma 7.8.33. (Sylvestersches Prinzip) *Seien $A_0, \ldots, A_k$ endliche Mengen. Es ist*

$$A_0 \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_k \quad \textit{d.u.n.d., wenn} \quad \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} \left| A_0 \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| = 0.$$

(Dabei $A_0 \cap \bigcap_{i \in \varnothing} A_i := A_0$.)

Beweis. Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ lautet die Aussage: $A_0 \subseteq A_1$ genau dann, wenn $|A_0| - |A_0 \cap A_1| = 0$, und dies ist offensichtlich richtig. Sei $k > 1$. Dann

$$\sum_I (-1)^{|I|} \left| A_0 \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| =$$

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|} \left(\left| A_0 \cap A_k \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \left| (A_0 \setminus A_k) \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right) +$$

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|+1} \left| A_0 \cap A_k \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| =$$

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|} \left| (A_0 \setminus A_k) \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

und dies ist nach Induktionsannahme gleich 0 d.u.n.d., wenn $(A_0 \setminus A_k) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$, d.h. wenn $A_0 \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_k$. □

Eine Kombination von Kor. 7.8.32 und Lemma 7.8.33 ergibt ein Kriterium betreffend die Überdeckung einer Nebenklasse durch endlich viele Nebenklassen.

Überdeckungssatz. *Sei G eine abelsche Gruppe, $G_i \leq G$, E_i leer oder eine Nebenklasse von G_i für $0 \leq i \leq k$. Setze*

$$\begin{aligned} J &:= \left\{ i : 1 \leq i \leq k, E_i \neq \varnothing \text{ und } [G : G_i] \leq k^k \right\}, \\ H &:= G_0 \cap \cdots \cap G_k, \\ N_I &:= \left[G_0 \cap \bigcap_{i \in I} G_i : H \right] \quad \text{für } I \subseteq J, \text{ und} \\ \mathcal{N} &:= \left\{ I \subseteq J : E_0 \cap \bigcap_{i \in I} E_i \neq \varnothing \right\}. \end{aligned}$$

Es ist $E_0 \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_k$ dann und nur dann, wenn $\sum_{I \in \mathcal{N}} (-1)^{|I|} N_I = 0$ (wobei $\sum\limits_{\varnothing}$ nach Definition gleich 0 sei.).

Beweis. Ist $E_0 = \varnothing$, so ist $\mathcal{N} = \varnothing$, und somit $\sum\limits_{\varnothing} = 0$. Andernfalls wähle $x \in E_0$ und setze $F_i := -x + E_i$. Dann gilt

$$E_0 \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_k \quad \Leftrightarrow \quad G_0 \subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_k \quad \underset{7.8.32}{\Leftrightarrow} \quad G_0 = \bigcup_{j \in J} F_j.$$

Sei $\pi \colon G \to G/H$ der kanonische Epimorphismus und setze $A_0 := \pi(G_0) = G_0/H$, $A_j := \pi(F_j)$ für $j \in J$. Nach Prop. 7.8.29, (iv) sind A_0, A_j für $j \in J$ alle endlich, und es gilt

$$G_0 \subseteq \bigcup_{j \in J} F_j \quad \Leftrightarrow \quad A_0 \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Nach Lemma 7.8.33 ist dies d.u.n.d. der Fall, wenn $\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} \left| A_0 \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right| = 0$. Es ist nun $A_0 \cap \bigcap_{i \in I} A_i = \pi(G_0 \cap \bigcap_{i \in I} F_i)$, und nach Prop. 7.8.29, (iii) $G_0 \cap \bigcap_{i \in I} F_i$ eine Nebenklasse von $G_0 \cap \bigcap_{i \in I} G_i$. Somit haben wir $|A_0 \cap \bigcap_{i \in I} A_i| = |G_0 \cap \bigcap_{i \in I} G_i / H| = N_I < \infty$. Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Nach diesen Vorarbeiten kommen wir nun zu dem bereits mehrfach angekündigten Satz.

Satz 7.8.34. (Baur-Monk, [**50**], [**111**]) *Sei R ein beliebiger Ring. Dann ist in $\mathcal{M}_R$ jede L_R-Formel φ äquivalent zu einer Booleschen Kombination φ' von p.p. Formeln und Dimensionssätzen.* (*Die Klasse der Moduln erlaubt also* Q.E. relativ zu p.p. Formeln und Dimensionssätzen.)

Beweis. Wir führen Induktion über den Aufbau von φ. Der einzig nichttriviale Fall ist der des Allquantors. Es genügt also zu zeigen, daß für eine $\wedge$-$\vee$-$\neg$-Kombination $\psi(x, \mathbf{y})$ von p.p. Formeln und Dimensionssätzen auch $\varphi = \forall x(\psi(x, \mathbf{y}))$ in $\mathcal{M}_R$ zu einer solchen Kombination äquivalent ist. O.B.d.A. sei ψ eine Disjunktion von p.p. Formeln und Dimensionssätzen und Negationen von solchen. Da die Variable x in den Dimensionssätzen nicht vorkommt, können wir ψ von der folgenden Gestalt annehmen:

$$\psi = \bigvee_{i=1}^{k} \psi_i \vee \bigvee_{i=k+1}^{l} \neg \psi_i \quad \text{mit p.p. } \psi_i.$$

Dabei sei $l > k$; ansonsten füge man die Ungleichung $\neg(0 = 0)$ hinzu. Ist $k = 0$, so ist φ äquivalent zu $\neg\exists x(\bigwedge_{i=k+1}^{l} \psi_i)$, und dies äquivalent zur Negation einer p.p. Formel. Ist $k > 0$, setze $\psi_0 := \bigwedge_{i=k+1}^{l} \psi_i$. Dann ist ψ äquivalent zu $\psi_0 \to \bigvee_{i=1}^{k} \psi_i$. Sei $M \in \mathcal{M}_R$ beliebig, $G_i := M_{\psi_i}$ die zu ψ_i gehörigen p.p. Gruppen. Für jedes zu $\mathbf{y}$ passende $\mathbf{b}$ aus M gilt dann

$$A \models \varphi(\mathbf{b}) \quad \Leftrightarrow \quad E_0 \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_k, \qquad \text{wobei } E_i = E^M_{\psi_i,\mathbf{b}}.$$

Nach dem Überdeckungssatz (mit den dortigen Bezeichnungen) ist dies der Fall d.u.n.d., wenn $\sum_{I\in\mathcal{N}}(-1)^{|I|}N_I = 0$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $M \models \vartheta(\mathbf{b})$, wobei mit $K := \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned}
\vartheta(\mathbf{y}) \quad &:= \quad \bigvee_{J\subseteq K} \bigvee_{N\subseteq 2^J} \bigvee_{\substack{n\colon N\to\mathbb{N}_0,\\ \sum_{I\in N}(-1)^{|I|}n(I)=0\\ \forall I\in N\colon\, n(I)\le k^{k^2}}} \left(\varrho_J \wedge \bigwedge_{I\in N} \sigma_{I,n,N}\right),\\
\varrho_J \quad &:= \quad \bigwedge_{j\in J} \left(\exists x\,(\psi_j\,(x,\mathbf{y})) \wedge \neg \dim^{\ge k^k+1}_{\psi_0,\psi_j}\right) \wedge\\
&\qquad \bigwedge_{j\in K\setminus J} \left(\neg\exists x\,(\psi_j\,(x,\mathbf{y})) \vee \dim^{\ge k^k+1}_{\psi_0,\psi_j}\right),\\
\sigma_{I,n,N} \quad &:= \quad \exists x \left(\psi_0 \wedge \bigwedge_{i\in I} \psi_i\right)(x,\mathbf{y}) \wedge \bigwedge_{I'\in 2^J\setminus N} \neg\exists x \left(\psi_0 \wedge \bigwedge_{i'\in I'} \psi_{i'}\right)(x,\mathbf{y}) \wedge\\
&\qquad \dim^{\ge n(I)}_{\psi_0\wedge\bigwedge_{i\in I}\psi_i,\bigwedge_{j\in K}\psi_j} \wedge \neg \dim^{\ge n(I)+1}_{\psi_0\wedge\bigwedge_{i\in I}\psi_i,\bigwedge_{j\in K}\psi_j}.
\end{aligned}$$

(Man beachte, daß die innerste Disjunktion in ϑ endlich ist; die Abschätzung durch k^{k^2} ergibt sich mit Prop. 7.8.29, (i) aus

$$N_I = \left[G_0 \cap \bigcap_{i\in I} G_i : H\right] \le \left[G_0 : G_0 \cap \bigcap_{j\in J\setminus I} G_j\right] \le (k^k)^k$$

und dem Beweis von Prop. 7.8.29, (iv).)

Damit $\mathcal{M}_R \models (\varphi \leftrightarrow \vartheta)(\mathbf{y})$, und ϑ ist von der gewünschten Form. □

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß der vorgestellte Beweis mit marginalen Änderungen auch in dem viel allgemeineren Rahmen der von Fisher [**76**] definierten *abelschen Strukturen* durchgeführt werden kann; vgl. hierzu [**178**]. Diese umfassen neben den von van der Waerden als abelsche *Gruppen mit Operatoren* bezeichneten Strukturen ([**39**], §45) auch Bimoduln, Moduln mit ausgezeichneter Untergruppe u.v.m.

7.8.6. Folgerungen aus dem Baur-Monk-Satz. Wir sammeln einige sich leicht ergebende Konsequenzen aus dem Satz von Baur-Monk ein.

Korollar 7.8.35. *Jeder L_R-Satz ist in der Klasse der Moduln äquivalent zu einer Booleschen Kombination von Dimensionssätzen.*

Beweis. Sei φ ein L_R-Satz. Nach dem Satz von Baur-Monk ist φ äquivalent zu einer Booleschen Kombination φ' von p.p. Formeln und Dimensionssätzen. Weil L_R nicht konstantenlos ist, kann man nach Bem. 5.2.7 annehmen, daß φ' dieselben freien Variablen wie φ enthält, also gar keine. Jeder p.p. Satz in φ' kann aber nun äquivalent durch $0 = 0$ ersetzt werden. $\square$

Korollar 7.8.36. *Für Moduln M, N sind gleichwertig:*

(i) *M und N sind elementar äquivalent.*
(ii) *M und N erfüllen dieselben $\forall_2$-Sätze.*
(iii) *M und N erfüllen dieselben Dimensionssätze.* $\square$

Sei M ein R-Modul. Die Zahlen

$$\mathrm{Inv}(\varphi, \psi, M) := [M_\varphi : M_{\varphi\wedge\psi}] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

wobei φ und ψ alle p.p. Formeln durchlaufen, nennt man auch die *Baur-Monk-Invarianten des Moduls M.* Wie schon im Fall der algebraisch abgeschlossenen Körper haben wir also numerische Invarianten zur Unterscheidung elementarer Äquivalenz.

Zum Berechnen von Baur-Monk-Invarianten sind die folgende Aussagen praktisch:

Lemma 7.8.37. *Sei $\{M_i\}_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von R-Moduln. Dann gilt für jede Baur-Monk-Invariante $J = \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, -)$:*

$$J\left(\prod_{i\in I} M_i\right) = \sup\left\{\prod_{i'\in I'} J(M_{i'}) : I' \subseteq I \text{ endlich}\right\} = J\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$$

Beweis. Seien $\varphi(x), \psi(x)$ p.p. Formeln. Mit Prop. 7.8.25, (ii) folgt

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)_\varphi = \prod_{i\in I} (M_i)_\varphi, \quad \left(\prod_{i\in I} M_i\right)_\psi = \prod_{i\in I} (M_i)_\psi.$$

Damit

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)_\varphi \Big/ \left(\prod_{i\in I} M_i\right)_{\varphi\wedge\psi} \cong \prod_{i\in I} (M_i)_\varphi/(M_i)_{\varphi\wedge\psi},$$

und dies impliziert die erste Gleichung für $J = \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, -)$. Die Berechnung der zweiten erfolgt vollkommen analog. $\square$

Definition 7.8.38. Sind M, N R-Moduln und $p\colon M \hookrightarrow N$ eine Einbettung, so heißt p eine *reine Einbettung,* falls p alle Negationen von p.p. Formeln erhält. M heißt ein *reiner Untermodul* von N oder *M rein in N,* falls $M \subseteq N$ und die Inklusionsabbildung eine reine Einbettung ist.

Also: M ist reiner Untermodul von N genau dann, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{b} \in M^m$ und $A \in R^{m\times n}$ gilt: Hat das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in N eine Lösung, so auch schon in M. Anders ausgedrückt: Für jede p.p. Formel φ gilt $M_\varphi = N_\varphi \cap M$. Genauer:

Proposition 7.8.39. *Sei M ein reiner Untermodul von N. Für alle p.p. Formeln φ, ψ in L_R, $J = \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, -)$ gilt: $J(N) = J(M)J(N/M)$. Insbesondere ist $N \equiv M \oplus N/M$ und $J(M) \leq J(N)$.*

Beweis. Es reicht, $N_\phi/M_\phi \cong (N/M)_\phi$ für alle p.p. ϕ zu beweisen, denn dann folgt

$$J(N/M) = [(N/M)_\varphi : (N/M)_{\varphi\wedge\psi}] = [N_\varphi/M_\varphi : N_{\varphi\wedge\psi}/M_{\varphi\wedge\psi}],$$

also mit Prop. 7.8.29, (v) wie gewünscht $J(N) = J(M)J(N/M)$. Sei also $\phi(y)$ eine erweiterte p.p. Formel. Zunächst gilt mit $N \models \varphi(a)$, wobei $a \in N$, sicher auch $N/M \models \varphi(\pi(a))$, wobei $\pi\colon N \twoheadrightarrow N/M$ die kanonische Projektion sei; wegen $M_\phi = M \cap N_\phi$ folgt also $N_\phi/M_\phi \subseteq (N/M)_\phi$. Umgekehrt gelte $N/M \models \phi(\pi(a))$ mit $a \in N$, und ϕ sei etwa von der Form $\phi = \exists x_1 \cdots \exists x_n(\vartheta)$ mit einer Konjunktion ϑ von atomaren Formeln. Sei $\mathbf{b} \in N^n$ mit $N/M \models \vartheta(\pi(\mathbf{b}), \pi(a))$. Erweitern wir die Gleichungen $\sum_j \lambda_{ij}x_j = \mu_i x$ in ϑ um die Variable z zu $\sum_j \lambda_{ij}x_j = \mu_i x + z$, so gilt $N/M \models \vartheta(\pi(\mathbf{b}), \pi(a), 0)$ mit $\vartheta(\mathbf{x}, y, z)$. Damit gibt es also ein $c \in M = \ker(\pi)$ mit $N \models \vartheta(\mathbf{b}, a, c)$, also $N \models \exists y \exists x_1 \cdots \exists x_n(\vartheta)[c/z]$. Da M rein in N und $c \in M$, gilt auch $M \models \exists y \exists x_1 \cdots \exists x_n(\vartheta)[c/z]$, sagen wir $\mathbf{b}' \in M^n$, $a' \in M$ mit $M \models \vartheta(\mathbf{b}', a', c)$, also auch $N \models \vartheta(\mathbf{b}', a', c)$. Es folgt $N \models \vartheta(\mathbf{b}-\mathbf{b}', a-a', 0)$, also $N \models \phi(a-a')$. Aber $\pi(a-a') = \pi(a)$, und es ergibt sich $\pi(a) \in N_\phi/M_\phi$, wie gewünscht.— $N \equiv M \oplus N/M$ folgt nun aus Lemma 7.8.37. $\square$

Damit einige weitere Folgerungen aus dem Satz von Baur-Monk:

Korollar 7.8.40. (Sabbagh, [**138**], [**139**]) *Sei R ein beliebiger Ring.*

(i) *Seien $M \subseteq N$ zwei R-Moduln. Genau dann ist $M \preceq N$, wenn M rein in N und $M \equiv N$ ist.*
(ii) *Seien $M \subseteq N \subseteq P$ Moduln über R, und M rein in N, N rein in P. Dann folgt $M \equiv N$ aus $M \equiv P$.*
(iii) *Seien $\{M_i\}_{i\in I}$ und $\{N_i\}_{i\in I}$ zwei nichtleere Familien von R-Moduln. Ist $M_i \equiv N_i$ für jedes $i \in I$, so*
$$\bigoplus_{i\in I} M_i \equiv \bigoplus_{i\in I} N_i, \quad \prod_{i\in I} M_i \equiv \prod_{i\in I} N_i, \quad \bigoplus_{i\in I} M_i \equiv \prod_{i\in I} N_i.$$
Insbesondere ist $\bigoplus_{i\in I} M_i \equiv \prod_{i\in I} M_i$.
(iv) *Sei I eine unendliche Menge, M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*
  (a) *$M \equiv M \oplus M$ (bzw. $M \equiv M \times M$)*
  (b) *$M \equiv M^{(I)}$ (bzw. $M \equiv M^I$)*
  (c) *Jede Baur-Monk-Invariante von M ist entweder 1 oder ∞.*
(v) *Sind $M \preceq N$ R-Moduln, so ist $M \equiv M \oplus (N/M)$. Sind $M \subseteq N \subseteq N'$ R-Moduln und ist N rein in N', so ist N/M rein in N'/M.*

Beweis. Zu (i): Jede reine Einbettung erhält alle p.p. Formeln (als Einbettung) und deren Negationen (als reine Einbettung). Damit folgt die Behauptung aus dem Baur-Monk-Satz.

Zu (ii): Wegen Prop. 7.8.39 ist für alle p.p. Formeln φ, ψ
$$\mathrm{Inv}(\varphi, \psi, M) \leq \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, N) \leq \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, P),$$
wegen $M \equiv P$ aber $\mathrm{Inv}(\varphi, \psi, M) = \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, P)$, also $\mathrm{Inv}(\varphi, \psi, M) = \mathrm{Inv}(\varphi, \psi, N)$, und Kor. 7.8.36 impliziert $M \equiv N$.

Zu (iii): Lemma 7.8.37 zeigt, daß $\bigoplus M_i$ und $\prod N_i$ dieselben Baur-Monk-Invarianten besitzen; also $\bigoplus M_i \equiv \prod N_i$. Analog in den anderen beiden Fällen.

Zu (iv): (a) $\Rightarrow$ (b): Mit Lemma 7.8.37 und $J(M \oplus M) = J(M)$ ist $J(M^{(I)}) = J(M)$ für alle Invarianten J. Mit Kor. 7.8.36 folgt $M \equiv M^{(I)}$.— (b) $\Rightarrow$ (c): Es ist $J(M) = J(M^{(I)}) = \sup\{J(M)^k : k \in \mathbb{N}\}$. Wäre also $J(M) \notin \{1, \infty\}$, so folgte der Widerspruch $\infty \in \mathbb{N}$.— (c) $\Rightarrow$ (a): Es ist $J(M \oplus M) = J(M) \cdot J(M)$.— Den Fall der direkten Potenz erledigt man vollkommen analog.

Zu (v): Der erste Teil ist klar nach Prop. 7.8.39; den zweiten zeigt man mit derselben Beweismethode wie in Prop. 7.8.39. $\square$

Übung. Sei R ein kommutativer Ring, der einen unendlichen Körper enthält. Zeige, daß $M^n \equiv M^\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinsichtlich algorithmischer Aspekte notieren wir:

Korollar 7.8.41. *Sei R ein (primitiv) rekursiver Ring. Die im Satz von Baur-Monk gegebene Abbildung, die einer beliebigen L_R-Formel eine in $\mathcal{M}_R$ äquivalente Formel aus dem $\wedge$-$\vee$-$\neg$-Abschluß der Menge aller p.p. Formeln und Dimenensionssätzen zuordnet, ist (primitiv) rekursiv; sinngemäß trifft dies auch auf Kor. 7.8.35 zu.— Ist M ein R-Modul, so ist* $\mathrm{Th}(M)$ *(primitiv rekursiv) entscheidbar genau dann, wenn die Menge*

$$\big\{(\varphi, \psi, k) : k \in \mathbb{N},\ \varphi(x, \mathbf{y}),\ \psi(x, \mathbf{y})\ \text{p.p.},\ [M_\varphi : M_{\varphi\wedge\psi}] \geq k\big\} \tag{7.8.31}$$

(primitiv) rekursiv ist.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Daß aus der (primitiv rekursiven) Entscheidbarkeit von $\mathrm{Th}(M)$ die von (7.8.31) folgt, ist trivial. Umgekehrt existiert dann eine (primitiv) rekursive Funktion, die jedem Dimensionssatz δ einen Satz $\delta' \in \{0 = 0, 0 \neq 0\}$ zuweist, so daß $M \models (\delta \leftrightarrow \delta')$. Mit Kor. 7.8.35 folgt die Behauptung. □

Das folgende Korollar zeigt, daß selbst, falls kein Modellbegleiter von $\mathcal{M}_R$ existiert, die Klasse $\mathcal{M}_R$ „gutartig“ ist.

Korollar 7.8.42. *Sei R ein beliebiger Ring. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) = \mathcal{G}_n(\mathcal{M}_R) = \mathcal{G}(\mathcal{M}_R)$$

Beweis. $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist konfinal in $\mathcal{M}_R$. Ferner besitzt $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ Eigenschaft (G2_∞): Seien $M, N \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ mit $M \subseteq N$ betrachtet; es ist $M \preceq N$ zu zeigen. Aber dies folgt unmittelbar aus Kor. 7.8.35 und Kor. 7.8.26. Da $\mathcal{G}(\mathcal{M}_R)$ die größte Teilklasse von $\mathcal{M}_R$ ist, welche (G1) und (G2_∞) erfüllt, folgt die Behauptung wegen $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \supseteq \mathcal{G}(\mathcal{M}_R)$. □

Schließlich erhalten wir auch die gesuchte Bedingung an R, die die Existenz eines Modellbegleiters garantiert:

Korollar 7.8.43. (Eklof-Sabbagh, [**75**]) *$\mathcal{M}_R$ hat einen Modellbegleiter (d.h. $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist elementar) genau dann, wenn R ein kohärenter Ring ist.*

Beweis. Die eine Richtung wurde schon in Kor. 7.8.9, (i) bewiesen. Sei zur Umkehrung R als kohärent gegeben. Es gilt: In $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist jede L_R-Formel φ äquivalent zu einer quantorenfreien L_R-Formel φ'. Denn mit Baur-Monk ist φ äquivalent zu einer $\wedge$-$\vee$-$\neg$-Kombination von p.p. Formeln und Dimensionssätzen. Auf die p.p. Formeln wende nun Lemma 7.8.20, auf die Dimensionssätze Kor. 7.8.27 an.

Sei $\mathcal{K} := \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)))$; dann ist $\mathcal{M}_R \supseteq \mathcal{K} \supseteq \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. Es ist aber auch $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ mit Satz 7.4.1, da mit $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ auch $\mathcal{K}$ konfinal in $\mathcal{M}_R$ ist, nach dem eben Bewiesenen Q.E. erlaubt und somit substrukturvollständig und speziell modellvollständig ist. □

Es gilt sogar:

Korollar 7.8.44. *$\mathcal{M}_R$ hat eine Modellvervollständigung genau dann, wenn R ein kohärenter Ring ist.*

Beweis. Aus Kor. 7.8.43, Satz 7.8.1 und Satz 7.4.5. (Oder direkt aus dem Beweis von Kor. 7.8.43.) □

Korollar 7.8.45. (Infinitäre Axiomatisierung von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$) *Sei R ein beliebiger Ring, Ξ ein Axiomensystem für R-Moduln. Definiere*

$$\begin{aligned}\Delta \quad := \quad & \Xi \cup \big\{\varphi' \to \varphi : \varphi \text{ p.p.}, \varphi' \ L_\infty\text{-Konj. von Gleichg.}, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')\big\} \cup \\ & \Big\{\neg \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi} : \varphi, \psi \text{ p.p.}, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \neg \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi}\Big\} \cup \\ & \Big\{\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi} : \varphi, \psi \text{ p.p.}, k \in \mathbb{N}, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}\Big\}.\end{aligned}$$

Dann gilt $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) = \mathrm{Mod}(\Delta)$.

Beweis. *Per definitionem* gilt $\mathrm{Mod}(\Delta) \supseteq \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$. Es reicht, um Gleichheit zu erreichen, (G1) und (G2_1) zu beweisen. (G1) ist klar. Für (G2_1) ist wegen dem Satz von Baur-Monk nur zu überprüfen, daß p.p. Formeln und Dimensionssätze unter Erweiterungen in $\mathrm{Mod}(\Delta)$ erhalten bleiben. Für die Dimensionssätze sieht man das an der Konstruktion von Δ. Sei also φ eine p.p. Formel. Wir wählen gemäß Kor. 7.8.23 eine infinitäre Konjunktion φ' von Gleichungen mit $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ und zeigen, daß $\mathrm{Mod}(\Delta) \models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$. (Daraus folgt dann ja die Behauptung.) Es ist nur $\mathrm{Mod}(\Delta) \models (\varphi \to \varphi')$ zu zeigen. Sei etwa $\varphi' = \bigwedge_{i\in I} \varphi'_i$ mit Gleichungen φ'_i. Da $\varphi \to \varphi'_i$ äquivalent zu einer universellen Formel ist, und in $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ gilt, daß $\varphi \to \bigwedge_{i\in I} \varphi'_i$, also $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models (\varphi \to \varphi'_i)$, folgt aus der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ in $\mathcal{M}_R$ auch $\mathcal{M}_R \models (\varphi \to \varphi'_i)$. Insgesamt also $\mathrm{Mod}(\Delta) \models (\varphi \to \bigwedge_{i\in I} \varphi'_i)$. □

Wir wollen uns nun noch den Zusammenhang zwischen $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ und $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ im kohärenten Fall näher überlegen; offenbar gilt stets $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$. In Verallgemeinerung des Injektivitätsbegriffs wollen wir für eine Kardinalzahl κ einen Modul M *κ-injektiv* nennen, wenn für alle Teilmengen I von R mit $\mathrm{card}(I) < \kappa$ und Familien von Elementen $\{a_\lambda\}_{\lambda\in I}$ aus M gilt: Wenn die Gleichungen $\lambda x = a_\lambda$, $\lambda \in I$ in einer Erweiterung von M eine Lösung besitzen, so auch schon in M selbst. (Offenbar ist ein Modul M injektiv genau dann, wenn er $\gamma(R)$-injektiv ist, wobei $\gamma(R) \leq \mathrm{card}(R)^+$ die kleinste Kardinalzahl bezeichne, so daß alle Ideale von R ein Erzeugendensystem aus weniger als $\gamma(R)$ Elementen besitzen.)

Proposition 7.8.46. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul, κ eine Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist κ-injektiv.*
(ii) *Jedes Diagramm der folgenden Form, mit einem von weniger als κ Elementen erzeugten Ideal $\mathfrak{a}$, kann vervollständigt werden:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "\exists h"] \\ & M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) beweist man analog zu (i) $\Rightarrow$ (iv) in Lemma 7.8.11. Für (ii) $\Rightarrow$ (i) sei $\lambda x = a_\lambda$ mit $\lambda \in I$, $0 < \mathrm{card}(I) < \kappa$ ein Gleichungssystem, das in einer Erweiterung von M gelöst werden kann, also nach Lemma 7.8.7:

$$\sum_{i\in I} \mu_i \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\in I} \mu_i a_i = 0 \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\mu} \in R^{(I)}.$$

Sei $\mathfrak{a}$ das von den λ ($\lambda \in I$) erzeugte Ideal. Es folgt, daß ein Homomorphismus $f\colon \mathfrak{a} \to M$ mit $f(\lambda) = a_\lambda$ für alle $\lambda \in I$ existiert. Ist $h\colon R \to M$ seine Fortsetzung, so ist $h(1)$ eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems in M. $\square$

SATZ 7.8.47. (Eklof-Sabbagh, [**75**]) *Die Klasse der $\aleph_0$-injektiven Moduln über R ist axiomatisierbar in der Logik erster Stufe genau dann, wenn R kohärent ist.*

BEWEIS. Ist R kohärent, so erhält man vermöge Prop. 7.8.6, (iii) und Lemma 7.8.7, (ii) unmittelbar eine Axiomatisierung der $\aleph_0$-injektiven R-Moduln, nämlich

$$\Xi \cup \left\{ \bigwedge_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{y} = 0 \leftrightarrow \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = y_i \right) : n \in \mathbb{N}, \langle \boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m \rangle = \Lambda, \boldsymbol{\lambda} \in R^n \right\},$$

wobei Ξ ein Axiomensystem für R-Moduln sei. Umgekehrt sei jetzt Δ ein Axiomensystem für die Klasse der $\aleph_0$-injektiven Moduln, aber R als nicht kohärent angenommen, d.h. es gebe ein $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, so daß $\Lambda = \{\boldsymbol{\mu} \in R^n : \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0\}$ nicht endlich erzeugt ist. Man führt nun analog zum Beweis von Kor. 7.8.9, (i) einen Widerspruch herbei, wobei zu beachten ist, daß Kor. 7.8.8 sinngemäß auch für die Klasse der $\aleph_0$-injektiven Moduln anstelle von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ gilt, und die Konfinalität von $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ (und damit der Klasse aller $\aleph_0$-injektiven Moduln) in $\mathcal{M}_R$ auszunutzen ist. $\square$

In Kor. 7.8.45 haben wir eine infinitäre Axiomatisierung von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ gefunden, die für beliebige Ringe R gültig ist; es stellt sich die Frage nach einem einfachen (finitären) Axiomensystem im Falle eines kohärenten Rings.

ÜBUNG. Man gebe einfache Axiome für $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ für die Fälle, daß R ein Körper bzw. ein Ring der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist, an.

Nennen wir einen R-Modul *fett,* wenn er Modell der L_R-Satzmenge

$$\left\{\neg \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi} : \varphi,\, \psi \text{ p.p.}, \, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \neg \dim^{\geq 2}_{\varphi,\psi}\right\} \cup$$
$$\left\{\dim^{\geq k}_{\varphi,\psi} : \varphi,\, \psi \text{ p.p.}, \, k \in \mathbb{N}, \, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \dim^{\geq k}_{\varphi,\psi}\right\}$$

ist, so gilt:

KOROLLAR 7.8.48. *Sei R ein beliebiger Ring. Ein R-Modul M ist existentiell abgeschlossen genau dann, wenn M fett und $\aleph_0$-injektiv ist.*

BEWEIS. Jeder Modul $M \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ ist fett und $\aleph_0$-injektiv, die Bedingung ist also sicher notwendig. Um die Umkehrung zu beweisen, genügt es nach Lemma 7.1.4 und der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ in $\mathcal{M}_R$, ($G2_1$) für die Klasse $\mathcal{K}$ der fetten $\aleph_0$-injektiven Moduln zu zeigen. Ist also $M \subseteq N$ eine Erweiterung in $\mathcal{K}$ und $\varphi \in \forall_1$, so wählen wir gemäß Baur-Monk eine in $\mathcal{M}_R$ zu φ äquivalente Formel φ', wobei wegen M, N fett o.B.d.A. lediglich der Fall, daß φ' eine negierte p.p. Formel ist, bearbeitet werden muß. Gälte φ' in M, aber nicht in N, so hätten wir ein endliches Gleichungssystem gefunden, das in einer Erweiterung von M, nämlich N, aber nicht in M selbst eine Lösung besitzt, im Widerspruch zur $\aleph_0$-Injektivität von M. $\square$

Im Fall, daß $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ elementar ist, kann man also $\mathcal{E}(\mathcal{M}_R)$ durch

$$\begin{aligned}\Xi \quad \cup \quad & \left\{ \bigwedge_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{y} = 0 \leftrightarrow \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \lambda_i x = y_i \right) : n \in \mathbb{N}, \langle \boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_m \rangle = \Lambda, \boldsymbol{\lambda} \in R^n \right\} \\ \cup \quad & \left\{ \neg \dim_{\varphi,\psi}^{\geq 2} : \varphi,\ \psi \text{ p.p.}, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \neg \dim_{\varphi,\psi}^{\geq 2} \right\} \\ \cup \quad & \left\{ \dim_{\varphi,\psi}^{\geq k} : \varphi,\ \psi \text{ p.p.}, k \in \mathbb{N}, \mathcal{E}(\mathcal{M}_R) \models \dim_{\varphi,\psi}^{\geq k} \right\}\end{aligned}$$

axiomatisieren, wobei wieder $\mathrm{Mod}(\Xi) = \mathcal{M}_R$.

Interessant ist schließlich die Frage, wann die Klasse $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ *aller* injektiven Moduln in der Logik erster Stufe axiomatisiert werden kann. ([**9**] enthält weitere Informationen zu derartigen Fragen; vgl. auch [**179**].) Wir zeigen dazu zunächst folgende Charakterisierung noetherscher Ringe:

Satz 7.8.49. (Bass, nach [**61**]) *Ein Ring R ist noethersch genau dann, wenn jede direkte Summe injektiver R-Moduln injektiv ist.*

Beweis. Offenbar gilt für einen endlich erzeugten R-Modul M und eine direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ von R-Moduln, daß das Bild jeder R-linearen Abbildung $f\colon M \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ in einer endlichen Teilsumme $M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$ enthalten ist. Sei nun R noethersch und $\{M_i\}_{i\in I}$ eine nichtleere Familie injektiver Moduln. Wir verwenden den Test von Baer, Lemma 7.8.11, (iv): Sei also $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R, $f\colon \mathfrak{a} \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ linear. Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, also existieren $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $f(\mathfrak{a}) \subseteq M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$. Für jedes $t \in \{1, \dots, n\}$ existiert nun wegen der Injektivität von M_{i_t} eine Fortsetzung $f_t\colon R \to M_{i_t}$ von $\pi_{i_t} \circ f$ auf R, wobei $\pi_{i_t}\colon \bigoplus_{s=1}^{n} M_{i_s} \twoheadrightarrow M_{i_t}$. Definiert man $h\colon R \to \bigoplus_{s=1}^{n} M_{i_s}$ durch $h(\lambda) := (f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$, so hat man die gesuchte Fortsetzung von f auf R. Umgekehrt sei $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ jetzt unter $\bigoplus$ abgeschlossen und $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von Idealen in R, $\mathfrak{a} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$. Zu jedem $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n$ existiert ein injektiver Modul M_n mit $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n \hookrightarrow M_n$ und zugehöriger Abbildung $f_n\colon \mathfrak{a} \twoheadrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n \hookrightarrow M_n$. Die lineare Abbildung $f\colon \mathfrak{a} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n, \lambda \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} f_n(\lambda)$ ist wohldefiniert, da zu jedem $\lambda \in \mathfrak{a}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $\lambda \in \bigcup_{n\geq m} \mathfrak{a}_n$, also $f_n(\lambda) = 0$ für $m \geq n$. Da nach Voraussetzung auch $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ injektiv ist, existiert eine Fortsetzung $h\colon R \to \bigoplus M_n$ von f auf R. Aber R ist endlich erzeugt als R-Modul, es gibt somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, d.h. $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_{n+2} = \cdots = \mathfrak{a}$. □

Im Kontrast dazu gilt:

Proposition 7.8.50. *Sei R ein Ring, κ eine Kardinalzahl, $I \neq \varnothing$, $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln.*

(i) $\prod_{i\in I} M_i$ *ist κ-injektiv genau dann, wenn jedes M_i κ-injektiv ist.*
(ii) *Ist $\kappa \leq \aleph_0$, so gilt: Sind alle M_i κ-injektiv, so auch* $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

Beweis. (i) ist leicht und verbleibt als Übung. Zu (ii) betrachte ein Gleichungssystem $(*)$ $\lambda x = a_\lambda$ ($\lambda \in J \subseteq R$, $\mathrm{card}(J) < \kappa$, $\{a_\lambda\}_{\lambda\in J}$ Familie in $\bigoplus M_i$), das in einer Erweiterung N von $\bigoplus M_i$ eine Lösung besitzt. Für jedes $i \in I$ hat dann auch $\lambda x_i = \pi_i(a_\lambda)$ mit $\lambda \in I$, $\pi\colon \bigoplus M_i \twoheadrightarrow M_i$ eine Lösung bzgl. x_i in der Erweiterung $N \supseteq M_i$, wegen M_i injektiv also eine Lösung m_i in M_i, mithin $(*)$ eine Lösung $n := \sum_{i\in I} m_i$. □

Korollar 7.8.51. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Jeder $\aleph_0$-injektive Modul ist injektiv.*
(ii) *R ist noethersch.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii) verwende Prop. 7.8.50, (ii) und Satz 7.8.49, (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial mit Prop. 7.8.46. $\square$

Satz 7.8.52. (Eklof-Sabbagh, [**75**]) *Die Klasse der injektiven Moduln über R ist axiomatisierbar in der Logik erster Stufe genau dann, wenn R noethersch ist.*

Beweis. Ist R noethersch, so auch kohärent, die injektiven Moduln sind genau die $\aleph_0$-injektiven Moduln, und mit Satz 7.8.47 folgt die Axiomatisierbarkeitsaussage. Umgekehrt sei R jetzt nicht noethersch, aber $\mathcal{I}(\mathcal{M}_R)$ als elementar angenommen. Nach Satz 7.8.49 existiert eine unendliche Menge I und eine Familie injektiver R-Moduln $\{M_i\}_{i\in I}$, so daß $\bigoplus_{i\in I} M_i$ nicht injektiv ist. Aber es ist $\bigoplus M_i \equiv \prod M_i$ nach Kor. 7.8.40, (iii); nach Prop. 7.8.50, (i) wäre mit $\prod M_i$ auch $\bigoplus M_i$ injektiv, und das ist widersprüchlich. $\square$

7.9. Vollständige Q.E. für Moduln*

Wir haben gesehen, daß $\mathcal{M}_R$ Q.E. relativ zu Dimensionssätzen und p.p. Formeln gestattet. Unter welchen Bedingungen an den Ring R erlaubt $\mathcal{M}_R$ sogar vollständige Q.E.? Dabei müssen wir uns natürlich auf nichttriviale R-Moduln beschränken. Sei $\mathcal{M}_R^+$ die Klasse aller nichttrivialen linken R-Moduln. Zunächst untersuchen wir, wann *jeder Modul $M \in \mathcal{M}_R$* Q.E. besitzt. Dazu definieren wir:

Definition 7.9.1. Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring R. R heißt *regulär,* wenn für alle $r \in R$ ein $r' \in R$ existiert mit $rr'r = r$.

Im kommutativen Fall stimmt diese Begriffsbildung mit der gleichnamigen aus Def. 7.6.2 überein; wie dort sei $B(R) := \{r \in R : r^2 = r\}$.— Ein linker R-Modul M heißt bekanntlich *flach,* wenn für jeden Monomorphismus $\alpha\colon A \to B$ zwischen rechten R-Moduln A, B auch $\alpha \otimes 1_M\colon A \otimes_R M \to A \otimes_R M$ ($1_M = \mathrm{id}_M$) ein Monomorphismus ist, d.h. Tensorierung mit M kurze exakte Sequenzen in ebensolche überführt. (Analog wird Flachheit von rechten R-Moduln definiert.) Wir erinnern an folgendes Kriterium:

Proposition 7.9.2. *Ein linker R-Modul M ist flach genau dann, wenn für jedes Linksideal $\mathfrak{a}$ von R der Homomorphismus $\iota_\mathfrak{a} \otimes 1_M$ injektiv ist, wobei $\iota_\mathfrak{a}\colon \mathfrak{a} \hookrightarrow R$ die Inklusion ist.*

Beweis. Siehe [**34**], XVI, Prop. 3.7. $\square$

Tatsächlich kann man sich auf endlich erzeugte Linksideale beschränken:

Lemma 7.9.3. *Ein linker R-Modul M ist flach genau dann, wenn für jedes endlich erzeugte Linksideal $\mathfrak{a}$ von R der Homomorphismus $\iota_\mathfrak{a} \otimes 1_M$ injektiv ist.*

Zum Beweis benötigen wir:

Proposition 7.9.4. *Sei M ein linker R-Modul. Ist für einen Homomorphismus $\alpha\colon A \to B$ zwischen rechten R-Moduln A, B der Homomorphismus $\alpha \otimes 1_M\colon A \otimes_R M \to B \otimes_R M$ nicht injektiv, so existiert ein endlich erzeugter Untermodul $A_0 \subseteq A$, so daß auch $(\alpha|A_0) \otimes 1_M$ nicht injektiv ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein Element $0 \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i \in \ker(\alpha \otimes 1_M)$, mit $a_1, \dots, a_n \in A$. Sei A_0 der von den $a_1, \dots, a_n$ erzeugte Untermodul von A. Dann gilt $0 \neq \sum a_i \otimes m_i \in A_0 \otimes_R M$ und $\big((\alpha|A_0) \otimes 1_M\big)\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum \alpha(a_i) \otimes m_i = 0 \in B \otimes_R M$. □

Beweis (Lemma 7.9.3). Sei $\iota_{\mathfrak{a}} \otimes M$ Monomorphismus für jedes endlich erzeugte Linksideal $\mathfrak{a}$. Wäre für ein linkes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ dann $\iota_{\mathfrak{a}} \otimes 1_M$ kein Monomorphismus, so gäbe es ein endlich erzeugtes Linksideal $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}$,so daß auch $\iota_{\mathfrak{a}_0} \otimes 1_M$ nicht injektiv ist (Prop. 7.9.4), dies im Widerspruch zur Annahme. Mit Prop. 7.9.2 folgt die Behauptung. □

Reguläre Ringe können wie folgt gekennzeichnet werden:

Satz 7.9.5. *Für einen Ring R sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist regulär.*
(ii) *Jedes rechte (linke) Hauptideal von R ist direkter Summand von R.*
(iii) *Jedes endlich erzeugte Rechtsideal (Linksideal) von R ist direkter Summand von R.*
(iv) *Jeder linke (rechte) R-Modul ist flach.*

Beweis. Da die Regularitätsforderung (i) links-rechts-symmetrisch ist, reicht es, in (ii)–(iv) die Bedingungen für rechte Ideale bzw. linke Moduln zu betrachten.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei rR ein rechtes Hauptideal von R. Wähle $r' \in R$ mit $rr'r = r$; dann ist $(rr')(rr') = (rr'r)r' = rr'$; also $e := rr'$ idempotent. Damit ist $R = eR \oplus (1-e)R$ als rechter R-Modul, denn ist $es + (1-e)s' = 0$, so folgt $0 = e(es + (1-e)s') = es$, $0 = (1-e)(es + (1-e)s') = (1-e)s'$. Ferner $eR = rr'R \subseteq rR$, und wegen $er = r$ andererseits $rR \subseteq eR$, also zusammen $rR = eR$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir zeigen durch Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden, daß jedes endlich erzeugte rechte Ideal durch ein Idempotent erzeugt wird; wie eben folgt dann die Behauptung. Der Induktionsanfang ergibt sich aus (ii), denn ist $R = rR \oplus \mathfrak{a}$ mit $1 = e_1 + e_2$, $e_1 \in rR$, $e_2 \in \mathfrak{a}$, so folgt $e_1^2 = e_1 - e_1e_2$ mit $e_1^2, e_1 \in rR$, $e_1e_2 \in \mathfrak{a}$, also $e_1e_2 = 0$ und damit e_1 idempotent; analog folgt e_2 idempotent. Ferner $e_1R \subseteq rR$ und weiter $rR \subseteq e_1R$, denn für alle $r' \in R$ folgt aus $rr' = rr'e_1 + rr'e_2$ mit $rr', rr'e_1 \in rR$, $rr'e_2 \in \mathfrak{a}$, daß $rr'e_2 = 0$, also $rr' \in e_1R$. Sei nun $\mathfrak{a} = r_1R + \cdots + r_nR$ ein rechtes Ideal, $n > 1$. Nach Induktionsannahme gibt es ein Idempotent $e \in R$ mit $eR = r_1R + \cdots + r_{n-1}R$. Dann gilt $r_nR \subseteq er_nR + (1-e)r_nR$ und folglich $\mathfrak{a} = eR + r_nR = eR + \big((1-e)r_n\big)R$. Wie im Fall $n = 1$ gezeigt, gibt es ein $f \in B(R)$ mit $fR = \big((1-e)r_n\big)R$, so daß $eR + r_nR = eR + fR$ gilt. Wegen $f \in \big((1-e)r_n\big)R$ gilt $ef = 0$. Setze $g := e + f(1-e)$. Dann ist $gR = eR + fR = \mathfrak{a}$: Daß $gR \subseteq eR + fR$, ist klar. Ferner $eR = geR \subseteq gR$, sowie $fR = f^2R = (ef + f^2 + fef)R = (gf)R \subseteq gR$ wegen $ef = 0$, $f^2 = f$. Also tatsächlich $gR = eR + fR$. Schließlich ist g idempotent, wie man nachrechnet.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Nach Lemma 7.9.3 reicht es zu prüfen, ob für jede Inklusionsabbildung $\iota_{\mathfrak{a}} \colon \mathfrak{a} \hookrightarrow R$ eines endlich erzeugten rechten Ideals $\mathfrak{a} \subseteq R$ und einen beliebigen linken R-Modul M die Abbildung $\iota_{\mathfrak{a}} \otimes 1_M$ ein Monomorphismus ist. Sei $\mathfrak{b}$ ein rechtes Ideal von R mit $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = R$ und $e_1 \in \mathfrak{a}$, $e_2 \in \mathfrak{b}$ mit $1 = e_1 + e_2$. e_1, e_2 sind aus $B(R)$; ferner $e_1R \subseteq \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a} = r_1R + \cdots + r_nR$, so $r_i = e_1r_i + e_2r_i$ mit $r_i \in \mathfrak{a}$, $e_1r_i \in \mathfrak{a}$, $e_2r_i \in \mathfrak{b}$, also $e_2r_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, und somit $r_1R + \cdots + r_nR =$

$e_1r_1R + \cdots + e_1r_nR \subseteq e_1R$. Sei $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(\iota_{\mathfrak{a}} \otimes 1_M)$; es ist mit $g := e_1$

$$0 = \sum a_i \otimes m_i = \sum ga_i \otimes m_i = \sum g^2 a_i \otimes m_i = \sum g \otimes ga_i m_i =$$
$$g \otimes \Big(\sum ga_i m_i\Big) = g \otimes \Big(\sum a_i m_i\Big) = 1 \otimes \sum ga_i m_i$$

in $R \otimes_R M$, also $\sum ga_i m_i = 0$ (denn R ist ein freier R-Modul), und $\sum a_i \otimes m_i = g \otimes (\sum ga_i m_i) = g \otimes 0 = 0$ in $\mathfrak{a} \otimes_R M$. Folglich ist $\iota_{\mathfrak{a}} \otimes 1_M$ ein Monomorphismus.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $r \in R$; betrachte die Inklusion $\iota\colon rR \hookrightarrow R$. Nach (iv) ist $\iota \otimes 1_{R/Rr}\colon rR \otimes_R (R/Rr) \to R \otimes_R (R/Rr)$ ein Monomorphismus. Wegen

$$\big(\iota \otimes 1_{R/Rr}\big)(r \otimes \overline{1}) = r \otimes \overline{1} = 1 \otimes r\overline{1} = 1 \otimes \overline{0} = 0$$

muß $r \otimes \overline{1} = 0$ gelten. Betrachte $rR \times R/Rr \to rR/rRr, (rs, \overline{t}) \mapsto rst + rRr$ (mit $\overline{x} := x + Rr$ für $x \in R$). Diese Abbildung ist wohldefiniert und R-bilinear. Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es einen Homomorphismus $\tau\colon rR \otimes_R R/Rr \to rR/rRr$ mit $\tau\left(\sum rs_i \otimes \overline{t_i}\right) = \sum rs_it_i + rRr$. Es folgt $0 = \tau(r \otimes \overline{1}) = r + rRr$, also $r \in rRr$. Damit ist R als regulär nachgewiesen. □

Bemerkung 7.9.6. Unter Verwendung von Satz 7.9.5 erhält man einen alternativen Beweis von Satz 7.6.12: Seien $f_1\colon R \hookrightarrow R_1$, $f_2\colon R \hookrightarrow R_2$ Einbettungen, wobei R, R_1, R_2 kommutative reguläre Ringe seien. Die kanonische Abbildung $h\colon R_1 \to R_1 \otimes_R R_2$ ist dann eine Einbettung. ($R_1 \cong R_1 \otimes_R R$.) Es ist daher $h_1(R_1) \cap N = \{0\}$ (mit $N := N(R_1 \otimes_R R_2)$), denn für $t \in R_1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(t \otimes 1)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^n \otimes 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,$$

letzteres wegen der Reduziertheit von R_1. Somit ist die kanonische Abbildung $g_1\colon R_1 \to (R_1 \otimes_R R_2)/N$ eine Einbettung. Analog gelangt man zu einer Einbettung $g_2\colon R_2 \to (R_1 \otimes_R R_2)/N$. Ferner ist $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$. Dies vervollständigt den Beweis, da $(R_1 \otimes_R R_2)/N$ semiprim ist und nach Lemma 7.6.9 also in einen regulären Ring eingebettet werden kann.

