Caos en la escala cuántica

Simulaciones de billares de escala atómica revelan fenómenos caóticos que permiten nuevos avances teóricos y aplicados, especialmente en nanotecnología

Mason A. Porter y Richard L. Liboff

Durante el siglo XX, dos nuevas líneas del estudio de los sistemas físicos arruinaron las esperanzas de predecir exhaustivamente la naturaleza. La primera, la teoría de la mecánica cuántica, descubrió una incertidumbre que impera en las escalas más pequeñas de la materia —en el ejemplo por excelencia, la posición y el momento de un electrón no pueden conocerse simultáneamente y con total precisión en un instante determinado—. La otra es lo que ahora llamamos teoría del caos. Algunos fenómenos dependen hasta tal punto de las condiciones iniciales del sistema, que un cambio imperceptible en el valor inicial de una variable puede volver impredecible el resultado de un proceso. El caos aparece en situaciones muy dispares, en la frecuencia de goteo de un grifo, digamos, o en el movimiento de los planetas.

Dado que lo impredecible resulta consustancial tanto a la teoría del caos como a la mecánica cuántica, es natural preguntarse qué sucede cuando estos fenómenos se combinan. ¿Caos absoluto, quizá? Probablemente no; tenemos incluso los medios para elaborar modelos del *caos cuántico