Wir wollen nun zeigen:

Satz 7.9.7. (Weispfenning, [**179**]) *Sei R ein Ring. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *R ist regulär.*
(ii) *Jede p.p. Formel ist in $\mathcal{M}_R$ zu einer quantorenfreien p.p. Formel äquivalent.*
(iii) *Jeder Modul $M \in \mathcal{M}_R$ erlaubt Q.E.*
(iv) *Jeder von zwei Elementen erzeugte Modul $M \in \mathcal{M}_R$ erlaubt Q.E.*

Um Satz 7.9.7 beweisen zu können, müssen wir etwas weiter ausholen. Sei R ein Ring, $R^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$. Eine Teilmenge $B \subseteq R^+$ heißt *Linksidealbasis* für R, falls jedes endlich erzeugte Linksideal von Elementen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mit $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B$ erzeugt werden kann. Wir haben im Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (iii) in Satz 7.9.5 insbesondere gezeigt:

Korollar 7.9.8. *Ein Ring R ist regulär genau dann, wenn $B(R)$ eine Linksidealbasis von R ist.* □

Definiere für eine Linksidealbasis $B \subseteq R^+$ von R

$$\begin{aligned}\Delta(B) &:= \left\{ \exists y \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \beta_i y = x_i \right) : n \in \mathbb{N}, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in B \right\},\\ \Gamma(B) &:= \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} \beta_i x = 0 : n \in \mathbb{N}, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in B \right\}.\end{aligned}$$

Wir erhalten dann ein Kriterium für p.p. Q.E.:

LEMMA 7.9.9. *Sei R ein Ring, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}_R$, B eine Linksidealbasis für R.*

(i) *In $\mathcal{K}$ ist jede Formel zu einer p.p. quantorenfreien Formel äquivalent genau dann, wenn dies für alle Formeln aus $\Delta(B)$ zutrifft.*

(ii) *Jede quantorenfreie p.p. Formel $\varphi(x)$ ist in $\mathcal{M}_R$ zu einer Formel $\varphi'(x) \in \Gamma(B)$ äquivalent.*

BEWEIS. Wir zeigen, wie man eine Formel $\varphi(x) := (\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i x = a_i)$ in $\mathcal{M}_R$ äquivalent zu einer Formel φ' der Form

$$\varphi'(x) := \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \beta_j x = b_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} b_j \right)$$

reduzieren kann, wobei $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B$ und a_i, b_j L_R-Terme seien, in denen die Variable x nicht vorkommt. Dies zeigt (ii), und durch Induktion über die Anzahl der zu eliminierenden Quantoren auch (i). Sei $\mathfrak{a} := R\alpha_1 + \dots + R\alpha_m$ und $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B$ mit $R\beta_1 + \dots + R\beta_n = \mathfrak{a}$. Dann existieren $\nu_{ji}, \mu_{ij} \in R$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) mit $\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} \alpha_i$ und $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \beta_j$; setze $b_j := \sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} a_i$. Gilt dann $\alpha_i x = a_i$ für alle $i = 1, \dots, m$, so folgt $b_j = \sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} \alpha_i x = \beta_j x$ und

$$a_i = \alpha_i x = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \beta_j x = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} \alpha_i x = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} a_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} b_j.$$

Umgekehrt folgt aus $\beta_j x = b_j$, $a_i = \sum_j \mu_{ij} b_j$ ebenso leicht $\alpha_i x = a_i$. $\square$

Mit dem Baur-Monk-Theorem und (i) aus dem Lemma folgt:

KOROLLAR 7.9.10. *Sei R ein Ring, B eine Linksidealbasis für R, $M \in \mathcal{M}_R$. Kann man in* Mod(Th(M)) *jede Formel aus $\Delta(B)$ äquivalent durch eine p.p. quantorenfreie Formel ersetzen, so erlaubt M Q.E.* $\square$

Damit kann man jetzt auch Satz 7.9.7 beweisen:

BEWEIS (SATZ 7.9.7). Für (i) $\Rightarrow$ (ii) sei $\lambda \in B(R)$. Dann gilt $\mathcal{M}_R \models \big(\exists y(\lambda y = x) \leftrightarrow \lambda x = x\big)$; denn ist $M \in \mathcal{M}_R$, $m, m' \in M$ mit $\lambda m' = m$, so folgt $\lambda m = \lambda^2 m' = \lambda m' = m$. Mit Kor. 7.9.8 und Lemma 7.9.9, (i) folgt (ii) aus (i).— (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar mit Baur-Monk, (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial.— Zu (iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $\lambda \in R$ beliebig; setze $M := R \oplus R\lambda$. Sei $\varphi(x) := \exists y(\lambda y = x)$ und $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ mit

$$\psi_i(x) := \left(\bigwedge_{j \in J_i} \mu_{ij} x = 0 \wedge \bigwedge_{k \in K_i} \nu_{ik} x \neq 0 \right)$$

gemäß (iv) eine in Mod(Th(M)) zu φ gleichwertige quantorenfreie L_R-Formel. Es gilt $M \models \varphi\big((\lambda; 0)\big)$, also $M \models \psi_{i_0}\big((\lambda; 0)\big)$ für ein $i_0 \in I$. Also $\mu_{i_0 j} \lambda = 0$, $\nu_{i_0 k} \lambda \neq 0$

für alle $j \in J_{i_0}$, $k \in K_{i_0}$, somit $M \models \psi_{i_0}\big((\lambda;\lambda)\big)$. Daher gibt es insbesondere ein $\mu \in R$ mit $\lambda\mu\lambda = \lambda$, wie gewünscht. $\square$

Wir kommen zu unserer angestrebten Charakterisierung der Ringe R mit vollständiger Q.E. für $\mathcal{M}_R^+$:

SATZ 7.9.11. (Tyukavkin, [**171**]) *Sei R ein Ring. Gleichwertig sind:*

(i) *R ist ein unendlicher, einfacher, regulärer Ring.*
(ii) *$\mathcal{M}_R^+$ erlaubt Q.E.*
(iii) *$\mathcal{M}_R^+$ ist modellvollständig.*
(iv) *$\mathcal{M}_R^+$ ist modellvollständig und vollständig.*

Der Beweis verwendet etwas Strukturtheorie von Moduln und Ringen. (Den nötigen algebraischen Hintergrund findet man in [**26**]. Wir folgen [**179**] und [**134**], [**135**].) Der Leser zeigt leicht als Übung folgende bekannte Tatsache (oder vergleicht [**26**], 4.7):

LEMMA 7.9.12. *Sei R ein Ring, $e, f \in B(R)$. Dann sind die additiven Gruppen $\mathrm{Hom}_R(Re, Rf)$ und eRf isomorph, wobei $\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ den R-Modul der R-Homomorphismen zwischen zwei R-Moduln bezeichne. Im Fall $e = f$ gilt sogar $\mathrm{End}_R(Re) \cong eRe$ als Ringe, wobei $\mathrm{End}_R(\,\cdot\,)$ der Ring der R-Endomorphismen eines Moduls sei.* $\square$

Ein *Schiefkörper* ist bei uns ein nichttrivialer Ring, in dem zu jedem von Null verschiedenen Element ein multiplikativ Inverses existiert.

LEMMA 7.9.13. (Schur, nach [**26**], 13.3) *Ist M ein einfacher R-Modul, so ist der Ring $\mathrm{End}_R(M)$ ein Schiefkörper.*

BEWEIS. Es ist $\mathrm{End}_R(M) \neq 0$, und jeder von Null verschiedene Endomorphismus $M \to M$ ist ein Isomorphismus. $\square$

LEMMA 7.9.14. *Sind e, f Idempotente eines Rings R, so sind äquivalent:*

(i) *$eR \cong fR$.*
(ii) *Es gibt $u, v \in R$ mit $uv = e$, $vu = f$.*
(iii) *$Re \cong Rf$.*

BEWEIS. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varphi\colon eR \xrightarrow{\cong} fR$, und $r, r' \in R$ mit $er = \varphi^{-1}(f)$, $fr' = \varphi(e)$. Setze $u := erf$, $v := fr'e$. Dann folgt $uv = erfr'e = \varphi^{-1}(f)fr'e = \varphi^{-1}(fr')e = e$, und symmetrisch auch $vu = f$.— Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Definiere $\varphi\colon eR \to fR, er \mapsto fvr$. φ ist bijektiv mit Inverser $fR \to eR, fr \mapsto eur$.— Da die Bedingung in (ii) links-rechts-symmetrisch ist, gilt auch (iii) $\Leftrightarrow$ (ii). $\square$

Durch die äquivalenten Bedingungen in Lemma 7.9.14 wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $B(R)$ definiert.

Ein R-Modul M heißt *halbeinfach,* wenn M als direkte Summe einfacher Untermoduln geschrieben werden kann. Ein Ring R heißt *halbeinfach,* falls R als R-Modul halbeinfach ist. Ein Linksideal (Rechtsideal) $\mathfrak{a} \subseteq R$ wird *minimal* genannt, wenn $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ und keine Linksideale (Rechtsideale) $\mathfrak{b}$ mit $0 \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ existieren. (R ist also halbeinfach genau dann, wenn R eine direkte Summe von minimalen Linksidealen ist.)

Lemma 7.9.15. *Sei M ein R-Modul, $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie einfacher Untermoduln von M mit $M = \sum_{i\in I} M_i$. Für jeden Untermodul N von M gibt es eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $M = N \oplus \bigoplus_{j\in J} M_j$.*

Beweis. Mit dem Zornschen Lemma erhalten wir eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit der Eigenschaft, daß $\sum_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J} M_j$ und $N \cap \left(\sum_{j\in J} M_j\right) = 0$. Dann ist die Summe $K := N + \left(\sum_{j\in J} M_j\right)$ direkt. Wir behaupten $K = M$. Sei $i \in I \setminus J$. Da M_i einfach ist, ist $M_i \cap K = M_i$ oder $M_i \cap K = 0$. Letzteres würde der Maximalität von J widersprechen. Also $M_i \subseteq K$ für alle $i \in I$, d.h. $K = M$. $\square$

Korollar 7.9.16. *Sei M halbeinfacher R-Modul, $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ mit den einfachen Untermoduln M_i. Jede exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

zerfällt, und K, N sind beide halbeinfach. Es existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $N \cong \bigoplus_{j\in J} M_j$, $K \cong \bigoplus_{i\in I\setminus J} M_i$.

Beweis. Nach Lemma 7.9.15 existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit der Eigenschaft $M = (\operatorname{im} f) \oplus \bigoplus_{j\in J} M_j$. Also zerfällt die Sequenz, es ist $N \cong M/\operatorname{im} f \cong \bigoplus_{j\in J} M_j$, $K \cong \operatorname{im} f \cong \bigoplus_{i\in I\setminus J} M_i$. $\square$

Insbesondere sind also Untermoduln und Faktormoduln halbeinfacher Moduln selbst wieder halbeinfach.

Zwei idempotente Elemente $e, f \in B(R)$ eines Rings R heißen *orthogonal,* falls $ef = 0 = fe$. Ein $e \in B(R)$ heißt *primitiv,* falls $e \neq 0$ und für jedes Paar e_1, e_2 orthogonaler Idempotenter gilt:

$$e = e_1 + e_2 \quad \Rightarrow \quad e_1 = 0 \text{ oder } e_2 = 0.$$

In halbeinfachen Ringen können primitive Idempotente prägnant gekennzeichnet werden:

Lemma 7.9.17. *Sei e ein idempotentes Element eines halbeinfachen Rings R. Dann sind äquivalent:*

(i) *e ist primitiv.*
(ii) *eRe ist ein Schiefkörper.*
(iii) *Re ist ein minimales Linksideal.*
(iv) *eR ist ein minimales Rechtsideal.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar, denn ist eRe ein Schiefkörper, so ist $e \neq 0$, und wären e_1, e_2 orthogonale Idempotente mit $e = e_1 + e_2$, $e_1, e_2 \neq 0$, so wäre

$$ee_1e = e_1^2e + e_2e_1e = e_1e = e_1^2 + e_1e_2 = e_1,$$

als $e_1 \in eRe$ und ebenso $e_2 \in eRe$ mit $e_1e_2 = 0$, im Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von eRe. (iii) $\Rightarrow$ (ii) ist ebenfalls klar mit Lemmata 7.9.12 und 7.9.13. Es bleibt also nur (i) $\Rightarrow$ (iii) zu beweisen, denn (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) ergibt sich dann aus der Links-Rechts-Symmetrie von (ii). Wir zeigen zunächst: Re ist ein irreduzibler R-Modul. Seien dazu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Linksideale $\neq 0$ mit $Re = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Schreibe $e = a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Es folgt $ab = a(e-a) = ae - a^2 = a - a^2$ wegen $a \in Re$, und also $ab \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$. Somit $ab = 0$, analog $ba = 0$, und daher mit $a + b = e^2 = a^2 + b^2$ auch $a = a^2$, $b = b^2$. Da e primitiv ist, muß $a = 0$ oder $b = 0$ sein, also $e \in \mathfrak{a}$ oder $e \in \mathfrak{b}$ und also

$\mathfrak{b} = 0$ oder $\mathfrak{a} = 0$, ein Widerspruch. Mit Kor. 7.9.16 ist Re halbeinfacher R-Modul, und als irreduzibler Modul also einfach. $\square$

Eine *Darstellung der* 1 *in* R ist eine endliche Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ von primitiven, paarweise orthogonalen Idempotenten von R mit $1 = e_1 + \dots + e_n$. Es gilt:

PROPOSITION 7.9.18. *Seien* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ *Linksideale des Rings* R. *Dann sind äquivalent:*

(i) $R = \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n$ *als* R*-Moduln.*
(ii) *Es gibt eine Darstellung* $e_1, \dots, e_n$ *der* 1 *mit* $Re_i = \mathfrak{a}_i$ *für* $i = 1, \dots, n$.

BEWEIS. Nur für $n = 2$. (Der allgemeine Fall wird dem Leser überlassen.) Sei $R = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$. Wähle $e_i \in \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2)$ mit $1 = e_1 + e_2$; man überprüft sofort, daß e_1, e_2 eine Darstellung der 1 in R bildet. Es ist $Re_1 \subseteq \mathfrak{a}_1$, aber für $a_1 \in \mathfrak{a}_1$ folgt $a_1 = a_1e_1 + a_1e_2 = a_1e_1$ wegen $a_1e_2 \in \mathfrak{a}_2$, also $a_1 \in Re_1$; daher $Re_1 = \mathfrak{a}_1$, und ebenso $Re_2 = \mathfrak{a}_2$. Ist umgekehrt $Re_1 = \mathfrak{a}_1$, $Re_2 = \mathfrak{a}_2$ mit einer Darstellung e_1, e_2 der 1, so folgt $R = Re_1 \oplus Re_2 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$. $\square$

PROPOSITION 7.9.19. *Sei* $e_1, \dots, e_n$ *eine Darstellung der* 1 *im Ring* R, *sowie* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Mit* Re_i *ist auch* e_iRe_i *unendlich.*

BEWEIS. Zunächst bemerken wir, daß Lemmata 7.9.12–7.9.14 implizieren, daß für primitive idempotente Elemente $e, f \in R$ gilt:

$$eRf \neq 0 \Leftrightarrow e \sim f, \text{ und dann } eRf \cong eRe \cong fRf \text{ als Gruppen.} \tag{7.9.32}$$

Damit ergibt sich mit Prop. 7.9.18

$$Re_i = 1Re_i = \left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right) Re_i = \bigoplus_{j=1}^{n} e_jRe_i = \bigoplus_{e_j \sim e_i} e_jRe_i \cong (e_iRe_i)^k,$$

wobei $k := \left|\{j : 1 \leq j \leq n, e_j \sim e_i\}\right| < \infty$. $\square$

Ein Ring R heißt (*linksseitig, rechtsseitig*) *artinsch,* wenn jede absteigende Folge von (Links- bzw. Rechts-) Idealen stationär wird. Für den Beweis des folgenden fundamentalen Satzes, der manchmal in der Algebra behandelt wird, sei auf [**26**] (13.7, 7.6, 13.5) verwiesen:

SATZ 7.9.20. (Wedderburn-Artin) *Sei* R *ein halbeinfacher Ring.* R *enthält eine endliche Menge* $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$ *minimaler Linksideale, die ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher* R*-Moduln darstellt, so daß* $R = \bigoplus \mathfrak{a}_iR$ *als Ringe,* $R = \bigoplus \mathfrak{a}_i$ *als* R*-Moduln. Insbesondere enthält* R *eine Darstellung der* 1. *Ein einfacher Ring ist halbeinfach d.u.n.d., wenn er linksseitig* (*rechtsseitig*) *artinsch ist und d.u.n.d., wenn er ein minimales Linksideal besitzt.* $\square$

Rothmaler [**135**] folgend definieren wir:

DEFINITION 7.9.21. Ein Ring R heißt *Infend-Ring,* falls für jedes (zweiseitige) Ideal $\mathfrak{a}$ von R und jedes unendliche minimale Linksideal $\mathfrak{b}$ von $\overline{R} := R/\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}^2 \neq 0$ der Schiefkörper $\mathrm{End}_{\overline{R}}(\mathfrak{b})$ unendlich ist. R heißt *nichtsingulär,* falls für alle Ringelemente $r \neq 0$ der Modul $\mathrm{ann}_R(r) := \{\lambda \in R : \lambda r = 0\}$ kein essentieller Untermodul von R ist (vgl. Beweis von 7.8.16), d.h. es kein Linksideal $\mathfrak{a} \neq 0$ mit $\mathfrak{a} \cap \mathrm{ann}_R(r) = 0$ gibt.

(„Infend“ soll dabei auf “infinite endomorphism ring” hindeuten.) Die Bedingung $\mathfrak{b}^2 \neq 0$ an $\mathfrak{b}$ läßt sich leicht erklären:

Proposition 7.9.22. (Brauer, nach [**135**]) *Sei $\mathfrak{b}$ ein minimales Linksideal eines Ringes R. $\mathfrak{b}$ ist ein direkter Summand des R-Moduls R gdw. $\mathfrak{b}^2 \neq 0$ gdw. $\mathfrak{b} = Re$ für ein $e \in B(R)$, $e \neq 0$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{b}$ direkter Summand von R, etwa $R = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ mit einem Linksideal $\mathfrak{a}$. Seien $e_1 \in \mathfrak{a}$, $e_2 \in \mathfrak{b}$ mit $e_1 + e_2 = 1$; e_1, e_2 sind eine Darstellung der 1 in R, und es gilt $\mathfrak{a} = Re_1$, $\mathfrak{b} = Re_2$. Daher $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b} \neq 0$. Sei umgekehrt $\mathfrak{b}^2 \neq 0$, etwa $xy \neq 0$ mit $x, y \in \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{b}y \subseteq \mathfrak{b}$ ein Linksideal mit $\mathfrak{b}y \neq 0$, also $\mathfrak{b}y = \mathfrak{b}$ und daher $ey = y$ für ein $e \in \mathfrak{b}$. Wäre $0 \neq R(e - e^2) \subseteq \mathfrak{b}$, so $R(e - e^2) = \mathfrak{b}$, also $r(e - e^2) = x$ für ein $r \in R$ und damit $0 \neq xy = r(ey - e^2y) = 0$, ein Widerspruch. Somit $e = e^2$, und $\mathfrak{b} = Re$ ist ein direkter Summand $R = Re \oplus R(1 - e)$ von R. Der Rest folgt aus Prop. 7.9.18. □

Wichtige Beispiele von Infend-Ringen und nichtsingulären Ringen:

Bemerkung. Jeder halbeinfache und jeder einfache Ring ist ein Infend-Ring. Jeder einfache Ring ist nichtsingulär.

Beweis. Sei R halbeinfach, $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal von R. $\overline{R} = R/\mathfrak{a}$ ist ein halbeinfacher R-Modul nach Kor. 7.9.16, und sogar ein halbeinfacher Ring. Sei $\mathfrak{b}$ ein unendliches minimales Linksideal von $\overline{R}$, $\mathfrak{b}^2 \neq 0$, also $\mathfrak{b} = \overline{R}e$ für ein $e \in B(\overline{R})$ nach Prop. 7.9.22. Nach dem Satz von Wedderburn-Artin existiert eine Darstellung $e_1, \ldots, e_n$ der 1 in $\overline{R}$, und es gilt $\overline{R}e \cong \overline{R}e_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mit Lemma 7.9.14 folgt $e \sim e_i$, und (7.9.32) sowie Prop. 7.9.19 implizieren, daß $e\overline{R}e \cong e_i\overline{R}e_i$ und letzterer Ring unendlich ist. Jedoch ist nach Lemma 7.9.12 $\mathrm{End}_{\overline{R}}(\mathfrak{b}) \cong \overline{R}e$, und daher auch $\mathrm{End}_{\overline{R}}(\mathfrak{b})$ unendlich. R ist also ein Infend-Ring.— Sei R einfach. R hat nur die zweiseitigen Ideale 0 und R. Wenn R überhaupt ein minimales Linksideal enthält, so ist R halbeinfach nach Wedderburn-Artin. Wegen dem eben Bewiesenen ist R ein Infend-Ring. Sei ferner $\mathfrak{a}$ die Menge der Elemente $r \in R$, so daß $\mathrm{ann}_R(r)$ essentiell in R ist. Man überprüft leicht, daß $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist, welches die 1 nicht enthält. (Man zeige dazu, daß $f(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ für jeden Endomorphismus f von R.) Also muß $\mathfrak{a} = 0$ sein wegen der Einfachheit von R. □

Infend-Ringe besitzen eine interessante Eigenschaft:

Satz 7.9.23. (Rothmaler, [**135**]) *Sei R ein Infend-Ring, dessen sämtliche nichttrivialen Faktormoduln nichtsingulär sind. Dann hat jeder unendliche einfache R-Modul folgende Eigenschaft:*

(Q_0) *Für alle $r \in R$ ist rM entweder trivial oder unendlich.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert ein maximales Linksideal $\mathfrak{a}$ in R mit $M := R/\mathfrak{a}$ unendlich, aber $rM = \{0\} \cup \{rs_i + \mathfrak{a} : 1 \leq i \leq k\}$, $rs_i \notin \mathfrak{a}$ $(1 \leq i \leq k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $r \in R$, $s_1, \ldots, s_k \in R$. Sei $\mathfrak{a}_i := \mathrm{ann}_R(rs_i + \mathfrak{a}) = \{\lambda \in R : \lambda rs_i \in \mathfrak{a}\}$. Offensichtlich ist $\mathrm{ann}_R(r) \subseteq \mathrm{ann}_R(rR + \mathfrak{a}) = \{\lambda \in R : \lambda rR \subseteq \mathfrak{a}\}$, und letztere Menge ist gleich $\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{a}_i$. Sei zunächst M *treu,* soll heißen $\mathrm{ann}_R(M) = 0$. Dann impliziert $\lambda rR \subseteq \mathfrak{a}$, daß $\lambda r = 0$, also $\mathrm{ann}_R(r) = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{a}_i$. Da R nichtsingulär ist, existiert ein Linksideal $\mathfrak{b} \neq 0$ mit $\mathfrak{b} \cap \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{a}_i = 0$. Wir haben kanonisch

$$\mathfrak{b} \hookrightarrow R/\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{a}_i \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^k R/\mathfrak{a}_i.$$

Da $\mathfrak{a}$ maximal ist, ist $R/\mathfrak{a}_i \cong R/\mathfrak{a}$. (Betrachte $f \in \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}_i, R/\mathfrak{a})$, definiert durch $\lambda + \mathfrak{a}_i \mapsto \lambda r s_i + \mathfrak{a}$; f ist offenbar injektiv, wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}$ auch surjektiv.) Also $\mathfrak{b} \hookrightarrow (R/\mathfrak{a})^k$, und nach Lemma 7.9.15 existiert ein $k' \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathfrak{b} \cong (R/\mathfrak{a})^{k'}$, so daß es also ein Linksideal $\mathfrak{a}'$ in R gibt mit $R/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}'$. $\mathfrak{a}'$ ist ein minimales Linksideal, also $D := \operatorname{End}_R \mathfrak{a}'$ ein Schiefkörper nach dem Lemma von Schur, und $\mathfrak{a}'$ kann vermöge $(f, a') \mapsto f(a') =: f \cdot a'$ für $f \in D$, $a' \in \mathfrak{a}'$ als Vektorraum über D aufgefaßt werden. Dann gilt in $\mathfrak{a}'$:

$$(rf) \cdot a' = (rf)(a') = rf(a') = f(ra') = f \cdot (ra') \quad \text{für alle } r \in R,\ f \in D,\ a' \in \mathfrak{a}'.$$

Daher ist $r\mathfrak{a}'$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{a}'$. Aber $r\mathfrak{a}'$ ist $\neq 0$ und endlich, denn $r\mathfrak{a}' \cong rM$; somit muß D endlich sein. Andererseits ist $\mathfrak{a}'^2 \neq 0$. (Denn sonst wäre $0 = \mathfrak{a}'^2 \cong \mathfrak{a}'(R/\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a}' = 0$, da $M = R/\mathfrak{a}$ treu ist.) Nach Definition der Infend-Ringe ist D unendlich, da $\mathfrak{a}' \cong M$ unendlich ist. Dies ist ein Widerspruch.— Ist M nicht treu, so fasse man M als Modul über dem Ring $R/\operatorname{ann}_R(M)$ auf. Wie eben argumentiert man einen Widerspruch herbei. □

Korollar 7.9.24. (Tyukavkin, [**171**]) *Jeder Modul M über einem unendlichen einfachen Ring R hat die Eigenschaft* (Q_0).

Beweis. Sei M ein Modul, der (Q_0) nicht erfüllt. Man kann annehmen, daß M zyklisch ist, also $M = R/\mathfrak{a}$ mit einem Linksideal $\mathfrak{a} \neq R$. Wähle ein maximales echtes Linksideal $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}$. Dann besitzt $R/\mathfrak{a}'$ ebenfalls (Q_0) nicht, denn alle nichttrivialen R-Moduln sind treu; $\operatorname{ann}_R(N)$ ist nämlich ein echtes zweiseitiges Ideal für jeden R-Modul $N \neq 0$. Ferner ist jeder R-Modul N unendlich, denn kanonisch gilt $R \hookrightarrow N^N$ mittels $r \mapsto \{rn\}_{n \in N}$, weil N treu über R ist. Aus dem Satz folgt daher ein Widerspruch. □

Damit nun endlich:

Beweis (Satz 7.9.11). Zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Satz 7.9.7, (iii) reicht es zu zeigen, daß $\mathcal{M}_R^+$ vollständig ist. Nach Baur-Monk, Satz 7.9.7, (ii) und Lemma 7.9.9, (ii) ist dies der Fall, falls für alle Moduln $M \in \mathcal{M}_R^+$, $\lambda, \nu \in B(R)$ mit $\lambda \notin R\nu$, $\nu\lambda \neq \lambda$ gilt: $\lambda M/\lambda M \cap \nu M$ ist unendlich. (Denn für $\gamma \in B(R)$ ist stets $\{m \in M : \gamma m = 0\} = (1-\gamma)M$.) Wähle $\mu \in B(R)$ mit $R = R(1-\lambda) \oplus R(1-\nu) \oplus R\mu$, also $R(1-\mu) = R(1-\lambda) + R(1-\nu)$. Dann ist $\lambda\mu = \mu$ und $\lambda M \cap \nu M = \mu M$, ferner $\lambda M/\mu M \cong (1-\mu)\lambda M$ mit $(1-\mu)\lambda \neq 0$. Also reicht es zu zeigen, daß für $0 \neq \gamma \in B(R)$ stets γM unendlich ist. Dies folgt aber sofort aus Kor. 7.9.24.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial, (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgt aus der Tatsache, daß $\mathcal{M}_R^+$ die gemeinsame Einbettungseigenschaft besitzt. (Satz 7.8.1 und Übung nach Def. 4.5.4.)

Zu (iv) $\Rightarrow$ (i): Da $\mathcal{M}_R^+$ vollständig ist und $\mathcal{M}_R^+$ unendliche Moduln enthält, muß R unendlich sein. Sei $\mathfrak{a}$ ein echtes zweiseitiges Ideal in R, $\lambda \in \mathfrak{a}$; dann ist $R/\mathfrak{a} \in \mathcal{M}_R^+$, $R/\mathfrak{a} \models \forall x(\lambda x = 0)$, also $R \models \forall x(\lambda x = 0)$ und damit $\lambda = 0$. Dies zeigt, daß R einfach ist. Schließlich sei $0 \neq \lambda \in R$; betrachte die Erweiterung $R\lambda \subseteq R$ zwischen $\mathcal{M}_R^+$-Moduln. Es gilt $R \models \exists y(\lambda y = \lambda)$, und wegen der Modellvollständigkeit von $\mathcal{M}_R^+$ folgt $R\lambda \models \exists y(\lambda y = \lambda)$. Daher ist R regulär. □

7.10. Abelsche Gruppen*

Jede abelsche Gruppe ist ein $\mathbb{Z}$-Modul, und umgekehrt. Jeder Homomorphismus $A \to A'$ abelscher Gruppen ist ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus, und umgekehrt. Es liegt also nahe, die in §7.8 erzielten Ergebnisse auf den Fall des Rings $\mathbb{Z}$, also auf abelsche Gruppen, anzuwenden; dies geht im wesentlichen geradlinig von sich. (In der Tat sind die im folgenden bewiesenen Sätze meist auch in allgemeineren Ringen, etwa für Moduln über Dedekindringen, gültig; vgl. [**12**], Ch. 2. [**16**], §14 studiert ausführlich die Modelltheorie von $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$.) Unsere Darstellung richtet sich nach [**8**], App. A.2. Zu abelschen Gruppen allgemein siehe [**30**].

Sei hier stets $L = \{0, +, -\}$ die Sprache der abelschen Gruppen und $\mathcal{AG}$ die Klasse der abelschen Gruppen bzgl. dieser Sprache. Es gibt eine primitiv rekursive Funktion $L_{\mathbb{Z}} \to L$ (bzw. $L \to L_{\mathbb{Z}}$), die jeder $L_{\mathbb{Z}}$-Formel (jeder L-Formel) eine in allen abelschen Gruppen äquivalente L-Formel ($L_{\mathbb{Z}}$-Formel) zuordnet; wir können also zwischen den Sprachen L und $L_{\mathbb{Z}}$ ohne Probleme hin- und herwechseln.

7.10.1. Positiv primitive Formeln in abelschen Gruppen. Wir fragen uns zunächst, welche Sachverhalte in einer abelschen Gruppe durch p.p. Formeln ausgedrückt werden können. Wir zeigen vorweg:

Proposition 7.10.1. *Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Dann ist A über $\mathbb{Z}$ äquivalent zu einer $m \times n$-Diagonalmatrix D, d.h. einer Matrix der Form $D = (\delta_{ij})$ mit gewissen $\delta_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, wobei $\delta_{ij} = 0$ für $i \ne j$.*

Beweis. Zu zeigen ist: Es existieren eine über $\mathbb{Z}$ invertierbare $m \times m$-Matrix P und eine über $\mathbb{Z}$ invertierbare $n \times n$-Matrix Q mit $PAQ = D$, wobei D in der gewünschten Form sei. Wir bemerken vorweg, daß elementare Umformungen des Typs „Multiplikation einer Zeile (Spalte) und Addition derselben zu einer anderen“ der Multiplikation mit in $\mathbb{Z}$ invertierbaren Elementarmatrizen entsprechen.— Ist $A = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sind $X, Y \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, so schreibe $X \rightsquigarrow Y$, falls Y aus X durch endlich viele elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen (über $\mathbb{Z}$) hervorgeht; offenbar gilt $X \rightsquigarrow Y \Rightarrow Y \rightsquigarrow X$ und $X \rightsquigarrow Y, Y \rightsquigarrow Z \Rightarrow X \rightsquigarrow Z$, für $X, Y, Z \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Setze $|X| := \min\limits_{\xi_{ij}\ne 0} |\xi_{ij}|$ für $X = (\xi_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Sei $h := \min\limits_{A\rightsquigarrow X} |X| \in \mathbb{N}$; es gibt ein $B \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ mit $A \rightsquigarrow B$ und $|B| = h$. Ist $B = (\beta_{ij})$, so existiert also ein $\beta_{rs} \ne 0$, $|\beta_{rs}| = |B| = h$; man setze $\tau := \beta_{rs}$, und sei $B \rightsquigarrow C := (\gamma_{ij})$ mit $\gamma_{11} = \beta_{rs} = \tau$. Wir zeigen: $\tau|\gamma_{1j}$ $(1 < j \le n)$ und $\tau|\gamma_{i1}$ $(1 < i \le m)$. Denn: Division mit Rest liefert

$$\gamma_{1j} = \lambda_j\tau + \varrho_j \qquad \text{mit } |\varrho_j| < |\tau| = h.$$

Angenommen, $\varrho_{j_0} \ne 0$ für ein $1 < \varrho_{j_0} \le n$. Subtrahiere nun das λ_{j_0}-fache der ersten Spalte von C von der j_0-ten (dies ist eine elementare Umformung in $\mathbb{Z}$); dann haben wir $C \rightsquigarrow E = (\varepsilon_{ij})$ mit $\varepsilon_{1j_0} = \varrho_{j_0}$, also $A \rightsquigarrow D = (\delta_{ij})$ und $|D| \le |\delta_{1j_0}| = |\varrho_{j_0}| < h$, Widerspruch. Analog zeigt man $\tau|\gamma_{i1}$.— Durch weitere elementare Zeilen- und Spaltenumformungen bekommt man

$$C \rightsquigarrow F := \begin{pmatrix} \tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_{21} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \varepsilon_{m1} & \dots & \varepsilon_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varepsilon_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Mit $E := (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times(n-1)}$ verfahre man wie zuvor. □

Lemma 7.10.2. *In $\mathcal{AG}$ ist jede p.p. Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln folgenden Typs:*

(i) *$t(x_1, \dots, x_n) = 0$, wobei t ein L-Term sei, oder*
(ii) *$p^m|t(x_1, \dots, x_n)$, wobei t ein L-Term, p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$.*

(*Dabei sei* $k|t$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$ *und einen* L*-Term* t *eine Abkürzung für* $\exists y(ky = t)$.)

Ferner ist $p^m|t(x)$ *in* $\mathcal{AG}$ *zu einer Formel des Typs*

(i) $0 = 0$, *oder*

(ii) $p^m|p^{m'}x$ *mit* $0 \leq m' < m$

äquivalent.

Beweis. Wir wissen (Bem. 7.8.19), daß φ besagt (mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$)

$$\text{Es existiert ein } \mathbf{y}, \text{ so daß } A\mathbf{x} = B\mathbf{y}, \tag{7.10.33}$$

wobei A, B Matrizen über $\mathbb{Z}$ und $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ als Spaltenvektoren zu lesen sind. Wegen Prop. 7.10.1 wissen wir ferner, daß invertierbare Matrizen P, Q über $\mathbb{Z}$ existieren, so daß $D := PBQ$ eine Diagonalmatrix ist; somit ist (7.10.33) äquivalent zu

$$\text{Es existiert ein } \mathbf{z}, \text{ so daß } (PA)\mathbf{x} = D\mathbf{z}. \tag{7.10.34}$$

Aber (7.10.34) ist äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln der Gestalt $k|t(\mathbf{x})$, wobei t ein L-Term ist und k die Einträge der Hauptdiagonalen von D durchläuft. Die Formel $0|t(\mathbf{x})$ ist äquivalent zu $t(\mathbf{x}) = 0$, und $1|t(\mathbf{x})$ zu $0 = 0$. Ist $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, so beachte, daß für $r, s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ gilt: $rs|t(\mathbf{x})$ gdw. $r|t(\mathbf{x})$ und $s|t(\mathbf{x})$. (Ist $ry_1 = t(\mathbf{x})$ und $sy_2 = t(\mathbf{x})$, so schreibe $1 = \lambda r + \mu s$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$; wir erhalten $t(\mathbf{x}) = (\lambda r + \mu s)t(\mathbf{x}) = \lambda rsy_2 + \mu rsy_1 = rs(\lambda y_2 + \mu y_1)$, also $rs|t(\mathbf{x})$.) Ist schließlich $m \geq 1$, p prim mit $p^m|t(x)$, so hat $t(x)$ die Form $t(x) = p^{m'}(rx)$ mit $m' \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(p, r) = 1$, falls $r \neq 0$. Ist $m' \geq m$ oder $r = 0$, so ist $p^m|t(x)$ äquivalent zu $0 = 0$; ansonsten ist $p^m|t(x)$ dann äquivalent zu $p^m|p^{m'}x$. (Ist $p^m y = p^{m'}rx$, so wähle $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $1 = \lambda p^{m-m'} + \mu r$, und schließe $p^{m'}x = \lambda p^m x + \mu p^m y = p^m(\lambda x + \mu y)$, also $p^m|p^{m'}x$.) $\square$

Wir erhalten als Korollar aus dem Baur-Monk-Satz und Lemma 7.10.2:

Satz 7.10.3. (Szmielews Definierbarkeitssatz, [**156**]) *Sei* A *eine abelsche Gruppe und* R *eine* n*-stellige elementar definierbare Relation auf* A, *m.a.W.*

$$R = \{\mathbf{a} \in A^n : A \models \varphi(\mathbf{a})\} \qquad \textit{für eine } L\textit{-Formel } \varphi.$$

Dann ist R *eine Boolesche Kombination von Relationen, die durch* L*-Formeln des Typs* (i), (ii) *aus Lemma 7.10.2 definiert werden.* $\square$

7.10.2. Zur Struktur abelscher Gruppen. Szmielew-Gruppen. Es sei A eine abelsche Gruppe. Wir schreiben $T(A)$ für die *Torsionsuntergruppe* von A, d.h. die Untergruppe aller *Torsionselemente* von A:

$$T(A) = \big\{a \in A : \exists n \in \mathbb{N} : na = 0\big\} = \big\{a \in A : \mathrm{ord}(a) < \infty\big\}$$

A heiße wie üblich eine *Torsionsgruppe,* wenn $T(A) = A$.

Ist p eine Primzahl, so sei A_p die Untergruppe aller Elemente, deren Ordnung eine Potenz von p ist:

$$A_p = \big\{a \in A : \exists n \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{ord}(a) = p^n\big\}$$

A_p ist eine Torsionsgruppe. A heißt eine *p-Gruppe,* falls $A_p = A$. Es gilt:

Lemma 7.10.4. *Sei* A *eine Torsionsgruppe. Dann ist* $A \cong \bigoplus_{p \text{ prim}} A_p$.

Beweis. Betrachte den Homomorphismus $\bigoplus A_p \to A$, $(x_p) \mapsto \sum x_p$. Sei jetzt $x = (x_p)$ in seinem Kern, also $\sum x_p = 0$. Sei q eine Primzahl mit $x_q \neq 0$. Dann haben wir

$$x_q = \sum_{p \neq q} (-x_p).$$

Sei $m := \mathrm{kgV}\{\mathrm{ord}(x_p) : p \neq q\}$; es ist $mx_q = 0$. Aber ebenso ist $q^r x_q = 0$ für ein $r \geq 1$; ist also $d = \mathrm{ggT}(m, q^r)$, so ist $dx_q = 0$. Jedoch ist $d = 1$, also $x_q = 0$. Der angegebene Homomorphismus ist somit injektiv. Zur Surjektivität: Sei $A[m]$ für $m \in \mathbb{N}$ der Kern von $x \mapsto mx$, d.h. $A[m] = \{x \in A : mx = 0\}$. Wir zeigen: Ist $m = rs$ mit $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$, $r, s \geq 1$, so ist $A[m] = A[r] + A[s]$. Wähle nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda r + \mu s = 1$; dann ist $x = \lambda rx + \mu sx$ für $x \in A[m]$, und $\lambda rx \in A[s]$, $\mu sx \in A[r]$.— Induktiv folgt also: Ist $m = \prod_{p|m} p^{\varepsilon_p}$ die Zerlegung von $m \geq 1$ in Primfaktoren, so ist $A[m] = \sum_{p|m} A[p^{\varepsilon_p}]$. Ist also $x \in A$ beliebig, so existiert ein $m \geq 1$ mit $x \in A[m]$, und wegen $A[p^k] \subseteq A_p$ folgt die Behauptung. $\square$

Die vier grundlegenden Typen abelscher Gruppen sind:

(α) Die zyklischen Gruppen der Ordnung p^k, die wir hier als $\mathbb{Z}(p^k)$ schreiben. (p prim, $k \in \mathbb{N}$.)

(β) Die p-*te Prüfergruppe*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : z^{p^n} = 1 \right\}$$

der p-ten komplexen Einheitswurzeln. (p prim.) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ kann als direkter Limes $\mathbb{Z}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{Z}(p^k)$ mit den durch $z \mapsto p^n z$ definierten Injektionen $i_n^k \colon \mathbb{Z}(p^k) \to \mathbb{Z}(p^{k+n})$ aufgefaßt werden, oder alternativ als $\bigcup_k \mathbb{Z}(p^k)$ bzgl. der Kette $\mathbb{Z}(p^1) \subseteq \mathbb{Z}(p^2) \subseteq \cdots$.

(γ) Die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ am Primideal $(p) \neq (0)$, also

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a = 0 \text{ oder } a \neq 0 \text{ und } \mathrm{ggT}(a, b) = 1, \mathrm{ggT}(b, p) = 1 \right\},$$

betrachtet als additive abelsche Gruppe. (p prim.)

(δ) Die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Betreffend Teilbarkeits- und Torsionseigenschaften notieren wir:

(α) $\mathbb{Z}(p^k)$ ist teilbar durch alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, p) = 1$; $T(\mathbb{Z}(p^k)) = \mathbb{Z}(p^k)$.

(β) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ ist teilbar durch alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$; $T(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(γ) $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist teilbar durch alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, p) = 1$; $T(\mathbb{Z}_{(p)}) = \langle 0 \rangle$.

(δ) $\mathbb{Q}$ ist teilbar durch alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$; $T(\mathbb{Q}) = \langle 0 \rangle$.

Wir haben $E(\mathbb{Z}(p^k)) = \mathbb{Z}(p^\infty)$, $E(\mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Q}$. (Vgl. Satz 7.8.16.)

Es sei an folgenden, für gewöhnlich in der Algebra bewiesenen Satz erinnert, zu dessen Beweis Prop. 7.10.1 der erste Schritt ist (vgl. [**34**], I, §8):

Satz 7.10.5. (Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen) *Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, B eine endliche abelsche p-Gruppe.*

(i) *Es ist $A \cong T(A) \oplus A/T(A)$, und $A/T(A)$ ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul, $T(A)$ endlich.*

(ii) *Es ist $B \cong \mathbb{Z}(p^{\nu_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(p^{\nu_s})$ mit durch B eindeutig bestimmter Exponentenfolge $1 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \nu_s$.* $\square$

Definition 7.10.6. Sei A eine abelsche Gruppe. A heißt *reduziert,* falls sie außer $\langle 0\rangle$ keine weiteren teilbaren Untergruppen besitzt.

Beispiel. Die Gruppen $\mathbb{Z}(p^k)$, $\mathbb{Z}_{(p)}$ sind reduziert. (p prim, $k \geq 1$.)

Proposition 7.10.7. *Jede abelsche Gruppe A ist direkte Summe einer teilbaren Gruppe D und einer reduzierten Gruppe C: $A = D \oplus C$. Dabei ist D durch A eindeutig bestimmt, während C bis auf Isomorphie eindeutig ist.*

Beweis. Offenbar gilt:

($*$) Sind $\{D_i\}_{i\in I}$ teilbare Untergruppen von A, so ist auch ihre Summe $\sum_{i\in I} D_i$ teilbar.

Die von allen teilbaren Untergruppen von A erzeugte Untergruppe D ist mit ($*$) also teilbar; sie ist die größte teilbare Untergruppe von A. Teilbare Gruppen sind injektiv (Kor. 7.8.12), also ist $A = D \oplus C$ mit einer Untergruppe C von A, und offensichtlich ist C reduziert. Ist $A = D' \oplus C'$ mit teilbarem D' und reduziertem C', so folgt $D = (D \cap D') \oplus (D \cap C')$. Da $D \cap C'$ teilbar und in der reduzierten Gruppe C' enthalten ist, folgt $D \cap C' = \{0\}$, also $D \cap D' = D$, d.h. $D \subseteq D'$, also $D = D'$ wegen der Maximalität von D. Ist schließlich $A = D \oplus C'$, so $C \cong A/D \cong C'$. $\square$

Diese Proposition erlaubt es also, sich bei Strukturuntersuchungen für abelsche Gruppen auf teilbare und reduzierte Gruppen einzuschränken.

Definition 7.10.8. Unter einer *Szmielew-Gruppe* wollen wir eine abelsche Gruppe S der Form

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\gamma_p)} \right) \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)} \tag{7.10.35}$$

verstehen, wobei $\alpha_{p,n-1}$, β_p, γ_p, δ Kardinalzahlen $\leq \aleph_0$ seien. (Dabei sei $A^{(\kappa)}$ für eine abelsche Gruppe A und eine Kardinalzahl κ die direkte Summe von κ vielen Exemplaren von A.)

Die Summe $\bigoplus_p \left(\bigoplus_n \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})}\right)$ nennen wir den *reduzierten Torsionsteil* der Szmielew-Gruppe, die Summe $\bigoplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)}$ den *teilbaren Torsionsteil,* $\bigoplus_p \mathbb{Z}_{(p)}^{(\gamma_p)}$ den *reduzierten torsionsfreien* und $\mathbb{Q}^{(\delta)}$ den *teilbaren torsionsfreien Anteil* von S. Es ist $S_p = \left(\bigoplus_n \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})}\right) \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)}$.

Offensichtlich sind Szmielew-Gruppen höchstens abzählbar. Wir werden in Kürze zeigen, daß jede abelsche Gruppe zu einer Szmielew-Gruppe elementar äquivalent ist. Vorweg untersuchen wir die Struktur teilbarer Gruppen. Wir haben als Beispiele teilbarer Gruppen die Prüfergruppen sowie die rationalen Zahlen kennengelernt; die teilbaren Gruppen sind bis auf Isomorphie genau die direkten Summen von Gruppen dieses Typs:

Satz 7.10.9. *Jede abzählbare teilbare abelsche Gruppe ist eine Szmielew-Gruppe. Genauer gilt: Jede teilbare abelsche Gruppe D hat die Form*

$$D = \bigoplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$$

für gewisse β_p, δ.

Beweis. Die Torsionsuntergruppe $T(D)$ von D ist teilbar; da $T(D)$ damit injektiv ist, folgt $D \cong T(D) \oplus D_0$, wobei D_0 torsionsfrei und wegen der Teilbarkeit von D auch teilbar ist, und daher als $\mathbb{Q}$-Vektorraum aufgefaßt werden kann. Also $D_0 \cong \mathbb{Q}^{(\delta)}$ für $\delta := \dim_{\mathbb{Q}} D_0$. (Isomorphie als $\mathbb{Q}$-Vektorräume und erst recht als Gruppen.) Ferner ist $T(D) \cong \bigoplus_{p \text{ prim}} D_p$ nach Lemma 7.10.4; wir behaupten: Jedes D_p hat die Form $D_p = \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)}$ für eine Kardinalzahl β_p. Mittels Zornschem Lemma erhalten wir zunächst eine maximale teilbare Untergruppe D'_p von D_p in der gewünschten Form; D'_p ist teilbar, also ein direkter Summand von D_p: $D_p = D'_p \oplus D''_p$. Wir zeigen:

(∗) Ist p eine Primzahl und $A \neq \langle 0 \rangle$ eine teilbare abelsche Gruppe mit $A = A_p$, so ist kanonisch $\mathbb{Z}(p^\infty) \hookrightarrow A$.

Da D'_p maximal und $\mathbb{Z}(p^\infty)$ injektiv ist, enthält D''_p kein isomorphes Abbild von $\mathbb{Z}(p^\infty)$, und da $(D''_p)_p = D''_p$ teilbar ist, muß nach (∗) $D''_p = \{0\}$ sein.— Zu (∗): Wähle $a \in A \setminus \{0\}$; wegen der Teilbarkeit von A erhalten wir eine Folge

$$a = a_1, \quad pa_2 = a_1, \quad pa_3 = a_2, \quad \ldots, \quad pa_{n+1} = a_n, \quad \ldots .$$

Offenbar ist $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$, wenn man $a \in A_p = A$ und $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^k)$ bedenkt. □

In der Gruppentheorie definiert man gemeinhin:

Definition 7.10.10. (Prüfer, [**117**], [**118**]) Seien $A_1 \leq A_2$ abelsche Gruppen. A_1 heißt *rein in A_2,* falls für alle $a \in A_1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n|a$ in A_1 gdw. $n|a$ in A_2.

Der Konflikt mit der Terminologie von Def. 7.8.38 läßt sich leicht auflösen:

Proposition 7.10.11. (Prüfer, [**117**], [**118**]) *Seien $A_1 \leq A_2$ abelsche Gruppen. Dann ist A_1 als abelsche Gruppe rein in A_2 d.u.n.d., wenn A_1 als $\mathbb{Z}$-Modul rein in A_2 ist. A_1 ist in diesem Fall ein direkter Summand von A_2.*

Beweis. Sei A_1 rein in A_2 als abelsche Gruppe; wir zeigen, daß A_1 als $\mathbb{Z}$-Modul in A_2 rein ist. (Die Umkehrung ist trivial.) O.B.d.A. sei A_2 endlich erzeugt. (Denn wir sind nur an endlichen linearen Gleichungssystemen interessiert.) Nach Satz 7.10.5 ist $A_2/A_1 = \bigoplus_{i=1}^n \langle a_i + A_1 \rangle$ mit gewissen $a_i \in A_2$, $\mathrm{ord}(a_i + A_1) =: k_i < \infty$. Betrachte $b_i := k_i a_i \in A_1$. Die b_i sind teilbar durch k_i in A_2, und da A_1 rein in A_2 ist, gilt $b_i = k_i c_i$ mit gewissen $c_i \in A_1$. Setze $c'_i := c_i - a_i$; es folgt $k_i c'_i = 0$, $c'_i + A_1 = c_i + A_1$, und wir erhalten $A_2 = A_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^n \langle c'_i \rangle$, denn ist $a \in A_2$, so haben wir $a + A_1 = n_i a_i + A_1$ für gewisse $n_i \in \mathbb{Z}$, also $a \in A_1 + n_i(c'_i - c_i) = A + n_i c'_i$, und ist $\sum m_i c'_i \in A_1$, so folgt $\sum m_i a_i + A_1 = \sum m_i (c_i - c'_i) + A_1 = A_1$, also $k_i | m_i$ und damit $m_i c'_i = 0$.— Damit ist A_1 sicher rein in A_2 als $\mathbb{Z}$-Modul. □

Sei A eine abelsche Gruppe, p eine Primzahl. Ein System $\{a_i\}_{i \in I}$ von Elementen aus A heiße *p-unabhängig,* wenn für je endlich viele $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ aus $\{a_i\}$ und $r \in \mathbb{N}, n_{i_1}, \ldots, n_{i_k} \in \mathbb{Z}$ mit $n_{i_j} a_{i_j} \neq 0$ gilt: Aus $\sum_{j=1}^k n_{i_j} a_{i_j} \in p^r A$ folgt $p^r | n_{i_j}$ für $j = 1, \ldots, k$. Noch eine etwas technisch zu beweisende Aussage:

Proposition 7.10.12. *Sei A eine abelsche Gruppe, $A = A_p$ für eine Primzahl p. Dann ist $A \cong B \oplus A/B$ mit einer reinen Untergruppe B von A, die sich als direkte Summe zyklischer Gruppen $\mathbb{Z}(p^k)$ darstellen läßt, so daß A/B teilbar ist.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma erhalten wir eine maximale reine Untergruppe B von A, die sich als direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}(p^{k_i})$ darstellen läßt. Nach

Prop. 7.10.11 ist B ein direkter Summand von A, also $A \cong B \oplus A/B$. Seien $a_i \in B$, $a_i \neq 0$ mit $B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$, $\operatorname{ord}(a_i) = p^{k_i}$. Um die Teilbarkeit von A/B nachzuweisen, reicht es wegen der Teilbarkeit aller $a \in A = A_p$ durch $m \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(m,p) = 1$, die Teilbarkeit aller Elemente von A/B durch p zu zeigen. Das System $\{a_i\}$ ist p-unabhängig. Denn wegen der Reinheit von B in A folgt aus $\sum n_{i_j} a_{i_j} \in p^r A$, daß

$$\sum_{j=1}^{k} n_{i_j} a_{i_j} = p^r \sum_{j=1}^{k} m_{i_j} a_{i_j} \qquad \text{für gewisse } m_{i_j} \in \mathbb{Z}.$$

Da eine direkte Summe vorliegt, muß $n_{i_j} a_{i_j} = p^r m_{i_j} a_{i_j}$ sein, also $\operatorname{ord}(a_{i_j}) = p^{k_{i_j}} | (p^r m_{i_j} - n_{i_j})$, und mithin $p^r | n_{i_j}$. $\{a_i\}$ ist zudem ein maximales p-unabhängiges System, denn ist $\{a_i\}$ zusammen mit einem $b \in A$, $b \neq 0$, immer noch p-unabhängig, so ist $\langle b \rangle + \bigoplus \langle a_i \rangle$ sogar eine direkte Summe, die rein in A ist (nachprüfen!), und $\operatorname{ord}(b)$ ist eine p-Potenz wegen $A = A_p$; wegen der Maximalität von B folgt dann $b \in B = \bigoplus \langle a_i \rangle$, also $b = 0$, Widerspruch. Wir zeigen nun durch Induktion über $t \in \mathbb{N}$, daß alle Elemente $a \in A$, $a \neq 0$, $\operatorname{ord}(a) =: p^{t'} < p^t$ modulo B durch p teilbar sind. Ist $t = 1$, so ist nichts zu zeigen. Ansonsten gilt für unser Element a wegen der Maximalität von $\{a_i\}$: Es existieren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ in $\{a_i\}$ sowie $n_{i_0}, \ldots, n_{i_k} \in \mathbb{Z}$ mit $n_{i_0} a \neq 0$, $n_{i_j} a_{i_j} \neq 0$, so daß für ein $r \in \mathbb{N}$

$$n_{i_0} a + \sum_{j=1}^{k} n_{i_j} a_{i_j} \in p^r A \qquad \text{und } p^r \nmid n_{i_j} \text{ für ein } j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Wegen der p-Unabhängigkeit der a_i ist sicher $p^r \nmid n_{i_0}$; schreibe also $n_{i_0} = p^s m_0$ mit $0 \leq s < r$, $\operatorname{ggT}(m_0, p) = 1$, o.B.d.A. $s < t'$. Dann ist $\sum n_{i_j} a_{i_j} \in p^s A$, also $n_{i_j} = p^s m_j$ für gewisse $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$; damit $p^s(m_0 a + \sum m_j a_{i_j}) = p^r b$ für ein $b \in A$, also $p^s(m_0 a - p^{r-s} b + \sum m_j a_{i_j}) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $m_0 a - p^{r-s} b + \sum m_j a_{i_j} \bmod B$ durch p teilbar; damit ist $a m_0 + B$ und wegen $\operatorname{ggT}(m_0, p) = 1$ auch $a + B$ durch p teilbar. □

Damit wie versprochen:

Satz 7.10.13. *Jede abelsche Gruppe ist elementar äquivalent zu einer Szmielew-Gruppe.*

Beweis. Wegen dem Satz von Löwenheim-Skolem „abwärts“ (§9.4) reicht es, dies für eine höchstens abzählbare abelsche Gruppe A einzusehen. Wir geben eine Szmielewsche Gruppe B an, die dieselben Baur-Monk-Invarianten wie A besitzt; mit Kor. 7.8.36 folgt dann $A \equiv B$.

Hat A die reine Untergruppe C, so haben A und $C \oplus A/C$ nach Prop. 7.8.39 dieselben Invarianten. $T(A)$ ist eine reine Untergruppe von A: Gilt $n|a$ in A für $n \in \mathbb{N}$, $a \in T(A)$, etwa $nb = a$ mit $b \in A$, so ist $(n \cdot \operatorname{ord}(a))b = 0$, also $b \in T(A)$. A hat also dieselben Invarianten wie $T(A) \oplus A/T(A)$. $T(A)$ ist direkte Summe der A_p, p prim, nach Lemma 7.10.4. Nach Prop. 7.10.12 ist $A_p \cong A'_p \oplus A_p/A'_p$ mit der reinen Untergruppe A'_p von A_p, wobei A'_p eine direkte Summe von zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}(p^k)$ ist und A_p/A'_p teilbar, also nach Satz 7.10.9 eine Szmielew-Gruppe. Insgesamt ist $T(A)$ also eine Szmielew-Gruppe. $A/T(A)$ zerlegen wir zunächst gemäß Prop. 7.10.7 in $D \oplus C$ mit D teilbar, C reduziert. Im Hinblick auf Lemma 7.8.37 reicht es zu zeigen: Eine torsionsfreie reduzierte abelsche Gruppe R hat dieselben Baur-Monk-Invarianten wie eine direkte Summe von Gruppen der Form $\mathbb{Z}_{(p)}$.

In einer torsionsfreien Gruppe gilt: Ist $n \neq 0$ und $na = nb$, so folgt $a = b$; gilt $nm|na$, so folgt $m|a$. Mit Lemma 7.10.2 heißt dies, daß in R jede p.p. Formel in einer freien Variablen x zu einer Konjunktion von Formeln der Art $p^n|x$ (p prim, $n \in \mathbb{N}$) äquivalent ist, damit aber zu einer einzigen Formel $k|x$ mit $k \in \mathbb{N}$. Schreiben wir $kA = \{ka : a \in A\}$ für die Untergruppe der durch k teilbaren Elemente von A, so ist also jede Baur-Monk-Invariante von R von der Form $[jR : kR]$ mit $j, k \in \mathbb{Z}$, $j|k$. Wir schreiben $j = j_0, j_1, \ldots, j_{s-1}, j_s = k$, wobei jedes j_{i+1} die Form $j_i p_i$ mit einer Primzahl p_i besitze ($i = 0, \ldots, s-1$), und erhalten

$$[jR : kR] = [j_0R : j_1R] \cdot [j_1R : j_2R] \cdots [j_{s-1}R : j_sR],$$

mit $[j_iR : j_{i+1}R] = [j_iR : j_ip_iR] = [R : p_iR]$ (letzteres wegen $R/p_iR \cong j_iR/j_ip_iR$ vermöge $r + p_iR \mapsto j_ir + j_ip_iR$). Es folgt, daß die Invarianten von R durch die Werte $[R : pR]$ mit p prim festgelegt werden. Jeder dieser Werte ist entweder p^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ oder ∞. (Ist R/pR endlich, so folgt aus $p(r + pR) = 0$ für $r + pR \in R/pR$, daß $|R/pR|$ eine p-Potenz ist.) Nun ist aber $\mathbb{Z}_{(p)}$ eine reduzierte torsionsfreie abelsche Gruppe, und für jede Primzahl q ist

$$[\mathbb{Z}_{(p)} : q\mathbb{Z}_{(p)}] = \begin{cases} p, & \text{falls } p = q, \\ 1, & \text{falls } p \neq q. \end{cases}$$

Damit können wir mit Hilfe von Lemma 7.8.37 eine reduzierte torsionsfreie abelsche Gruppe mit denselben Baur-Monk-Invarianten wie R konstruieren, nämlich

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}_{(p)}^{(J(p))} \qquad \text{mit } J(p) := \begin{cases} \operatorname{card} R/pR, & \text{falls } R/pR \text{ endlich}, \\ \aleph_0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Diese hat die Form (7.10.35). □

Die zu einer gegebenen abelschen Gruppe gehörige elementar äquivalente Szmielew-Gruppe ist nicht notwendig eindeutig bestimmt; die beiden folgenden Propositionen demonstrieren dies. Wir sagen, eine abelsche Gruppe A habe *beschränkten Exponenten,* falls $nA = \{0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$; ansonsten hat A *unbeschränkten Exponenten.*

Proposition 7.10.14. *Für eine abelsche Gruppe A sind äquivalent:*

(i) *A hat unbeschränkten Exponenten.*
(ii) $A \equiv A \oplus \mathbb{Q}$.
(iii) $A \equiv A \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$.

Beweis. Daß aus (ii) und (iii) jeweils (i) folgt, ist klar. Gelte (i). Wir zeigen, daß für eine abelsche Gruppe B gilt: $A \equiv B \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$. Dann folgt mit Kor. 7.8.40, (iii): $A \oplus \mathbb{Q} \equiv B \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)} \oplus \mathbb{Q} \cong B \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)} \equiv A$, und (ii) folgt; (iii) ergibt sich ähnlich. O.B.d.A. sei $A \cap \mathbb{Q}^{(\aleph_0)} = \varnothing$. Es reicht zu zeigen, daß die $L(A \cup \mathbb{Q}^{(\aleph_0)})$-Satzmenge Φ, bestehend aus der $L(A)$-Theorie von A und dem Diagramm von $\mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$, ein Modell besitzt, denn dann haben wir eine elementare Erweiterung C von A, die eine zu $\mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$ isomorphe Untergruppe enthält, und da $\mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$ teilbar ist, folgt $A \equiv B \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)}$ für eine geeignete abelsche Gruppe B. Angenommen, Φ hätte kein Modell; nach dem Kompaktheitssatz und Satz 7.10.5 gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche Menge Δ von Sätzen aus dem Diagramm einer von n Elementen frei erzeugten abelschen Gruppe, o.B.d.A. $\mathbb{Z}^n$, so daß die Satzmenge Ψ, bestehend aus der $L(A)$-Theorie von A zusammen mit Δ, kein Modell besitzt. Seien $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren von $\mathbb{Z}^n$; wir können annehmen, daß die einzigen Konstanten in

Δ außer 0 die $e_1, \dots, e_n$ sind. Δ besteht aus Gleichungen und Ungleichungen; da $\mathbb{Z}^n$ von $e_1, \dots, e_n$ frei erzeugt ist, sind alle Gleichungen in Δ aus $\mathrm{Th}(\mathcal{AG})$ ableitbar. Damit ist Δ bzgl. $\mathcal{AG}$ äquivalent zu einer endlichen Konjunktion von Ungleichungen $\lambda_{i1}e_1 + \cdots + \lambda_{in}e_n \neq 0$ mit $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in} \in \mathbb{Z}$ nicht alle gleichzeitig 0 $(i = 1, \dots, m)$. Weil aber A unbeschränkten Exponenten hat, können wir ein $a \in A$ mit $\mathrm{ord}(a) > \mathrm{kgV}\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} : 1 \leq i \leq m\right\}$ wählen und $e_1, \dots, e_n$ allesamt als a interpretieren; Ψ hat also doch ein Modell: Widerspruch. □

Ist A eine abelsche Gruppe und p eine Primzahl, so sagen wir, A_p habe *beschränkte p-Länge,* falls es eine endliche obere Schranke für die Ordnungen aller Elemente $a \in A_p$ mit $p \nmid a$ gibt; andernfalls habe A *unbeschränkte p-Länge.*

Proposition 7.10.15. *Ist p eine Primzahl, A eine abelsche Gruppe unbeschränkter p-Länge, so ist $A \equiv A \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\aleph_0)} \equiv A \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\aleph_0)}$*

Beweis. Der Nachweis von $A \equiv A \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\aleph_0)}$ ist ähnlich zu Prop. 7.10.14 und verbleibt als Übung.— Zu $A \equiv A \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\aleph_0)}$: Seien $c_0, c_1, \dots$ abzählbar viele paarweise verschiedene neue Konstanten für L, und definiere die $L(\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}_0})$-Satzmenge

$$\Sigma := \mathrm{Th}(A) \cup \{p \nmid c_i : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \left\{\sum_{i=0}^{k-1} n_i c_i \neq 0 : k \in \mathbb{N}, (n_0, \dots, n_{k-1}) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\right\}.$$

Da A unbeschränkte p-Länge besitzt, erhalten wir mit dem Kompaktheitssatz ein Modell C' von Σ; sei $C := C'|L$. Es ist $A \equiv C \equiv T(C) \oplus C/T(C)$, letzteres wegen Prop. 7.8.39, da $T(C)$ rein in C ist. Setze $B := C/T(C)$; nach Definition von Σ ist $[B : pB] = \infty$. Dem Beweis von Satz 7.10.13 entnehmen wir, daß, wenn wir B durch eine elementar äquivalente Szmielew-Gruppe B_1 ersetzen, der Summand $\mathbb{Z}_{(p)}$ in B_1 unendlich oft erscheinen muß, so daß $B_1 \cong B_1 \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\aleph_0)}$. Es folgt $A \equiv T(C) \oplus B_1 \cong T(C) \oplus B_1 \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\aleph_0)} \equiv A \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\aleph_0)}$ mit Kor. 7.8.40, (iii). □

Wir sagen deshalb, eine Gruppe (7.10.35) sei eine *strikte Szmielew-Gruppe,* wenn

(i) δ entweder 0 oder $\aleph_0$ ist, wobei
(ii) $\delta = 0$ ist, falls $\bigoplus_p \left(\bigoplus_n \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\gamma_p)}\right)$ unbeschränkten Exponenten hat, und
(iii) für alle Primzahlen p gilt: $\beta_p = \gamma_p = 0$, falls die Gruppe unbeschränkte p-Länge besitzt.

7.10.3. Die Szmielew-Invarianten. Unser nächstes Ziel ist es, nachzuweisen, daß jede abelsche Gruppe zu einer eindeutig bestimmten strikten Szmielew-Gruppe elementar äquivalent ist. Wir führen einen Satz von Invarianten ein, die eine strikte Szmielew-Gruppe bis auf Isomorphie festlegen.

Definition 7.10.16. Sei A eine abelsche Gruppe, p eine Primzahl. Wie im Beweis von Lemma 7.10.4 schreiben wir $A[p]$ für die Untergruppe $\{a : pa = 0\}$. Wir definieren die *Szmielew-Invarianten von A* wie folgt:

(i) $\mathrm{U}(p;n;A) := \big[(p^n A)[p] : (p^{n+1}A)[p]\big]$,
(ii) $\mathrm{D}(p;n;A) := \mathrm{ord}\big((p^n A)[p]\big)$,
(iii) $\mathrm{Tf}(p;n;A) := \big[p^n A : p^{n+1}A\big]$,

(iv) $\operatorname{Exp}(p;n;A) := \operatorname{ord}\bigl(p^n A\bigr)$,

für alle Primzahlen p und natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Bemerkungen 7.10.17. Es ist $p^n A = A_{\psi_n}$ und $(p^n A)[p] = A_{\varphi_n}$ für die p.p. Formeln $\psi_n(x) := \bigl(p^n|x\bigr)$ und $\varphi_n(x) := \bigl(px = 0 \wedge \psi_n(x)\bigr)$. Wir haben also

(i) $\mathrm{U}(p;n;A) = \operatorname{Inv}(\varphi_n, \varphi_{n+1}, A)$,

(ii) $\mathrm{D}(p;n;A) = \operatorname{Inv}(\varphi_n, x = 0, A)$,

(iii) $\mathrm{Tf}(p;n;A) = \operatorname{Inv}(\psi_n, \psi_{n+1}, A)$,

(iv) $\operatorname{Exp}(p;n;A) = \operatorname{Inv}(\psi_n, x = 0, A)$.

Bei den Szmielew-Invarianten handelt es sich somit um besondere Baur-Monk-Invarianten. „U“ steht dabei für „Ulm“, da die $\mathrm{U}(p;n;A)$ (p prim, $n \geq 0$) auch als die *n-ten Ulm-Kaplansky-Invarianten* von A bezeichnet werden (vgl. [**30**], VI, §37); „D“ steht für „dividierbar“ (teilbar), „Tf“ für „torsionsfrei“ und „Exp“ für „Exponent“. Die zu diesen speziellen Baur-Monk-Invarianten gehörenden Dimensionssätze nennen wir *Szmielew-Dimensionssätze.*

Für unsere Gruppen (α)–(δ) erhalten wir: (p, q prim, $n \geq 0$, $k \geq 1$)

	$\mathbb{Z}(q^k)$	$\mathbb{Z}(q^\infty)$	$\mathbb{Z}_{(q)}$	$\mathbb{Q}$
$\mathrm{U}(p;n;-)$	$\begin{cases} p, & \text{falls } p = q,\ n = k-1, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$	1	1	1
$\mathrm{D}(p;n;-)$	$\begin{cases} p, & \text{falls } p = q,\ n < k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$	$\begin{cases} p, & \text{falls } p = q, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$	1	1
$\mathrm{Tf}(p;n;-)$	$\begin{cases} p, & \text{falls } p = q,\ n < k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$	1	$\begin{cases} p, & \text{falls } p = q, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$	1
$\operatorname{Exp}(p;n;-)$	$\begin{cases} p^{k-n}, & \text{falls } p = q,\ n < k, \\ 1, & \text{falls } p = q,\ n \geq k, \\ q^k, & \text{sonst.} \end{cases}$	∞	∞	∞

Übung. Verifiziere obige Tabelle.

Im folgenden sei formal $n^{\aleph_0} := \infty$ für alle natürlichen Zahlen n.

Satz 7.10.18. *Jede strikte Szmielew-Gruppe ist durch ihre Szmielew-Invarianten eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei A eine strikte Szmielew-Gruppe wie in (7.10.35). Mit Hilfe der Tabelle und Lemma 7.8.37 erhalten wir

$$\mathrm{U}(p;n;A) = p^{\alpha_{p,n}} \qquad \text{für alle } n \geq 0 \text{ und Primzahlen } p.$$

Der reduzierte Torsionsteil von A ist also durch die Invarianten $\mathrm{U}(-;-;A)$ eindeutig festgelegt. Da $A_p = \bigoplus_n \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)}$ und A strikt ist, gilt: A hat unbeschränkte p-Länge genau dann, wenn $\alpha_{p,n} \neq 0$ für unendlich viele $n \geq 0$, oder gleichbedeutend, wenn $\mathrm{U}(p;n;A) \neq 1$ für unendlich viele $n \geq 0$. Ob A unbeschränkte p-Länge besitzt oder nicht, wird somit auch durch die p-ten Ulm-Kaplansky-Invarianten von A festgelegt. Wir erhalten ferner:

$$\mathrm{D}(p;n;A) = p^{\beta_p + \sum_{k \geq n} \alpha_{p,k}} \qquad \text{für alle } n \geq 0 \text{ und Primzahlen } p.$$

Hat A unbeschränkte p-Länge, so ist $\beta_p = 0$ aufgrund der Striktheit von A; ansonsten aber ist $p^{\sum_{k \geq n} \alpha_{p,k}} = 1$ für genügend großes n, also $\mathrm{D}(p;n;A) = p^{\beta_p}$. Der teilbare Torsionsanteil von A ist also ebenfalls durch die Szmielew-Invarianten eindeutig bestimmt. In ähnlicher Weise folgt

$$\mathrm{Tf}(p; n; A) = p^{\gamma_p + \sum_{k \geq n} \alpha_{p,k}} \qquad \text{für alle } n \geq 0 \text{ und Primzahlen } p$$

und damit, daß auch der reduzierte torsionsfreie Teil von A eindeutig bestimmt ist.

Sei nun $B := \bigoplus_p \left(\bigoplus_n \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n-1})} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{Z}_{(p)}^{(\gamma_p)} \right)$, also $A = B \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$. Wie wir gesehen haben, ist B durch die Szmielew-Invarianten eindeutig bestimmbar; insbesondere legen diese fest, ob B von unbeschränktem Exponenten ist. Hat B unbeschränkten Exponenten, so ist $\delta = 0$, da A strikt Szmielewsch ist. Sei also nun B von beschränktem Exponenten, etwa $nB = \{0\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist $n = 1$, also $B = \{0\}$, so ist stets $\mathrm{Exp}(-; -; A) = \mathrm{ord}(\mathbb{Q}^{(\delta)})$, also A von beschränktem Exponenten genau dann, wenn $\mathrm{Exp}(-; -; A) \equiv 1$. Sei also nun $n \geq 2$; da für $b \in B$, $r, s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ gilt, daß $rs | b \Leftrightarrow r | b, s | b$, also $rsB = \{0\} \Leftrightarrow rB = sB = \{0\}$, sieht man, daß o.B.d.A. $n = p^k$ für eine Primzahl p und ein $k \geq 1$ angenommen werden darf. Wir erhalten

$$\mathrm{Exp}(p; k; A) = \mathrm{ord}(p^k B) \cdot \mathrm{ord}(\mathbb{Q}^{(\delta)}) = \mathrm{ord}(\mathbb{Q}^{(\delta)}),$$

und es ist A von beschränktem Exponenten genau dann, wenn $\mathrm{Exp}(p; k; A) = 1$. Damit sagen uns die Exponenteninvarianten, ob A von beschränktem oder unbeschränktem Exponenten ist; ist letzteres der Fall, so ist $\delta = \aleph_0$, ansonsten $\delta = 0$. □

Korollar 7.10.19. *Jede abelsche Gruppe ist zu genau einer strikten Szmielew-Gruppe elementar äquivalent.*

Beweis. Sei A eine abelsche Gruppe und B eine Szmielew-Gruppe wie in (7.10.35) mit $B \equiv A$ gemäß Satz 7.10.13. Hat A unbeschränkten Exponenten, so kann man nach Prop. 7.10.14 $\delta = \aleph_0$ wählen, ansonsten muß notwendig $\delta = 0$ sein; ist p eine Primzahl, und hat A unbeschränkte p-Länge, so kann man wegen Prop. 7.10.15 $\beta_p = \gamma_p = 0$ erreichen. Da A und B dieselben Szmielew-Invarianten besitzen, ist B durch A nach Satz 7.10.18 eindeutig festgelegt. □

7.10.4. Die Sätze von Szmielew. Wir erhalten in Analogie zum Fall der Moduln ein Ergebnis über relative Q.E.:

Satz 7.10.20. (Szmielews Klassifikationssatz, [**156**]) *Jede L-Formel ist in $\mathcal{AG}$ äquivalent zu einer Booleschen Kombination von Szmielew-Dimensionssätzen und Formeln des Typs* (i), (ii) *wie in Lemma 7.10.2. Insbesondere ist jeder L-Satz äquivalent zu einer Kombination von Szmielew-Dimensionssätzen.*

Beweis. Sei φ eine L-Formel. Nach dem Satz von Baur-Monk ist φ in $\mathcal{AG}$ äquivalent zu einer Booleschen Kombination von p.p. Formeln und Dimensionssätzen; um die p.p. Formeln kümmert sich Lemma 7.10.2, so daß wir nur noch sehen müssen, daß jeder L-Satz in $\mathcal{AG}$ zu einer Booleschen Kombination von Szmielew-Dimensionssätzen äquivalent ist. Dies folgt aber unmittelbar aus Kor. 5.1.2, (iii), indem man für Φ die Menge aller Szmielew-Dimensionssätze und deren Negate, zusammen mit Ba wählt. □

Analog zu Kor. 7.8.41 folgt:

Korollar 7.10.21. *Es gibt eine rekursive Abbildung, die einer beliebigen L-Formel eine in $\mathcal{AG}$ äquivalente Formel aus dem $\wedge$-$\vee$-$\neg$-Abschluß der Menge aller Formeln des Typs* (i), (ii) *von Lemma 7.10.2 und Szmielew-Dimensionssätzen zuordnet.*

Beweis. Da $\mathcal{AG}$ rekursiv axiomatisierbar ist, ist die Menge der Folgerungen aus einem geeigneten Axiomensystem Ξ nach Kor. 2.4.1 rekursiv aufzählbar; nach dem Satz 7.10.20 existiert zu einer L-Formel φ eine Formel ψ der gewünschten Gestalt mit $\mathcal{AG} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, die wir damit durch systematisches Aufzählen aller Konsequenzen aus Ξ ermitteln können. $\square$

Korollar 7.10.22. (Szmielews Entscheidbarkeitssatz, [**156**]) *Die Theorie der abelschen Gruppen ist entscheidbar.*

Beweis. Sei φ ein L-Satz. Ermittle gemäß Kor. 7.10.21 einen Satz ψ mit $\mathcal{AG} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, der eine Boolesche Kombination von Szmielew-Dimensionssätzen ist. Wir müssen nun entscheiden, ob ψ in allen abelschen Gruppen gilt; wegen Kor. 7.10.19 können wir uns auf strikte Szmielew-Gruppen beschränken. Bringe $\neg\psi$ in die Form $\neg\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} Szmielew-Dimensionssätze oder deren Negate sind. Jedem der n-Tupel $(\delta_{1j_1}, \ldots, \delta_{1j_n})$ mit $j_i \in \{1, \ldots, m_i\}$ entspricht hinsichtlich der Szmielew-Invarianten eine Bedingung an eine abelsche Gruppe; mit Hilfe der obigen Tabelle kann man systematisch feststellen, ob es eine strikte Szmielew-Gruppe gibt, die einem solchen n-Tupel von Bedingungen genügt. Ist dies für keines der $m_1 \cdots m_n$ möglichen Tupel der Fall, so ist ψ bzgl. $\mathcal{AG}$ wahr, ansonsten falsch. $\square$

Eine kuriose Anwendung:

Satz 7.10.23. (Adler-Kogalovskiĭ-Sabbagh, [**41**], [**87**], [**137**]) *Die Klasse aller Gruppen, die multiplikative Gruppen von Körpern sind, ist nicht in der Logik erster Stufe axiomatisierbar.*

Beweis. Sei K ein beliebig gewählter algebraisch abgeschlossener Körper von Primzahlcharakteristik p mit $\mathrm{trdeg}(K/\mathbb{F}_p) = \infty$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, ist die multiplikative Gruppe K^* von K teilbar. Da alle über $\mathbb{F}_p$ algebraischen Elemente von K^* Einheitswurzeln sind, ist $T(K^*) = A^*$, wobei $A \subseteq K$ der relative algebraische Abschluß $\overline{\mathbb{F}}_p^K$ von $\mathbb{F}_p$ in K sei. Da A^* teilbar, also direkter Summand von K^* ist, folgt mit Satz 7.10.9 $K^* = A^* \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$ für eine Kardinalzahl $\delta \geq \aleph_0$. Nun ist $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}^{(\delta)}$ nach Satz 7.10.18 und der obenstehenden Tabelle, also $A^* \oplus \mathbb{Q} \equiv A^* \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$ nach Kor. 7.8.40, (iii). Es reicht also nachzuweisen, daß kein Körper F mit $F^* \cong A^* \oplus \mathbb{Q}$ existieren kann. Angenommen, F wäre ein solcher Körper mit $\varphi\colon A^* \oplus \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} F^*$. F hat Primzahlcharakteristik: Denn wäre $\mathrm{char}(F) = 0$, so gäbe es $(a;p), (b;q) \in A^* \oplus \mathbb{Q}$ mit $2 = \varphi(a;p)$, $3 = \varphi(b;q)$; wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^k = 1$ und setze $m := kp$, $n := kq$; dann ist $2^m = 3^n$ in F, im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$. Somit ist t transzendent (denn sonst wäre t eine Einheitswurzel in F), insbesondere also $t + 1 \in F^*$, etwa $t + 1 = at^q$ mit algebraischem $a \in F^*$ und $q \in \mathbb{Q}$. Aber dann ist t selbst algebraisch: Widerspruch. $\square$

KAPITEL 8

Modelltheoretische Resultanten

Seien $f, g \in \mathbb{Z}[X, Y_1, \dots, Y_n]$. Gesucht ist ein Polynom $r = r(f,g) \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n]$, so daß für jeden Körper K und $c_1, \dots, c_n \in K$ gilt: Es ist $r(c_1, \dots, c_n) = 0$ gdw. $f(c_1, \dots, c_n), g(c_1, \dots, c_n) \in K[X]$ in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper $K' \supseteq K$ eine gemeinsame Nullstelle besitzen. M.a.W. für alle $K \in \mathcal{K}ö$, $c_1, \dots, c_n \in K$:

$$K \models \big(r(c_1, \dots, c_n) = 0\big)$$

d.u.n.d. wenn

$$K' \models \exists X \big(f(c_1, \dots, c_n)(X) = 0 \wedge g(c_1, \dots, c_n)(X) = 0\big)$$

für alle $K' \in \mathcal{AAK}$ mit $K' \supseteq K$. Ein solches r existiert stets, z.B. die sog. *Sylvester-Resultante* von f und g: Ist allgemein R ein Integritätsbereich und $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ mit $a_i \in R$, $a_m \neq 0$ und $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, $b_j \in R$, $b_n \neq 0$, so ist die Resultante von f und g erklärt als die Determinante einer $(m+n)$-Matrix über R, der *Sylvester-Matrix* zu f, g:

$$r(f,g) := \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & & & \\ & & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & \\ b_n & b_{n-1} & \dots\dots & & b_0 & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \dots\dots & & b_0 & & \\ & & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \dots\dots & & b_0 \end{vmatrix}$$

(Die leeren Stellen werden mit 0 aufgefüllt.) Die Diagonaleinträge lauten von links oben nach rechts unten gelesen nacheinander

$$\underbrace{a_m, a_m, \dots, a_m}_{n\text{-mal}}, \underbrace{b_0, b_0, \dots, b_0}_{m\text{-mal}}.$$

Man beachte, daß die Determinante der 0×0-Matrix $\mathbf{0}$ gleich 1 ist, denn $\mathbf{0}$ ist die 0-te Einheitsmatrix.— Sei R ein Integritätsbereich. Man zeigt nun:

SATZ 8.0.1. *Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in R \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in R$,*

$$f = a \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i), \qquad g = b \prod_{j=1}^{n} (X - \beta_j)$$

Polynome aus $R[X]$. Dann gilt $r(f,g) = a^n b^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_i - \beta_j)$.

Die behauptete Resultanteneigenschaft von r ergibt sich nun unmittelbar aus dem Satz:

Korollar 8.0.2. *Sind $f, g \in R[X]$ zwei Polynome $\neq 0$, so ist $r(f,g) = 0$ genau dann, wenn f, g in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper, der R erweitert, eine gemeinsame Nullstelle besitzen.* □

Die Aussage von Satz 8.0.1 erhält man ferner durch Induktion aus dem nachfolgenden Lemma (und den Eigenschaften einer Determinantenfunktion).

Lemma 8.0.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R$, $0 \neq g \in R[X]$. Dann gilt*

$$r\left(\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i), g\right) = g(\alpha_m) \cdot r\left(\prod_{i=1}^{m-1}(X-\alpha_i), g\right).$$

Beweis. Wir beweisen: Betrachtet man g als Polynom über dem Integritätsring $R[Y]$, also als Element von $R[Y][X]$, so gilt

$$r(f,g) = g(Y) \cdot r\left(\prod_{i=1}^{m-1}(X-\alpha_i), g\right) \text{ mit } f := (X-Y)\prod_{i=1}^{m-1}(X-\alpha_i). \tag{8.0.36}$$

(Mit Hilfe des Einsetzungshomomorphismus $R[Y] \to R, p \mapsto p(\alpha_m)$ folgt daraus augenblicklich die Behauptung.)

Schreibe dazu $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ mit $b_n \neq 0$, $a_i \in R[Y]$, $b_j \in R$. Man addiere nun in der Sylvestermatrix M von f, g die i-te Spalte Y^{m+n-i}-mal zur letzten Spalte, für $i = 1, \ldots, m+n-1$; dadurch erhält man eine Matrix M_1 mit $\det M_1 = \det M$, in deren letzten Spalte nun nacheinander die Einträge $Y^{m-1}f(Y) = 0, \ldots, Y^0 f(Y) = 0, Y^{m-1}g(Y), \ldots, Y^0 g(Y)$ stehen. Wir schreiben $M_1 = g(Y) \cdot M_2$, wobei M_2 die Matrix sei, welche in der letzten Spalte die Einträge $0, \ldots, 0, Y^{m-1}, \ldots, Y^0$ besitzt und ansonsten mit M_1 und M übereinstimmt; damit

$$r(f,g) = \det M = \det M_1 = g(Y) \cdot \det M_2. \tag{8.0.37}$$

Die a_i sind lineare Polynome aus $R[Y]$, die b_j konstante Polynome aus $R[Y]$; daher ist $r(f,g)$ ein Polynom mit $\operatorname{grad} r(f,g) \leq n$ aus $R[Y]$. Damit folgt aus (8.0.37) wegen $\operatorname{grad}_Y g(Y) = \operatorname{grad} g = n$, daß $\det M_2$ ein konstantes Polynom sein muß, und wir erhalten $\det M_2 = (\det M_2)(0) = \det(M_2(0))$ nach Substitution von Y durch 0. $(-1)^m a_m, (-1)^{m-1}a_{m-1}, \ldots, (-1)^0 a_0$ sind aber nun die elementarsymmetrischen Funktionen in $Y, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in R[Y]$, d.h.

$$\begin{aligned}
(-1)^m a_m &= 1,\\
(-1)^{m-1} a_{m-1} &= Y + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1},\\
(-1)^{m-2} a_{m-2} &= Y\alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-2}\alpha_{m-1},\\
&\cdots\\
(-1)^0 a_0 &= Y \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}.
\end{aligned}$$

Es ist $a_0(0) = 0$, und $(-1)^i a_i(0)$ für $i = 1, \ldots, m$ sind die elementarsymmetrischen Funktionen in $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Wegen $a_0(0) = 0$ sieht man durch Entwickeln nach der letzten Spalte, daß $\det(M_2(0)) = r\left(\prod_{i=1}^{m-1}(X-\alpha_i), g\right)$. Mit (8.0.37) zeigt dies (8.0.36). □

(Mehr über Eigenschaften der Sylvesterresultante findet man z.B. in [**34**], IV, §8 oder [**29**], Anhang.)

Allgemeiner gesprochen gilt für eine beliebige Formel $\varphi(\mathbf{y})$ in der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ mit $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$: Ist $\psi(\mathbf{y})$ eine zu $\varphi(\mathbf{y})$ in $\mathcal{AAK}$ äquivalente quantorenfreie Formel, so gilt für alle $K \in \mathcal{K}ö$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in K^n$: $K \models \psi(\mathbf{c})$ d.u.n.d., wenn $K' \models \varphi(\mathbf{c})$ für alle algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper $K' \supseteq K$, d.h. die Gültigkeit von ψ in K an der Stelle $\mathbf{c}$ ist ein „lokaler" Test, um über die Gültigkeit von φ *in allen* algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen an der Stelle $\mathbf{c}$ zu entscheiden. In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Existenz solcher Tests ψ für beliebige Formeln φ und Klassen $\mathcal{K}$ von Strukturen befassen. Leider werden wir in vielen Fällen keine Formeln ψ erster Stufe mehr erhalten, sondern allgemeiner auch infinitäre Formeln über $L_{\infty\omega}$ zulassen müssen: In $L_{\infty\omega}$ werden Formeln gemäß den Regeln in L zusammen mit folgenden zwei weiteren Bildungsprinzipien aufgebaut: Ist $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Formeln in $L_{\infty\omega}$, so sind auch

$$\bigwedge_{i \in I} \varphi_i, \qquad \bigvee_{i \in I} \varphi_i$$

Formeln in $L_{\infty\omega}$. Es ist $L \subseteq L_\infty \subseteq L_{\infty\omega}$ (vgl. §2.4); man beachte jedoch, daß die Gesamtheit aller $L_{\infty\omega}$-Formeln (auch schon aller L_∞-Formeln) eine echte Klasse bildet. Die Semantik solcher $L_{\infty\omega}$-Formeln wird in kanonischer Weise erklärt; insbesondere wird $\bigwedge_{i \in \varnothing} \varphi_i$ stets als wahr, $\bigvee_{i \in \varnothing} \varphi_i$ stets als falsch interpretiert.

In Abstraktion der geschilderten Situation von $\mathcal{K}ö$ und $\mathcal{AAK}$ definiert man also, Robinson [**131**] folgend, für eine beliebige Sprache L erster Stufe:

Definition 8.0.4. Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von L-Strukturen und $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Seien ferner $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $\psi(x_1, \dots, x_n)$ $L_{\infty\omega}$-Formeln, $n \geq 1$. φ sei *invariant in* $\mathcal{K}'$, d.h. φ, $\neg\varphi$ seien beide persistent unter Erweiterungen in $\mathcal{K}'$. Dann heißt ψ eine (*modelltheoretische*) *Resultante für* φ (bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$), falls für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für alle } \mathfrak{B} \in \mathcal{K}' \text{ gilt: } \big(\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\big)$$

Übung. Wir betrachten noch einmal das in einer Übung in §7.2 behandelte Beispiel der Klasse $\mathcal{L}$ aller Strukturen $\mathfrak{O}$ bzgl. $L = \big\{\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}, <\big\}$, die lineare Ordnungen sind, in denen $c_0^{\mathfrak{O}} < c_1^{\mathfrak{O}} < c_2^{\mathfrak{O}} < \cdots$ ein zu $(\mathbb{N}_0, <)$ isomorphes Anfangsstück von $\mathfrak{O}$ bilden. Man gebe (bzgl. $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}(\mathcal{L})$) eine Resultante für die folgende Formel $\varphi(x, y)$ an:

$$\varphi(x, y) := x < y \wedge \forall z (z \leq x \vee y \leq z).$$

8.1. Existenzsätze für infinitäre Resultanten

Satz 8.1.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine unter isomorphen Bildern und Substrukturen abgeschlossene Klasse von L-Strukturen mit A.E. und $\mathcal{K}'$ eine in $\mathcal{K}$ konfinale Klasse, die ebenfalls unter isomorphen Bildern abgeschlossen sei. Die $L_{\infty\omega}$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sei invariant in $\mathcal{K}'$, und es sei $n \geq 1$. Dann besitzt φ eine Resultante $\psi(x_1, \dots, x_n)$ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ der Form*

$$\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \quad \textit{mit } \psi_{ij} \in \mathsf{Ba}_L. \tag{8.1.38}$$

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ die Gesamtheit aller $(\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ mit $A \in \mathcal{K}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ derart, daß φ an der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ in allen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}'$ gilt; $\mathcal{I}$ ist i.a. eine echte Klasse. Ferner sei $\varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}(x_1, \dots, x_n) := \bigwedge_{\sigma \in J_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}} \sigma(x_1, \dots, x_n)$ für $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \in \mathcal{I}$, wobei

$$J_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})} := \big\{\sigma \in \mathsf{Ba} : \sigma[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] \in \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{A}, \{a_1, \dots, a_n\})\ \big\}.$$

Wir definieren

$$\psi := \bigvee \left\{ \varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})} : (\mathfrak{A},\mathbf{a}) \in \mathcal{J} \right\},$$

wobei für eine Menge Φ von $L_{\infty\omega}$-Formeln $\bigvee \Phi$ definiert sei als $\bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi$; ψ hat die gewünschte syntaktische Gestalt. Wir behaupten: ψ ist eine Resultante für φ. Sei dazu $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Gelte zunächst $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Zu zeigen ist: $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Wegen $(\mathfrak{A}, A) \models \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{A}, \{a_1, \dots, a_n\})$ folgt dies aber aus $\mathfrak{A} \models \varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}(\mathbf{a})$.

Gelte nun umgekehrt $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Dann gibt es also ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ mit $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{b})$ für alle $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ aus $\mathcal{K}'$ und

$$(\mathfrak{A}, A) \models \sigma[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n]$$

für alle $\sigma(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{Ba}$ mit $\sigma[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n] \in \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}, \{b_1, \dots, b_n\})$. Mit $b_i^{\mathfrak{A}'} := a_i$ gilt dann für die $L(\{b_1, \dots, b_n\})$-Expansion $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}' \models \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}, \{b_1, \dots, b_n\}).$$

Setze $\mathfrak{B}_0 := \langle \{b_1, \dots, b_n\} \rangle_{\mathfrak{B}}$. (Dies ist wohldefiniert, da $n \geq 1$.) Dann gilt auch $\mathfrak{A}' \models \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}_0, \{b_1, \dots, b_n\})$, und da Ba unter Termsubstitution abgeschlossen ist, gibt es nach Diagrammlemma eine Einbettung $h\colon \mathfrak{B}_0 \hookrightarrow \mathfrak{A}$ mit $h(b_i) = a_i$. Da $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter Substrukturen ist, ist $\mathfrak{B}_0 \in \mathcal{K}$. Sei nun $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$; zu zeigen ist $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$. Da $\mathcal{K}'$ konfinal in $\mathcal{K}$ ist und $\mathcal{K}$ die A.E. hat, existiert ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$ sowie ein $\mathfrak{E} \in \mathcal{K}$, o.B.d.A. schon $\mathfrak{E} \in \mathcal{K}'$, und Einbettungen $\mathfrak{C} \overset{k_1}{\hookrightarrow} \mathfrak{E}$, $\mathfrak{D} \overset{k_2}{\hookrightarrow} \mathfrak{E}$, so daß

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} \arrow[r] & \mathfrak{D} \arrow[r, "\exists k_2"] & \mathfrak{E} \\
\mathfrak{B}_0 \arrow[u] \arrow[r, "h"] & \mathfrak{A} \arrow[r] & \mathfrak{C} \arrow[u, "\exists k_1"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}) \in \mathcal{J}$, folgt $\mathfrak{D} \models \varphi(\mathbf{b})$, also $k_2(\mathfrak{D}) \models \varphi(k_2(\mathbf{b}))$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}'$ unter isomorphen Bildern und der $\mathcal{K}'$-Invarianz von φ auch $\mathfrak{E} \models \varphi(k_2(\mathbf{b}))$. Da nun $k_2(\mathbf{b}) = k_1(\mathbf{a})$, schließen wir, daß $\mathfrak{E} \models \varphi(k_1(\mathbf{a}))$. Also $k_1(\mathfrak{C}) \models \varphi(k_1(\mathbf{a}))$ und somit $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$. $\square$

Ist $\mathcal{K}$ elementar, kann man auch ohne die Forderung nach der A.E. auskommen, wenn man für die ψ_{ij} in (8.1.38) existentielle Formeln zuläßt:

Satz 8.1.2. *Sei $\mathcal{K}'$ abgeschlossen unter Isomorphismen und konfinal in einer elementaren Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen. $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sei eine $L_{\infty\omega}$-Formel, die invariant in $\mathcal{K}'$ ist ($n \geq 1$). Dann hat φ eine Resultante $\psi(x_1, \dots, x_n)$ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ der Form*

$$\psi = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \psi_{ij} \quad \textit{mit } \psi_{ij} \in \exists_1.$$

Beweis. Die Beweisidee ist ähnlich zu Satz 8.1.1: Sei wieder $\mathcal{J}$ die Klasse aller $(\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ mit $A \in \mathcal{K}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ derart, daß φ an der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ in allen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}'$ gilt, und sei

$$\varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}(x_1, \dots, x_n) := \bigwedge_{\sigma \in J_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}} \sigma(x_1, \dots, x_n)$$

für $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \in \mathcal{J}$, wobei

$$J_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})} := \left\{ \sigma \in \exists_1 : \sigma[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] \in \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{A}, \{a_1, \dots, a_n\}) \right\}.$$

Wieder definieren wir $\psi := \bigvee\{\varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})} : (\mathfrak{A},\mathbf{a}) \in \mathcal{I}\}$; ψ hat die gewünschte syntaktische Gestalt. Wir zeigen: ψ ist eine Resultante für φ. Sei dazu $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Gelte zunächst $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ für jede Erweiterung $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ von $\mathfrak{A}$; zu zeigen ist $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Wegen $(\mathfrak{A}, A) \models \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{A}, \{a_1, \dots, a_n\})$ folgt dies aber aus $\mathfrak{A} \models \varrho_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}(\mathbf{a})$.

Gelte nun umgekehrt $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Dann gibt es also ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ mit $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{b})$ für alle $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ aus $\mathcal{K}'$, und

$$(\mathfrak{A}, A) \models \sigma[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] \tag{8.1.39}$$

für alle $\sigma \in \exists_1$ mit $\sigma[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n] \in \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{B}, \{b_1, \dots, b_n\})$. Mit $b_i^{\mathfrak{A}'} := a_i$ gilt für die $L(\{b_1, \dots, b_n\})$-Expansion $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}' \models \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{B}, \{b_1, \dots, b_n\}).$$

Setze jetzt $\mathfrak{B}_0 := \langle\{b_1, \dots, b_n\}\rangle_{\mathfrak{B}}$ ($n \geq 1$!). Wegen $\mathsf{Ba} \subseteq \exists_1$ haben wir dann $\mathfrak{A}' \models \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}_0, \{b_1, \dots, b_n\})$, und da Ba unter Termsubstitution abgeschlossen ist, nach Diagrammlemma eine Einbettung $h\colon \mathfrak{B}_0 \hookrightarrow \mathfrak{A}$ mit $h(b_i) = a_i$. Sei nun $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$; zu zeigen ist, daß $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$. Wir haben nun folgende Situation: Gesucht ist eine Struktur $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}'$, die $\mathfrak{B}$ erweitert, und eine Einbettung $k\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}_0 & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} & \xrightarrow{\exists k} & \mathfrak{D} \end{array} \tag{8.1.40}$$

kommutativ wird. Damit folgt nämlich dann $\mathfrak{D} \models \varphi(\mathbf{b})$ wegen $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}) \in \mathcal{I}$, somit wegen der Isomorphieabgeschlossenheit von $\mathcal{K}'$, der $\mathcal{K}'$-Invarianz von φ und $k(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$: $k(\mathfrak{C}) \models \varphi(k(\mathbf{a}))$. Also auch $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$.— Somit verbleibt nur noch der Nachweis, daß (8.1.40) wie gewünscht konstruiert werden kann. Da $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ unter isomorphen Bildern abgeschlossen sind, können wir o.B.d.A. $h = \mathrm{id}$, also $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ und $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, sowie $C \cap B = B_0$ annehmen. Wähle ein Axiomensystem Σ für $\mathcal{K}$. Wegen des Diagrammlemmas, der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ unter isomorphen Bildern und $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ genügt es dann zu zeigen, daß die $L(C \cup B)$-Satzmenge

$$\Sigma \cup \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{C}, C) \cup \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}, B)$$

ein Modell hat. (Mit der Konfinalität von $\mathcal{K}'$ in $\mathcal{K}$ haben wir dann nämlich auch sofort ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}'$ mit den gewünschten Eigenschaften.) Wir behaupten, daß sich $(\mathfrak{C}, C)$ zu einem Modell dieser Satzmenge expandieren läßt. Da $(\mathfrak{C}, C) \models \Sigma \cup \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{C}, C)$, genügt es hierzu nach Kompaktheitssatz zu zeigen, daß sich für jede endliche Teilmenge $\Phi \subseteq \mathrm{D}_{\mathsf{Ba}}(\mathfrak{B}, B)$ die Struktur $(\mathfrak{C}, C)$ zu einem Modell von Φ expandieren läßt. Aus (8.1.39) folgt aber mit $a_i = b_i \in C \cup B$: $(\mathfrak{C}, C) \models \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{B}, \{b_1, \dots, b_n\})$, insbesondere $(\mathfrak{C}, C) \models \mathrm{D}_{\exists_1}(\mathfrak{B}, \varnothing)$. Hieraus folgert man leicht die Behauptung, denn $\exists_1$ ist bis auf logische Äquivalenz unter (endlichen) Konjunktionen abgeschlossen. $\square$

Korollar 8.1.3. *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive, elementare Klasse von L-Strukturen und $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $\forall_m$-Formel, $n \geq 1$. Dann besitzt φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ eine Resultante $\psi(x_1, \dots, x_n)$ der Form*

$$\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \quad \text{mit } \psi_{ij} \in \exists_1.$$

Im Fall $m = 1$ können alle J_i sogar endlich gewählt werden.

Beweis. Für den ersten Teil der Behauptung verifiziere die Voraussetzungen des Satzes: Nach einer Übung aus §7.2 ist $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ abgeschlossen unter isomorphen Bildern. Sei nun $m = 1$. Wähle eine Resultante $\psi'(x_1, \ldots, x_n)$ von φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{E}(\mathcal{K})$ der Form

$$\psi' = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J'_i} \psi_{ij} \quad \text{mit } \psi_{ij} \in \exists_1.$$

Es gilt $\mathcal{K} \models (\psi' \to \varphi)$, denn ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ mit $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a})$, so gibt es wegen der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, nach der Definition einer Resultante dann $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$, also wegen $\varphi \in \forall_1$ auch $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Damit gilt also

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{j \in J'_i} (\psi_{ij} \to \varphi) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Mit dem Kompaktheitssatz in seiner Variante des Kor. 2.4.3 existiert (nach kurzzeitiger Einführung neuer Konstanten) für jedes $i \in I$ eine endliche Teilmenge J_i von J'_i, so daß schon

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{j \in J_i} (\psi_{ij} \to \varphi). \tag{8.1.41}$$

Wir behaupten, daß die L_∞-Formel $\psi := \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}$ auch eine Resultante für φ ist. Sei hierzu $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathbf{a} \in A^n$.

Gelte zunächst $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$ und sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zu zeigen ist: $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Da $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, genügt es wegen (8.1.41) nachzuweisen, daß es ein $i \in I$ mit $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}(\mathbf{a})$ gibt. Wegen $\psi_{ij} \in \exists_1$ genügt es, ein $i \in I$ zu finden mit $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}(\mathbf{a})$. Dies können wir aber einfach aufgrund der Voraussetzung $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$.

Umgekehrt sei nun für alle Erweiterungen $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ stets $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ gültig. Da ψ' eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ ist, haben wir dann $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a})$ und somit auch $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. □

Übung. Man überlege sich, warum in obigem Korollar auch im Fall $m = 0$ alle J_i endlich gewählt werden können. (Leicht.)

8.2. Infinitäre Axiomatisierungen generischer Klassen

Weitere Folgerungen aus Satz 8.1.2 betreffen infinitäre Axiomatisierungen der n-generischen Klassen.

Korollar 8.2.1. (Infinitäre Axiomatisierung von $\mathcal{G}_1(\mathcal{K})$) *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive, elementare Klasse von L-Strukturen. Dann läßt sich $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_2(\mathcal{K})$ (vgl. Übung in §7.2) durch infinitäre ($L_{\infty\omega}$-) Axiome der Gestalt*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigvee_{i \in I} \varphi_i \right) \quad \textit{mit } \varphi_i \in \exists_1$$

axiomatisieren.

Beweis. Da $\mathcal{K}$ induktiv und elementar ist, läßt sich $\mathcal{K}$ nach dem Satz von Łoś-Suszko-Chang (§4.4) durch $\forall_2$-Sätze axiomatisieren; sei also $\Sigma \subseteq \forall_2$ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Wir behaupten, daß dann die Satzmenge Δ bestehend aus Σ und

$$\left\{ \overline{\forall}(\varphi \to \psi) : \varphi \in \forall_1, \psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \text{ Res. für } \varphi \text{ bzgl. } \mathcal{K}, \mathcal{E}(\mathcal{K}), \psi_{ij} \in \exists_1, J_i \text{ endl.} \right\}$$

ein Axiomensystem für $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ ist. ($\overline{\forall}(\varrho)$ bezeichne den Allabschluß einer Formel ϱ.) Man beachte, daß alle Sätze in Δ bis auf logische Äquivalenz von der behaupteten Form sind. Setze $\mathcal{K}' := \mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathcal{K}$. Wir verifizieren die Bedingungen (G1), (G2$_1$), (G3$_1$) aus der Definition von $\mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{E}(\mathcal{K})$ für $\mathcal{K}'$, um $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_1(\mathcal{K})$ und damit die Behauptung zu zeigen. Zunächst beweisen wir, daß

$$\mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{E}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}'. \tag{8.2.42}$$

Sei dazu $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_1(\mathcal{K}) = \mathcal{E}(\mathcal{K})$; wir haben $\mathfrak{A} \models \Delta$ zu demonstrieren. Es ist klar, daß $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Sei also $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \forall_1$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{E}(\mathcal{K})$. Es genügt, $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$ zu zeigen. Sei hierzu $\mathbf{a} \in A^n$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Nach Definition der Resultante reicht es ferner, die Gültigkeit von φ an der Stelle $\mathbf{a}$ in allen Erweiterungen $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ von $\mathfrak{A}$ nachzuweisen; letzteres ist aber klar, da $\mathfrak{A}$ existentiell abgeschlossen ist. (8.2.42) ist bewiesen.

Die Bedingungen (G1) und (G3$_1$) folgen damit sofort aus (8.2.42). Zum Nachweis von (G2$_1$) betrachte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \forall_1$, $\mathbf{a} \in A^n$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$. Nach Kor. 8.1.3 gibt es eine Resultante ψ für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ von der Form

$$\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \quad \text{mit } \psi_{ij} \in \exists_1, \text{ alle } J_i \text{ endlich.}$$

Dann haben wir wegen $\mathfrak{A} \models \Delta$ auch $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$, mithin also $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Nach der Resultanteneigenschaft von ψ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ bedeutet dies: $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$ für jede Erweiterung $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ von $\mathfrak{B}$. Mit der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ und der Form von φ ergibt sich $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. □

Lemma 8.2.2. *Sei* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *eine induktive, elementare Klasse von L-Strukturen und* $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. *Dann läßt sich* $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ *durch die Menge* Δ, *bestehend aus* Σ *und*

$$\left\{ \overline{\forall}(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi \in \forall_m, \psi \text{ Result. für } \varphi \text{ bzgl. } \mathcal{K}, \mathcal{G}_m(\mathcal{K}), \psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}, \psi_{ij} \in \exists_1 \right\}$$

infinitär axiomatisieren.

Beweis. Sei $\mathcal{K}' := \mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathcal{K}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{K}'$ die Eigenschaften (G1), (G2$_m$), (G3$_m$) aus der Definition von $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ erfüllt. Dazu zeigen wir:

$$\mathcal{G}_m(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}' \tag{8.2.43}$$

Sei dafür $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, also sicher $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Sei $\varphi \in \forall_m$ und ψ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$. Es genügt, $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ zu zeigen. $\mathfrak{A} \models (\psi \to \varphi)$ folgt unmittelbar aus der Definition einer Resultante und $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, wohingegen $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)$ aus der Definition einer Resultante zusammen mit der Form von φ und Eigenschaft (G2$_m$) von $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ folgt.

Damit folgen (G1) und (G3$_m$) wieder sofort aus (8.2.43). Zum Nachweis von (G2$_m$) seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \forall_m$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ mit

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, o.B.d.A. $n > 0$; zu zeigen ist, daß φ an der Stelle $\mathbf{a}$ auch in $\mathfrak{B}$ gültig ist. Nach Kor. 8.1.3 besitzt φ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ eine Resultante ψ der Gestalt

$$\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \quad \text{mit } \psi_{ij} \in \exists_1.$$

Wegen $\mathfrak{A} \models \Delta$ haben wir $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ und somit $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$. Wegen der syntaktischen Form von ψ haben wir dann $\mathfrak{B} \models \psi(\mathbf{a})$ und wieder wegen $\mathfrak{B} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ schließlich $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. □

Wir erhalten damit:

Satz 8.2.3. (Infinitäre Axiomatisierung von $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$) *Sei $\mathcal{K}$ eine induktive, elementare Klasse von L-Strukturen und $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Dann läßt sich $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ durch eine Menge Δ_m von infinitären Axiomen der Form*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_p \left(\bigvee_{i \in I} \exists y_1 \cdots \exists y_q \left(\bigwedge_{j \in J_i} \varphi_{ij}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \right) \right) \quad \textit{mit } \varphi_{ij} \in \exists_1$$

axiomatisieren.

Beweis. Wähle ein $\forall_2$-Axiomensystem Σ für $\mathcal{K}$. Dies ist möglich nach Łoś-Suszko-Chang (§4.4), da $\mathcal{K}$ induktiv ist. Wir definieren nun Δ_m für $m \in \mathbb{N}_0$ induktiv durch die Festlegung $\Delta_0 := \Sigma$, $\Delta_{m+1} := \Delta_m \cup \Gamma_{m+1}$ mit Γ_{m+1} als die Menge aller Formeln

$$\forall x_1 \cdots \forall x_p \big((\exists y_1 \cdots \exists y_q(\psi)) \vee \psi' \big),$$

wobei $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \forall_m$, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ der Form $\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}$ mit $\psi_{ij} \in \exists_1$, $\psi'(\mathbf{x})$ eine Resultante für $\forall \mathbf{y}(\neg\varphi)$ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ der Form $\psi' = \bigvee_{i \in I'} \bigwedge_{j \in J'_i} \psi'_{ij}$ mit $\psi'_{ij} \in \exists_1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$. Alle Formeln aus Γ_{m+1} sind (bis auf logische Äquivalenz) von der richtigen Form; per Induktion haben also alle Formeln aus Δ_m, $m \in \mathbb{N}_0$ das gewünschte Aussehen.

Wir setzen $\mathcal{K}_m := \mathrm{Mod}(\Delta_m)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und zeigen $\mathcal{K}_m = \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ durch Induktion nach m. Der Fall $m = 0$ erledigt sich von selbst; zum Induktionsschritt $m \to m+1$ betrachten wir beide Inklusionen getrennt.

Zu $\mathcal{K}_{m+1} \supseteq \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$: Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$, also mit Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{m+1}(\mathcal{G}_m(\mathcal{K})) \subseteq \mathcal{G}_m(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_m = \mathrm{Mod}(\Delta_m)$. Zu zeigen ist, daß $\mathfrak{A} \models \Delta_{m+1}$. Sei also $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \forall_m$, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, $\varphi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}$ mit $\psi_{ij} \in \exists_1$, $\psi'(\mathbf{x})$ Resultante für $\forall \mathbf{y}(\neg\varphi)$ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ der Form $\psi' = \bigvee_{i \in I'} \bigwedge_{j \in J'_i} \psi'_{ij}$ mit $\psi'_{ij} \in \exists_1$. Wir haben $\mathfrak{A} \models \forall \mathbf{x}(\exists \mathbf{y}(\psi) \vee \psi')$ zu zeigen, also aus $\mathfrak{A} \not\models \psi'(\mathbf{a})$ mit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in A^p$, daß $\mathfrak{A} \models (\exists \mathbf{y}(\psi))(\mathbf{a})$. Wegen der Resultanteneigenschaft von ψ' gibt es dann ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models (\exists \mathbf{y}(\varphi))(\mathbf{a})$. Da $\exists \mathbf{y}(\varphi)$ eine $\exists_{m+1}$-Formel ist, bleibt sie unter Substrukturbildung innerhalb von $\mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ erhalten, daher $\mathfrak{A} \models (\exists \mathbf{y}(\varphi))(\mathbf{a})$. Wegen $\varphi \in \forall_m$ und $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ gilt nach Lemma 8.2.2 $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, wodurch die eine Inklusion folgt.

Zu $\mathcal{K}_{m+1} \subseteq \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$: Sei $\mathfrak{A} \models \Delta_{m+1}$; wir haben $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{m+1}(\mathcal{G}_m(\mathcal{K})) = \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ zu zeigen. Nach Induktionsannahme ist wegen $\mathfrak{A} \models \Delta_m \subseteq \Delta_{m+1}$ zumindest $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$. Wir wenden (G3$_m$) an: Sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$; durch $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \forall_m$, o.B.d.A. $p, q \geq 1$, geben wir uns eine beliebige $\exists_{m+1}$-Formel $\exists \mathbf{y}(\varphi)$ vor. Seien $\mathbf{a} \in A^p$ mit $\mathfrak{B} \models (\exists \mathbf{y}(\varphi))(\mathbf{a})$. Wir zeigen $\mathfrak{A} \models (\exists \mathbf{y}(\varphi))(\mathbf{a})$. Da $\mathcal{E}_{m+1}(\mathcal{G}_m(\mathcal{K})) = \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ konfinal in $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ ist, können wir wegen der Form von φ o.B.d.A. $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ annehmen. Angenommen nun, $\mathfrak{A} \models (\forall \mathbf{y}(\neg\varphi))(\mathbf{a})$. Nach Kor. 8.1.3 besitzt $\varphi \in \forall_m$ eine Resultante $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ der Form $\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \psi_{ij}$ mit $\psi_{ij} \in \exists_1$. Außerdem besitzt $\forall \mathbf{y}(\neg\varphi)$ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ eine Resultante $\psi'(\mathbf{x})$ der Form $\bigvee_{i\in I'} \bigwedge_{j\in J'_i} \psi'_{ij}$ mit $\psi'_{ij} \in \exists_1$. Nach Lemma 8.2.2 gilt $\mathcal{G}_m(\mathcal{K}) \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ und daher $\mathfrak{A} \models (\forall \mathbf{y}(\neg\psi))(\mathbf{a})$, also $\mathfrak{A} \models (\neg\exists \mathbf{y}(\psi))(\mathbf{a})$. Nach Definition von Δ_{m+1} haben wir dann $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a})$, und wegen der Resultanteneigenschaft von ψ' und $\mathfrak{B} \in \mathcal{G}_{m+1}(\mathcal{K})$ folgt $\mathfrak{B} \models (\forall \mathbf{y}(\neg\varphi))(\mathbf{a})$, ein Widerspruch.

Da wir nun für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Klassen $\mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ durch die Satzmengen Δ_m axiomatisieren konnten, sollte es klar sein, daß dann $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}_\infty(\mathcal{K}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{G}_m(\mathcal{K})$ durch $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \Delta_m$ axiomatisiert werden kann. $\square$

8.3. Existenzsätze für endliche Resultanten

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage: Unter welchen Voraussetzungen kann man zu einer L-Formel eine endliche Resultante bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ finden? Sogar wenn $\mathcal{K}'$ Modellbegleiter von $\mathcal{K}$ ist, muß nicht unbedingt immer eine endliche Resultante existieren, wie das nachfolgende Beispiel demonstriert.

Beispiel. Sei $\mathcal{K} := \mathcal{FRK}$ die Klasse der formal reellen Körper, $\mathcal{K}' := \mathcal{RAK}'$ die Klasse der Redukte reell abgeschlossener Körper, beide bzgl. der Sprache $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ der Ringe (vgl. §6, §7.2). Betrachte $\varphi(x) := \forall y(\neg y^2 = x)$. Eine Resultante für φ ist

$$\psi(x) := \bigvee_{n=1}^{\infty} \exists z_1 \cdots \exists z_n(-x = z_1^2 + \cdots + z_n^2),$$

nach Kor. 6.1.10 und Prop. 6.1.12. Es kann keine endliche Resultante $\psi' \in L$ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ geben, denn dann gälte $\mathcal{K} \models (\psi \leftrightarrow \psi')$, mit einer neuen Konstanten c in der erweiterten Sprache L_c also auch $\mathcal{K} \models (\psi \leftrightarrow \psi')[c/x]$, insbesondere also $\Theta \cup \{\psi'[c/x]\} \models \psi[c/x]$, wobei Θ ein Axiomensystem für $\mathcal{FRK} = \mathcal{K}$ sei, und mit Kor. 2.4.3 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Theta \cup \{\psi'[c/x]\} \models \tilde{\psi}[c/x]$, $\tilde{\psi} := \bigvee_{n=1}^{N} \exists z_1 \cdots \exists z_n(-x = z_1^2 + \cdots + z_n^2)$. Also $\Theta \models (\psi' \leftrightarrow \tilde{\psi})$, womit $\tilde{\psi}$ auch eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ ist. Aber es gibt formal reelle Körper, in denen die Anzahl der benötigten Quadrate zur Darstellung total positiver Elemente unbeschränkt ist, z.B. $\mathbb{R}(\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}})$. (Für einen Körper K heißt die kleinste Zahl d — falls sie existiert — für jede Summe von Quadraten in K eine Summe von d Quadraten in K ist, die *Pythagoras-Zahl von K;* vgl. [**9**], Ch. 2, [**28**], §6.3.)

Haben wir jedoch eine Modellvervollständigung vorliegen, ist die Situation besser, wie wir zeigen werden; ein Spezialfall davon ist:

Proposition 8.3.1. *Sei $\mathcal{K}'$ eine substrukturvollständige Klasse, $\mathcal{K} = \mathrm{S}(\mathcal{K}')$. Dann hat jede L-Formel bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ eine endliche quantorenfreie Resultante.*

Beweis. Da $\mathcal{K}'$ Q.E. erlaubt, wähle zu einer Formel φ ein quantorenfreies Äquivalent ψ bzgl. $\mathcal{K}'$. ψ ist offensichtlich Resultante von φ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$. $\square$

Satz 8.3.2. *Sei $\mathcal{K}$ induktive, elementare Klasse von L-Strukturen mit Modellvervollständigung $\mathcal{K}'$. Dann hat jede Formel φ eine Resultante $\psi \in \exists_1$ bzgl. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$.*

Beweis. Seien Σ, Δ L-Satzmenge mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, $\mathcal{K}' = \mathrm{Mod}(\Delta)$. Ferner sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine L-Formel, $n \geq 1$. $\mathcal{K}'$ ist auch Modellbegleiter von $\mathcal{K}$ und daher modellvollständig. Nach Robinsons Test ist daher φ in $\mathcal{K}'$ äquivalent zu einer universellen Formel und kann daher o.B.d.A. als universell angenommen werden.

Wir wissen, daß $\mathcal{K}' = \mathcal{G}_1(\mathcal{K})$ und daher nach Kor. 8.1.3, daß φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ eine Resultante $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ mit $\psi_i(x_1, \ldots, x_n) \in \exists_1$ hat. Es genügt, eine endliche Teilmenge J von I zu finden, so daß bereits $\bigvee_{i \in J} \psi_i$ eine Resultante der gewünschten Art ist; dies wollen wir nun mit Hilfe des Kompaktheitssatzes erreichen.

Wir erweitern hierzu L um ein neues, einstelliges Relationssymbol R zu der Sprache L^R. Für eine beliebige L-Formel σ definieren wir die *R-Relativierung* $\sigma^R \in L^R$ induktiv durch $\sigma^R := \sigma$ für $\sigma \in \mathsf{At}$ und

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2)^R := \sigma_1^R \wedge \sigma_2^R, \qquad (\sigma_1 \vee \sigma_2)^R := \sigma_1^R \vee \sigma_2^R, \qquad (\neg\sigma)^R := \neg(\sigma^R),$$
$$(\exists x(\sigma))^R := \exists x(R(x) \wedge \sigma), \quad (\forall x(\sigma))^R := \forall x(R(x) \rightarrow \sigma)$$

für alle $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in L$. Für eine L-Formelmenge Φ sei schließlich

$$\Phi^R := \{\sigma^R \in L^R : \sigma \in \Phi\}.$$

Definiere eine L^R-Satzmenge Γ durch

$$\Gamma := \Delta \cup \Sigma^R \cup \{\exists x(R(x))\} \cup$$
$$\left\{ \forall x_1 \cdots \forall x_m \left(\bigwedge_{i=1}^{m} R(x_i) \rightarrow R(f(x_1, \ldots, x_m)) \right) : f \ m\text{-stell. } L\text{-Fkt.sym.}, \ m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Dann gilt für jede L^R-Struktur $\mathfrak{A}^R$ mit $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}^R|L$:

(∗) $\mathfrak{A}^R \models \Gamma$ gdw. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$ und $R^{\mathfrak{A}^R}$ ist Träger einer Unterstruktur $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}^R}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}^R} \in \mathcal{K}$.

Wir zeigen:

$$\Gamma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(R(x_1) \wedge \ldots \wedge R(x_n) \rightarrow \left(\varphi \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \psi_i^R \right) \right) \tag{8.3.44}$$

Denn: Sei $\mathfrak{A}^R \models \Gamma$ mit $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}^R|L$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (R^{\mathfrak{A}^R})^n$. Zu zeigen ist, daß $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$ gdw. $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}^R} \models (\bigvee_{i \in I} \psi_i)(\mathbf{a})$. Die Rückrichtung ist dabei klar nach Definition einer Resultante und (∗). Angenommen nun, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}^R} \not\models (\bigvee_{i \in I} \psi_i)(\mathbf{a})$. Wegen der Resultanteneigenschaft von $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ gibt es dann ein $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{R}^{\mathfrak{A}^R} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$. Da $\mathcal{K}'$ Modellvervollständigung von $\mathcal{K}$ ist, haben wir dann nach (∗) $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi)(\mathbf{a})$. Damit ist (8.3.44) bewiesen.

Nun zu

$$\exists J \subseteq I, \ J \text{ endlich, mit } \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i) \rightarrow \left(\varphi \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \psi_j^R \right) \right). \tag{8.3.45}$$

Seien $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstanten für L^R. Nach (8.3.44) haben wir dann

$$\Gamma \cup \{R(c_i) : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\varphi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]\} \models \bigvee_{i \in I} \psi_i^R[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n].$$

Nach Kor. 2.4.3 gibt es dann eine endliche Teilmenge I von J mit

$$\Gamma \cup \{R(c_i) : i = 1, \dots, n\} \cup \{\varphi[c_1/x_1, \dots, c_n/x_n]\} \models \bigvee_{j \in J} \psi_j^R[c_1/x_1, \dots, c_n/x_n],$$

also

$$\Gamma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(R(x_1) \wedge \ldots \wedge R(x_n) \to \left(\varphi \to \bigvee_{j \in J} \psi_j^R \right) \right),$$

da die c_i in Γ nicht vorkommen. Mit (8.3.44) ergibt sich wieder

$$\Gamma \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(R(x_1) \wedge \ldots \wedge R(x_n) \to \left(\varphi \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \psi_j^R \right) \right),$$

und dies ist (8.3.45).

Wir zeigen nun, daß $\bigvee_{j \in J} \psi_j$ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ist; sei hierzu $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ mit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Gelte zunächst $\mathfrak{A} \models (\bigvee_{j \in J} \psi_j)(\mathbf{a})$. Sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zu zeigen ist: $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Wir definieren eine L^R-Expansion $\mathfrak{B}^R$ von $\mathfrak{B}$ durch $R^{\mathfrak{B}^R} := A$. Mit (8.3.45) haben wir dann $\mathfrak{B}^R \models (\varphi \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \psi_j^R)(\mathbf{a})$, also $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ d.u.n.d., wenn $\mathfrak{A} \models (\bigvee_{j \in J} \psi_j)(\mathbf{a})$. Dies ist mehr als wir brauchen.— Die Umkehrung ist genauso einfach: Gelte umgekehrt $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ für jede Erweiterung $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$; sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ eine solche ($\mathcal{K}'$ ist konfinal in $\mathcal{K}$). Definiere eine L^R-Expansion $\mathfrak{B}^R$ von $\mathfrak{B}$ durch $R^{\mathfrak{B}^R} := A$. Nach (8.3.45) haben wir dann wieder $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$ d.u.n.d., wenn $\mathfrak{A} \models (\bigvee_{j \in J} \psi_j^R)(\mathbf{a})$. $\square$

8.4. Einfache Strukturen

Wir zeigen nun, wie man mit Hilfe der Resultantenmethode ein hinreichendes Kriterium für die Übereinstimmung der Klassen $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ der existentiell abgeschlossenen und algebraisch abgeschlossenen Strukturen erhalten kann (vgl. dazu Def. 7.4.9). Wir erinnern daran, daß wir eine Struktur $\mathfrak{A}$ aus einer Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen einfach in $\mathcal{K}$ nannten, falls $\mathrm{card}(A) > 1$ und für alle $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und jeden Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gilt: $\mathrm{card}(h(A)) = 1$ oder h ist eine Einbettung. Die Klasse der in $\mathcal{K}$ einfachen Strukturen wird mit $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ bezeichnet. (Vgl. Übung im Anschluß an Prop. 7.4.10.) Wir untersuchen zunächst Resultanten quantorenfreier Formeln *bzgl.* $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ *und* $\mathcal{S}(\mathcal{K})$*:*

Satz 8.4.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse von L-Strukturen und $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ konfinal in $\mathcal{K}$. L enthalte wenigstens zwei Konstantensymbole c, c', für die $\mathcal{K} \models (c \neq c')$ gilt. Dann besitzt jede quantorenfreie Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in L eine Resultante $\psi(x_1, \dots, x_n)$ bzgl. $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ der Form*

$$\psi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \quad \textit{mit } \psi_{ij}(x_1, \dots, x_n) \in \exists^+.$$

Beweis. Wir gehen ganz wie in §8.1 vor: Sei $\mathcal{I}$ die Klasse aller Paare $(\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ mit $\mathfrak{A} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, so daß für alle $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ stets $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Für jedes $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \in \mathcal{I}$ definieren wir $\psi_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})}$ als die Konjunktion aller positiv existentiellen Formeln $\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ in L, so daß $\vartheta[a_1/x_1, \dots, a_n/x_n] \in \mathrm{D}_{\exists^+}(\mathfrak{A}, \{a_1, \dots, a_n\})$; setze $\psi := \bigvee\{\psi_{(\mathfrak{A},\mathbf{a})} : (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \in \mathcal{I}\}$. Wir zeigen, daß dann ψ eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ ist; dazu sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ einfach, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Gelte zunächst für alle $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$: $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Dann ist $(\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ in $\mathcal{I}$ enthalten, und es folgt $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$.

Umgekehrt sei $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$, also $\mathfrak{A} \models \psi_{(\mathfrak{B},\mathbf{b})}(\mathbf{a})$ für ein $(\mathfrak{B}, \mathbf{b}) \in \mathcal{I}$ mit $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ und sei die Abbildung $h\colon \{b_1, \ldots, b_n\} \to A$ gegeben durch $b_i \mapsto a_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Falls $b_i = b_j$ für $i \neq j$, so ist notwendig auch $a_i = a_j$, so daß h wohldefiniert ist.) Dann läßt sich $\mathfrak{C}$ zu einem Modell von $\mathrm{D}_{\exists^+}(\mathfrak{B}, \{b_1, \ldots, b_n\})$ expandieren; wie im Beweis von Satz 8.1.2 zeigt man mit Diagrammlemma und Kompaktheitssatz, daß aufgrund der Elementarität von $\mathcal{K}$ eine Erweiterung $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ von $\mathfrak{C}$ und ein Homomorphismus $k\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ existiert, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\{b_1, \ldots, b_n\} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\
{\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle k} \\
\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{D}
\end{array}$$

kommutiert. Da $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ konfinal in $\mathcal{K}$ ist, können wir $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$ annehmen; da $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, ist entweder $k(B)$ einelementig oder k eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{D}$. Es kommt aber nur letzteres in Frage, da $\mathcal{K} \models (c \neq c')$. Da $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{b})$, folgt $\mathfrak{D} \models \varphi(k(\mathbf{b}))$, damit $\mathfrak{D} \models \varphi(\mathbf{a})$ und schließlich $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{a})$. □

Korollar 8.4.2. *Seien L, $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ wie in Satz 8.4.1. Dann ist jede quantorenfreie L-Formel in $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ äquivalent zu einer L_∞-Disjunktion positiv existentieller Formeln.*

Beweis. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ quantorenfrei. Ist $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij}$ eine Resultante für φ gemäß Satz 8.4.1, so gilt

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) \models (\psi \leftrightarrow \varphi). \tag{8.4.46}$$

Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ für eine L-Satzmenge Σ, $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantensymbole für L. Dann gilt — wegen der Konfinalität von $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ und der Form von ψ, φ — $\Sigma \models (\psi \to \varphi)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$, also $\Sigma \models (\bigwedge_{j \in J_i} \psi_{ij} \to \varphi)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$ für alle $i \in I$. Nach dem Kompaktheitssatz, Kor. 2.4.3, existieren endliche Teilmengen J_i' von J_i, so daß schon $\Sigma \models (\bigwedge_{j \in J_i'} \psi_{ij} \to \varphi)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$. Setze $\psi' := \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i'} \psi_{ij}$. Wir behaupten: ψ' ist auch eine Resultante für φ bzgl. $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, $\mathbf{a} \in A^n$. Ist $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a})$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{K})$, so folgt $\mathfrak{B} \models \psi'(\mathbf{a})$, und so $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Umgekehrt: Gelte für alle $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ einfach in $\mathcal{K}$, stets $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a})$, und somit $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a})$, da $\models (\psi \to \psi')$.

Damit gilt nun auch (8.4.46) mit ψ' anstelle von ψ, und da ψ' bis auf logische Äquivalenz die gewünschte Gestalt hat, folgt die Behauptung. □

Satz 8.4.3. *Seien L und $\mathcal{K}$ wie in Satz 8.4.1, $\mathcal{K}$ zusätzlich induktiv. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{S}(\mathcal{K})$ ist konfinal in $\mathcal{K}$.*
(ii) *Jede Konjunktion negiert atomarer Formeln in L ist in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ äquivalent zu einer L_∞-Disjunktion positiv existentieller Formeln.*
(iii) *$\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K})$.*

Beweis. Zu (i) ⇒ (ii): Sei $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \neg\varphi_i$ mit atomaren φ_i und $\psi = \bigvee_{i \in I} \psi_i$ mit positiv existentiellen ψ_i, so daß $\mathcal{S}(\mathcal{K}) \models (\psi \leftrightarrow \varphi)$; dies ist möglich nach Kor. 8.4.2. Dann ist die Formel $\psi \to \varphi$ äquivalent zu $(\bigwedge_{i \in I} \neg\psi_i) \vee (\bigwedge_{i=1}^n \neg\varphi_i)$ und bleibt somit unter Substrukturbildung in $\mathcal{K}$ erhalten. Da $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ konfinal ist, gilt $\psi \to \varphi$

in $\mathcal{K}$, insbesondere in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$. Die Formel $\varphi \to \psi$ ist äquivalent zu der unendlichen Disjunktion $\bigvee_{i\in I} \psi_i \vee \bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ positiv existentieller L-Formeln. Aus der Konfinalität von $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ und der definierenden Eigenschaft von $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ folgt $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \models (\varphi \to \psi)$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Für jede atomare Formel $\varphi(\mathbf{x})$ in L ($\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$) bezeichne $\varphi'(\mathbf{x})$ eine nach (ii) gewählte L_∞-Disjunktion von $\exists^+$-Formeln, so daß $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \models \forall \mathbf{x}(\neg\varphi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi'(\mathbf{x}))$. (Da L Konstanten besitzt, ist dies gerechtfertigt.) Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus nach $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{C} \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$ eine wegen der Konfinalität von $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$ existierende Erweiterung von $\mathfrak{B}$. Dann gilt für jede atomare L-Formel $\varphi(\mathbf{x})$: $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi'(\mathbf{a})$, also $\mathfrak{B} \models \varphi'(h(\mathbf{a}))$, und via $\mathfrak{C} \models \varphi'(h(\mathbf{a}))$ also $\mathfrak{C} \models \neg\varphi(h(\mathbf{a}))$ und schließlich $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(h(\mathbf{a}))$. Deshalb ist h eine Einbettung.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Trivial. □

Wir erhalten damit die angekündigte Aussage über $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{A}(\mathcal{K})$:

Korollar 8.4.4. (Bacsich-Sabbagh, [**46**], [**140**]) *Seien L, $\mathcal{K}$ wie in Satz 8.4.3, und angenommen, $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ ist konfinal in $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{E}(\mathcal{K}) = \mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K})$.*

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz und der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$ haben wir $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K})$, da $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ konfinal in $\mathcal{K}$ ist. Da $\mathcal{E}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{K})$, reicht es zu zeigen, daß in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ jede primitive Formel φ äquivalent ist zu einer L_∞-Disjunktion positiv existentieller Formeln. Wir können annehmen, daß φ von der Form

$$\varphi = \exists \mathbf{x} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j(\mathbf{x}) \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{m} \neg\varphi_j(\mathbf{x}) \right) \quad \text{mit } \varphi_j \in \mathsf{At},\ m \geq n \geq 1$$

ist. Ersetzt man $\bigwedge_{j=n+1}^m \neg\varphi_j(\mathbf{x})$ in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ gemäß Satz 8.4.3, (ii) äquivalent durch eine Disjunktion $\bigvee_{i\in I} \exists \mathbf{y}_i(\psi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}))$ mit $\exists \mathbf{y}_i(\psi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x})) \in \exists^+$, o.B.d.A. $I \neq \varnothing$, so sieht man, daß φ in $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ mit

$$\bigvee_{i\in I} \exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y}_i \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j(\mathbf{x}) \wedge \psi_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}) \right)$$

gleichwertig ist. □

8.5. Anwendung: Existentiell abgeschlossene Gruppen

Algebraisch abgeschlossene Gruppen wurden von Scott [**145**] eingeführt. Wir zeigen als Anwendung der Ergebnisse dieses Paragraphen folgenden Satz über den Zusammenhang zwischen existentiell und algebraisch abgeschlossenen Gruppen sowie ein Resultat von Neumann [**113**]:

Satz 8.5.1. $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup \{\langle 1 \rangle\}$, *und jede Gruppe in $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ist einfach.*

(Wie man sich sehr leicht überlegt, ist eine Gruppe als L-Struktur bzgl. der Sprache $L = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$ der Gruppen einfach genau dann, wenn sie einfach im Sinne der Gruppentheorie ist, d.h. nichttrivial und ohne nichttriviale Normalteiler.)

Zum *Beweis* des Satzes erweitere die Sprache L um ein neues Konstantensymbol c zu der Sprache L_c, und definiere $\Gamma_c := \Gamma \cup \{c \neq 1\}$, wobei Γ ein L-Axiomensystem für die Gruppentheorie sei, sowie $\mathcal{G}_c := \mathrm{Mod}(\Gamma_c)$. Jedes Modell von Γ_c (genauer: die Restriktion dieses Modells auf L) ist eine nichttriviale Gruppe und jede nichttriviale Gruppe kann zu einem Modell von Γ_c expandiert werden. Im Hinblick auf Satz 8.4.3

und Kor. 8.4.4 reicht es für den Beweis des Satzes, nachzuweisen, daß jede Konjunktion negiert atomarer Formeln in L_c in $\mathcal{A}(\mathcal{G}_c)$ zu einer L_∞-Disjunktion positiv existentieller Formeln äquivalent ist. Dies ist aber eine unmittelbare Folgerung aus dem nachstehenden Satz:

Satz 8.5.2. *Sei $G \in \mathcal{G}_c$, $a \in G$. Dann ist $a \neq 1$ d.u.n.d., wenn es ein $H \in \mathcal{G}_c$ mit $G \subseteq H$ und $t, u \in H$ gibt derart, daß $c = t^{-1}aua^{-1}u^{-1}tuau^{-1}$ in H.*

In jedem $G \in \mathcal{A}(\mathcal{G}_c)$ gilt dann die Äquivalenz

$$x \neq 1 \leftrightarrow \exists t \exists u \big(c = t^{-1}xux^{-1}u^{-1}tuxu^{-1}\big).$$

Damit also ist jede Konjunktion negiert atomarer L_c-Formeln in $\mathcal{A}(\mathcal{G}_c)$ zu einer positiv existentiellen L_c-Formel äquivalent, wodurch Satz 8.5.1 bewiesen ist.

Beweis von Satz 8.5.2. Daß die angegebene Bedingung hinreichend für $a \neq 1$ ist, ist klar, weil sonst $c = 1$ (in G) folgen würde. Zum Beweis der Umkehrung betrachte man ein $u \notin G$ und das freie Produkt $G \amalg \langle u \rangle$. In $G \amalg \langle u \rangle$ haben die Elemente $aua^{-1}u^{-1}$ und $cua^{-1}u^{-1}$ beide unendliche Ordnung, so daß nach dem Satz von Higman, Neumann, Neumann eine Erweiterungsgruppe $H \supseteq G \amalg \langle u \rangle \supseteq G$ und ein $t \in H$ existiert mit

$$cua^{-1}u^{-1} = t^{-1}aua^{-1}u^{-1}t.$$

Das ist die Behauptung. □

Trivialerweise gilt mit Satz 8.5.1 auch:

Korollar 8.5.3. *Jede Gruppe kann zu einer einfachen erweitert werden.* □

Der an einem eingehenderen Studium der existentiell abgeschlossenen Gruppen interessierte Leser kann sich [**6**] zuwenden.

8.6. Ein abstrakter Nullstellensatz*

Wir haben bislang zwei elementare Strukturklassen $\mathcal{K}$, die der algebraisch und reell abgeschlossenen Körper, kennengelernt, mit denen jeweils ein Nullstellensatz verknüpft war, nämlich der Hilbertsche (§5.5.2) und der reelle (§6.7.1) Nullstellensatz. Für diverse weitere Klassen algebraischer Strukturen existieren derartige Sätze. Ihr gemeinsamer Gehalt ist in groben Zügen: Ist $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, und sind $f_1, \ldots, f_m, g$ Elemente aus der freien Adjunktion $\mathfrak{A}[X_1, \ldots, X_n]$ von n Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ an $\mathfrak{A}$ ([**25**], 1.4.18 ff.), so sind (mit $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)$) folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Formel

$$\varrho := \forall \mathbf{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi\big(f_i(\mathbf{x})\big) \to \varphi\big(g(\mathbf{x})\big) \right)$$

gilt in allen existentiell abgeschlossenen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$.

(ii) $g(\mathbf{X}) \in \operatorname{rad}\big(f_1(\mathbf{X}), \ldots, f_m(\mathbf{X})\big)$.

Dabei ist $\varphi(y) := (y = 0)$ und $\operatorname{rad}\big(f_1(\mathbf{X}), \ldots, f_m(\mathbf{X})\big)$ abhängig von $\mathcal{K}$ definiert als $\sqrt{\big(f_1(\mathbf{X}), \ldots, f_m(\mathbf{X})\big)}$ (im Fall der algebraisch abgeschlossenen Körper) oder $\sqrt[\mathrm{r}]{\big(f_1(\mathbf{X}), \ldots, f_m(\mathbf{X})\big)}$ (im Fall der reell abgeschlossenen Körper). Die Bedingung

(ii) stellt dabei also einen einer Resultante ähnlichen „lokalen“ Test für die „globale“ Gültigkeit von ϱ dar.

Wir zeigen hier, daß man in ähnlicher Weise für jede induktive elementare Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen und atomare Formeln φ einen Nullstellensatz ableiten kann. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit einer Verallgemeinerung der Begriffe „Ideal“ und „Radikal“. Die „metamathematische“ Theorie der Ideale wurde von Robinson [**13**] initiiert, vgl. [**15**]; unser Zugang ist jedoch nicht so allgemein.

8.6.1. Ideale und Radikale. Sei L' eine Sprache der Logik erster Stufe, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine Klasse von L'-Strukturen, die nur nicht-einelementige Strukturen enthalte, Σ eine L'-Satzmenge, sowie $\varphi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ eine quantorenfreie L'-Formel; setze $\mathbf{x} := (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Ferner sei $L \subseteq L'$, $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $M \subseteq A^n$ eine Teilmenge, $\mathfrak{A}'$ eine L'-Struktur. Wir sagen, $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ sei ein (L-L'-) *Homomorphismus,* falls h ein Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'|L$ zwischen L-Strukturen ist; wie im Fall eines L-L-Homomorphismus schreiben wir dann $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$. Wir sagen, $\mathfrak{A}$ sei eine (L-L'-) *Erweiterung* von $\mathfrak{A}'$, i.Z. $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A}'|L \subseteq \mathfrak{A}$. Für jeden Homomorphimus $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ist der *φ-Kern von h* definiert durch

$$\ker_\varphi(h) := \bigl\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A}' \models \varphi\bigl(h(a_1), \ldots, h(a_n)\bigr)\bigr\}.$$

Wir nennen M ein *$\mathcal{K}$-φ-Ideal,* falls ein $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$ und ein Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ existiert mit $M = \ker_\varphi(h)$. Das *$\mathcal{K}$-φ-Radikal von M* ist definiert als

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M) = \mathrm{rad}(M) := \bigcap \bigl\{I \subseteq A^n : I \supseteq M \text{ } \mathcal{K}\text{-}\varphi\text{-Ideal}\bigr\}.$$

(Dabei sei $\bigcap \varnothing := A^n$.) M heißt *$\mathcal{K}$-φ-radikal* oder ein *$\mathcal{K}$-φ-Radikal,* falls $M = \mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$. Einfache Eigenschaften von Idealen und Radikalen:

(i) $M \subseteq \mathrm{rad}(M)$.
(ii) $M \subseteq M' \Rightarrow \mathrm{rad}(M) \subseteq \mathrm{rad}(M')$.
(iii) $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(M)) = \mathrm{rad}(M)$.
(iv) Jedes $\mathcal{K}$-φ-Ideal ist $\mathcal{K}$-φ-radikal.
(v) Ist φ eine Konjunktion atomarer Formeln und $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter direkten Produkten, so ist jedes $\mathcal{K}$-φ-Radikal $M \subset A^n$ ein $\mathcal{K}$-φ-Ideal.

Beweis. (i)–(iv) sind klar. Zu (v): Sei $\mathcal{J}$ die Menge aller $\mathcal{K}$-φ-Ideale $I \supseteq M$; es ist $\mathcal{J} \neq \varnothing$ wegen $M \neq A^n$. Sei zu jedem $I \in \mathcal{J}$ eine L'-Struktur $\mathfrak{A}'_I$ und ein Homomorphismus $h_I\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'_I$ mit $I = \ker_\varphi(h_I)$ gewählt. Sei $\mathfrak{A}' := \prod_{I\in\mathcal{J}} \mathfrak{A}_I \in \mathcal{K}$ und $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}', a \mapsto \bigl(h_I(a)\bigr)_{I\in\mathcal{J}}$. Dann ist $\ker_\varphi(h) = \bigcap_{I\in\mathcal{J}} \ker_\varphi(h_I) = M$, also M ein $\mathcal{K}$-φ-Ideal. □

Beispiele.

(i) Sei $\mathcal{KR}$ ($\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ö) die Klasse der kommutativen Ringe (Integritätsbereiche, Körper) bzgl. der Sprache $\{0, 1, +, -, \cdot\}$ und $\varphi_0(x) := (x = 0)$, sowie R ein kommutativer Ring. Dann sind die $\mathcal{KR}$-φ_0-Ideale und $\mathcal{KR}$-φ_0-Radikale in R die Ideale (im Sinne der Ringtheorie) von R, die $\mathcal{I}$-φ_0-Ideale und $\mathcal{K}$ö-φ_0-Ideale in R die Primideale, und die $\mathcal{I}$-φ_0-Radikale und $\mathcal{K}$ö-φ_0-Radikale in R sind die Radikalideale von R.
(ii) Sei $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter homomorphen Bildern. Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und sei $\varphi(x, y) := (x = y)$. Dann sind die $\mathcal{K}$-φ-Ideale in A^2 genau die Kongruenzrelationen von $\mathfrak{A}$, und für $M \subseteq A^2$ ist $\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$ die von M erzeugte Kongruenzrelation.

$\mathcal{K}$-φ-Ideale und $\mathcal{K}$-φ-Radikale können durch gewisse syntaktische Abschlußeigenschaften beschrieben werden. Wir nennen hier eine L'-Formel ψ *φ-speziell vom Grad q und Rang r,* falls ψ die Form

$$\psi = \forall\mathbf{x}\forall\mathbf{y}\forall\mathbf{z}\left(\psi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{q}\varphi[\mathbf{x}_i/\overline{\mathbf{x}}] \rightarrow \bigvee_{j=1}^{r}\varphi[\mathbf{y}_j/\overline{\mathbf{x}}]\right) \tag{8.6.47}$$

hat, wobei $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_q)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_r)$ mit n-Tupeln $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$, $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_s)$ und $\psi'(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ eine Konjunktion atomarer L-Formeln ist. Ein L'-Satz ψ heißt *$\mathcal{K}$-φ-speziell,* falls ψ φ-speziell und $\mathcal{K} \models \varphi$ ist. Damit:

SATZ 8.6.1. *Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $M \subset A^n$. Dann und nur dann ist M ein $\mathcal{K}$-φ-Ideal, wenn für alle $\mathcal{K}$-φ-speziellen Sätze ψ von beliebigem Grad und Rang der Form* (8.6.47) *und alle $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q \in M$, $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q)$, $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r \in A^n$, $\mathbf{b} := (\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r)$ und $\mathbf{c} \in A^s$ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{b}_j \in M \text{ für ein } j \in \{1,\ldots,r\}$$

BEWEIS. Sei zunächst $M = \ker_\varphi(h)$ mit $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$, und seien $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\psi,\psi'$ wie im Satz. Dann gilt mit $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ auch

$$(\mathfrak{A}', A') \models \psi'\big[h(\mathbf{a})/\mathbf{x}, h(\mathbf{b})/\mathbf{y}, h(\mathbf{c})/\mathbf{z}\big] \wedge \bigwedge_{i=1}^{q}\varphi\big[h(\mathbf{a}_i)/\overline{\mathbf{x}}\big],$$

also nach Voraussetzung $\mathfrak{A}' \models \bigvee_{j=1}^{r}\varphi\big[h(\mathbf{b}_j)/\overline{\mathbf{x}}\big]$, da $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$ und ψ $\mathcal{K}$-φ-spezieller Satz. Somit $\mathbf{b}_j \in \ker_\varphi(h)$ für ein j.— Umgekehrt sei die Bedingung an M erfüllt. Betrachte die $L'(A)$-Satzmenge

$$\Phi := \Sigma \cup \mathrm{D}_{\mathsf{At}}(\mathfrak{A}, A) \cup \big\{\varphi[\mathbf{a}/\overline{\mathbf{x}}] : \mathbf{a} \in M\big\} \cup \big\{\neg\varphi[\mathbf{b}/\overline{\mathbf{x}}] : \mathbf{b} \in A^n \setminus M\big\}.$$

Wir behaupten: Φ ist konsistent. Denn sonst liefert uns der Kompaktheitssatz eine Konjunktion $\psi''(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ von atomaren Formeln über L sowie endlich viele $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q \in M$, $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r \in A^n \setminus M$ ($q \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$) und $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_s) \in A^s$, $c_1,\ldots,c_s$ paarweise verschieden, so daß

$$\Sigma \cup \big\{\psi''[\mathbf{a}/\mathbf{x},\mathbf{b}/\mathbf{y},\mathbf{c}/\mathbf{z}]\big\} \cup \big\{\varphi[\mathbf{a}_i/\overline{\mathbf{x}}] : 1 \le i \le q\big\} \cup \big\{\neg\varphi[\mathbf{b}_j/\overline{\mathbf{x}}] : 1 \le j \le r\big\}$$

bereits kein Modell besitzt, also

$$\Sigma \models \forall\mathbf{x}\forall\mathbf{y}\forall\mathbf{z}\left(\psi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{q}\varphi[\mathbf{x}_i/\overline{\mathbf{x}}] \rightarrow \bigvee_{j=1}^{r}\varphi[\mathbf{y}_j/\overline{\mathbf{x}}]\right)$$

gilt, wobei ψ' die Konjunktion von ψ'' mit allen Gleichungen $x_{ij} = x_{i'j'}$ für $i,i' \in \{1,\ldots,q\}$, $j,j' \in \{1,\ldots,n\}$ mit $a_{ij} = a_{i'j'}$ und $y_{kl} = y_{k'l'}$ für $k,k' \in \{1,\ldots,r\}$, $l,l' \in \{1,\ldots,n\}$ mit $b_{kl} = b_{k'l'}$ sei. Nach Voraussetzung ist dann $\mathbf{b}_j \in M$ für ein $j \in \{1,\ldots,r\}$, ein Widerspruch. Sei nun $\mathfrak{A}'$ ein Modell von Φ, und definiere einen Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ durch $h(a) := \overline{a}^{\mathfrak{A}'}$; dann ist $M = \ker_\varphi(h)$ nach Konstruktion. $\square$

SATZ 8.6.2. *Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $M \subseteq A^n$. Dann ist $\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$ die Menge aller $\mathbf{b} \in A^n$, für die $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q \in M$, $\mathbf{c} \in A^s$ und ein $\mathcal{K}$-φ-spezieller Satz ψ vom Rang* 1 *und Grad q wie in* (8.6.47) *existiert, so daß $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$.*

Beweis. Sei S die im Satz angegebene Menge. Sind $\mathbf{b} \in S$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in M$, $\mathbf{c} \in A^s$, $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, dann ist nach Satz 8.6.1 $\mathbf{b} \in I$ für jedes $\mathcal{K}$-φ-Ideal $I \supseteq M$, also $\mathbf{b} \in \mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$; somit $S \subseteq \mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$. Umgekehrt sei $\mathbf{b} \in A^n \setminus S$. Dann ist

$$\Phi := \Sigma \cup \mathrm{D}_{\mathsf{At}}(\mathfrak{A}, A) \cup \big\{\varphi[\mathbf{a}/\overline{\mathbf{x}}] : \mathbf{a} \in M\big\} \cup \big\{\neg\varphi[\mathbf{b}/\overline{\mathbf{x}}]\big\}$$

konsistent. Denn sonst gäbe es wie eben eine Konjunktion atomarer L-Formeln $\psi'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ und $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in M$, $\mathbf{c} \in A^s$ mit $\mathfrak{A} \models \psi'(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ und

$$\Sigma \models \forall\mathbf{x}\forall\mathbf{y}\forall\mathbf{z}\left(\psi' \wedge \bigwedge_{i=1}^{q} \varphi[\mathbf{x}_i/\overline{\mathbf{x}}] \to \varphi[\mathbf{y}/\overline{\mathbf{x}}]\right).$$

Aber dann ist $\mathbf{b} \in S$ nach Definition von S, ein Widerspruch. Folglich gibt es ein $\mathfrak{A}' \models \Sigma$ und einen Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ mit $\mathbf{b} \notin \ker_\varphi(h)$. Somit ist $\mathbf{b} \notin I$ für mindestens ein $\mathcal{K}$-φ-Ideal I mit $M \subseteq I$, d.h. es ist $\mathbf{b} \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$. $\square$

Ein Spezialfall von Satz 8.6.2 wurde zuerst von Robinson [**128**] gefunden.— Als Konsequenz erhalten wir, daß die Operation $M \mapsto \mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M)$ *von endlichem Charakter* ist:

Korollar 8.6.3. $\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M) = \bigcup\big\{\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M') : M' \subseteq M \textit{ endlich}\big\}$. $\square$

Ferner sehen wir, daß das $\mathcal{K}$-φ-Radikal einer endlichen Menge M durch eine L_∞-Disjunktion ϱ von positiv existentiellen Formeln definiert werden kann, welche nur von $\mathcal{K}$, φ und $|M| = q$, nicht aber von $\mathfrak{A}$ abhängt; es ist dies

$$\varrho_{\mathcal{K},\varphi,q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \bigvee\big\{\exists\mathbf{z}(\psi') : \psi \text{ } \mathcal{K}\text{-}\varphi\text{-speziell vom Grad } q, \text{ Rang 1 wie in (8.6.47)}\big\}.$$

Korollar 8.6.4. *Für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ und jedes $M = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subseteq A^n$ gilt:* $\mathrm{rad}_{\mathcal{K},\varphi}(M) = \big\{\mathbf{b} \in A^n : \mathfrak{A} \models \varrho_{\mathcal{K},\varphi,q}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{b})\big\}$. $\square$

8.6.2. Der Nullstellensatz. Sei hier L eine Sprache der Logik erster Stufe, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine elementare Klasse, welche keine einelementigen Strukturen enthalte, Σ eine L-Satzmenge. Sei $\mathcal{K}' := \mathrm{ISP}(\mathcal{K})$ die kleinste unter Isomorphismen, Substruktur- und Produktbildung abgeschlossene Oberklasse von $\mathcal{K}$. In $\mathcal{K}'$ können wir die freie Adjunktion $\mathfrak{A}[\mathbf{X}]$ von $\mathbf{X} := \{X_1, \ldots, X_n\}$ an $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ bilden ([**25**], Satz 1.4.19). Wir erinnern daran, daß jedes Element von $\mathfrak{A}[\mathbf{X}]$ als $t(\mathbf{X}, \mathbf{a})$ geschrieben werden kann, wobei $t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein L-Term, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s)$, $\mathbf{a} \in A^s$ ist. Ferner kann jede Abbildung $h\colon \mathbf{X} \to \mathfrak{A}'$, wobei $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}$ die Struktur $\mathfrak{A}$ erweitere, zu einem eindeutig bestimmten Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A}[\mathbf{X}] \to \mathfrak{A}'$ mit $h|A = \mathrm{id}_A$ fortgesetzt werden.

Sei nun $\mathcal{K}$ induktiv. Man betrachte folgendes Problem: Gegeben seien $\mathfrak{A} \models \Sigma$ und $\mathbf{a} \in A^s$. Sei

$$\mu(\mathbf{u}) := \forall\mathbf{x}\left(\bigwedge_{i=1}^{q} \varphi[t_{i1}/\overline{x}_1, \ldots, t_{ik}/\overline{x}_k] \to \varphi[t_1/\overline{x}_1, \ldots, t_k/\overline{x}_k]\right),$$

wobei hier $t_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $t_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ L-Terme bezeichnen, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_s)$ und $\varphi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k)$ eine L-Formel seien. Wann gilt $\mu(\mathbf{a})$ in allen existentiell abgeschlossenen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$? Unser Ziel ist es, einen Test für diese Eigenschaft in Form einer Beziehung zwischen den $t_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{a})$ und $t_j(\mathbf{X}, \mathbf{a})$ in $\mathfrak{A}[\mathbf{X}]$ zu finden. Zunächst bemerken wir:

Proposition 8.6.5. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mu(\mathbf{a})$ *gilt in allen Erweiterungen von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathcal{K}$.

(ii) $\mu(\mathbf{a})$ *gilt in allen existentiell abgeschlossenen Erweiterungen von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathcal{K}$.

Hat $\mathcal{K}$ *zusätzlich die A.E., so ist ferner äquivalent hierzu:*

(iii) $\mu(\mathbf{a})$ *gilt in einer existentiell abgeschlossenen Erweiterung von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathcal{K}$.

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. Gelte (ii); ist $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{K}$, so wähle ein $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}(\mathcal{K}) \neq \varnothing$ mit $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$; dann gilt $\mathfrak{C} \models \mu(\mathbf{a})$, und da μ universell ist, folgt $\mathfrak{B} \models \mu(\mathbf{a})$.— Nun besitze $\mathcal{K}$ die A.E.; (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar wegen $\mathcal{E}(\mathcal{K}) \neq \varnothing$. Umgekehrt sei $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ mit $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \mu(\mathbf{a})$ gemäß (iii); ist dann $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$, so existiert nach der A.E. ein $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ mit $g\colon \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $h\colon \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{D}$, $g|A = h|A = \mathrm{id}_A$. Da μ universell ist, folgt $\mathfrak{D} \models \mu(\mathbf{a})$, und somit auch $\mathfrak{C} \models \mu(\mathbf{a})$. Dies zeigt (ii). $\square$

Der angekündigte Nullstellensatz kann jetzt bewiesen werden:

SATZ 8.6.6. (Weispfenning, [**176**]) *Sei* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\Sigma_{\mathfrak{A}} := \Sigma \cup \mathrm{D}(\mathfrak{A}, A)$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} := \mathrm{Mod}(\Sigma_{\mathfrak{A}})$. *Dann gilt* $\mu(\mathbf{a})$ *in allen existentiell abgeschlossenen Erweiterungen von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathcal{K}$ *genau dann, wenn*

$$\big(t_1(\mathbf{X},\mathbf{a}),\dots,t_k(\mathbf{X},\mathbf{a})\big) \in \mathrm{rad}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{A}},\varphi}\left(\big\{t_{i1}(\mathbf{X},\mathbf{a}),\dots,t_{ik}(\mathbf{X},\mathbf{a}) : 1 \le i \le q\big\}\right),$$

wobei $\mathrm{rad}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{A}},\varphi}$ *in* $\mathfrak{A}[\mathbf{X}]$ *gebildet wird.*

BEWEIS. Angenommen, $\mathfrak{B} \models \neg\mu(\mathbf{a})$ für ein $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Wähle $\mathbf{b} \in B^n$ mit

$$(\mathfrak{B}, B) \models \left(\bigwedge_{i=1}^{q} \varphi[t_{i1}/\overline{x}_1,\dots,t_{ik}/\overline{x}_k] \wedge \neg\varphi[t_1/\overline{x}_1,\dots,t_k/\overline{x}_k]\right)[\mathbf{b}/\mathbf{x},\mathbf{a}/\mathbf{y}].$$

Sei $h\colon \mathfrak{A}[\mathbf{X}] \to \mathfrak{B}$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus über $\mathfrak{A}$ mit $X_i \mapsto b_i$, $i = 1,\dots,n$; setze $I := \ker_\varphi(h)$. I ist ein $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$-$\varphi$-Ideal, welches $\mathbf{t}_1(\mathbf{X},\mathbf{a}),\dots,\mathbf{t}_q(\mathbf{X},\mathbf{a})$ enthält (mit $\mathbf{t}_i := (t_{i1},\dots,t_{ik})$), nicht jedoch $\mathbf{t}(\mathbf{X},\mathbf{a})$ (mit $\mathbf{t} := (t_1,\dots,t_k)$). Also ist auch $\mathbf{t}(\mathbf{X},\mathbf{a}) \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{A}},\varphi}\big(\{\mathbf{t}_1(\mathbf{X},\mathbf{a}),\dots,\mathbf{t}_q(\mathbf{X},\mathbf{a})\}\big)$.

Umgekehrt sei $\mathbf{t}(\mathbf{X},\mathbf{a}) \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{A}},\varphi}\big(\{\mathbf{t}_1(\mathbf{X},\mathbf{a}),\dots,\mathbf{t}_q(\mathbf{X},\mathbf{a})\}\big)$ angenommen; dann existiert ein Modell $\mathfrak{B}$ von $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ und ein Homomorphismus $h\colon \mathfrak{A}[\mathbf{X}] \to \mathfrak{B}$ mit

$$(\mathfrak{B}, B) \models \left(\bigwedge_{i=1}^{q} \varphi[\mathbf{t}_i/\overline{\mathbf{x}}] \wedge \neg\varphi[\mathbf{t}/\overline{\mathbf{x}}]\right)[\mathbf{b}/\mathbf{x},\mathbf{a}/\mathbf{y}],$$

wobei $\mathbf{b} := \big(h(X_1),\dots,h(X_n)\big)$; also $\mathfrak{B} \models \neg\mu(\mathbf{a})$. Da $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, ist $h|A$ eine Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$; modulo einem Isomorphismus können wir also $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ und $h|A = \mathrm{id}_A$ annehmen. Sei $\mathfrak{C}$ eine existentiell abgeschlossene Erweiterung von $\mathfrak{B}$; dann folgt $\mathfrak{C} \models \neg\mu(\mathbf{a})$. $\square$

In [**176**] findet man eine auf der Charakterisierung 8.6.2 von Radikalen basierende „syntaktischere" Formulierung von Satz 8.6.6, ferner eine allgemeine Aussage über die Existenz uniformer Schranken im Nullstellensatz, analog zu Satz 5.5.4.

Satz 8.6.6 kann nun in vielfältiger Weise angewendet werden. Wir demonstrieren dies durch Herleitung eines Nullstellensatzes für von Neumann-reguläre kommutative Ringe (vgl. §7.6) und Divisionsalgebren. Sei $\mathcal{RKR}$ die Klasse der (nichttrivialen) regulären Ringe (mit 1), $\mathcal{SKR}^*$ deren Modellvervollständigung (Kor. 7.6.13), sowie wie gehabt $\varphi_0(x) := (x = 0)$.

Lemma 8.6.7. *Sei R ein regulärer Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R[X_1, \dots, X_n]$ ein echtes Ideal. Genau dann ist*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathrm{rad}_{\mathcal{RKR}_R,\varphi_0}(\mathfrak{a}), \tag{8.6.48}$$

wenn $\mathfrak{a} \cap R = (0)$.

Beweis. Gelte zunächst (8.6.48). Wäre $r \neq 0$ aus $\mathfrak{a} \cap R \subseteq \sqrt{a}$, so gäbe es wegen $\mathrm{rad}_{\mathcal{RKR}_R,\varphi_0}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \neq R[X_1, \dots, X_n]$ einen regulären Ring $R' \supseteq R$ und einen Homomorphismus $\varphi\colon R[X_1, \dots, X_n] \to R'$, $\varphi|R = \mathrm{id}_R$, mit $r \in \mathfrak{a} \cap R \subseteq \ker\varphi$, ein Widerspruch. Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{a} \cap R = (0)$. Ist $\varphi\colon R[X_1, \dots, X_n] \to R'$ ein Homomorphismus in einen regulären Ring $R' \supseteq R$ mit $\varphi|R = \mathrm{id}_R$, $\ker\varphi = \mathfrak{a}$, so folgt für $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, also $f^k \in \mathfrak{a}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, daß $\varphi(f)^k = 0$, wegen der Regularität von R' also $\varphi(f) = 0$; damit $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathrm{rad}_{\mathcal{RKR}_R,\varphi_0}(\mathfrak{a})$. Weiter sei $R' := R[X_1, \dots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}$; es ist $\sqrt{\mathfrak{a}} \neq R[X_1, \dots, X_n]$, also R' nicht trivial. Ferner $\sqrt{\mathfrak{a}} \cap R = (0)$, denn aus $f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \cap R$ folgt $f^k \in \mathfrak{a} \cap R = \{0\}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $f = 0$. Daher $R \hookrightarrow R'$, und $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist der Kern der kanonischen Abbildung $R[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow R'$. Ferner ist R' regulär. Damit ist $\mathrm{rad}_{\mathcal{RKR}_R,\varphi_0}(\mathfrak{a}) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Unmittelbar aus 8.6.5–8.6.7 erhält man die folgende etwas speziellere Version eines Satzes von Saracino-Weispfenning ([**142**], Thm. I.4.1):

Satz 8.6.8. *Sei R ein regulärer Ring, $R' \in \mathcal{SKR}^*$, $R \subseteq R'$, $\mathfrak{a} \subseteq R[X_1, \dots, X_n]$ ein endlich erzeugtes Ideal mit $\mathfrak{a} \cap R = (0)$. Dann gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = I_R\big(V_{R'}(\mathfrak{a})\big),$$

wobei

$$\begin{aligned} I_R(M') &:= \big\{f \in R[X_1, \dots, X_n] : f(x) = 0 \textit{ für alle } x \in M'\big\},\\ V_{R'}(M) &:= \big\{x \in {R'}^n : f(x) = 0 \textit{ für alle } f \in M\big\} \end{aligned}$$

für $M' \subseteq {R'}^n$, $M \subseteq R[X_1, \dots, X_n]$. □

Bemerkung. Die Bedingung $\mathfrak{a} \cap R = \{0\}$ ist notwendig. Betrachte z.B. den Fall $n = 1$, $e \in B(R)$, $e \neq 0, 1$, und $f := X_1$. Dann ist $V_{R'}(e) = \varnothing$, also $f \in I_R(V_{R'}(e)) = R[X_1]$; aber keine Potenz von f kann ein Vielfaches von e sein.—

Saracino-Weispfenning [**142**] verwenden Satz 8.6.8 zur Entwicklung der Anfangsgründe einer algebraischen Geometrie über kommutativen regulären Ringen.

Sei k ein Körper. Wir betrachten die Sprache L_k der k-Vektorräume wie in §7.8 und bilden $L := L_k \cup \{1, \cdot\}$, wobei $\cdot$ ein zweistelliges Operationssymbol für die Multiplikation und 1 ein Konstantensymbol für das bzgl. dieser Multiplikation neutralen Elements bezeichne. Es sei $\mathcal{D}_k$ die Klasse der *Divisionsalgebren* über k (bzgl. der Sprache L), d.h. derjenigen (nicht notwendig kommutativen) assoziativen k-Algebren, in denen zu jedem von 0 verschiedenen Element ein multiplikativ Inverses existiert. Es gilt:

Bemerkung. $\mathcal{E}(\mathcal{D}_k) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{D}_k)$.

Beweis. Wegen Satz 8.4.3 und seinem Korollar reicht es zu zeigen, daß in $\mathcal{D}_k$ jede negiert atomare Formel zu einer positiv existentiellen Formel äquivalent ist. Dies ist aber klar, denn $\neg(t_1 = t_2)$, wobei t_1, t_2 Terme über L sind, ist in $\mathcal{D}_k$ zu $\exists x\big(x \cdot t_1 = x \cdot t_2 + 1\big)$ gleichwertig. □

Die $\mathcal{D}_k$-φ_0-Ideale in einer k-Algebra A sind genau diejenigen zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$, für die $A/\mathfrak{a}$ über k mittels eines Algebrenhomomorphismus in eine Divisionsalgebra D eingebettet werden kann; man nennt sie *d-prim*. Das Radikal eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist demnach der Durchschnitt aller $\mathfrak{a}$ enthaltenden d-Primideale, das *d-Radikal*. Die kleinste unter I, S und P abgeschlossene Oberklasse von $\mathcal{D}_k$ ist die Klasse $\mathcal{A}_k$ der k-Algebren in der Sprache L. Für eine Divisionsalgebra D über k ist $D[\mathbf{X}]$ also eine k-Algebra, seine Elemente sind Summen von Monomen der Form

$$d_1 X_{i_1} d_2 X_{i_2} d_3 \cdots d_m X_{i_m} d_{m+1} \quad \text{mit } d_i \in D,\ 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

(Die Elemente von k kommutieren mit den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Der Leser zeige als Übung, daß es sich bei $D[\mathbf{X}]$ um das Koprodukt $D * k\langle\mathbf{X}\rangle$ von D mit der von $\mathbf{X}$ frei erzeugten k-Algebra $k\langle\mathbf{X}\rangle$ in der Kategorie der k-Algebren handelt. Sind $D \subseteq D'$ Divisionsalgebren, so ist $D[\mathbf{X}] \hookrightarrow D'[\mathbf{X}]$.) Man beachte, daß diese Definition nichtkommutativer Polynome zwei wesentliche Unterschiede zum kommutativen Fall aufweist:

(i) Ein von Null verschiedenes Polynom kann die Nullfunktion definieren. So ist etwa $iXi + X \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[X]$ von Null verschieden (denn i kommutiert nicht mit X), aber $iXi + X$ definiert die Nullfunktion auf $\mathbb{C}$.

(ii) Es kann nichtkonstante Polynome in $D[\mathbf{X}]$ geben, die in keiner Divisionsalgebra über k eine Nullstelle besitzen können. Sei etwa k ein Körper, dessen algebraischer Abschluß $\overline{k}$ keine rein inseparable Erweiterung von k ist, also z.B. $k \neq \overline{k}$, $\operatorname{char} k = 0$. Sei $\alpha \in \overline{k} \setminus k$ separabel. Dann hat das Polynom $\alpha X - X\alpha - 1 \in k(\alpha)_k[X]$ keine Nullstelle in irgendeiner Divisionsalgebra über k, die $k(\alpha)$ umfaßt. Denn wäre β eine solche, so folgt mit $p := \operatorname{Irr}(\alpha; k) \in k[X]$, etwa $p = \sum_{i=0}^m a_i X^i$:

$$p(\alpha)\beta - \beta p(\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\alpha^i \beta - \beta \alpha^i\right) = \sum_{i=1}^m a_i \alpha^{i-1} = p'(\alpha),$$

denn durch Induktion nach $i = 1. \ldots, n$ zeigt man leicht, daß $\alpha^i\beta - \beta\alpha^i = i\alpha^{i-1}$. Somit in $k(\alpha)$

$$p'(\alpha) = p(\alpha)\beta - \beta p(\alpha) = 0 \cdot \beta - \beta \cdot 0 = 0,$$

im Widerspruch dazu, daß α separabel über k ist.

Wir erhalten ohne Probleme aus Satz 8.6.6 folgende Abwandlung eines Satzes von Amitsur und Procesi [**42**], [**116**]:

Satz 8.6.9. *Sei D eine Divisionsalgebra über dem Körper k, $f \in D[\mathbf{X}]$, $\mathfrak{a} \subseteq D[\mathbf{X}]$ ein endlich erzeugtes Ideal. Genau dann ist f aus dem d-Radikal von $\mathfrak{a}$, wenn jede Nullstelle von $\mathfrak{a}$ in einer algebraisch abgeschlossenen Divisionsalgebra über k, die D erweitert, auch eine Nullstelle von f ist.* □

Eine algebraische Charakterisierung der d-Radikale findet man in [**7**], S. 229 ff., welches umfangreiches weiteres Material über die Modelltheorie der Schiefkörper und Divisionsalgebren enthält.

KAPITEL 9

Ultraprodukte

In diesem abschließenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer algebraisch anmutenden Methode zur Konstruktion von Modellen, die der *Ultraprodukte* und *Ultrapotenzen,* die zum Standardwerkzeug des Modelltheoretikers gehört. Sie erlaubt es oft, „syntaktische" Überlegungen durch elegantere „semantische" Argumente zu ersetzen; insbesondere werden wir so zu einem Beweis des Kompaktheitssatzes gelangen, der nicht auf den Gödelschen Vollständigkeitssatz zurückgreift.

9.1. Filter und Ultrafilter

Wir gehen von folgendem bekannten Beispiel aus: Gegeben sei eine Familie $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ additiv geschriebener abelscher Gruppen und $G := \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ deren direktes Produkt. Der *Träger* $\operatorname{supp}(g)$ eines Elements $g = \{g(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ aus G ist die Menge $\{i \in \mathbb{N} : g(i) \neq 0\}$. Die Menge aller $g \in G$ mit endlichem Träger bildet offenbar eine Untergruppe von G, die wohlbekannte direkte Summe von $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, geschrieben als $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Oft hat die Faktorgruppe $G/\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} G_i$ eine interessante algebraische Struktur. Zwei Elemente $g + \bigoplus G_i$ und $h + \bigoplus G_i$ dieser Faktorgruppe sind gleich genau dann, wenn $\operatorname{supp}(g-h)$ endlich ist, d.h. wenn $\{i \in \mathbb{N} : g(i) = h(i)\}$ eine *koendliche Teilmenge* von $\mathbb{N}$ ist, also eine Menge, deren Komplement in $\mathbb{N}$ endlich ist. Die Menge der koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ heißt der *Fréchet-Filter* auf $\mathbb{N}$.— Die Verallgemeinerung dieser Konstruktion wird uns zu den sog. reduzierten Produkten als gewissen Faktorstrukturen direkter Produkte führen. Das „Maß der Identifizierung" wird dabei durch Filter vorgegeben.

Definition 9.1.1. Sei X eine nichtleere Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ heißt *Filter auf* X*,* falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(F1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
(F2) Wenn $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, so $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
(F3) Wenn $F_1 \in \mathcal{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq X$, so $F_2 \in \mathcal{F}$.

Maximale Filter auf X nennt man *Ultrafilter.*

Bemerkungen 9.1.2.

(i) Da $\mathcal{F} \neq \varnothing$, folgt aus (F3) sofort $X \in \mathcal{F}$.— Oft definiert man einen Filter auf einer Menge $X \neq \varnothing$ als eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von 2^X, die neben (F2), (F3) die Bedingung

(F1′) $X \in \mathcal{F}$

erfüllt. Dann ist auch 2^X ein Filter in diesem Sinn; $\mathcal{F}$ heißt *echt,* falls $\mathcal{F} \neq 2^X$. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ genau dann ein echter Filter, wenn $\mathcal{F} \neq \varnothing$ und $\mathcal{F}$ die Axiome (F1)–(F3) erfüllt. Da wir hauptsächlich an echten Filtern interessiert sind, haben wir die Def. 9.1.1 zugrundegelegt; alle unsere Filter sind also von 2^X verschieden.

(ii) Der Begriff des Filters kann als Verallgemeinerung des Konzepts einer konvergenten Folge in einem topologischen Raum angesehen werden; sagt man nämlich, ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ *konvergiert gegen einen Punkt* $a \in X$, wenn jede Umgebung von a zu $\mathcal{F}$ gehört, wenn also der *Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(a)$ *von* a, d.h. die Menge aller Umgebungen von a, ganz in $\mathcal{F}$ enthalten ist, so gilt: Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der Filter aller Teilmengen von X, in denen die Folge $\{x_n\}$ schließlich bleibt. Dann konvergiert die Folge offenbar genau dann gegen a, wenn der Filter $\mathcal{F}$ gegen a konvergiert.

(iii) Ist X eine unendliche Menge, so bilden die koendlichen Teilmengen von X einen Filter auf X; dieser heißt, wie bereits einleitend erwähnt, der *Fréchet-Filter* auf X.

Ultrafilter besitzen folgende bemerkenswerte Eigenschaft:

Proposition 9.1.3. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: Entweder A oder $X \setminus A$ gehört zu $\mathcal{F}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter, $A \subseteq X$. Es nicht zugleich $A \in \mathcal{F}$ und $X \setminus A \in \mathcal{F}$, da sonst wegen (F2) ein Widerspruch zu (F1) folgen würde; ferner muß eine der Mengen A, $X \setminus A$ alle Filtermengen treffen. O.B.d.A. treffe A alle Elemente von $\mathcal{F}$. Dann ist aber

$$\{B \subseteq X : \exists F \in \mathcal{F} : B \supseteq A \cap F\}$$

ein $\mathcal{F} \cup \{A\}$ enthaltender Filter; aus der Maximalität von $\mathcal{F}$ folgt $A \in \mathcal{F}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit der genannten Eigenschaft, und $\mathcal{E} \supset \mathcal{F}$ ein weiterer Filter, etwa $A \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$. Dann ist aber $X \setminus A \in \mathcal{F}$ und also $A, X \setminus A \in \mathcal{E}$, im Widerspruch zu Axiom (F1). $\square$

Definition 9.1.4. Sei $B \subseteq X$, $B \neq \varnothing$. Dann ist

$$\mathcal{F}(B) := \{F \subseteq X : B \subseteq F\}$$

ein Filter auf X, *der von B erzeugte Hauptfilter.* Für $\mathcal{F}(\{b\})$ mit $b \in X$ schreibt man kurz auch $\mathcal{F}(b)$. Filter, die keine Hauptfilter sind, nennt man *frei.* Ein Ultrafilter, der gleichzeitig Hauptfilter ist, heißt *Hauptultrafilter.*

Offenbar ist $\mathcal{F}(B)$ gleich dem Durchschnitt aller B enthaltenden Filter auf X, ist also der kleinste B umfassende Filter auf X.

Beispiel. Ist $\operatorname{card}(X) \geq 2$, so ist $\{X\}$ ein Filter, der kein Ultrafilter ist, ebenso $\mathcal{F}(\{a, b\})$ für $a \neq b$ aus X.

Übung. Sei $X \neq \varnothing$.

(i) Zeige: Die von Einermengen erzeugten Hauptfilter $\mathcal{F}(b)$, $b \in X$, sind gerade alle Hauptultrafilter auf X.

(ii) Sei X unendlich und $\mathcal{F}$ der Fréchet-Filter auf X. Zeige: $\mathcal{F}$ ist frei und kein Ultrafilter. Jeder freie Ultrafilter auf X enthält den Fréchet-Filter, und jeder Ultrafilter, der den Fréchet-Filter enthält, ist frei. (Verwende (i).)

Nicht jeder Filter ist also ein Ultrafilter. Aber jeder Filter ist in einem maximalen Filter enthalten; wir zeigen dies allgemeiner und definieren zunächst:

Definition 9.1.5. Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Wir sagen, $\mathcal{F}$ habe die *endliche Durchschnittseigenschaft,* falls $\mathcal{F} \neq \varnothing$ und für endlich viele $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ stets $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \varnothing$.

Bemerkung. $\mathcal{F}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft genau dann, wenn die Menge $\mathcal{F}'$ aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{F}$ die Filteraxiome (F1) und (F2) erfüllt.

Damit können wir leicht zeigen [**160**]:

Lemma 9.1.6. *Sei X eine nichtleere Menge, $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Dann gibt es einen $\mathcal{F}$ enthaltenden Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X. Falls $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$, so ist jeder Ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ frei.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}'$ die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{F}$. Man wendet das Zornsche Lemma auf die durch Inklusion induktiv geordnete nichtleere Menge aller $\mathcal{F}''$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft und $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'' \subseteq 2^X$ an und erhält eine maximale Erweiterung $\mathcal{U}$ von $\mathcal{F}$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft. $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ ist eine $\mathcal{U}$ umfassende Teilmenge von 2^X mit endlicher Durchschnittseigenschaft, also $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{U})$ ein maximaler, $\mathcal{F}$ umfassender Filter.

Sei nun $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$ und $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ Ultrafilter. Angenommen, $\mathcal{U}$ ist nicht frei; nach Übung (i) existiert ein $b \in X$ mit $\mathcal{U} = \mathcal{F}(b)$, also $b \in \bigcap \mathcal{F} = \varnothing$, Widerspruch. $\square$

Obiges Lemma ist auch unter dem Namen *Boolesches Primidealtheorem* bekannt; vgl. §9.5 und [**8**], §6.2. Man vergleiche auch die folgende Aussage mit der definierenden Eigenschaft von Primidealen in der Ringtheorie:

Lemma 9.1.7. *Sei $\mathcal{F}$ Filter auf X. $\mathcal{F}$ ist Ultrafilter genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Teilmengen $M_1, \dots, M_n$ von X gilt: Es ist $M_1 \cup \cdots \cup M_n \in \mathcal{F}$ d.u.n.d., wenn $M_j \in \mathcal{F}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter. Ist etwa $M_j \in \mathcal{F}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so auch $\bigcup_{i=1}^n M_i \in \mathcal{F}$ wegen Axiom (F3) der Filter. Angenommen nun, kein M_j liegt in $\mathcal{F}$; also ist $X \setminus M_j \in \mathcal{F}$ und somit $\bigcap_{j=1}^n X \setminus M_j \in \mathcal{F}$. Das heißt aber, daß $\bigcup_{j=1}^n M_j \notin \mathcal{F}$ sein muß.

Sei umgekehrt die angegebene Bedingung für den Filter $\mathcal{F}$ erfüllt. Angenommen, es existiert ein Filter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset 2^X$, etwa mit $F \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Also $X = F \cup (X \setminus F) \in \mathcal{F}$, wegen $F \notin \mathcal{F}$ also $X \setminus F \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, im Widerspruch zu (F1). $\square$

Übung. Zeige den folgenden berühmten Satz von Tychonoff: Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer kompakter topologischer Räume (mit *beliebiger* Indexmenge $I \neq \varnothing$), so ist auch der Produktraum $X := \prod_{i \in I} X_i$ kompakt. Anleitung: Zeige zunächst, daß jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S} := \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \subseteq X_i \text{ offen}\}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. (Dabei sei $\pi_i \colon X \to X_i$ die i-te Projektion.) Beweise dann indirekt unter Ausnutzung dieser Eigenschaft, daß jeder Ultrafilter auf X konvergiert (im Sinne von Bem. 9.1.2, (ii)). Angenommen nun, es gäbe eine offene Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung. Betrachte einen Ultrafilter, welcher $\{X \setminus \bigcup_{j \in J'} U_j : J' \subseteq J \text{ endlich}\}$ umfaßt, und führe einen Widerspruch herbei.

9.2. Reduzierte Produkte, Ultraprodukte, Ultrapotenzen

Sei im folgenden wieder L eine Sprache der ersten Stufe. Gegeben sei ein direktes Produkt $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ von L-Strukturen $\mathfrak{A}_i$ über einer nichtleeren Indexmenge I. (Das Auswahlaxiom garantiert uns $A \neq \varnothing$.) Für die i-ten Komponenten (für $i \in I$) von $\mathbf{a} \in A^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ schreiben wir kurz $\mathbf{a}(i) := (a_1(i), \dots, a_n(i))$. Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine L-Formel, $\mathbf{a} \in A^n$, so heißt

$$\|\varphi(\mathbf{a})\| := \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi(\mathbf{a}(i))\}$$

die *Boolesche Ausdehnung* von $\varphi(\mathbf{a})$. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf I, so definiert man eine Relation $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ auf A vermöge

$$a_1 \underset{\mathcal{F}}{\sim} a_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \|a_1 = a_2\| \in \mathcal{F}.$$

Wir sammeln Eigenschaften von $\|\cdot\|$ und $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$:

Proposition 9.2.1. *Seien $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\psi(x_1, \dots, x_n)$ L-Formeln und $\mathbf{a} \in A^n$.*

(i) $\|\varphi(\mathbf{a}) \wedge \psi(\mathbf{a})\| = \|\varphi(\mathbf{a})\| \cap \|\psi(\mathbf{a})\|$,
(ii) $\|\varphi(\mathbf{a}) \vee \psi(\mathbf{a})\| = \|\varphi(\mathbf{a})\| \cup \|\psi(\mathbf{a})\|$,
(iii) $\|\neg\varphi(\mathbf{a})\| = I \setminus \|\varphi(\mathbf{a})\|$
(iv) *Ist $\varphi = \exists x(\varrho)$ mit $\varrho(x, x_1, \dots, x_n)$, so gilt für alle $b \in A$*

$$\|\varrho(b, \mathbf{a})\| \subseteq \|\exists x(\varrho(x, \mathbf{a}))\|,$$

und es gibt stets ein $b \in A$ mit

$$\|\varrho(b, \mathbf{a})\| = \|\exists x(\varrho(x, \mathbf{a}))\|.$$

(v) *Die Relation $\sim_{\mathcal{F}}$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.*

Beweis. (i)–(iii) und der erste Teil von (iv) sind klar *per definitionem.* Für den zweiten Teil von (iv) wähle $b \in A$ wie folgt: Für $i \in \|\varphi(\mathbf{a})\| = \|\exists x(\varrho(x, \mathbf{a}))\|$ wähle $c_i \in A_i$ mit $\mathfrak{A}_i \models \varrho(c_i, \mathbf{a}(i))$ und setze $b(i) := c_i$; für $i \in I \setminus \|\varphi(\mathbf{a})\|$ sei $b(i)$ beliebig aus A_i. Nach Konstruktion von b ist $\|\varrho(b, \mathbf{a})\| \supseteq \|\exists x(\varrho(x, \mathbf{a}))\|$.

Zu (v): $I \in \mathcal{F}$ impliziert $a \sim_{\mathcal{F}} a$ für alle $a \in A$; die Symmetrie von $\sim_{\mathcal{F}}$ ist klar. Sind $a_1, a_2, a_3 \in A$ mit $a_1 \sim_{\mathcal{F}} a_2$, $a_2 \sim_{\mathcal{F}} a_3$, so $\|a_1 = a_2\|, \|a_2 = a_3\| \in \mathcal{F}$, also mit (i)

$$\|a_1 = a_3\| \supseteq \|a_1 = a_2 \wedge a_2 = a_3\| = \|a_1 = a_2\| \cap \|a_2 = a_3\| \in \mathcal{F},$$

also $\|a_1 = a_3\| \in \mathcal{F}$, d.h. $a_1 \sim_{\mathcal{F}} a_3$. Sei f ein n-stelliges Operationssymbol aus L, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$ mit $a_i \sim_{\mathcal{F}} a'_i$ für $i = 1, \dots, n$; es folgt

$$\|f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(a'_1, \dots, a'_n)\| \supseteq \|\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = a'_i\| = \bigcap_{i=1}^{n} \|a_i = a'_i\|,$$

und letztere Menge ist aus $\mathcal{F}$, also folgt $f^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}) \sim_{\mathcal{F}} f^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}')$. □

Sei nun $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}/{\sim_{\mathcal{F}}}$ die Quotientenstruktur von $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ bzgl. $\sim_{\mathcal{F}}$. Es bezeichne $a/\mathcal{F}$ die Äquivalenzklasse von $a \in A$ in A'; mit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ schreiben wir kurz $\mathbf{a}/\mathcal{F}$ für $(a_1/\mathcal{F}, \dots, a_n/\mathcal{F})$. Sei $\mathfrak{A}''$ die L-Struktur, die man aus $\mathfrak{A}'$ erhält, indem man die Interpretation der Relationssymbole in L wie folgt abändert: Für ein n-stelliges Relationssymbol R und $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ sei

$$(\mathbf{a}/\mathcal{F}) \in R^{\mathfrak{A}''} \quad :\Leftrightarrow \quad \|R(\mathbf{a})\| \in \mathcal{F}.$$

Ähnlich wie mit den Argumenten im Beweis zu (vi) der obigen Proposition weist man nach, daß $R^{\mathfrak{A}''}$ dadurch wohldefiniert ist. Vergleicht man die Definitionen von $R^{\mathfrak{A}'}$ und $R^{\mathfrak{A}''}$, so sieht man leicht, daß $R^{\mathfrak{A}'} \subseteq R^{\mathfrak{A}''}$, so daß $\mathrm{id}_{A'}$ einen Monomorphismus $\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}''$ darstellt und damit $\mathrm{id}_{A'} \circ \pi$ einen Epimorphismus $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}''$ von $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{A}''$, wobei $\pi \colon \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/{\sim_{\mathcal{F}}}$ der kanonische Epimorphismus sei.

Definition 9.2.2. (nach Łoś, [**95**]) Die eben konstruierte Struktur $\mathfrak{A}''$ nennt man das *reduzierte Produkt* der Familie $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ bzgl. $\mathcal{F}$; sie wird mit $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ benannt, ihr Universum mit $\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{F}$. Insbesondere im Fall $\mathfrak{A}_i := \mathfrak{B}$ für alle $i \in I$ (mit einer L-Struktur $\mathfrak{B}$) spricht man von $\mathfrak{B}^I/\mathcal{F}$ als der *reduzierten Potenz* von $\mathfrak{B}$ bzgl. des Filters $\mathcal{F}$ auf I. Reduzierte Produkte bzgl. Ultrafiltern heißen *Ultraprodukte,* reduzierte Potenzen bzgl. Ultrafiltern heißen *Ultrapotenzen.*

Beispiel. Die Faktorgruppe

$$\prod_{i \in I} G_i / \bigoplus_{i \in I} G_i$$

einer unendlichen Familie $\{G_i\}_{i \in I}$ abelscher Gruppen ist das reduzierte Produkt der G_i bzgl. des Fréchet-Filters.

Übung. Sei $I \neq \varnothing$, $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von L-Strukturen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf I. Dann ist $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/{\sim_{\mathcal{F}}}$, wenn für jedes Relationssymbol R in L entweder $R^{\mathfrak{A}_i} = \varnothing$ für alle $i \in I$ oder $R^{\mathfrak{A}_i} \neq \varnothing$ für alle $i \in I$. (Insbesondere ist für eine L-Struktur $\mathfrak{B}$ stets $\mathfrak{B}^I/\mathcal{F} = \mathfrak{B}^I/{\sim_{\mathcal{F}}}$.) Zeige anhand von $I = \mathbb{N}$, $L = \{R\}$ mit dem nullstelligen Relationssymbol R, daß die Umkehrung dieser Aussage i.a. falsch ist.

Übung. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $I \neq \varnothing$, $\mathcal{F}$ ein Filter auf I. Zeige mittels $a \mapsto [a]/\mathcal{F}$, wobei $[a](i) := a$ für alle $i \in I$:

Lemma 9.2.3. *Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge $I \neq \varnothing$, so kann jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ kanonisch in ihre reduzierte Potenz $\mathfrak{A}^I/\mathcal{F}$ bzgl. $\mathcal{F}$ eingebettet werden.* □

Übung. Sei $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ Ultraprodukt einer Familie $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ von L-Strukturen bzgl. eines Hauptultrafilters $\mathcal{U}$ auf I. Zeige: Es existiert ein $j \in I$ mit $\mathfrak{A}_j \cong \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$.

Lemma 9.2.4. *Sei I eine nichtleere Menge, $\mathcal{F}$ ein Filter auf I, $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von L-Strukturen, und $\mathfrak{A} := \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Für eine atomare Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ in L mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ gilt*

$$\mathfrak{A}/\mathcal{F} \models \varphi(\mathbf{a}/\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi(\mathbf{a})\| \in \mathcal{F}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}/{\sim_{\mathcal{F}}}$, $\mathfrak{A}'' := \mathfrak{A}/\mathcal{F}$. Seien $t_1(x_1, \ldots, x_m)$, $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ Terme in L, $a_i, a'_j \in A$. Dann hat man folgende Kette von Äquivalenzen (dabei sei

$\pi\colon \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/{\sim_{\mathcal{F}}}$ die kanonische Abbildung):

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A}'' \models (t_1(a_1/\mathcal{F}, \ldots, a_m/\mathcal{F}) = t_2(a_1'/\mathcal{F}, \ldots, a_n'/\mathcal{F})) \Leftrightarrow \\
t_1^{\mathfrak{A}'}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m)) = t_2^{\mathfrak{A}'}(\pi(a_1'), \ldots, \pi(a_n')) \Leftrightarrow \\
\pi(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = \pi(t_2^{\mathfrak{A}}(a_1', \ldots, a_n')) \Leftrightarrow \\
\|t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) = t_2^{\mathfrak{A}}(a_1', \ldots, a_n')\| \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
\big\{i \in I : t_1^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_m(i)) = t_2^{\mathfrak{A}_i}(a_1'(i), \ldots, a_n'(i))\big\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
\big\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (t_1(a_1(i), \ldots, a_m(i)) = t_2(a_1'(i), \ldots, a_n'(i)))\big\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \\
\|t_1(a_1, \ldots, a_m) = t_2(a_1', \ldots, a_n')\| \in \mathcal{F}
\end{gathered}$$

Für eine atomare Formel der Gestalt $R(t_1(\mathbf{x}_1), \ldots, t_n(\mathbf{x}_n))$ mit irgendwelchen $\mathbf{x}_1 = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}), \ldots, \mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n})$ ist der Beweis ähnlich. $\square$

Wir kommen nun zum Hauptsatz über Ultraprodukte.

Satz 9.2.5. (Łoś, [**95**]) *Sei $I \neq \varnothing$, $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von L-Strukturen, $\mathfrak{A} := \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ deren direktes Produkt und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I. Dann gilt*

$$\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \varphi(\mathbf{a}/\mathcal{U}) \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi(\mathbf{a})\| \in \mathcal{U}$$

für jede erweiterte L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und alle $\mathbf{a} \in A^n$.

Beweis. Durch Induktion über den Aufbau von φ. (Wobei man keine Allquantoren zu betrachten braucht.) Für atomare φ folgt die Behauptung aus dem vorhergehenden Lemma. Seien also $\psi, \psi_1, \psi_2, \varrho$ L-Formeln, für die der Satz bereits bewiesen ist. Sei $\mathbf{a} \in A^n$.

(i) Sei $\varphi = \neg\psi$. Es gilt $\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \neg\psi(\mathbf{a}/\mathcal{U})$ d.u.n.d. wenn $\mathfrak{A}/\mathcal{U} \not\models \psi(\mathbf{a}/\mathcal{U})$, d.h. wenn $\|\psi(\mathbf{a})\| \notin \mathcal{U}$, also genau dann, wenn $I \setminus \|\psi(\mathbf{a})\| \in \mathcal{U}$ nach Prop. 9.1.3. Aber $I \setminus \|\psi(\mathbf{a})\| = \|\neg\psi(\mathbf{a})\|$.

(ii) Sei $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Es gilt ja

$$\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \psi_1(\mathbf{a}/\mathcal{U}) \wedge \psi_2(\mathbf{a}/\mathcal{U}) \text{ gdw. } \mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \psi_1(\mathbf{a}/\mathcal{U}) \text{ und } \mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \psi_2(\mathbf{a}/\mathcal{U});$$

damit folgt die eine Richtung der Behauptung aus Prop. 9.2.1 (i) und (F2), die andere aus (F3).

(iii) Sei $\varphi = \exists x(\varrho)$. Man hat

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \exists x(\varrho(x, \mathbf{a}/\mathcal{U})) \Leftrightarrow \\
\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \varrho(\tilde{b}, \mathbf{a}/\mathcal{U}) \text{ für ein } \tilde{b} \in A/\mathcal{U} \Leftrightarrow \\
\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \varrho(b/\mathcal{U}, \mathbf{a}/\mathcal{U}) \text{ für ein } b \in A \Leftrightarrow \\
\|\varrho(b, \mathbf{a})\| \in \mathcal{U} \text{ für ein } b \in A.
\end{gathered}$$

Nach Prop. 9.2.1 (v) ist dies aber gleichbedeutend mit $\|\exists x(\varrho(x, \mathbf{a}))\| \in \mathcal{U}$. Dies vervollständigt den Induktionsschritt. $\square$

Korollar 9.2.6. *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ ein Ultraprodukt einer Familie $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ von L-Strukturen und φ ein Satz in L. Dann gilt $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi$ d.u.n.d., wenn $\|\varphi\| \in \mathcal{U}$. Sind also alle $\mathfrak{A}_i$ Modelle einer Satzmenge Σ, so auch $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$.* $\square$

Korollar 9.2.7. *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ Ultrapotenz einer L-Struktur $\mathfrak{A}$. Dann ist die kanonische Einbettung $j\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$, $a \mapsto [a]/\mathcal{U}$ (vgl. Lemma 9.2.3) eine elementare Einbettung.*

Beweis. Nach Lemma 9.2.3 ist j eine Einbettung. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel in L mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, so daß $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Dann $\|\varphi([a_1], \ldots, [a_n])\| = I \in \mathcal{U}$, und somit mit dem Satz von Łoś $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n))$. □

Korollar 9.2.8. *Sei $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ eine elementare Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge I. Dann existiert eine elementare Einbettung $\tilde{h}\colon \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \hookrightarrow \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{h} & \mathfrak{B} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} & \xrightarrow{\exists \tilde{h}} & \mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \end{array}$$

kommutativ wird. (Man schreibt $h/\mathcal{U}$ für $\tilde{h}$.)

Beweis. Setze $\tilde{h}\big((a_i)_{i\in I}/\mathcal{U}\big) := \big(h(a_i)\big)_{i\in I}/\mathcal{U}$ für $a \in A^I$. □

Das letzte Korollar zum Satz von Łoś würde uns nun direkt zur Deutung von Ultraprodukten als Funktoren führen; der interessierte Leser kann sich darüber in dem entsprechenden Artikel [**74**] in [**19**] näher informieren.

9.3. Beweis des Kompaktheitssatzes. Eigenschaften von Ultraprodukten

Wir können nun *den* zentralen Satz der Modelltheorie rein „algebraisch“ ohne Zuhilfenahme des für die Modelltheorie irrelevanten Kalkülbegriffs leicht beweisen (nach Scott, [**77**]):

Kompaktheitssatz. *Eine Menge Σ von L-Sätzen besitzt genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell besitzt.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $\Sigma \neq \varnothing$. Mit Σ besitzt auch jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell; diese Richtung ist also trivial. Sei also nun I die Menge aller nichtleeren endlichen Teilmengen von Σ und zu jedem $\Phi \in I$ sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine L-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Sei $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der $\mathfrak{A}_\Phi$, $\Phi \in I$. Setze für jedes $\Phi \in I$

$$\Phi^* := \{\Psi \in I : \Phi \subseteq \Psi\} \quad \text{und} \quad I^* := \{\Phi^* : \Phi \in I\}.$$

Offenbar ist I^* gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen, da $\Phi_0^* \cap \Phi_1^* = (\Phi_0 \cup \Phi_1)^*$ für $\Phi_0, \Phi_1 \in I$, weshalb sie nach Lemma 9.1.6 in einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I enthalten ist. Wir zeigen $\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \Sigma$. Sei dazu $\varphi \in \Sigma$. Dann ist $\{\varphi\} \in I$ und

$$\{\varphi\}^* = \{\Psi \in I : \varphi \in \Psi\} \subseteq \{\Psi \in I : \mathfrak{A}_\Psi \models \varphi\} = \|\varphi\|.$$

Nach Konstruktion von $\mathcal{U}$ ist $\{\varphi\}^* \in \mathcal{U}$, also auch $\|\varphi\| \in \mathcal{U}$, so daß mit dem Satz von Łoś $\mathfrak{A}/\mathcal{U} \models \varphi$ folgt. □

Elementare Klassen sind nach Kor. 9.2.6 unter Ultraproduktbildung abgeschlossen. Dies ermöglicht es des öfteren, nachzuweisen, daß eine bestimmte Klasse nicht elementar ist:

Beispiel. Sei $L = \{0, +\}$ die Sprache der additiv geschriebenen abelschen Gruppen. Die Klasse der abelschen Torsionsgruppen ist nicht elementar.

Beweis. Sei $I := \mathbb{N}$ und wähle $\mathcal{U}$ als einen freier Ultrafilter auf I, etwa durch Erweiterung des Fréchet-Filters auf I zu einem Ultrafilter gemäß Lemma 9.1.6, und definiere $G_n := \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, $G := \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n/\mathcal{U}$. Sei $g \in \prod G_n$ definiert durch $g(n) := 1 \in G_n$. Jedes $g(n)$ hat Ordnung $n+1$ in G_n. Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei φ_m definiert durch

$$\varphi_m(x) := (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{m\,+\,1\text{-mal}} = 0).$$

Nach dem Satz von Łoś gilt $G \not\models \varphi_m(g/\mathcal{U})$, da

$$\|\varphi_m(g)\| = \{n \in I : G_n \models \varphi_m(g(n))\}$$

endlich und also nach Übung (ii) im Anschluß an Def. 9.1.4 nicht in $\mathcal{U}$ enthalten ist. Also ist $g/\mathcal{U}$ ein Element von unendlicher Ordnung in der abelschen Gruppe G. □

Allgemein folgt:

Satz 9.3.1. *Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige Klasse von L-Strukturen. Dann gilt: $\mathcal{K}$ ist elementar genau dann, wenn $\mathcal{K}$ abgeschlossen unter Ultraprodukten und elementarer Äquivalenz ist.*

Beweis. Daß die Elementarität von $\mathcal{K}$ Abgeschlossenheit unter Ultraprodukten und elementarer Äquivalenz zur Folge hat, folgt aus Kor. 9.2.6 und der Definition einer elementaren Klasse. Sei also umgekehrt $\mathcal{K}$ eine unter Ultraprodukten und elementarer Äquivalenz abgeschlossene Strukturklasse. Sei o.B.d.A. $\mathcal{K} \neq \varnothing$ und $\Sigma := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ist Modell von Σ. Sei $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, I die Menge aller nichtleeren endlichen Teilmengen von $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) =: \Phi$. Für jedes $\Psi \in I$ existiert ein Modell $\mathfrak{A}_\Psi \in \mathcal{K}$, da sonst, falls etwa $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, der Satz $\neg(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i)$ zu Σ gehören und in $\mathfrak{B}$ richtig sein müßte. Wähle für jedes $\Psi \in I$ ein solches Modell $\mathfrak{A}_\Psi \in \mathcal{K}$. Dem Beweis des Kompaktheitssatzes entnimmt man, daß ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $\prod_{\Psi\in I} \mathfrak{A}_\Psi/\mathcal{U} \models \Phi$ existiert. Da $\mathcal{K}$ unter Ultraprodukten abgeschlossen ist, ist $\prod \mathfrak{A}_\psi/\mathcal{U} \in \mathcal{K}$. Aber alle Modelle von Φ sind elementar äquivalent zu $\mathfrak{B}$, so daß $\prod \mathfrak{A}_\psi/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{B}$, also $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Damit $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathcal{K}$. □

Bemerkung 9.3.2. Ein Beispiel einer nichtelementaren Klasse, die unter Ultraprodukten abgeschlossen ist, ist die in Satz 7.10.23 als nichtaxiomatisierbar nachgewiesene Klasse aller Gruppen, die multiplikative Gruppen von Körpern sind (Übung!). Aus Satz 9.3.1 folgt dann, daß es Gruppen G, H gibt, so daß $G \equiv H$ (bzgl. der Sprache $\{1, \cdot, {}^{-1}\}$ der Gruppen), aber G als multiplikative Gruppe eines Körpers auftritt, H jedoch nicht.

Korollar 9.3.3. *Genau dann ist eine Klasse von L-Strukturen $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar, wenn sowohl $\mathcal{K}$ als auch $\complement\mathcal{K} := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$ unter Ultraproduktbildung und elementarer Äquivalenz abgeschlossen sind.*

Beweis. O.B.d.A. $\mathcal{K}, \complement\mathcal{K} \neq \varnothing$. Ist $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar, o.B.d.A. $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$ mit einem L-Satz φ, so ist $\complement\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$, und sowohl $\mathcal{K}$ als auch $\complement\mathcal{K}$ sind unter elementarer Äquivalenz und Ultraprodukten abgeschlossen. Umgekehrt:

Erfüllen $\mathcal{K}$, $\complement\mathcal{K}$ die beiden Abgeschlossenheitseigenschaften, so existiert eine Satzmenge Σ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, nach Satz 9.3.1. Angenommen, $\mathcal{K}$ ist nicht endlich axiomatisierbar. Sei I die Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von Σ. Für jedes $\Psi \in I$ existiert ein Modell $\mathfrak{A}_\Psi \in \complement\mathcal{K}$, nach Annahme. Wie im Beweis des Kompaktheitssatzes sieht man wieder, daß ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $\mathfrak{A} := \prod_{\Psi\in I} \mathfrak{A}_\Psi/\mathcal{U} \models \Sigma$ existiert. Also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$; aber nach Voraussetzung auch $\mathfrak{A} \in \complement\mathcal{K}$ wegen $\mathfrak{A}_\Psi \in \complement\mathcal{K}$, Widerspruch. □

Bemerkung 9.3.4. Kor. 9.3.3 kann man des öfteren verwenden, um die Unmöglichkeit einer endlichen Axiomatisierung gewisser Strukturklassen zu beweisen, z.B.:

Proposition 9.3.5. *Die Klasse der reell abgeschlossenen Körper bzgl. der Sprache* $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ *ist nicht endlich axiomatisierbar.*

Beweis. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir zeigen zunächst: Es existiert ein Körper $K_n \subseteq \mathbb{R}$, so daß gilt:

(i) K_n ist formal reell.
(ii) Für alle $\alpha \in K_n$ ist $\sqrt{\alpha} \in K_n$ oder $\sqrt{-\alpha} \in K_n$.
(iii) Alle Polynome $f \in K_n[X]$ ungeraden Grades $\leq n$ haben eine Nullstelle in K_n.
(iv) K_n ist nicht reell abgeschlossen.

Dazu definieren wir eine aufsteigende Folge $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots$ von Körpern wie folgt: Es sei $F_0 := \mathbb{Q}$, und F_{k+1} entstehe aus F_k durch Adjunktion aller Quadratwurzeln (bzgl. $\mathbb{R}$) positiver Zahlen aus F_k sowie aller reell algebraischen Zahlen ungeraden Grades $\leq n$ über F_k. Setze $K_n := \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} F_k$. $K_n \subseteq \mathbb{R}$ erfüllt offensichtlich (i)–(iii). Wir beweisen: Für alle $r \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K_n$ ist $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) : \mathbb{Q}]$ nicht durch Primzahlen $p > n$ teilbar. Wir führen dazu Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$ und beweisen die Behauptung für alle $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in F_k$. Ist $k = 0$, also $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, so ist alles klar. Ansonsten seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in F_{k-1}$, $[F_{k-1}(\gamma_j) : F_{k-1}] \leq n$ für $j = 1, \ldots, s$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Q}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gewählt. Dann teilt $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) : \mathbb{Q}]$ die Zahl

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_s) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) : \mathbb{Q}]$$

wegen

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_s) \supseteq \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \supseteq \mathbb{Q}$$

und der Gradformel für endliche Körpererweiterungen. Wir können also von vornherein $[F_{k-1}(\alpha_i) : F_{k-1}] \leq n$ annehmen, für alle $i = 1, \ldots, r$. Seien nun $\beta_1, \ldots, \beta_t \in F_{k-1}$ mit $\mathrm{Irr}(\alpha_i; F_{k-1}) \in \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_t)[X]$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dann ist

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i+1}, \beta_1, \ldots, \beta_t) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_1, \ldots, \beta_t)] \leq n$$

für alle $i = 0, \ldots, r-1$, ferner $[\mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_t) : \mathbb{Q}]$ nach Induktionsvoraussetzung nicht durch Primzahlen $p > n$ teilbar, mithin also $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t) : \mathbb{Q}] =: m$ ein Produkt von Zahlen $\leq n$. Nun ist aber m teilbar durch $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) : \mathbb{Q}]$ wegen

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t) \supseteq \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \supseteq \mathbb{Q},$$

und die Behauptung folgt.— Im Fall $r = 1$ bedeutet dies: $X^p - 2$, wobei $p > n$ eine Primzahl sei, kann keine Nullstelle in K_n besitzen, und K_n erfüllt deshalb auch (iv). Sei nun $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}^{\geq 2}$ und $K := \prod_{n\geq 2} K_n/\mathcal{U}$. Mit dem Satz von Łoś und wegen (i) ist auch K formal reell, und wegen (ii), (iii) reell abgeschlossen.

Wir sehen, daß $\mathbb{C}\mathcal{RAK}$ nicht unter Ultraprodukten abgeschlossen ist, $\mathcal{RAK}$ also nicht endlich axiomatisiert werden kann. $\square$

Ähnlich kann man im Fall der algebraisch abgeschlossenen Körper argumentieren (vgl. [**9**], Ex. 2.16).

Wir wissen, daß L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mit isomorphen Ultrapotenzen $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ elementar äquivalent sind. (Kor. 9.2.7.) Wir kommen nicht umhin, den Leser auf folgenden tiefliegenden Satz von Keisler-Shelah aufmerksam zu machen, der zeigt, daß auch die Umkehrung dieser Aussage gilt:

Satz 9.3.6. (Keisler-Shelah'scher Ultrapotenzsatz, [**148**]) *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
(ii) *Es gibt I, J und Ultrafilter $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ auf I bzw. J, so daß $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^J/\mathcal{V}$.*
(iii) *Es gibt eine Menge I und einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$.* $\square$

(Vgl. auch Lemma 9.5.22.) Wir müssen auf einen Beweis dieses schönen Ergebnisses leider verzichten; es sei nur angemerkt, daß uns (iii) $\Rightarrow$ (ii) klar und (ii) $\Rightarrow$ (i) bekannt ist. Ein Beweis für (i) $\Rightarrow$ (iii) findet sich z.B. in [**2**], [**148**]. Der Satz von Keisler-Shelah zeigt also, daß elementare Äquivalenz „in Wirklichkeit" keine syntaktische Eigenschaft ist, sondern vollkommen „algebraisch" durch Isomorphie von Ultrapotenzen charakterisiert werden kann; für eine weitere algebraische Charakterisierung elementarer Äquivalenz mittels sog. Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele s. [**20**].

In der nachfolgenden Übung untersuchen wir u.a. nochmals das Eingangsbeispiel der Faktorgruppenbildung.

Übung. Sei $\{K_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Körpern, $I \neq \varnothing$. Bilde den Ring $R := \prod_{i\in I} K_i$. Ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, so betrachte

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} := \{r \in R : \|r = 0\| \in \mathcal{U}\}.$$

Beweise:

(i) $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ ist ein maximales Ideal in R.
(ii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ in R existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ über I mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$.
(iii) Es ist $R/\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} \cong \prod_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$.

Also sind Ultraprodukte von Körpern genau dasselbe wie Restklassenringe direkter Produkte von Körpern nach maximalen Idealen. Zeige analog für Gruppen: Ist $\{G_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, so ist $\prod_{i\in I} G_i/\mathcal{U}$ isomorph zu einer Faktorgruppe des direkten Produkts der G_i. Die Umkehrung gilt in diesem Fall jedoch nicht: Zeige, daß ein direktes Produkt unendlich vieler Gruppen und eine Faktorgruppe desselben existiert, die kein reduziertes Produkt dieser Gruppen ist.

Wir beschäftigen uns nun mit der Erzeugung von Ultrapotenzen vorgeschriebener Kardinalität: Ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, so ist trivialerweise $\mathrm{card}\left(A^I/\mathcal{U}\right) \leq \mathrm{card}(A)^{\mathrm{card}(I)}$; unter welchen Voraussetzungen an $\mathfrak{A}$, I und $\mathcal{U}$ gilt hier Gleichheit?

Definition 9.3.7. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, κ eine Kardinalzahl.

(i) $\mathcal{U}$ heißt *uniform,* wenn für alle $M \in \mathcal{U}$ gilt: $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(I)$.
(ii) $\mathcal{U}$ heißt *unvollständig,* wenn es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ gibt mit $\bigcap \mathcal{V} \notin \mathcal{U}$.

(iii) $\mathcal{U}$ heißt *κ-regulär,* wenn es eine Teilmenge $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ der Mächtigkeit κ gibt, so daß jede abzählbare Folge $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von paarweise verschiedenen Mengen aus $\mathcal{V}$ leeren Durchschnitt besitzt, d.h. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} M_n = \varnothing$. (Das bedeutet, daß jedes $i \in I$ nur in endlich vielen Mengen von $\mathcal{V}$ liegt.)

(iv) $\mathcal{U}$ heißt *regulär* schlechthin, wenn $\mathcal{U}$ κ'-regulär für eine Kardinalzahl κ' ist. (Es ist dann $\kappa' \leq \operatorname{card}(\mathcal{U})$.)

Bemerkung 9.3.8. Ein Ultrafilter ist $\aleph_0$-regulär d.u.n.d., wenn er unvollständig ist.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I. Aus der $\aleph_0$-Regularität von $\mathcal{U}$ folgt natürlich die Unvollständigkeit. Umgekehrt sei $\mathcal{U}$ unvollständig und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ abzählbar mit $\bigcap \mathcal{V} \notin \mathcal{U}$ gewählt. Sei $I_0 := I \setminus \bigcap \mathcal{V}$; es ist $I_0 = \complement \bigcap \mathcal{V} \in \mathcal{U}$ nach der Ultrafiltereigenschaft. Sei $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{V}$. Sei $M_n := \bigcap_{m=0}^{n} I_m$ für $n \in \mathbb{N}_0$, sowie $\mathcal{W} := \{M_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$, und für jede unendliche Teilmenge $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ ist $\bigcap \mathcal{W}' = \varnothing$. $\square$

Für Ultrafilter auf abzählbaren Mengen gilt nun:

Proposition 9.3.9. *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf der abzählbaren Menge I. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{U}$ ist unvollständig.*
(ii) *$\mathcal{U}$ ist $\aleph_0$-regulär.*
(iii) *$\mathcal{U}$ ist uniform.*
(iv) *$\mathcal{U}$ ist frei.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) wurde eben in Bem. 9.3.8 bewiesen. Jeder uniforme Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf abzählbarem I umfaßt den Fréchet-Filter auf I und ist daher $\aleph_0$-regulär; dies zeigt (iii) $\Rightarrow$ (ii). Da Hauptultrafilter stets von einer einelementigen Menge erzeugt werden (vgl. Übung nach Def. 9.1.4), muß jeder uniforme Ultrafilter über einer unendlichen Menge frei sein; es gilt also (iii) $\Rightarrow$ (iv). Ist $\mathcal{U}$ frei, so kann keine endliche Menge in $\mathcal{U}$ liegen, denn wäre etwa $M \in \mathcal{U}$ endlich, wobei $|M|$ minimal mit dieser Eigenschaft gewählt wurde, und $N \in \mathcal{U}$ mit $M \not\subseteq N$, so wäre $M \cap N \in \mathcal{U}$ mit $|M \cap N| < |M|$, ein Widerspruch; also würde im Widerspruch zur Annahme $\mathcal{U} = \mathcal{F}(M)$ folgen, und da I nach Voraussetzung abzählbar ist, haben wir (iv) $\Rightarrow$ (iii). Trivialerweise gilt auch (i) $\Rightarrow$ (iv). $\square$

Für Mengen I höherer Mächtigkeit ist die Äquivalenz dieser Aussagen i.a. falsch (vgl. [**2**]).— Die Existenz κ-regulärer Ultrafilter sichert:

Lemma 9.3.10. *Zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ gibt es eine Menge I der Mächtigkeit κ und einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, der κ-regulär ist.*

Beweis. Sei I die Menge aller endlichen Teilmengen von κ und für $\alpha \in \kappa$

$$\langle\alpha\rangle := \big\{M \in I : \alpha \in M\big\}.$$

Die Menge $\mathcal{V} := \{\langle\alpha\rangle : \alpha \in \kappa\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, denn es gilt $\gamma \in \kappa$ gdw. $\gamma \subseteq \kappa$, da κ insbesondere eine Ordinalzahl ist; sei $\mathcal{U}$ nach Lemma 9.1.6 ein Ultrafilter auf I, der diese umfaßt. Es ist $\operatorname{card}(\mathcal{V}) = \kappa$, und ist $i \in I$, so gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \kappa$, $n \in \mathbb{N}$ mit $i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Also liegt i nur in den Mengen $\langle\alpha_1\rangle, \dots, \langle\alpha_n\rangle$ aus $\mathcal{V}$. $\mathcal{U}$ ist somit κ-regulär. $\square$

Unsere anfangs gestellte Frage nach der Erzeugung von Ultrapotenzen mit vorgeschriebener Mächtigkeit beantwortet der folgende Satz. Wir erhalten eine hinreichende Bedingung für $\operatorname{card}\left(A^I/\mathcal{U}\right) = \operatorname{card}(A)^{\operatorname{card}(I)}$:

Satz 9.3.11. *Sei $\mathcal{U}$ ein κ-regulärer Ultrafilter auf einer Menge I mit* $\operatorname{card}(I) = \kappa$, *wobei κ eine Kardinalzahl sei. Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche L-Struktur, so ist*

$$\operatorname{card}\left(A^I/\mathcal{U}\right) = \operatorname{card}(A)^\kappa.$$

Beweis. Es bleibt nur noch $\operatorname{card}(A)^\kappa \leq \operatorname{card}\left(A^I/\mathcal{U}\right)$ zu zeigen. Sei gemäß Voraussetzung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ so, daß $\operatorname{card}(\mathcal{V}) = \kappa$ ist, und jedes $i \in I$ lediglich in endlich vielen $M \in \mathcal{V}$ vorkommt. Offenbar reicht es zu zeigen, daß eine injektive Abbildung ι von $A^\mathcal{V}$ in $(A^+)^I/\mathcal{U}$ existiert, wobei $A^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ ist. ($(A^+)^I/\mathcal{U}$ ist als das Universum einer Ultrapotenz bzgl. der Sprache $\varnothing$ zu verstehen.) Nach dem Wohlordnungssatz existiert eine Totalordnung $\leq$ auf $\mathcal{V}$. Für jedes $i \in I$ sei $(M_1^i, \ldots, M_{n_i}^i)$ mit $M_1^i < \cdots < M_{n_i}^i$ die endliche Folge derjenigen $M \in \mathcal{V}$, die i enthalten ($n_i \in \mathbb{N}$). Wir definieren $\iota(a)$ für $a \in A^\mathcal{V}$ wie folgt: Sei $a' \in (A^+)^I$ mit

$$a'(i) := \left(a(M_1^i), \ldots, a(M_{n_i}^i)\right) \in A^{n_i} \subseteq A^+;$$

setze $\iota(a) := a'/\mathcal{U}$. Zu zeigen ist, daß für $a, b \in A^\mathcal{V}$, $a \neq b$ folgt: $\iota(a) \neq \iota(b)$. Sei dazu $M \in \mathcal{V}$ mit $a(M) \neq b(M)$ gewählt. Aber M kommt für jedes $i \in M$ in der Folge $(M_1^i, \ldots, M_{n_i}^i)$ vor, es ist also $a'(i) \neq b'(i)$. Weil aber $M \in \mathcal{U}$ ist, folgt nach der Definition der Ultrapotenz $\iota(a) = a'/\mathcal{U} \neq b'/\mathcal{U} = \iota(b)$. □

Gewisse Ultraprodukte erfüllen eine Saturiertheitsbedingung. Wir sprechen davon, daß eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ $\aleph_1$-*saturiert* ist, falls folgendes gilt: Für jede echt aufsteigende Folge $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen und alle Folgen $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von L-Formeln $\varphi_n(x_1, \ldots, x_{r_n})$, für die

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \cdots \exists x_{r_n} \left(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{9.3.49}$$

existiert eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A, so daß

$$\mathfrak{A} \models \varphi_n(a_1, \ldots, a_{r_n}) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Begriffs, den man als Kristallisationspunkt der modernen „abstrakten“ Modelltheorie anzusehen hat; vgl. z.B. [**8**], §10, oder jedes andere Modelltheoriebuch.)

Satz 9.3.12. *Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von L-Strukturen. Dann ist $\mathfrak{A} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n/\mathcal{U}$ $\aleph_1$-saturiert.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir — mit den Bezeichnungen der Vorbemerkung — an, daß $r_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es gilt (9.3.49). Dann ist also

$$M_n := \left\{ m \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}_m \models \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i\right)\right\} \in \mathcal{U}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Da $\mathcal{U}$ frei ist, ist stets $M_n' := M_n \setminus \{1, 2, \ldots, n\} \in \mathcal{U}$. $\{M_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine absteigende Folge mit leerem Durchschnitt. Definiere nun $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\prod A_m$ wie folgt. Ist $m \in M_n' \setminus M_{n+1}'$, so wähle $a_{1m}, \ldots, a_{nm} \in A_m$ mit $\mathfrak{A}_m \models \left(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i\right)(a_{1m}, \ldots, a_{nm})$;

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit a_{nm} für alle $m \in M'_n$ definiert. Für $m \in \mathbb{N} \setminus M'_n$ wähle $a_{nm} \in A_m$ beliebig. Nach dieser Definition ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{m \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}_m \models \varphi_n(a_{1m}, \ldots, a_{nm})\} \supseteq \bigcup_{p=n}^{\infty} (M'_p \setminus M'_{p+1}) = M'_n.$$

Der Satz von Łoś liefert nun $\mathfrak{A} \models \varphi_n(a_1/\mathcal{U}, \ldots, a_n/\mathcal{U})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Behauptung. □

Zusammenfassung von Prop. 9.3.9, Lemma 9.3.10 und der Sätze 9.3.11 und 9.3.12 ergibt:

Korollar 9.3.13. *Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche L-Struktur. Dann existiert eine bzgl. der Sprache $L(A)$ $\aleph_1$-saturierte, echte elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$ der Form $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$, wobei $\mathcal{U}$ ein regulärer Ultrafilter auf der abzählbaren Menge I ist.* □

Die nachfolgende Übung behandelt iterierte Ultrapotenzbildung.

Übung. Sei $\mathcal{U}_1$ Ultrafilter auf I_1, $\mathcal{U}_2$ Ultrafilter auf I_2 und

$$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 := \left\{M \in 2^{I_1 \times I_2} : \left\{i_2 \in I_2 : \left\{i_1 \in I_1 : (i_1, i_2) \in M\right\} \in \mathcal{U}_1\right\} \in \mathcal{U}_2\right\}.$$

Man zeige:

(i) $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ ist ein Ultrafilter auf $I_1 \times I_2$.
(ii) Für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\left(\mathfrak{A}^{I_1}/\mathcal{U}_1\right)^{I_2}/\mathcal{U}_2 \cong \mathfrak{A}^{I_1 \times I_2}/\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

9.4. Löwenheim-Skolem-Sätze und Kategorizität

Wir wenden uns nun dem Problem der Konstruktion möglichst kleiner und großer elementarer Substrukturen bzw. Erweiterungen (vgl. auch Satz 9.3.11, Kor. 9.3.13) zu.— Zunächst zum Kleinen: Angenommen, $\mathfrak{A}$ ist eine L-Struktur, und $C \subseteq A$. Existieren dann „kleine" elementare Unterstrukturen $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, die die Menge C enthalten? Wir wissen, daß es für $C \neq \varnothing$ oder im Falle, daß L eine Konstante enthält, eine eindeutig bestimmte kleinste Substruktur von $\mathfrak{A}$ gibt, die C umfaßt, nämlich die von C in $\mathfrak{A}$ erzeugte Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$. Da jedes Element von $B := \langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$ durch einen konstanten Term in $L(C)$ dargestellt werden kann, ist die Mächtigkeit von C kleiner oder gleich der Mächtigkeit der Menge der konstanten $L(C)$-Terme, also, wie man sich leicht überlegt, $\operatorname{card}(B) \leq \max(\operatorname{card}(L), \operatorname{card}(C))$. Der Satz von Löwenheim-Skolem in seiner „Abwärts"-Variante [**98**], [**151**] besagt nun, daß es stets eine *elementare* Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ gibt mit $C \subseteq B$ und dieser Kardinalitätsbeschränkung. Jedoch gibt es keine kanonische Konstruktion von $\mathfrak{B}$ in diesem Fall: Wir haben nur einen reinen Existenzbeweis, basierend auf dem Auswahlaxiom. (Der Kompaktheitssatz wird hier noch nicht benützt.)

Satz von Löwenheim-Skolem „abwärts". *Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, $C \subseteq A$. Für jede Kardinalzahl κ mit $\max(\operatorname{card}(L), \operatorname{card}(C)) \leq \kappa \leq \operatorname{card}(A)$ existiert eine elementare Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ mit $B \supseteq C$ und $\operatorname{card}(B) = \kappa$.*

Beweis. Für jede Teilmenge $D \subseteq A$ sei Φ_D die Menge aller $L(D)$-Sätze der Form $\exists x(\varphi(x))$ mit $(\mathfrak{A}, D) \models \exists x(\varphi(x))$. Zu jedem solchen Satz wähle per Auswahlaxiom ein Element $a_\varphi \in A$ mit $(\mathfrak{A}, A) \models \varphi(\overline{a}_\varphi)$. Sei D' die Menge aller dieser Elemente a_φ für $\exists x(\varphi(x)) \in \Phi_D$. Dann ist

$$\operatorname{card}(D') \leq \operatorname{card}(\Phi_D) \leq \max(\operatorname{card}(L), \operatorname{card}(D)).$$

Für jedes $d \in D$ ist der Satz $\exists x(x = \overline{d})$ in Φ_D und somit $d = a_{(x=\overline{d})} \in D'$, also $D' \supseteq D$. Wähle nun C' als eine Menge der Mächtigkeit κ mit $C \subseteq C' \subseteq A$. Wir definieren induktiv eine aufsteigende Folge $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Teilmengen von A durch $C_0 := C'$, $C_{i+1} := (C_i)'$. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$ stets $\mathrm{card}(C_i) = \kappa$, also auch $\mathrm{card}(B) = \kappa$ für $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} C_i$. Um nachzuweisen, daß B Trägermenge einer Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist, wenden wir Kor. 3.2.3 des Tarski-Vaught-Tests an: Sei $\exists x(\varphi(x))$ ein $L(B)$-Satz und $(\mathfrak{A}, B) \models \exists x(\varphi(x))$. Da φ nur endlich viele Namen von Elementen aus B enthält, ist φ in $L(C_j)$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ und somit $\exists x(\varphi(x)) \in \Phi_{C_j}$. Also $\mathfrak{A} \models \varphi(a_\varphi)$ und $a_\varphi \in C_{j+1} \subseteq B$. □

Beispiel. Der Körper $\mathbb{R}$ als L-Struktur bzgl. $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ hat eine abzählbare elementare Substruktur.

Das Gegenstück „im Großen" zu diesem Satz liefert uns die Anwendung des Kompaktheitssatzes. (Oft auch: „Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski", [**164**].)

Satz von Löwenheim-Skolem „aufwärts". *Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche L-Struktur und κ eine Kardinalzahl mit $\kappa \geq \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(L)$. Dann hat $\mathfrak{A}$ eine elementare Erweiterung $\mathfrak{B}$ der Mächtigkeit κ.*

Beweis. Erweitere die Sprache $L(A)$ um eine Menge C' neuer Konstantensymbole mit $\mathrm{card}(C') = \kappa$ zu $L(A \cup C')$. Sei Σ die folgende Menge von $L(A \cup C')$-Sätzen:

$$\Sigma := \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, A) \cup \big\{(c_1 \neq c_2) : c_1, c_2 \in C', c_1 \neq c_2\big\}$$

Sei $\Sigma' \subseteq \Sigma$ endlich und $c_1, \ldots, c_n$ alle in Σ' vorhandenen Konstantensymbole aus C'. Dann kann man offenbar $(\mathfrak{A}, A)$ zu einem Modell $\mathfrak{A}'$ von Σ' erweitern, indem man die $c_1, \ldots, c_n$ durch verschiedene Elemente $c_i^{\mathfrak{A}'}$ von A interpretiert (für $i = 1, \ldots, n$). Nach dem Kompaktheitssatz hat Σ ein Modell $\mathfrak{D}^*$; sei $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}^*|L$. Nach Konstruktion ist $\mathrm{card}(D) \geq \kappa$, ferner nach isomorpher Korrektur $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{D}$. Nach Löwenheim-Skolem abwärts können wir eine elementare Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{D}$ der Kardinalität κ finden mit $B \supseteq A$. Da $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, folgt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. □

Korollar 9.4.1. *Sei Σ eine konsistente L-Satzmenge. Σ hat ein Modell mit einer Mächtigkeit $\leq \mathrm{card}(L)$. Hat Σ ein unendliches Modell, so auch eines in jeder Mächtigkeit $\geq \mathrm{card}(L)$.*

Beweis. Wähle $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Jedes endliche Modell von Σ hat eine Mächtigkeit $< \mathrm{card}(L)$. Hat Σ nur unendliche Modelle, so wähle zunächst mit Löwenheim-Skolem-Tarski eine L-Struktur $\mathfrak{B} \models \Sigma$ mit $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(L)$, alsdann mit Löwenheim-Skolem „abwärts" eine elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$ der Mächtigkeit $\mathrm{card}(L)$. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung; der zweite folgt daraus mit Löwenheim-Skolem „aufwärts" wegen $\mathrm{card}(L) + \mathrm{card}(L) = \mathrm{card}(L)$. □

Übung. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Man zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Für alle $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.
(ii) $\mathfrak{A}$ ist endlich.

Folgere daraus, daß für eine vollständige Satzmenge Σ gilt: Σ hat genau dann ein endliches Modell, wenn es bis auf Isomorphie nur ein Modell besitzt.

Der Satz von Löwenheim-Skolem aufwärts zeigt, daß es zu *jeder* unendlichen L-Struktur $\mathfrak{A}$ eine elementar äquivalente L-Struktur $\mathfrak{B}$ gibt, die größere Mächtigkeit als $\mathfrak{A}$ besitzt und also nicht zu $\mathfrak{A}$ isomorph sein kann. Betrachte etwa das System $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen inklusive der Null. Es wird üblicherweise als eine Struktur $\mathfrak{N}_0 = (N_0, 0, s, +, \cdot)$ bzgl. der Sprache $L = \{0, s, +, \cdot\}$ aus der Konstanten 0, dem unären und den beiden binären Operationssymbolen s bzw. $+$, $\cdot$ definiert, die die folgenden Axiome erfüllt:

(i) $\forall x\big(s(x) \neq 0\big)$
(ii) $\forall x \forall y\big(s(x) = s(y) \to x = y\big)$
(iii) (Induktionsaxiom) Ist M eine Teilmenge von N_0 mit den Eigenschaften $0 \in M$ und $\forall x\big(x \in M \to s(x) \in M\big)$, so $M = N_0$.
(iv) $\forall x(x + 0 = 0)$
(v) $\forall x \forall y\big(x + s(y) = s(x + y)\big)$
(vi) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
(vii) $\forall x \forall y\big(x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x\big)$

(Die Axiome (i)–(iii) sind die bekannten *Peano-Axiome,* (iv)–(vii) die rekursive Definition der Addition und Multiplikation.) Man weist in der Tat leicht nach, daß diese Axiome (in der Tat schon die Peano-Axiome bzgl. der eingeschränkten Sprache $\{0, s\}$ allein) die gewohnte Struktur $\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen mit s als Nachfolgerfunktion und $0, +, \cdot$ in ihrer gewohnten Bedeutung bis auf Isomorphie eindeutig festlegen. Das Induktionsaxiom (iii), so wie es hier formuliert wurde, ist offensichtlich kein Satz der Logik erster Stufe, beinhaltet es doch eine Quantifizierung über alle *Teilmengen* von N_0. Wir könnten also versuchen, es durch eine Menge von Sätzen erster Stufe zu ersetzen, welche nur die Teilmengen M von N_0 betreffen, die durch eine L-Formel $\varphi(x)$ definiert werden können. Dies führt zur folgenden Menge von Sätzen in L:

$$J := \Big\{\big(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s(x)))\big) \to \forall x\big(\varphi(x)\big) : \varphi(x) \in \mathsf{Fo}_L\Big\}$$

Dann sind (i), (ii), (iv)–(vii) und das *Induktionsschema* J in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}_0)$ enthalten; man nennt $\mathrm{PA} := \big\{\text{(i),(ii),(iv)}, \ldots, \text{(vii)}\big\} \cup J$ das Axiomensystem für die *Peano-Arithmetik* und $\mathrm{Th}(\mathbb{N}_0)$ die *volle Zahlentheorie erster Stufe.* Mit dem Satz von Löwenheim-Skolem aufwärts folgt nun, da das *Standardmodell* $\mathbb{N}_0$ von $\mathrm{Th}(\mathbb{N}_0)$ unendlich ist:

Korollar 9.4.2. (Skolem, [**152**]) *Die volle Zahlentheorie erster Stufe — und damit auch* PA *— besitzt* Nichtstandard-Modelle, *d.h. Modelle, die nicht isomorph sind zum Standardmodell der natürlichen Zahlen.* □

Dies zeigt, daß das System PA der Peano-Arithmetik echt schwächer ist als das System (i)–(vii). Ferner zeigt das gleiche Argument, daß die Peano-Axiome zusammen mit (iv)–(vii) nicht durch eine Menge von Sätzen erster Stufe in irgendeiner Erweiterung L' der Sprache L ersetzt werden können. Wir haben also ein Beispiel eines Satzes zweiter Stufe, nämlich das Induktionsaxiom, der nicht durch eine Menge von Sätzen in der ersten Stufe ersetzt werden kann.

Nachfolgende Übung kann als Ausgangspunkt der Nichtstandard-Analysis angesehen werden ([**11**], Anhang I):

Übung. Sei $L = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ die Sprache der geordneten Ringe. Zeige, daß es keine L-Satzmenge gibt, deren Modelle genau die archimedisch angeordneten Körper sind.

Definition 9.4.3. Sei κ eine Kardinalzahl. Eine L-Theorie Σ heißt *κ-kategorisch,* falls sie bis auf Isomorphie genau ein Modell der Mächtigkeit κ besitzt. Σ

heißt schlechthin *kategorisch,* falls Σ bis auf Isomorphie überhaupt nur ein Modell hat.

BEISPIELE.

(i) Die Theorie der linearen Ordnungen bzgl. $\{<\}$ ist κ-kategorisch d.u.n.d., wenn κ endlich ist.

(ii) Die Theorie der elementar-abelschen p-Gruppen (p prim) ist κ-kategorisch für alle Kardinalzahlen κ. (Eine abelsche Gruppe heißt dabei *elementar,* wenn alle ihre Elemente quadratfreie Ordnung haben.)

(iii) Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper fester Charakteristik ist κ-kategorisch für alle überabzählbaren Mächtigkeiten κ.

BEWEIS. Zu (i): In der Tat können zwei gleichmächtige lineare Ordnungen, von denen die eine diskret, die andere dicht geordnet ist, nicht isomorph sein; für beliebige unendliche Mächtigkeiten existieren solche nach dem Satz von Löwenheim-Skolem „aufwärts".

Zu (ii): Wir stellen fest: Ist G eine elementar-abelsche p-Gruppe, so besitzt G in natürlicher Weise die Struktur eines Vektorraums über dem Körper $\mathbb{F}_p$: Die Vektoraddition ist die Addition in G, die Skalarmultiplikation die Vielfachenbildung. Zwei elementar-abelsche p-Gruppen sind isomorph (als abelsche Gruppen) genau dann, wenn sie als $\mathbb{F}_p$-Vektorräume isomorph sind. Sind G, G' elementar-abelsche p-Gruppen gleicher endlicher Mächtigkeit, so ist also $\mathrm{card}(G) = p^n$, $n := \dim_{\mathbb{F}_p} G$, also auch $\mathrm{card}(G') = p^n$ und $n = \dim_{\mathbb{F}_p} G'$, mithin $G \cong G'$. Sind G, G' elementar-abelsche p-Gruppen gleicher unendlicher Mächtigkeit, so ist $\dim_{\mathbb{F}_p} G = \mathrm{card}\, G = \mathrm{card}\, G' = \dim_{\mathbb{F}_p} G'$, also wieder $G \cong G'$.

(iii) schließlich ist der Satz von Steinitz (Satz 4.6.6). □

Aus dem Satz von Löwenheim-Skolem „aufwärts" und der dort anschliessenden Übung folgt:

PROPOSITION 9.4.4. *Eine vollständige L-Theorie ist kategorisch genau dann, wenn sie ein endliches Modell besitzt.* (*Theorien mit unendlichen Modellen sind also nie kategorisch.*) □

Wir erhalten ein weiteres Kriterium für Vollständigkeit (das aber nicht besonders praktisch ist, da die Kategorizitätsbedingung nur selten erfüllt ist):

SATZ 9.4.5. (Łoś-Vaught-Test, [**93**], [**172**]) *Sei $\mathcal{K}$ eine elementare Klasse, $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, $\kappa \geq \mathrm{card}(L)$ eine Kardinalzahl. Ist Σ κ-kategorisch, so ist $\mathcal{K}$ vollständig genau dann, wenn $\mathcal{K}$ nur unendliche Strukturen enthält.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{K}$ vollständig; wegen $\kappa \geq \aleph_0$ enthält $\mathcal{K}$ eine unendliche Struktur, die aber zu keiner endlichen Struktur elementar äquivalent sein kann, so daß $\mathcal{K}$ nur unendliche Strukturen enthält. Für die Umkehrung sei nun $\mathcal{K}$ ohne endliche Strukturen, und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Wähle mit Löwenheim-Skolem-Tarski (Kor. 9.4.1) Strukturen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathrm{card}(A') = \mathrm{card}(B') = \kappa$. Da $\mathcal{K}$ elementar und Σ κ-kategorisch ist, folgt $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$, also insbesondere $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$. □

Mit Satz 2.5.2 folgt sofort:

KOROLLAR 9.4.6. *Sei L abzählbar und effektiv gegeben. Ist Σ eine κ-kategorische L-Theorie, die nur unendliche Modelle besitzt (κ eine Kardinalzahl $\geq \mathrm{card}(L)$), und ist $\mathcal{K}$ rekursiv aufzählbar axiomatisierbar, so ist Σ entscheidbar.* □

Ein berühmtes Beispiel ist:

SATZ 9.4.7. (Cantor) *Die Theorie von $\mathcal{DLO}$, der Klasse der dichten linearen Ordnungen ohne Randpunkte, ist $\aleph_0$-kategorisch bzgl. $L = \{<\}$.*

KOROLLAR 9.4.8. *$\mathcal{DLO}$ ist vollständig und entscheidbar.* □

BEWEIS (SATZ 9.4.7). Seien $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ abzählbare dichte unberandete lineare Ordnungen, etwa $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $B = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. (Wir schreiben ab jetzt $<$ sowohl für $<^{\mathfrak{A}}$ als auch $<^{\mathfrak{B}}$.) Wir verwenden die Beweismethode des „Hin-und-Her" zur Konstruktion eines Isomorphismus $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Man definiere sukzessive Folgen $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in A, $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in B derart, daß $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} = A$, $\{\beta_i : i \in \mathbb{N}\} = B$ und

$$\alpha_i < \alpha_j \quad \Rightarrow \quad \beta_i < \beta_j \tag{9.4.50}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$. (Damit ist die durch $\alpha_i \mapsto \beta_i$ definierte Abbildung ein Ordnungsisomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$.)

Ist $n = 1$, so wählen wir α_1, β_1 beliebig aus A bzw. B. Seien nun für $1 \le i < n$ die Teilfolgen $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ und $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ bereits wie gewünscht konstruiert, d.h. daß (9.4.50) für alle $1 \le i, j < n$ gilt. Ist n gerade, so definiere α_n als dasjenige $\alpha_j \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ mit kleinstem Index j. Da $\mathfrak{B}$ dicht und unberandet ist, existiert ein $\beta_n \in B$ mit $\big(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, <\big) \cong \big(\{\beta_1, \dots, \beta_n\}, <\big)$. Ist n ungerade, so wähle β_n als dasjenige $b_j \notin \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ mit kleinstem Index j. Symmetrisch gibt es dann ein $\alpha_n \in A$ mit $\big(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, <\big) \cong \big(\{\beta_1, \dots, \beta_n\}, <\big)$. Die so definierten Folgen erfüllen offensichtlich (9.4.7) für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Dadurch erhält man also eine überall definierte surjektive Abbildung $A \to B$, gegeben durch $\alpha_i \mapsto \beta_i$, die wegen (9.4.50) ein Ordnungsisomorphismus ist. □

Mit Hilfes des Kategorizitätsbegriffs können wir ferner eine in Anwendungen nützliche Bedingung für Modellvollständigkeit angeben:

SATZ 9.4.9. (Lindströms Test, [**90**]) *Sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ eine induktive elementare Klasse von L-Strukturen, Σ eine L-Theorie. Enthält $\mathcal{K}$ nur unendliche Modelle von Σ und ist Σ κ-kategorisch* (*für eine Kardinalzahl $\kappa \ge \mathrm{card}(L)$*)*, so ist $\mathcal{K}$ modellvollständig.*

BEWEIS. Wir verwenden den Robinsonschen Test, Teil (ii). Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ aus $\mathcal{K}$ und $\varphi(\mathbf{x})$ eine $\exists_1$-Formel in L, $\mathbf{a}$ ein Tupel in A mit $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\mathbf{a})$, $\mathfrak{B} \models \varphi(\mathbf{a})$. Wie im Beweis von Satz 8.3.2 definieren wir die Sprache L^R und expandieren $\mathfrak{B}$ zu einer L^R-Struktur $\mathfrak{B}^R$ durch $R^{\mathfrak{B}^R} := A$; sei $\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{B}^R)$. Offenbar gilt:

$$\mathfrak{B}^R \models \exists\mathbf{x}\big(\varphi(\mathbf{x}) \wedge \neg\varphi^R(\mathbf{x})\big), \tag{9.4.51}$$

denn für beliebige L-Formeln $\psi(\mathbf{y})$ und zugehörige Tupel $\mathbf{a}'$ aus A gilt

$$\mathfrak{R}^{\mathfrak{B}^R} \models \psi^R(\mathbf{a}') \qquad \text{gdw.} \qquad \mathfrak{A} \models \psi(\mathbf{a}'), \tag{9.4.52}$$

wobei $\mathfrak{R}^{\mathfrak{B}^R}$ die Unterstruktur von $\mathfrak{B}^R$ mit Träger $A = R^{\mathfrak{B}^R}$ bezeichne. (Induktion über den Formelaufbau von ψ.)

Wir zeigen nun, daß Φ ein Modell $\mathfrak{D}^R$ mit $\mathrm{card}(R^{\mathfrak{D}^R}) \ge \kappa$ besitzt. Dazu seien $\{c_i\}_{i\in I}$ paarweise verschiedene neue Konstanten für L^R, wobei I eine Menge der Mächtigkeit κ sei, und es bezeichne L' die um diese Konstanten erweiterte Sprache L^R; sei $\Phi' := \Phi \cup \{Rc_i : i \in I\} \cup \{c_i \ne c_j : i, j \in I, i \ne j\}$. Da A unendlich ist, ist Φ' nach Kompaktheitssatz erfüllbar; sei $\mathfrak{E}$ ein Modell von Φ', $\mathfrak{D}^R := \mathfrak{E}|L^R$, $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}^R|L$.

Da $\mathfrak{D}^R \equiv \mathfrak{B}^R$, existiert eine L-Struktur $\mathfrak{C}$ mit $C = R^{\mathfrak{D}^R}$, $\mathfrak{C} \subseteq$ D; mit einem Analogon von (9.4.52) für $\mathfrak{D}$ anstelle von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ für $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{C} \models \Sigma$. Wegen dem Satz von Löwenheim-Skolem „abwärts" und $\kappa \geq \operatorname{card}(L)$ können wir o.B.d.A. $\operatorname{card}(C) = \kappa$ annehmen. Nun existiert eine existentiell abgeschlossene Struktur der Mächtigkeit κ in $\mathcal{K}$. (Ist $\mathfrak{C}' \supseteq \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}' \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$, so wähle mit Löwenheim-Skolem „abwärts" $\mathfrak{C}'' \preceq \mathfrak{C}'$, $\operatorname{card}(C'') = \kappa$; nach (G3$'_1$) ist $\mathfrak{C}'' \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$; ein solches $\mathfrak{C}'$ existiert wegen der Konfinalität von $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}$.) Es folgt $\mathfrak{C} \in \mathcal{E}(\mathcal{K})$ wegen der vorausgesetzten κ-Kategorizität von Σ; für jedes Tupel $\mathbf{c}$ aus C gilt: $\mathfrak{D} \models \varphi(\mathbf{c})$ impliziert $\mathfrak{C} \models \varphi(\mathbf{c})$. Dies widerspricht wegen $\mathfrak{D}^R \equiv \mathfrak{B}^R$ der Tatsache (9.4.51). $\square$

Beispiel. Die Klasse der unendlichen elementar-abelschen p-Gruppen (p prim) ist modellvollständig.

Weiteres über Kategorizität, insbesondere $\aleph_0$-kategorische Theorien, findet sich bei [**8**].

9.5. Topologisches zum Raum der Modelle

In diesem Abschnitt betrachten wir die Klasse aller Strukturen einer festen Sprache der Logik erster Stufe. Wir werden feststellen, daß diese in natürlicher Weise topologisiert werden kann; insbesondere wird sich dann klären, was es mit der Bezeichnung „Kompaktheitssatz" auf sich hat.

Zunächst müssen wir uns eingehender mit Booleschen Algebren beschäftigen. Wir verallgemeinern den Begriff des Filters von dem Spezialfall eines auf einer Mengenalgebra definierten Filters, wie wir ihn bislang aufgefaßt haben, zu Filtern, die auf beliebigen Booleschen Algebren definiert sind. Wir bezeichnen dabei die kanonische Halbordnung auf einer Booleschen Algebra $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, ^*)$ mit $\sqsubseteq$, d.h. es gelte $a \sqsubseteq b$ genau dann, wenn $a \sqcup b = b$, für alle $a, b \in B$. Alle Booleschen Algebren seien hinfort nichttrivial, d.h. es gelte $0 \neq 1$.

Definition 9.5.1. Sei B eine Boolesche Algebra. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq B$ heißt *Filter* auf B, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(BF1) $0 \notin \mathcal{F}$.
(BF2) Wenn $a, b \in \mathcal{F}$, so $a \sqcap b \in \mathcal{F}$.
(BF3) Wenn $a \in \mathcal{F}$, $b \in B$ und $a \sqsubseteq b$, so $b \in \mathcal{F}$.

Gelten für $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq B$ die Eigenschaften (BF2), (BF3), nicht aber (BF1), so heißt $\mathcal{F}$ ein *unechter Filter.* Ist $b \neq 0$, so bezeichne

$$\mathcal{F}(b) := \{a \in B : b \sqsubseteq a\}$$

den von b erzeugten Hauptfilter von B. Filter, die keine Hauptfilter sind, heißen *frei.* Ein Filter $\mathcal{F}$ von B ist ein *Ultrafilter* von B, falls entweder $a \in \mathcal{F}$ oder $a^* \in \mathcal{F}$ für alle $a \in B$. Ein Ultrafilter, der gleichzeitig Hauptfilter ist, heißt ein *Hauptultrafilter.*

Bemerkungen. Sei B eine Boolesche Algebra.

(i) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ von B ist $1 \in \mathcal{F}$.
(ii) Erfüllt eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq B$ Axiom (BF3), so ist (BF1) äquivalent mit $\mathcal{F} \neq B$.

Dual zum Begriff des Filters ist der eines Ideals erklärt:

Definition 9.5.2. Sei B eine Boolesche Algebra. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{I} \subseteq B$ heißt ein *Ideal* von B, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(BI1) $1 \notin \mathcal{I}$.
(BI2) Wenn $a, b \in \mathcal{I}$, so $a \sqcup b \in \mathcal{I}$.
(BI3) Wenn $a \in B$, $b \in \mathcal{I}$ und $a \sqsubseteq b$, so $a \in \mathcal{I}$.

Gelten für $\varnothing \neq \mathcal{I} \subseteq B$ die Eigenschaften (BI2), (BI3), nicht aber (BI1), so heißt $\mathcal{I}$ ein *unechtes Ideal.* Ist $b \neq 1$, so bezeichne

$$\mathcal{I}(b) := \{a \in B : b \sqsupseteq a\}$$

das von b erzeugte Hauptideal von B. Ideale, die keine Hauptideale sind, nennt man *frei.* Ein Ideal $\mathcal{I}$ von B ist ein *Primideal* von B, falls entweder $a \in \mathcal{I}$ oder $a^* \in \mathcal{I}$ für alle $a \in B$.

Übung. Man zeige, daß man jede Boolesche Algebra B als kommutativen Ring auffassen kann vermöge der Definition

$$a \cdot b := a \sqcap b, \quad a + b := (a^* \sqcap b) \sqcup (a \sqcap b^*), \quad -a := a \qquad (a, b \in B).$$

Derart entstehende Ringe nennt man *Boolesche Ringe.* Zeige für eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{I} \subseteq B$:

(i) $\mathcal{I}$ ist ein echtes Ideal im Ringsinn genau dann, wenn $\mathcal{I}$ ein Ideal im Sinne der Booleschen Algebra ist.
(ii) $\mathcal{I}$ ist ein Primideal im Ringsinn genau dann, wenn $\mathcal{I}$ ein Primideal im Sinne der Booleschen Algebra ist.
(iii) $\mathcal{I}$ ist ein Ideal (Primideal) genau dann, wenn $\mathcal{I}^* := \{a \in B : a^* \in \mathcal{I}\}$ ein Filter (Ultrafilter) ist.

Dies klärt formal den Zusammenhang z.B. zwischen den Lemmata 9.1.6, 9.1.7 und den entsprechenden Aussagen der Ringtheorie.

Die in §9.1 bewiesenen Aussagen über Filter und Ultrafilter, v.a. Def. 9.1.5 und Lemma 9.1.6 können *mutatis mutandis* auf den Fall beliebiger Boolescher Algebren verallgemeinert werden, wie sich der Leser leicht überzeugt; durch Dualisierung erhält man entsprechende Aussagen über Ideale und Primideale in Booleschen Algebren.—

Stoneschen Räumen sind wir schon in §7.6 begegnet (vgl. Def. 7.6.3). Wir werden nun zeigen, daß zwischen Stoneschen Räumen und Booleschen Algebren ein enger Zusammenhang besteht, die sog. *Stone-Dualität.* Zu einem Stone-Raum $(S, \mathcal{O})$ sei $\mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{O}$ die Boolesche Mengenalgebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen von S. Ist umgekehrt $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^*)$ eine Boolesche Algebra, so sei $\mathcal{S}(B)$ die Menge aller Ultrafilter auf B; wir versehen $\mathcal{S}(B)$ mit einer Topologie, indem wir die Mengen

$$\langle a \rangle := \{p \in \mathcal{S}(B) : a \in p\} \qquad (a \in B)$$

als Basis offener Mengen zugrundelegen. (Es handelt sich tatsächlich um eine Basis, da $\bigcup_{a \in B} \langle a \rangle = \mathcal{S}(B)$ wegen $\langle 1 \rangle = \mathcal{S}(B)$ und $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \sqcap b \rangle$ für $a, b \in B$.) $\mathcal{S}(B)$ heißt *der Stonesche Raum von B,* und dies zurecht [**155**]:

Stonescher Repräsentationssatz. *Sei B eine Boolesche Algebra, S ein Stonescher Raum.*

(i) *$\mathcal{S}(B)$ ist ein Stonescher Raum.*
(ii) *$\mathcal{B}(S)$ ist eine Boolesche Mengenalgebra.*
(iii) *Es ist $B \cong \mathcal{B}(\mathcal{S}(B))$ unter der Abbildung $b \mapsto \langle b \rangle$.*

(iv) *Es ist S homöomorph zu $\mathcal{S}(\mathcal{B}(S))$ unter der Abbildung $p \mapsto \mathcal{F}(\{p\})$.*
(v) *Genau dann ist B (bzw. $\mathcal{B}(S)$) atomfrei, wenn $\mathcal{S}(B)$ (bzw. S) keine isolierten Punkte besitzt.*

(Wir haben $\mathcal{F}(\{p\})$ für die Menge $\{b \in \mathcal{B}(S) : p \in b\}$ geschrieben, auch wenn $\{p\}$ i.a. kein Element von $\mathcal{B}(S)$ ist.)

Beweis. (ii) ist trivial. Zu (i): Es ist $\mathcal{S}(B) \neq \varnothing$, da B nichttrivial, nach der Verallgemeinerung von Lemma 9.1.6. $\mathcal{S}(B)$ hat eine Basis von offen-abgeschlossenen Mengen, da $\mathcal{S}(B) \setminus \langle b\rangle = \langle b^*\rangle$ für alle $b \in B$. Ferner ist $\mathcal{S}(B)$ Hausdorffsch, da es für alle $p \neq p'$ aus $\mathcal{S}(B)$ ein $b \in B$ gibt mit $p \in \langle b\rangle$ und $p' \in \langle b^*\rangle$. Zum Nachweis der Kompaktheit sei eine Überdeckung $\mathcal{S}(B) = \bigcup_{i\in I}\langle b_i\rangle$ von $\mathcal{S}(B)$ mit offenen Mengen $\langle b_i\rangle$ gegeben. Nun ist aber

$$\varnothing = \mathcal{S}(B) \setminus \bigcup_{i\in I}\langle b_i\rangle = \bigcap_{i\in I}\mathcal{S}(B)\setminus\langle b_i\rangle = \bigcap_{i\in I}\langle b_i^*\rangle. \tag{9.5.53}$$

Gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$, so daß schon $\langle b_{i_1}^*\rangle \cap \dots \cap \langle b_{i_n}^*\rangle = \varnothing$, so sind wir fertig. Ansonsten muß $b_{i_1}^* \sqcap \dots \sqcap b_{i_n}^* \neq \varnothing$ sein für je endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$, nach der Verallgemeinerung von Lemma 9.1.6 existiert damit ein Ultrafilter p von B, der alle b_i^* mit $i \in I$ enthält, also $p \in \bigcap_{i\in I}\langle b_i^*\rangle$, im Widerspruch zu (9.5.53). Also ist $\mathcal{S}(B)$ kompakt, und (i) ist bewiesen.

Zu (iii): Daß $b \mapsto \langle b\rangle$ eine wohldefinierte Abbildung $B \to \mathcal{B}(\mathcal{S}(B))$ ist, ist klar, ebenso, daß sie einen Homomorphismus Boolescher Algebren darstellt. Ferner ist sie surjektiv, denn ist $M \subseteq \mathcal{S}(B)$ offen-abgeschlossen, also $M = \bigcup_{i\in I}\langle b_i\rangle$ für gewisse $b_i \in B$, so ist wegen der Abgeschlossenheit M auch kompakt, man kann also o.E. I als endlich annehmen, so daß $M = \langle\bigsqcup_{i\in I} b_i\rangle$. Sie ist zudem injektiv: Denn sind $b \neq b'$, o.B.d.A. $b \not\sqsubseteq b'$, so wähle $p \in \langle b \sqcap b'^*\rangle$ gemäß Lemma 9.1.6; es ist $p \in \langle b\rangle$, $p \notin \langle b'\rangle$, also $\langle b\rangle \neq \langle b'\rangle$.

Zu (iv): Zunächst ist die Wohldefiniertheit von $p \mapsto \mathcal{F}(\{p\})$ zu beweisen, d.h. daß $\mathcal{F}(\{p\})$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{B}(S)$ ist; dies ist aber unmittelbar einsichtig. Zur Surjektivität sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{B}(S)$ und $a := \bigcap_{b\in\mathcal{U}} b$. Es ist $a \neq \varnothing$, da für je endlich viele der abgeschlossenen Mengen $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{U}$ gilt $b_1 \cap \dots \cap b_n \neq \varnothing$ wegen der Filtereigenschaft von $\mathcal{U}$, und S kompakt ist; zudem ist a einelementig, weil S Hausdorffsch ist. Also $a = \{p\}$ für ein $p \in S$ und also $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\{p\})$. Ferner ist die Zuordnung injektiv, wieder wegen der Hausdorff-Eigenschaft von S. Sie führt offene Mengen in offene Mengen und abgeschlossene in abgeschlossene über, ist also ein Homöomorphismus.

Zu (v): Sei B atomfrei, d.h. zu jedem $b \in B$, $b \neq 0$ existiere ein $a \in B$, $a \neq 0$ mit $a \neq b$, $a \sqsubseteq b$. Angenommen, $p \in \mathcal{S}(B)$ sei ein isolierter Punkt, d.h. $\{p\}$ offen in $\mathcal{S}(B)$, also $\{p\} = \langle b\rangle$ für ein $b \in B$. Damit ist aber $a \in P$ für alle $a \in B$ mit $0 \sqsubset a \sqsubset b$. (Denn es gibt nach 9.1.6 einen Ultrafilter auf B, der a enthält, und so ein Ultrafilter enthält auch b und muß damit gleich p sein.) Wähle ein solches a gemäß der Atomfreiheit von B. Damit ist auch $0 \sqsubset a^* \sqcap b \sqsubset b$, also $a^* \sqcap b \in p$. Andererseits ist aber $a^* \sqcap b \sqsubset a^*$, und es folgt $a^* \in p$, Widerspruch. Umgekehrt sei $\mathcal{S}(B)$ ohne isolierte Punkte und $b \in B\setminus\{0\}$ ein Atom von B. Wähle einen Ultrafilter p von B mit $b \in p$ nach Lemma 9.1.6. Dann betrachte $\langle b\rangle$; ist $p' \neq p$ aus $\langle b\rangle$ und o.B.d.A. $p \not\subseteq p'$, etwa $a \in p \setminus p'$, $a \neq 0$, so ist wegen $a \sqcap b \sqsubseteq b$ entweder $a \sqcap b = b$, also $b \sqsubseteq a$ und somit $a \in p'$, oder aber $0 = a \sqcap b \in p$, beidesmal ein Widerspruch. Damit ist $\{p\} = \langle b\rangle$, also p ein isolierter Punkt von $\mathcal{S}(B)$. □

Insbesondere besagt dieser Satz, daß jede Boolesche Algebra B isomorph ist zu einer gewissen Mengenalgebra, nämlich $\mathcal{B}(\mathcal{S}(B))$ ist; diese wird *das zweite Dual zu* B genannt.

ÜBUNG. Bilden $\mathcal{B}(\,\cdot\,)$ und $\mathcal{S}(\,\cdot\,)$ eine Galois-Verbindung?

BEMERKUNG. Für den mit der Kategorientheorie vertrauten Leser merken wir an, daß sogar folgender weitergehende Zusammenhang zwischen Booleschen Algebren und Stoneschen Räumen zutrifft: Bezeichnet man mit $\mathbf{B}$ die Kategorie der Booleschen Algebren und ihrer Homomorphismen und mit $\mathbf{S}$ die Kategorie der Stoneschen Räume und stetigen Abbildungen zwischen ihnen, und definiert man für einen Homomorphismus $h\colon B \to B'$ Boolescher Algebren die Abbildung

$$\mathcal{S}(h)\colon \mathcal{S}(B') \to \mathcal{S}(B) \quad \text{durch} \quad p \mapsto h^{-1}(p)$$

und für eine stetige Abbildung $f\colon S \to S'$ zwischen Stoneschen Räumen die Abbildung

$$\mathcal{B}(f)\colon \mathcal{B}(S') \to \mathcal{B}(S) \quad \text{durch} \quad M \mapsto f^{-1}(M),$$

so erhält man wohldefinierte stetige Abbildungen $\mathcal{S}(h)$ und Homomorphismen $\mathcal{B}(f)$. Damit sind $\mathcal{S}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{S}$ und $\mathcal{B}\colon \mathbf{S} \to \mathbf{B}$ kontravariante Funktoren, und es gilt: $\mathcal{S}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{S}$ ist eine *Dualität* (auch *Antiäquivalenz* genannt) zwischen den Kategorien $\mathbf{B}$ und $\mathbf{S}$, m.a.W. es gilt:

(i) $\mathcal{S}$ ist *volltreu,* d.h. für jedes Paar von Objekten B, B' aus $\mathbf{B}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(B, B') \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}(B'), \mathcal{S}(B)),\ h \mapsto \mathcal{S}(h)$$

bijektiv.

(ii) Jedes Objekt S aus $\mathbf{S}$ ist zu einem Objekt der Form $\mathcal{S}(B)$ mit B aus $\mathbf{B}$ isomorph.

(Analog für $\mathcal{B}\colon \mathbf{S} \to \mathbf{B}$.)

Wir erhalten jetzt auch leicht ein Beispiel für einen *Cantorschen Raum C,* d.h. einen Stoneschen Raum ohne isolierte Punkte, wie wir ihn in §7.6 benötigten: Man wähle einfach eine atomfreie Boolesche Algebra, etwa die von allen halboffenen Intervallen $[a; b[$ mit $0 \leq a \leq b \leq \infty$ in $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ erzeugte Boolesche Algebra B, und setze $C := \mathcal{S}(B)$.

Wichtige Beispiele Boolescher Algebren sind in unserem Zusammenhang die folgenden: Sei L eine Sprache der Prädikatenlogik, Sa_L die Menge der Sätze von L und $\sim$ die Relation der logischen Äquivalenz auf Sa_L. $\sim$ ist eine Kongruenzrelation auf der Struktur $(\mathsf{Sa}_L, 0, 1, \wedge, \vee, \neg)$, wobei $0 := \exists x(x \neq x)$ und $1 := \forall x(x = x)$. Schreiben wir $\varphi/{\sim}$ für die Äquivalenzklasse von $\varphi \in \mathsf{Sa}_L$ bzgl. $\sim$, so bildet also $B_L := (\mathsf{Sa}_L/{\sim}, 0/{\sim}, 1/{\sim}, \wedge, \vee, \neg)$ als Quotientenstruktur von $(\mathsf{Sa}_L, 0, 1, \wedge, \vee, \neg)$ nach $\sim$ eine Boolesche Algebra, die *Lindenbaum-Tarski-Algebra von L.* Es gilt offenbar (vgl. §2.7):

PROPOSITION 9.5.3. *Die L-Theorien entsprechen genau den Filtern von B_L, die vollständigen L-Theorien genau den Ultrafiltern von B_L.* □

Wir sind nun in der Lage, eine topologische Formulierung des Kompaktheitssatzes zu geben. Dazu betrachten wir auf syntaktischer Ebene den Stone-Raum S_L zu B_L, also $\mathrm{S}_L = \mathcal{S}(B_L)$, den man auch den *Raum aller Interpretationen* nennt. S_L

ist die Menge aller vollständigen L-Theorien und besitzt eine Basis von offen-abgeschlossenen Mengen der Form $\langle\varphi\rangle = \{\Phi \in \mathrm{S}_L : \varphi \in \Phi\}$ mit $\varphi \in \mathsf{Sa}_L$; die offenen Mengen dieses Raums sind genau die der Form $\bigcup_{\varphi\in\Sigma}\langle\varphi\rangle$ für ein $\Sigma \subseteq \mathsf{Sa}_L$, die abgeschlossenen Mengen sind umgekehrt genau die der Form $\bigcap_{\varphi\in\Sigma}\langle\varphi\rangle$ für $\Sigma \subseteq \mathsf{Sa}_L$. Ferner gilt:

Proposition 9.5.4. *Die Zuordnung* $\bigcap_{\varphi\in\Sigma}\langle\varphi\rangle \mapsto \Sigma^{\models} = \{\psi \in \mathsf{Sa}_L : \Sigma \models \psi\}$ *ist eine Bijektion zwischen den nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von* S_L *und den* L*-Theorien.*

Beweis. Übung. □

Der Raum S_L spiegelt also nicht nur die vollständigen, sondern *alle* L-Theorien wider. Auf semantischer Ebene betrachten wir die Klasse Mod_L aller L-Strukturen. Wir topologisieren sie, indem wir die elementaren Klassen $\mathrm{Mod}(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathsf{Sa}_L$ als offene Basisklassen deklarieren; diese sind auch abgeschlossen, da ja stets

$$\mathrm{Mod}_L \setminus \mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\neg\varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathsf{Sa}_L.$$

Die abgeschlossenen Klassen bzgl. dieser Topologie sind genau die elementaren Klassen. Man nennt den so entstehenden nulldimensionalen topologischen Raum den *Raum der Modelle.* Wir wollen festhalten, daß Mod_L kein Hausdorff-Raum ist: Man betrachte zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$. (Solche existieren stets nach dem Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski.) Für alle L-Sätze φ gilt dann: $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\varphi)$ gdw. $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\varphi)$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können also nicht getrennt werden.

Den Zusammenhang zwischen den topologischen Räumen Mod_L und S_L zeigt:

Lemma 9.5.5. *Es ist* $\mathrm{S}_L \cong \mathrm{Mod}_L/{\equiv}$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $q\colon \mathrm{Mod}_L \to \mathrm{S}_L, \mathfrak{A} \mapsto \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann gilt für jede abgeschlossene Teilmenge $M = \bigcap_{\varphi\in\Sigma}\langle\varphi\rangle$ von S_L $(\Sigma \subseteq \mathsf{Sa}_L)$

$$q^{-1}(M) = \{\mathfrak{A} : \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in M\} = \{\mathfrak{A} : \Sigma \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A})\} = \mathrm{Mod}(\Sigma).$$

q ist also stetig, und es gilt $q(\mathfrak{A}) = q(\mathfrak{B})$ gdw. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Daraus folgt, daß $\mathrm{S}_L \cong \mathrm{Mod}_L/{\equiv}$. □

Die Quotientenbildung nach $\equiv$ läßt also gerade einen Hausdorff-Raum entstehen.—

Eine topologische Verkleidung des Kompaktheitssatzes lautet nun wie folgt. (Nach Tarski, [**166**]; mit der Topologisierung der Aussagenlogik hatte sich Tarski schon 1935 beschäftigt: [**163**]):

Satz 9.5.6. (Kompaktheitssatz, topologische Form) S_L *und* Mod_L *sind kompakt.*

Beweis. Für S_L ist dies klar nach dem Stoneschen Repräsentationssatz; für Mod_L folgt es unmittelbar aus Lemma 9.5.5. □

Formuliert man die Kompaktheit etwa von S_L explizit aus, so sieht man, daß sich genau die Aussage des landläufigen „Kompaktheitssatzes“ (man sollte besser sagen: „Endlichkeitssatzes“) ergibt; wir haben also den Kompaktheitssatz aus der Stone-Dualität bewiesen. Umgekehrt zeigt man leicht, daß Satz 9.5.6 aus dem Kompaktheitssatz folgt.

Korollar 9.5.7. *Die offen-abgeschlossenen Mengen von* S_L *sind genau die der Form* $\langle\varphi\rangle$ *für L-Sätze* φ. *Die offen-abgeschlossenen Klassen von* Mod_L *sind genau die der Form* $\mathrm{Mod}(\varphi)$ *für L-Sätze* φ. (*Insbesondere ist eine elementare Klasse endlich axiomatisierbar d.u.n.d., wenn auch ihr Komplement in* Mod_L *axiomatisierbar ist.*)

Beweis. In jedem nulldimensionalen kompakten Raum $(X, \mathcal{O})$ mit offen-abgeschlossenen Basismengen O_i $(i \in I)$ gilt: Ist $U \subseteq X$ offen-abgeschlossen, so $U = \bigcup_{j \in J} O_j$ für ein $J \subseteq I$, und wegen der Kompaktheit von $(X, \mathcal{O})$ ist U als abgeschlosssene Menge auch kompakt, also $U = O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_n}$ für gewisse $j_1, \ldots, j_n \in J$. Da in unseren beiden Fällen das zugrundegelegte System der offen-abgeschlossenen Basismengen jeweils unter endlicher Vereinigung abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. □

Übung. Man zeige, daß eine vollständige L-Theorie Φ genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn sie als Punkt im Raum S_L isoliert liegt.

Definition 9.5.8. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *normal,* wenn er die Alexandroff-Hopfschen Trennungsaxiome T_1 und T_4 erfüllt:

(T_1) Jede einelementige Menge ist abgeschlossen.
(T_4) Je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen besitzen disjunkte offene Umgebungen.

Wir betrachten auch folgende stärkere Version von T_4:

(T_4') Je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen besitzen disjunkte offen-abgeschlossene Umgebungen.

Proposition 9.5.9. *Jeder nulldimensionale kompakte Raum erfüllt* T_4' *und also* T_4. *Jeder nulldimensionale Hausdorffraum* (*insbesondere also jeder Stoneraum*) *ist* T_1 *und* T_4', *also normal.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{O})$ nulldimensional kompakt, und seien $U, V \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Mengen, o. E. beide nichtleer. Es ist $\complement V$ offen, um jeden Punkt $x \in U$ existiert also eine offen-abgeschlossene Umgebung $U_x \subseteq \complement V$; da U als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums X selbst kompakt ist, überdecken schon endlich viele davon U, und wir erhalten eine offen-abgeschlossene Menge U' mit $U \subseteq U' \subseteq \complement V$, also in U' und $V' := \complement U'$ die gesuchten trennenden Umgebungen. Ist $(X, \mathcal{O})$ darüber hinaus Hausdorffsch, so auch normal, da in jedem Hausdorffraum T_1 gilt. □

Korollar 9.5.10. Mod_L *ist* T_4, *aber nicht normal.* S_L *ist normal.* □

Mit Kor. 9.5.7 folgt ferner:

Korollar 9.5.11. (Trennungslemma) *Sind* $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ *elementare Teilklassen der Klasse* Mod_L *mit* $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \varnothing$, *so existiert ein L-Satz* φ *mit* $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$, $\mathcal{K}' \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$. ($\varphi$ trennt $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$.) □

Lemma 9.5.12. *Seien* $L \subseteq L^+$ *Sprachen der Logik erster Stufe. Die Abbildung*

$$\pi = \pi_L^{L^+} : \mathrm{Mod}_{L^+} \to \mathrm{Mod}_L, \ \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}|L$$

ist stetig, ebenso

$$\sigma = \sigma_L^{L^+} : \mathrm{S}_{L^+} \to \mathrm{S}_L, \ \Phi \mapsto \Phi \cap \mathsf{Sa}_L.$$

Beweis. Nur für π (für σ analog): Ist $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}_L$ mit $\Sigma \subseteq \mathsf{Sa}_L$, so ist $\pi^{-1}(\mathcal{K}) = \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}_{L^+}$, also abgeschlossen; π ist stetig. $\square$

Proposition 9.5.13. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein kompakter Raum, $(X', \mathcal{O}')$ ein Hausdorffraum, und $f: X \to X'$ eine stetige Abbildung. Dann ist f abgeschlossen.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge; A ist kompakt, und da Bilder kompakter Teilmengen unter stetigen Abbildungen wieder kompakt sind, auch $f(A)$. Da $(X', \mathcal{O}')$ Hausdorffsch ist, sind alle kompakten Teilmengen von X' abgeschlossen. Also ist $f(A)$ abgeschlossen in X'. $\square$

Korollar 9.5.14. *Die Abbildungen σ aus Lemma 9.5.12 und q aus dem Beweis von Lemma 9.5.5 sind stetig und abgeschlossen.* $\square$

Definition 9.5.15. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen heißt *pseudoelementar,* falls eine Sprache $L^+ \supseteq L$ und eine elementare Klasse $\mathcal{K}^+$ von L^+-Strukturen existieren mit $\mathcal{K} = \pi_L^{L^+}(\mathcal{K}^+)$.

Bemerkung 9.5.16. Strukturklassen kann man offenbar in kanonischer Weise als Kategorien auffassen (mit den Homomorphismen der zugehörigen Sprache als Morphismen). Damit induziert $\pi_L^{L^+}$ vermöge

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}|L, \mathfrak{B}|L) = \mathrm{Hom}(\pi_L^{L^+}(\mathfrak{A}), \pi_L^{L^+}(\mathfrak{B})), \;\; f \mapsto f$$

für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{L^+}$ einen (kovarianten) Funktor $\mathrm{Mod}_{L^+} \to \mathrm{Mod}_L$, einen *Vergißfunktor.* $\mathcal{K}$ ist also pseudoelementar genau dann, wenn es Bild einer elementaren Klasse unter einem Vergißfunktor ist.

Lemma 9.5.17. *Pseudoelementare Klassen sind abgeschlossen unter Ultraprodukten.*

Beweis. Seien L, L^+ Sprachen erster Stufe, $\mathcal{K} = \pi_L^{L^+}(\mathcal{K}^+)$ mit $\mathcal{K}^+$ elementar. Sei $\prod_{i \in I} \pi_L^{L^+}(\mathfrak{A}_i)/\mathcal{U}$ ein Ultraprodukt in $\mathcal{K}$, etwa $I \neq \varnothing$, $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von L^+-Strukturen aus $\mathcal{K}^+$. Man überprüft leicht, daß $\prod_{i \in I} \pi_L^{L^+}(\mathfrak{A}_i)/\mathcal{U} = \pi_L^{L^+}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right)$ ist, und nach Łoś letzteres aus $\pi_L^{L^+}(\mathcal{K}^+)$. $\square$

Korollar 9.5.18. *Eine pseudoelementare Klasse ist elementar genau dann, wenn sie unter elementarer Äquivalenz abgeschlossen ist.* $\square$

Beispiel. Die Klasse aller Gruppen, die multiplikative Gruppen von Körpern sind, ist pseudoelementar, aber nicht elementar. (Bem. 9.3.2.)

Mehr über topologische Eigenschaften (etwa die Borelmengen) der Räume S_L und Mod_L findet sich in [**4**], §5. (Man sieht dort u.a., daß aus dem Satz von Urysohn im Fall einer abzählbaren Sprache L sogar die Metrisierbarkeit des Raums der Interpretationen folgt.) Wir wollen hier nur noch anfügen, wie man Berührpunkte in S_L und Mod_L charakterisieren kann. (Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Mod_L.) Als Anwendung geben wir einen Beweis des Craigschen Interpolationssatzes.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{X}$ einer Menge X können wir zunächst wie folgt beschreiben: Sei $X \subseteq \mathrm{Mod}_L$; dann gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \bigcap \{A : \mathrm{Mod}_L \supseteq A \supseteq X,\ A \text{ abgeschlossen}\} \\
&= \bigcap \{A : \mathrm{Mod}_L \supseteq A \supseteq X,\ A \text{ offen-abgeschlossen}\} \\
&\underset{9.5.7}{=} \bigcap \{\mathrm{Mod}(\varphi) : X \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi), \varphi \in \mathsf{Sa}_L\} \\
&= \bigcap \{\mathrm{Mod}(\varphi) : \varphi \in \mathsf{Sa}_L, \mathfrak{A} \models \varphi \text{ für alle } \mathfrak{A} \in X\} \\
&= \{\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_L : \mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(X)\} \\
&= \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(X)).
\end{aligned}$$

LEMMA 9.5.19. *Sei $\mathcal{M} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von L-Strukturen und $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur. Dann gilt $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}\left(\bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}\right)$ genau dann, wenn ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I existiert derart, daß $\mathfrak{B} \equiv \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ gilt.*

BEWEIS. Nach Definition ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi \in \mathsf{Sa}_L : \mathfrak{A}_i \models \varphi \text{ für alle } i \in I\}$. Falls $\mathfrak{B} \equiv \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, dann folgt wegen $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_i)$ für alle $i \in I$ nach dem Satz von Łoś $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, also $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Sei $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}) = \{\varphi_j : j \in J\}$. Für jedes $j \in J$ gilt $D_j := \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi_j\} \neq \varnothing$, denn sonst wäre $\neg\varphi_j$ in allen $\mathfrak{A}_i$ gültig, also $\neg\varphi_j \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, wegen $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ also $\mathfrak{B} \models \neg\varphi_j$, im Widerspruch zu $\varphi_j \in \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$. Die Menge $\{D_j : j \in J\}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft: Es ist

$$D_{j_1} \cap D_{j_2} = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (\varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2})\} \neq \varnothing,$$

denn sonst würde wie oben $\neg(\varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2}) \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, also $\mathfrak{B} \models \neg(\varphi_{j_1} \wedge \varphi_{j_2})$ folgen, im Widerspruch zu $\mathfrak{B} \models \varphi_{j_1}$, $\mathfrak{B} \models \varphi_{j_2}$. Daher existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $D_j \in \mathcal{U}$ für alle $j \in J$; setze $\mathfrak{C} := \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$. Nach dem Satz von Łoś folgt $\mathfrak{C} \models \varphi_j$ für alle $j \in J$, also $\mathfrak{C} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, d.h. $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. ☐

KOROLLAR 9.5.20. (Kochen, [**86**]) *Sei $X \subseteq \mathrm{Mod}_L$ eine Menge. Dann gilt*

$$\overline{X} = \left\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \prod_{\mathfrak{A}\in X} \mathfrak{A}/\mathcal{U} \text{ für einen Ultrafilter } \mathcal{U} \text{ auf } X\right\}.$$

(*„Ultraprodukte von Elementen aus X sind gerade die Berührpunkte von X.“*) ☐

Nun zum Satz von Craig. Wir zeigen allgemeiner:

SATZ 9.5.21. *Seien L_1, L_2 Sprachen der Logik erster Stufe, $L := L_1 \cap L_2$, und seien Σ_1 bzw. Σ_2 Satzmengen in L_1 bzw. L_2 derart, daß $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ kein Modell besitzt. Dann gibt es einen L-Satz φ mit $\Sigma_1 \models \varphi$ und $\Sigma_2 \models \neg\varphi$.*

Zum Beweis einige technische Vorbemerkungen. Schwächer als der Satz von Keisler-Shelah ist:

LEMMA 9.5.22. (Fraynesches Lemma, [**77**]) *Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ elementar in eine Ultrapotenz von $\mathfrak{B}$ eingebettet werden kann.*

BEWEIS. Die eine Richtung ist trivial. Umgekehrt seien $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Setze $F := B^A$. Für $f \in F$ bezeichne $\mathfrak{B}(f)$ diejenige $L(A)$-Struktur, die man aus $\mathfrak{B}$ durch Definition von $a^{\mathfrak{B}(f)} := f(a)$ für alle $a \in A$ gewinnt; ferner sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, L-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{a} \in A^n$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\mathbf{a})$

$$D_{\varphi,\mathbf{a}} := \{f \in F : \mathfrak{B} \models \varphi(f(\mathbf{a}))\}.$$

Wegen $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sind alle $D_{\varphi,\mathbf{a}}$ nichtleer; das System

$$\mathcal{D} := \{D_{\varphi,\mathbf{a}} : n \in \mathbb{N}_0, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{Fo}_L, \mathbf{a} \in A^n, \varphi[\bar{\mathbf{a}}/\mathbf{x}] \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, A)\}$$

($\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$) ist zudem abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten. Sei $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{D}$ ein Ultrafilter auf F. Nach Definition gilt nun

$$\prod_{f \in F} \mathfrak{B}(f)/\mathcal{U} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, A),$$

m.a.W.: $(\mathfrak{A}, A)$ kann in die $L(A)$-Struktur $\prod_{f \in F} \mathfrak{B}(f)/\mathcal{U}$ elementar eingebettet werden. Dies trifft dann aber auch auf die L-Redukte $\mathfrak{A}$ und

$$\pi_L^{L(A)}\left(\prod_{f \in F} \mathfrak{B}(f)/\mathcal{U}\right) = \prod_{f \in F} \pi_L^{L(A)}(\mathfrak{B}(f))/\mathcal{U} = \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$$

zu. □

Lemma 9.5.23. *Seien L_1, L_2, L Sprachen der Logik erster Stufe, $L = L_1 \cap L_2$, und $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ seien elementare Klassen von L_1- bzw. L_2-Strukturen. Seien $\pi_i := \pi_L^{L_i} \colon \mathrm{Mod}_{L_i} \to \mathrm{Mod}_L, \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}|L$ die Vergißabbildungen $(i = 1, 2)$. Dann gilt*

$$q\left(\overline{\pi_1(\mathcal{K}_1) \cap \pi_2(\mathcal{K}_2)}\right) = q\left(\overline{\pi_1(\mathcal{K}_1)} \cap \overline{\pi_2(\mathcal{K}_2)}\right).$$

(Dabei sei $q \colon \mathrm{Mod}_L \to \mathrm{S}_L, \mathfrak{A} \mapsto \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.)

Beweis. Die Inklusion „$\subseteq$" ist trivial. Sei umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur, bis auf elementare Äquivalenz aus $\overline{\pi_1(\mathcal{K}_1)} \cap \overline{\pi_2(\mathcal{K}_2)}$; also $\mathfrak{B}_0|L \equiv \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}_0|L$ für gewisse $\mathfrak{B}_0 \in \mathcal{K}_1$, $\mathfrak{C}_0 \in \mathcal{K}_2$. Unter alternierender Anwendung des Frayneschen Lemmas erhält man induktiv zwei Folgen $\{\mathfrak{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{\mathfrak{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ von L_1- bzw. L_2-Strukturen mit $C_n|L \preceq \mathfrak{B}_{n+1}|L \preceq \mathfrak{C}_{n+1}|L$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie elementare Einbettungen $\mathfrak{B}_n \hookrightarrow \mathfrak{B}_{n+1}$, $\mathfrak{C}_n \hookrightarrow \mathfrak{C}_{n+1}$. Setze $\mathfrak{B} := \bigcup\{\mathfrak{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{C} := \bigcup\{\mathfrak{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}_{L_1}$ (bzw. $\mathfrak{C} \in \mathrm{Mod}_{L_2}$) können wir nun kanonisch zu einer $(L_1 \cup L_2)$-Struktur $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D}|L \equiv \mathfrak{B}|L \equiv \mathfrak{C}|L$ machen, indem wir $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) als Muster verwenden. Modulo isomorpher Identifizierung sind nun $\{\mathfrak{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{\mathfrak{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ elementare Ketten mit Vereinigungen $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$, so daß mit dem Satz über elementare Ketten $\mathfrak{D}|L_1 \in \mathcal{K}_1$, $\mathfrak{D}|L_2 \in \mathcal{K}_2$ folgt, und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}|L \in \overline{\pi_1(\mathcal{K}_1) \cap \pi_2(\mathcal{K}_2)}$, wie gewünscht. □

Beweis (Satz 9.5.21). Sei $\mathcal{K}_1 := \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$, $\mathcal{K}_2 := \mathrm{Mod}(\Sigma_2)$. Nach Voraussetzung ist $\pi_1(\mathcal{K}_1) \cap \pi_2(\mathcal{K}_2) = \varnothing$, weil man sonst ein Modell von $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ erhalten könnte. Nach Lemma 9.5.23 folgt $\overline{\pi_1(\mathcal{K}_1)} \cap \overline{\pi_2(\mathcal{K}_2)} = \varnothing$, und mit Kor. 9.5.11 finden wir einen L-Satz φ, der $\overline{\pi_1(\mathcal{K}_1)}$ und $\overline{\pi_2(\mathcal{K}_2)}$ trennt, also

$$\pi_1(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi), \qquad \pi_2(\mathcal{K}_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\varphi);$$

somit auch $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$, $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$, d.h. $\Sigma_1 \models \varphi$, $\Sigma_2 \models \neg\varphi$. □

Wir erhalten nun unmittelbar:

Korollar 9.5.24. (Craigscher Interpolationssatz, [**65**]) *Seien L_1, L_2 Sprachen der Logik erster Stufe, φ und ψ Sätze aus L_1 bzw. L_2 mit $\varphi \models \psi$. Dann existiert ein $(L_1 \cap L_2)$-Satz χ mit $\varphi \models \chi$ und $\chi \models \psi$.*

Beweis. Setze $\Sigma_1 := \{\varphi\}$, $\Sigma_2 := \{\neg\psi\}$. $\square$

Korollar 9.5.25. (Robinsonscher Modellverträglichkeitssatz, [**125**]) *Seien L_1, L_2 Sprachen der Logik erster Stufe, $L := L_1 \cap L_2$, sowie Σ_1 bzw. Σ_2 Satzmengen in L_1 bzw. L_2. $\Delta \subseteq \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ sei eine vollständige Theorie in L. Sind Σ_1 und Σ_2 konsistent, so auch $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.*

Beweis. Ist φ ein L-Satz mit $\Sigma_1 \models \varphi$, so folgt wegen der Vollständigkeit von Δ auch $\Delta \models \varphi$, also $\Sigma_2 \models \varphi$, d.h. $\Sigma_2 \not\models \neg\varphi$. Mit Satz 9.5.21 folgt die Konsistenz von $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. $\square$

Beispiel. Ist G eine endliche Gruppe, so sei $\mathcal{K}_G$ die Klasse aller Körper K (als L-Strukturen mit $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$) dergestalt, daß $G \cong \mathrm{Gal}(K/k)$ für einen Teilkörper $k \subseteq K$. Sei Δ eine Vervollständigung der Körpertheorie und seien G, H endliche Gruppen. Hat Δ Modelle in $\mathcal{K}_G$ und in $\mathcal{K}_H$, so auch in $\mathcal{K}_G \cap \mathcal{K}_H$; denn es existieren Sprachen $L_1, L_2 \supseteq L$ mit $L = L_1 \cap L_2$ und elementare Klassen $\tilde{\mathcal{K}}_G$, $\tilde{\mathcal{K}}_H$ mit $\pi_1(\tilde{\mathcal{K}}_G) = \mathcal{K}_G$, $\pi_2(\tilde{\mathcal{K}}_H) = \mathcal{K}_H$ ($\pi_i\colon \mathrm{Mod}_{L_i} \to \mathrm{Mod}_L, \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}|L$), also $\Sigma_1 := \mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{K}}_G) \cap \Delta$, $\Sigma_2 := \mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{K}}_H) \cap \Delta$ konsistente L_1- bzw. L_2-Theorien. (Nach einem Satz von Artin ist für einen Körper K und eine endliche Gruppe G von Automorphismen von K die Erweiterung K/K^G endlich galois'sch mit $\mathrm{Gal}(K/K^G) = G$, wobei K^G den Fixkörper von G in K bezeichne; [**34**], VI, Thm. 1.8.) Gibt es also endlich galois'sche Körpererweiterungen K_1/k_1, K_2/k_2 mit $K_1, K_2 \in \mathrm{Mod}(\Delta)$, die G bzw. H als Galoisgruppe haben, so existieren auch Körpererweiterungen K/k_1', K/k_2' mit $K \in \mathrm{Mod}(\Delta)$, die G bzw. H als Galoisgruppen realisieren. (Die Fragestellung, ob es zu jeder gegebenen endlichen Gruppe G eine endliche Galoiserweiterung *von* $\mathbb{Q}$ gibt, die G als Galoisgruppe besitzt, heißt das *Umkehrproblem der Galoistheorie* und ist bis heute ungelöst; [**34**], VI, S. 261 und §15.)

Schließlich erhalten wir als weiteres Korollar das Definierbarkeitslemma von Beth. Wir definieren dazu für eine Sprache L der Logik erster Stufe: Sind R, R' zwei n-stellige Relationssymbole ($n \in \mathbb{N}_0$), die nicht zu L gehören, so bezeichne $L(R)$ die Expansion von L, die durch Hinzufügen von R zum Alphabet von L entsteht, entsprechend $L(R')$; ist $\Sigma(R)$ eine Menge von $L(R)$-Sätzen, so sei $\Sigma(R')$ die Menge aller $L(R')$-Sätze, die man aus den Sätzen von $\Sigma(R)$ durch Ersetzen von R durch R' erhält (analog für einzelne $L(R)$-Sätze $\varphi(R)$). R wird durch $\Sigma(R)$ *implizit definiert,* wenn

$$\Sigma(R) \cup \Sigma(R') \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

R ist durch $\Sigma(R)$ *explizit definiert,* wenn es eine L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so daß

$$\Sigma(R) \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi\big).$$

Damit (vgl. auch[**8**], §6.6 und Exercise 2.6.6):

Korollar 9.5.26. (Definierbarkeitslemma von Beth, [**53**]) *$\Sigma(R)$ definiert R explizit genau dann, wenn R von $\Sigma(R)$ implizit definiert wird.*

Beweis. Wenn $\Sigma(R)$ explizit R definiert, so auch implizit. Umgekehrt seien nun $c_1, \ldots, c_n$ paarweise verschiedene nicht in L vorkommende Konstanten. Dann gilt

$$\Sigma(R) \cup \Sigma(R') \models \big(R \to R'\big)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$$

nach Voraussetzung. Mit dem Kompaktheitssatz erhalten wir $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Sigma(R)$ mit

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R) \wedge R[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R') \to R'[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n].$$

Nach dem Satz von Craig gibt es eine L-Formel $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R) \wedge R[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \models \chi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \tag{9.5.54}$$

und

$$\chi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R') \to R'[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n].$$

Da R nicht in $\chi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$ vorkommt, gilt auch

$$\chi[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n] \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R) \to R[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]. \tag{9.5.55}$$

Aus (9.5.54) und (9.5.55) erhalten wir

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i(R) \models \big(R \leftrightarrow \chi\big)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n]$$

und somit

$$\Sigma(R) \models \big(R \leftrightarrow \chi\big)[c_1/x_1, \ldots, c_n/x_n].$$

Da $c_1, \ldots, c_n$ nicht in $\Sigma(R)$ auftreten, haben wir (nach geeigneter Umbenennung der gebundenen Variablen in χ)

$$\Sigma(R) \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \big(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

und χ ist eine definierende Formel für R. $\square$

9.6. Ein Beispiel eines Nichtstandardbeweises*

Zum Abschluß dieses Skriptums wollen wir noch exemplarisch einen Ausblick auf sog. *Nichtstandardmethoden* geben, wie sie v.a. in der Analysis, aber auch in der Algebra verwendet werden. Wie so vieles in der Modelltheorie gehen sie auf Robinson [**127**] zurück, der sie als erster auf die Analysis anwandte und die *Nichtstandardanalysis* schuf. (Für eine Einführung vgl. [**11**], Anhang I, oder den Artikel von Prestel in [**184**].) Als Beispiel und Höhepunkt geben wir die Charakterisierungen Hilbertscher Körper nach Gilmore-Robinson und Weissauer wieder.

Die Grundidee der Nichtstandardbetrachtungsweise ist, mit Hilfe einer geeigneten (echten) elementaren Erweiterung ${}^*\mathfrak{A}$ einer Struktur $\mathfrak{A}$ Eigenschaften über $\mathfrak{A}$ selbst zu beweisen. Diese Erweiterungen werden wir mittels Ultrapotenzen konstruieren. (Die in den vorhergehenden Paragraphen bewiesenen technischen Ergebnisse kommen uns hier zugute.) Will man einerseits auch Aussagen etwa über Teilmengen einer Struktur machen, andererseits den formalen Rahmen der Logik erster Stufe nicht verlassen, so muß man etwas weiter ausholen, als wir es hier tun. (Vgl. [**11**], Anhang I, oder [**5**], §13.) Wir definieren einfach in Abweichung vom üblichen Sprachgebrauch:

DEFINITION 9.6.1. Ist $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und ${}^*\mathfrak{A}$ eine echte elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$, für die $({}^*\mathfrak{A}, A)$ $\aleph_1$-saturiert ist, so wollen wir ${}^*\mathfrak{A}$ eine *Vergrößerung von* $\mathfrak{A}$ nennen.

Nach Kor. 9.3.13 existiert zu gegebener unendlicher L-Struktur $\mathfrak{A}$ stets eine Vergrößerung von $\mathfrak{A}$. Ferner gilt:

PROPOSITION 9.6.2. *Sei L abzählbar, $\mathfrak{A}$ eine unendliche L-Struktur. Es existiert eine Vergrößerung ${}^*\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$, so daß gilt:*

(i) *Es gibt eine abzählbare elementare Substruktur $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$ mit Vergrößerung ${}^*\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}$, so daß ${}^*\mathfrak{B} \preceq {}^*\mathfrak{A}$.*

(ii) *Für alle unendlichen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ existiert eine Vergrößerung ${}^\circ({}^*\mathfrak{A})$ von ${}^*\mathfrak{A}$ und eine Vergrößerung ${}^\circ\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}$ mit ${}^\circ\mathfrak{B} \subseteq {}^\circ({}^*\mathfrak{A})$.*

BEWEIS. Wähle gemäß Kor. 9.3.13 ${}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$, wobei $\mathcal{U}$ ein regulärer Ultrafilter auf der abzählbaren Menge I ist. Zu (i): Nach Löwenheim-Skolem „abwärts" existiert eine abzählbare elementare Substruktur $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$. Sei ${}^*\mathfrak{B} := \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$; ${}^*\mathfrak{B}$ ist eine Vergrößerung von $\mathfrak{B}$. Nach Kor. 9.2.8 ist ${}^*\mathfrak{B} \preceq {}^*\mathfrak{A}$. Zu (ii): Sei $\mathcal{V}$ ein regulärer Ultrafilter auf einer abzählbaren Menge J; setze ${}^\circ({}^*\mathfrak{A}) := {}^*\mathfrak{A}^J/\mathcal{V}$ und ${}^\circ\mathfrak{B} := \mathfrak{B}^J/\mathcal{V}$. □

Eine Vergrößerung ${}^*\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$, die (i) und (ii) aus dieser Prop. erfüllt, wollen wir *geeignet* nennen.

Sei K ein Körper und $f_1, \ldots, f_m$ Polynome in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten aus dem rationalen Funktionenkörper $K(T_1, \ldots, T_r)$, die im Ring $K(\mathbf{T})[\mathbf{X}]$ irreduzibel sind; $\mathbf{T} := \{T_1, \ldots, T_r\}$, $\mathbf{X} := \{X_1, \ldots, X_n\}$. Ist $g \in K[\mathbf{T}]$ ein Polynom ungleich Null, so schreibe

$$H_K(f_1, \ldots, f_m; g)$$

für die Menge aller r-Tupel $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in K^r$, für die $g(\mathbf{a}) \neq 0$ und alle $f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_m(\mathbf{a}) \in K[\mathbf{X}]$ definiert und irreduzibel sind. Nenne $H_K(f_1, \ldots, f_m; g)$ eine *Hilbertmenge* von K. Ein Körper K ist *Hilbertsch,* wenn alle seine Hilbertmengen nichtleer sind. Man überlegt sich leicht, daß Hilbertsche Körper stets unendlich viele Elemente enthalten.

Hilbert hat im Zuge seiner Untersuchungen zum Umkehrproblem der Galoistheorie gezeigt, daß $\mathbb{Q}$ Hilbertsch ist, ein Ergebnis, das man den *Hilbertschen Irreduzibilitätssatz* nennt (vgl. [**5**], §§11, 12). Hilbertsche Körper spielen in der Galoistheorie und in der diophantischen Geometrie eine herausragende Rolle; [**5**] enthält umfangreiches Material.

Um die Hilbert-Eigenschaft für einen Körper K nachzuweisen, kann man sich auf bestimmte Hilbertmengen beschränken:

LEMMA 9.6.3. *Jede Hilbertmenge $H_K(f_1, \ldots, f_m; g) \subseteq K^r$ enthält eine Hilbertmenge $H_K(f'_1, \ldots, f'_m; g')$, für die $f'_1, \ldots, f'_m$ im Ring $K[\mathbf{T}, \mathbf{X}]$ irreduzibel ist.*

BEWEIS. Sei $g_i \in K[\mathbf{T}]$ so, daß $f_i g_i \in K[\mathbf{T}][\mathbf{X}]$ und $d_i \in K[\mathbf{T}]$ der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $f_i g_i$; setze $f'_i := f_i g_i / d_i$, alles für $i = 1, \ldots, m$. Sei $g' := g \cdot g_1 d_1 \cdots g_m d_m$. Die $f'_1, \ldots, f'_m$ sind irreduzibel in $K[\mathbf{T}][\mathbf{X}]$, da primitiv; also auch in $K[\mathbf{T}, \mathbf{X}]$. Es folgt die Behauptung. □

KOROLLAR 9.6.4. *Ist jede Hilbertmenge $H_K(f_1, \ldots, f_m; g)$ zu irreduziblen Polynomen $f_1, \ldots, f_m \in K[T, \mathbf{X}]$ nichtleer, so ist K Hilbertsch.*

Beweis. Seien $f_1,\dots,f_m \in K[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ mit $\mathbf{T}=\{T_1,\dots,T_r\}$, $\mathbf{X}=\{X_1,\dots,X_n\}$ in $K[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ irreduzibel und $g \in K[T_1,\dots,T_r]$ ungleich Null. Nach Annahme existiert ein $a_1 \in K$ mit $f_i(a_1) \in K[T_2,\dots,T_r,\mathbf{X}]$ irreduzibel und $g(a_1) \neq 0$ in $K[T_2,\dots,T_r]$. Induktiv erhalten wir so $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_r) \in K^r$ mit $f_i(\mathbf{a}) \in K[\mathbf{X}]$ irreduzibel, $g(\mathbf{a}) \neq 0$, $i=1,\dots,m$. Nach dem vorhergehenden Lemma ist K Hilbertsch. □

Die Klasse der Hilbertschen Körper ist offensichtlich bzgl. der Sprache der Ringe elementar axiomatisierbar; elementare Substrukturen und Erweiterungen Hilbertscher Körper sind also wieder Hilbertsch. Ist allgemein K' eine elementare Erweiterung eines Körpers K, so ist K in K' relativ algebraisch abgeschlossen; jedes Element $t \in K' \setminus K$ ist daher transzendent über K und $K(t)$ ein rationaler Funktionenkörper über K.

Wir erhalten folgende elegante Charakterisierungen Hilbertscher Körper:

Satz 9.6.5. (Gilmore-Robinson, [**78**]) *Sei K ein Körper und $^*K$ eine geeignete Vergrößerung von K. K ist Hilbertsch genau dann, wenn ein $t \in {}^*K \setminus K$ existiert, so daß $K(t)$ algebraisch abgeschlossen in $^*K$ ist.*

Beweis. Sei zunächst K Hilbertsch. Wähle $L \preceq K$ abzählbar mit Vergrößerung $^*L \preceq {}^*K$. Sind $f_1,\dots,f_m \in L[T,\mathbf{X}]$ irreduzible Polynome und $g_1,\dots,g_m \in L[T]\setminus\{0\}$, so existiert ein $a \in L$ mit $f_i(a) \in L[\mathbf{X}]$ irreduzibel und $g_i(a) \neq 0$ für $i=1,\dots,m$. Da es nur abzählbar viele Paare (f,g) mit $f \in L[T,\mathbf{X}]$ irreduzibel, $\mathbf{X}=\{X_1,\dots,X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $g \in K[T]\setminus\{0\}$ gibt, folgt aus der $\aleph_1$-Saturiertheit von $({}^*L, L)$ die Existenz eines $t \in {}^*L$, so daß für jedes irreduzible $f \in L[T,\mathbf{X}]$ und $0 \neq g \in L[T]$ das Polynom $f(t) \in L[\mathbf{X}]$ irreduzibel in $^*L$ und $g(t) \neq 0$ ist. Damit gilt wegen $^*L \preceq {}^*K$ auch in $^*K$, daß $f(t) \in K[\mathbf{X}]$ irreduzibel in $^*K$, $g(t) \neq 0$ für alle irreduziblen $f \in K[T,\mathbf{X}]$ und $0 \neq g \in K[T]$. Die zweite Bedingung impliziert $t \notin K$. Betrachte ein über $K(t)$ algebraisches $a \in {}^*K$, und sei $f \in K[T,X]$ irreduzibel mit $f(t,a)=0$. Da $f(t) \in K[X]$ über $^*K$ irreduzibel ist, ist es notwendig linear. Somit ist $a \in K(t)$, und $K(t)$ algebraisch abgeschlossen in $^*K$.

Umgekehrt sei angenommen, es existiere ein $t \in {}^*K \setminus K$ derart, daß $E := K(t)$ algebraisch abgeschlossen in $^*K$ ist. Seien $f_1,\dots,f_m \in K[T,\mathbf{X}]$ irreduzible Polynome, $0 \neq g \in K[T]$. Wäre ein $f_i(t)$ reduzibel über $^*K$, so würden die Koeffizienten seiner Faktoren in $\overline{E} \cap {}^*K = E$ liegen, also $f_i(t)$ reduzibel über E sein; da aber t transzendent über K ist, würde dies bedeuten, daß $f_i \in K[T,\mathbf{X}]$ über K reduzibel ist, im Widerspruch zu unserer Annahme. Da nun $^*K$ elementare Erweiterung von K ist, existiert ein $a \in K$ mit $g(a) \neq 0$ und $f_i(a)$ irreduzibel über K, für $i=1,\dots,m$. Also ist K Hilbertsch. □

Korollar 9.6.6. (Weissauer, [**180**]) *Sei K ein Körper, $^*K$ eine geeignete Vergrößerung von K. K ist Hilbertsch d.u.n.d., wenn ein Hilbertscher Zwischenkörper Ω der Erweiterung $^*K/K$ existiert, der in $^*K$ algebraisch abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist K Hilbertsch, so erfüllt $\Omega := K$ die Behauptung. Umgekehrt sei Ω ein Körper mit den geforderten Eigenschaften. Wähle eine Vergrößerung $^\circ({}^*K)$ von $^*K$, welche eine Vergrößerung $^\circ\Omega$ von Ω enthält. Da Ω Hilbertsch ist, existiert nach dem Satz von Gilmore-Robinson ein $t \in {}^\circ\Omega \setminus \Omega$ derart, daß $\Omega(t)$ algebraisch abgeschlossen in $^\circ\Omega$ ist. Dabei ist $K(t)$ algebraisch abgeschlossen in $^\circ({}^*K)$, denn: K ist algebraisch abgeschlossen in $^*K$, also auch in Ω, somit $K(t)$ algebraisch abgeschlossen in $\Omega(t)$ ([**31**], IV, Thm. 22); $\Omega(t)$ ist algebraisch abgeschlossen in $^\circ\Omega$; $^\circ\Omega$ ist algebraisch abgeschlossen in $^\circ({}^*K)$, da Ω algebraisch abgeschlossen in $^*K$

ist. Da $^\circ({}^*K)$ als Vergrößerung von ${}^*K$ auch Vergrößerung von K ist, folgt aus dem Satz, daß K Hilbertsch ist. $\square$

Die Hilbertschen Körper erfahren in [**5**], [**9**] und [**133**] weitere modelltheoretische Behandlung. Beispiele von Nichtstandardargumenten in der Algebra enthält [**8**].

Literaturverzeichnis

[1] Bell, J. L., Slomson, A. B., *Models and Ultraproducts: An Introduction,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1969).

[2] Chang, C. C., Keisler, H. J., *Model Theory,* 3rd ed., Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1990).

[3] Cherlin, G., *Model Theoretic Algebra,* Lecture Notes in Math. 521, Springer, Berlin (1976).

[4] Felgner, U., *Modelltheorie,* Vorlesungsskriptum, SS 1973, Universität Heidelberg.

[5] Fried, M. D., Jarden, M., *Field Arithmetic,* Ergebnisse Math. 12, Springer, Berlin (1986).

[6] Higman, G., Scott, E., *Existentially Closed Groups,* Clarendon Press, Oxford (1988).

[7] Hirschfeld, J., Wheeler, W., *Forcing, Arithmetic, Division Rings,* Lecture Notes in Math. 454, Springer, Berlin (1975).

[8] Hodges, W., *Model Theory,* Encyclopedia of Math. and its Applications 42, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[9] Jensen, C. U., Lenzing, H., *Model Theoretic Algebra, with particular emphasis on Fields, Rings and Modules,* Algebra, Logic and Applications 2, Gordon & Breach, New York (1989).

[10] Marker, D., Messmer, M., Pillay, A., *Model Theory of Fields,* Lecture Notes in Logic 5, Springer, Berlin (1996).

[11] Potthoff, K., *Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen,* Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt (1981).

[12] Prest, M., *Model Theory and Modules,* London Math. Soc. Lecture Notes Series 130, Cambridge University Press, Cambridge (1988).

[13] Robinson, A., *Théorie métamathematique des idéaux,* Coll. de Logique Mathématique, Gauthier-Villars, Paris (1955).

[14] ———, *Complete Theories,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1956).

[15] ———, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra,* 2nd ed., Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1965).

[16] Rothmaler, P., *Einführung in die Modelltheorie,* Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg (1995).

[17] Saracino, D., Weispfenning, V. (Hrsg.), *Model Theory and Algebra. A Memorial Tribute to Abraham Robinson,* Lecture Notes in Math. 498, Springer, Berlin (1975).

[18] Weispfenning, V., *Modelltheorie,* Vorlesungsskriptum, WS 1974/75, Universität Heidelberg.

Lehrbücher zur Logik:

[19] Barwise, J. (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1977).

[20] Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., Thomas, W., *Einführung in die mathematische Logik,* 3. Aufl., BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).

[21] Manin, Y. I., *A Course in Mathematical Logic,* Graduate Texts in Math. 53, Springer, Berlin (1977).

[22] Monk, J. D., *Mathematical Logic,* Graduate Texts in Math. 37, Springer, Berlin (1976).

[23] Pohlers, W., Glaß, T., *An Introduction to Mathematical Logic,* Vorlesungsskriptum, WS 1992/93, Universität Münster.

[24] Prestel, A., *Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie,* Vieweg, Braunschweig (1986).

[25] Weispfenning, V., *Algebra und Logik,* Vorlesungsskriptum, SS 1994, Universität Passau.

Lehrbücher zur Algebra und algebraischen Geometrie:

[26] Anderson, F., Fuller, K., *Rings and Categories of Modules,* 2nd ed., Graduate Texts in Mathem. 13, Springer, Berlin (1992).
[27] Benedetti, R., Risler, J.-J., *Real algebraic and semi-algebraic sets,* Hermann, Paris (1990).
[28] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M. F., *Géométrie Algébrique Réelle,* Ergebnisse Math. 11, Springer, Berlin (1987).
[29] Fischer, G., *Ebene algebraische Kurven,* Vieweg, Braunschweig (1994).
[30] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups,* zwei Bände, Academic Press, New York (1970).
[31] Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra,* drei Bände, Graduate Texts in Mathem. 30–32, Springer, Berlin (1951–64).
[32] Knebusch, M., Scheiderer, C., *Einführung in die reelle Algebra,* Vieweg, Braunschweig (1989).
[33] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry,* Birkhäuser, Boston (1985).
[34] Lang, S., *Algebra,* 3rd ed., Addison-Wesley, Reading (1993).
[35] Mumford, D., *Algebraic Geometry* I (*Complex Projective Varieties*)*,* Grundlehren der math. Wiss. 221, Springer, Berlin (1976).
[36] Prestel, A., *Lectures on Formally Real Fields,* Lecture Notes in Math. 1093, Springer, Berlin (1984).
[37] Rotman, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups,* 4th ed., Graduate Texts in Math. 148, Springer, Berlin (1995).
[38] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry,* zwei Bände, 2nd ed., Springer, Berlin (1994).
[39] van der Waerden, B. L., *Algebra,* zwei Bände, 5. Aufl., Springer, Berlin (1960).
[40] Weispfenning, V., *Boolesche Algebra,* Vorlesungsskriptum, SS 1988, Universität Passau.

Originalarbeiten:[1]

[41] Adler, A., *On the multiplicative semigroups of rings,* Comm. Algebra **6** (1978), 1751–1753.
[42] Amitsur, S. A., *A generalization of Hilbert's Nullstellensatz,* Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 649–656.
[43] Artin, E., *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 100–115.
[44] Artin, E., Schreier, O., *Algebraische Konstruktion reeller Körper,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926), 83–99.
[45] Ax, J., *The elementary theory of finite fields,* Ann. of Math. **88** (1968), 239–271.
[46] Bacsich, P., *Cofinal simplicity and algebraic closedness*, Algebra Universalis **2** (1972), 354–360.
[47] Baer, R., *Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group,* Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 800–806.
[48] Baldwin, J. T., Lachlan, A. H., *On universal Horn classes categorical in some infinite power,* Algebra Universalis **3** (1973), 98–111.
[49] Barwise, J., Eklof, P.: *Lefschetz's principle,* J. Algebra **18** (1969), 554–570.
[50] Baur, W., *Elimination of quantifiers for modules,* Israel J. Math. **25** (1976), 64–70.
[51] Becker, E., Spitzlay, K.-J., *Zum Satz von Artin-Schreier über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers,* Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 81–87.
[52] Bernstein, A. R., Robinson, A., *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos,* Pacific J. Mathem. **16** (1966), 421–431.
[53] Beth, E., *On Padoa's method in the theory of definition,* Indag. Math. **15** (1953), 330–339.
[54] Borel, A., *Injective endomorphisms of algebraic varieties,* Arch. Math. **20** (1969), 531–537.
[55] Bröcker, L., *Semialgebraische Geometrie,* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **97** (1995), 130–156.
[56] Bruhat, F., Cartan, H., *Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique réel,* C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 1123–1126.
[57] Burgess, J., *Forcing,* in: [**19**], 403–452.

[1] Ausschließlich 20. Jhd. Eine Bibliographie aller Arbeiten zur Modelltheorie bis 1985 enthält: Müller, G. (Hrsg.), Ω-*Bibliography of Mathematical Logic,* III*, Model Theory,* Perspectives in Math. Logic, Springer, Berlin (1987).

[58] Carral, M., Coste, M., *Normal spectral spaces and their dimensions,* J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 227–235.
[59] Carson, A. B., *The model completion of the theory of commutative regular rings,* J. Algebra **37** (1973), 136–146.
[60] Chang, C. C., *On unions of chains of models,* Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 120–127.
[61] Chase, S., *Direct products of modules,* Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 457–473.
[62] Cherlin, G., *The model-companion of a class of structures,* J. Symbolic Logic **37** (1972), 546–556.
[63] ———, *Algebraically closed commutative rings,* J. Symbolic Logic **38** (1973), 493–499.
[64] Cohn, P. M., *On the free product of associative rings,* Math. Z. **71** (1959), 380–398.
[65] Craig, W., *Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory,* J. Symbolic Logic **22** (1957), 269–285.
[66] Dickmann, M. A., *Applications of model theory to real algebraic geometry,* in: *Methods in Mathematical Logic,* Lecture Notes in Math. 1130, Springer, Berlin (1985).
[67] van den Dries, L., *A linearly ordered ring whose theory admits elimination of quantifiers is a real closed field,* Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1981), 97–100.
[68] ———, *An application of a model-theoretic fact to* (*semi-*) *algebraic geometry,* Indag. Math. **44** (1982), 397–401.
[69] ———, *Remarks on Tarski's problem concerning* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$, in: Lolli, G., *et al.* (Hsrg.), *Logic Colloquium '82,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1982).
[70] ———, *Algebraic theories with definable Skolem functions,* J. Symbolic Logic **49** (1984), 625–629.
[71] ———, *Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields,* J. Symbolic Logic **53** (1988), 7–19.
[72] Dubois, D. W., *A Nullstellensatz for ordered fields,* Ark. Mat. **8** (1969), 111-114.
[73] Eckmann, B., Schöpf, A., *Über injektive Moduln,* Arch. Math. **4** (1953), 75–78.
[74] Eklof, P., *Ultraproducts for algebraists,* in: [**19**], 105–137.
[75] Eklof, P., Sabbagh, G., *Model-completions and modules,* Ann. Math. Logic **2** (1971), 251–295.
[76] Fisher, E., *Abelian structures,* I, in: Arnold, D., *et al.* (Hrsg.), *Abelian Group Theory, 2nd New Mexico State Univ. Conference 1976,* Lecture Notes in Math. 616, Springer, Berlin (1976).
[77] Frayne, T., Morel, A., Scott, D., *Reduced direct products,* Fund. Math. **51** (1962), 195–228.
[78] Gilmore, P. C., Robinson, A., *Metamathematical considerations on the relative irreducibility of polynomials,* Canad. J. Math. **7** (1955), 483–489.
[79] Givant, S. R., *A portrait of Alfred Tarski,* Math. Intelligencer **13** (1991), 16–32.
[80] Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls,* Monatsh. Math. Phys. **37** (1930), 349–360.
[81] Henkin, L., *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic,* Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 410–427.
[82] Higman, G., Neumann, B. H., Neumann, H., *Embedding theorems for groups,* J. London Math. Soc. **24** (1949), 247–254.
[83] Hilbert, D., *Mathematische Probleme,* Arch. Math. Phys. **1** (1901), 44–63.
[84] Kantor, J.-M., *Hilbert's problems and their sequels,* Math. Intelligencer **18** (1996), 21–30.
[85] Knebusch, M., *On the uniqueness of real closures and the existence of real places,* Comment. Math. Helvetici **47** (1972), 260–269.
[86] Kochen, S., *Ultraproducts in the theory of models,* Ann. of Math. **74** (1961), 221–261.
[87] Kogalovskiĭ, S. R., *On multiplicative semigroups of rings,* Soviet Math. Dokl. **2** (1961), 1299–1301.
[88] Krivine, J. L., *Anneaux préordonnés,* J. Analyse Math. **21** (1964), 307–326.
[89] Lang, S., *The theory of real places,* Ann. of Math. **57** (1953), 378–391.
[90] Lindström, P., *On model-completeness,* Theoria **30** (1964), 183–196.
[91] Lipshitz, L., Saracino, D., *The model companion of the theory of commutative rings without nilpotent elements,* Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 381–387.
[92] Łojasiewicz, S., *Sur le problème de la division,* Studia Math. **18** (1959), 87–136.
[93] Łoś, J., *On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems,* Colloq. Math. **3** (1954), 58–62.

[94] ———, *On the existence of linear order in a group,* Bull. Acad. Polon. Sci. **2** (1954), 21–23.

[95] ———, *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définisables d'algèbres,* in: Brouwer, L. E. J., *et al.* (Hrsg.), *Mathematical Interpretation of formal Systems*, Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1955).

[96] ———, *On extending of models,* I, Fund. Math. **42** (1955), 38–54.

[97] Łoś, J., Suszko, R., *On extending of models,* IV: *Infinite sums of models,* Fund. Math. **44** (1957), 52–60.

[98] Löwenheim, L., *Über Möglichkeiten im Relativkalkül,* Math. Ann. **76** (1915), 447–470.

[99] Lyndon, R. C., *Properties preserved under homomorphisms,* Pacific J. Mathem. **9** (1959), 143–154.

[100] Macintyre, A., *Omitting quantifier-free types in generic structures,* J. Symbolic Logic **37** (1972), 512–520.

[101] ———, *On algebraically closed groups,* Ann. of Math. **96** (1972), 53–97.

[102] ———, *Model-completeness for sheaves of structures,* Fund. Math. **82** (1974), 73–89.

[103] ———, *Model completeness,* in: [**19**], 139–180.

[104] ———, *Twenty years of p-adic model theory,* in: Paris, J. B., *et al.* (Hrsg.), *Logic Colloquium '84,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1986).

[105] Macintyre, A., McKenna, K., van den Dries, L., *Elimination of quantifiers in algebraic structures,* Adv. in Math. **47** (1983), 74–87.

[106] Macintyre, A., Wilkie, A., *On the decidability of the real exponential field,* Manuskript (1995).

[107] Malcev, A. I., *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik,* Rec. Math. N.S. **1** (1936), 323–336.

[108] ———, *On the faithful representation of infinite groups by matrices* (1940), Amer. Math. Soc. Translations **45** (1965), 1–18.

[109] ———, *A general method for obtaining local theorems in group theory* (1941), in: Wells, B. (Hrsg.), *The Metamathematics of Algebraic Systems. Collected Papers of A. I. Mal'cev: 1936–1967,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1971).

[110] McKenna, K., *New facts about Hilbert's seventeenth problem,* in: [**17**], 220–230.

[111] Monk, L., *Elementary-recursive decision procedures,* Diss., Univ. California, Berkeley (1975).

[112] Motzkin, T. S., *The arithmetic-geometric inequality,* in: Shisha, O. (Hrsg.), *Inequalities,* Academic Press, New York (1967).

[113] Neumann, B. H., *A note on algebraically closed groups,* J. London Math. Soc. **27** (1952), 242–249.

[114] ———, *Groups covered by permutable subsets,* J. London Math. Soc. **29** (1954), 236–248.

[115] ———, *The isomorphism problem for algebraically closed groups,* in: Boone, W. W., *et al.* (Hrsg.), *Word Problems,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1973).

[116] Procesi, C., *A non-commutative Hilbert Nullstellensatz,* Rend. di Mat. **25** (1966), 17–21.

[117] Prüfer, H., *Theorie der abelschen Gruppen,* I, *Grundeigenschaften,* Math. Z. **20** (1924), 165–187.

[118] ———, *Theorie der abelschen Gruppen,* II, *Ideale Gruppen,* Math. Z. **21** (1925), 222-249.

[119] Radjavi, H., Rosenthal, P., *The invariant subspace problem,* Math. Intelligencer **4** (1982), 33–37.

[120] Risler, J.-J., *Une carâctérisation des idéaux des variétés algébriques réelles,* C. R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 1171–1173.

[121] Robinson, A., *Completeness and persistence in the theory of models,* Z. Math. Logik Grundlag. Math. **2** (1953), 15–26.

[122] ———, *On ordered fields and definite functions,* Math. Ann. **130** (1955), 257–271.

[123] ———, *Further remarks on ordered fields and definite functions,* Math. Ann. **130** (1955), 405–409.

[124] ———, *Ordered structures and related concepts,* in: Brouwer, L. E. J., *et al.* (Hrsg.), *Mathematical Interpretation of formal Systems,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1955).

[125] ———, *A result on consistency and its application to the theory of definition,* Indag. Math. **18** (1956), 47–58.

[126] ———, *Some problems of definability in the lower predicate calculus,* Fund. Math. **44** (1957), 309–329.
[127] ———, *Non-standard analysis,* Indag. Math. **23** (1961), 432–440.
[128] ———, *A note on embedding problems,* Fund. Math. **50** (1962), 445–461.
[129] ———, *Infinite forcing in model theory,* in: *Proc. Second Scand. Logic Sympos., Oslo 1970,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1971).
[130] ———, *Forcing in model theory,* in: *Proc. Internat. Congress of Math., Nice 1970* (1971).
[131] ———, *A decision method for elementary algebra and geometry — revisited,* in: *Proc. Tarski Sympos.,* A.M.S. Proc. Pure Math. **XXV**, Providence (1974).
[132] Robinson, A., Zakon, E., *Elementary properties of ordered Abelian groups,* Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 222–236.
[133] Roquette, P., *Nonstandard aspects of Hilbert's irreducibility theorem,* in: [**17**], 231–275.
[134] Rothmaler, P., *Some model theory of modules,* II*, On stability and categoricity of flat modules,* J. Symbolic Logic **48** (1983), 970–985.
[135] ———, *Some model theory of modules,* III*, On infiniteness of sets definable in modules,* J. Symbolic Logic **49** (1984), 32–46.
[136] Rusek, K., Winiarski, T., *Polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^n$, Univ. Iacel. Acta Mathem. **24** (1984), 143–149.
[137] Sabbagh, G., *How not to characterize the multiplicative groups of fields,* J. London Math. Soc. **1** (1969), 369–370.
[138] ———, *Aspects logiques de la pureté dans les modules,* C. R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 909–912.
[139] ———, *Sous-modules purs, existentiellement clos et élémentaires,* C. R. Acad. Sci. Paris **272** (1971), 1289–1292.
[140] ———, *Caractérisation algébrique des groupes de type fini ayant un problème de mots résoluble* (*théoréme de Boone-Higman, travaux de B. H. Neumann et Macintyre*)*,* in: *Séminaire Bourbaki 1974/75, Exposés 453–470,* Lecture Notes in Math. 514, Springer, Berlin (1976).
[141] Saracino, D., *m-existentially complete structures,* Colloq. Math. **30** (1974), 7–13.
[142] Saracino, D., Weispfenning, V., *On algebraic curves over commutative regular rings,* in: [**17**], 307–383.
[143] Schmid, J., *On the affine Bézout inequality,* Manuscripta Math. **88** (1995), 225–232.
[144] Schreier, O., *Die Untergruppen der freien Gruppen,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 161–183.
[145] Scott, W. R., *Algebraically closed groups,* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 118–121.
[146] Seidenberg, A., *A new decision method for elementary algebra,* Ann. of Math. **60** (1954), 365–374.
[147] Serre, J.-P., *Extensions de corps ordonnés,* C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), 576–577.
[148] Shelah, S., *Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers,* Israel J. Math. **10** (1971), 224–233.
[149] Shoenfield, J. R., *A theorem on quantifier elimination,* in: *Symposia Math.* V (Istituto Nazionali di Alta Matematica), Academic Press, London (1971).
[150] ———, *Quantifier elimination in fields,* in: Arruda, A. I. *et al.* (Hrsg.), *Non-classical logics, model theory and computability* (*Proc. 3rd Latin American Sympos. on Math. Logic, Campinas 1976*)*,* Studies in Logic and the Foundations of Math., North-Holland, Amsterdam (1977).
[151] Skolem, Th., *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen,* Videnskapsselskapets Skrifter, I. Matem.-naturv. Klasse **4** (1920), 1–36.
[152] ———, *Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen,* Fund. Math. **23** (1934), 150–161.
[153] Springer, T. A., *Sur les formes quadratiques d'indice zero,* C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1517–1519.
[154] Steinitz, E., *Algebraische Theorie der Körper,* J. Reine Angew. Math. **137** (1910), 167–309.
[155] Stone, M. H., *The theory of representations for Boolean algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111.
[156] Szmielew, W., *Elementary properties of Abelian groups,* Fund. Math. **41** (1955), 203–271.

[157] Szpilrajn, E., *Sur l'extension de l'ordre partiel,* Fund. Math. **16** (1930), 386–389.
[158] Tarski, A., *Sur les groupes d'Abel ordonnés,* Ann. Sci. Polon. Math. **7** (1929), 267–268.
[159] ———, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik,* C. R. Séances Soc. Sci. Let. Varsovie, Classe III **23** (1930), 22–29.
[160] ———, *Une contribution á la théorie de la mesure,* Fund. Math. **15** (1930), 42–50.
[161] ———, *Grundzüge des Systemenkalküls,* I, Fund. Math. **25** (1935), 503–526.
[162] ———, *Grundzüge des Systemenkalküls,* II, Fund. Math. **26** (1936), 283–301.
[163] ———, *Der Aussagenkalkül und die Topologie,* Fund. Math. **31** (1938), 103–134.
[164] ———, *Arithmetical classes and types of mathematical systems,* Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 63.
[165] ———, *A decision method for elementary algebra and geometry,* 2nd ed., Univ. California Press, Berkeley (1951).
[166] ———, *Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics,* in: *Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge Mass. 1950,* A.M.S., Providence (1952).
[167] ———, *Contributions to the theory of models,* I, II, Indag. Math. **16** (1954), 572–588.
[168] ———, *Contributions to the theory of models,* III, Indag. Math. **17** (1955), 56–64.
[169] Tarski, A., Vaught, R., *Arithmetical extensions of relational systems,* Compositio Math. **13** (1957), 81–102.
[170] Thom, R., *La stabilité topologique des applications polynomiales,* L'Enseignement Math. **8** (1962), 24–33.
[171] Tyukavkin, L. V., *Model-completeness for certain theories of modules,* Algebra and Logic **21** (1982), 50–57.
[172] Vaught, R., *Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability,* Indag. Math. **16** (1954), 467–472.
[173] ———, *Alfred Tarski's work in model theory,* J. Symbolic Logic **51** (1986), 869–882.
[174] Weispfenning, V., *Two model theoretic proofs of Rückert's Nullstellensatz,* Trans. Amer. Math. Soc. **203** (1975), 331–342.
[175] ———, *Model-completeness and elimination of quantifiers for subdirect products of structures,* J. Algebra **36** (1975), 252–277.
[176] ———, *Nullstellensätze — a model theoretic framework,* Z. Math. Logik Grundlag. Math. **23** (1977), 539–545.
[177] ———, *Aspects of quantifier elimination in algebra,* in: Burmeister, P., *et al.* (Hrsg.), *Universal Algebra and its Links with Logic, Algebra, Combinatorics and Computer Science, Proc. "25. Arbeitstagung über Allgemeine Algebra",* Heldermann, Berlin (1983).
[178] ———, *Quantifier elimination for Abelian structures,* Manuskript (1983).
[179] ———, *Quantifier elimination for modules,* Arch. Math. Logik Grundlag. **25** (1985), 1–11.
[180] Weissauer, R., *Der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz,* J. Reine Angew. Math. **334** (1982), 203–220.
[181] Whitney, H., *Elementary structure of real algebraic varieties,* Ann. of Math. **66** (1957), 545–556.
[182] Wilkie, A., *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function,* Manuskript (1994).

Sonstiges:

[183] Dieudonné, J., *Grundzüge der modernen Analysis,* I, 3. Aufl., Vieweg, Braunschweig (1985).
[184] Ebbinghaus, H.-D., *et al.* (Hrsg.), *Zahlen,* 3. Aufl., Springer, Berlin (1992).
[185] Halmos, P., *Naive Mengenlehre,* 3. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1970).
[186] ———, *I want to be a Mathematician,* Springer, Berlin (1985).
[187] Koecher, M., Krieg, A., *Ebene Geometrie,* Springer, Berlin (1993).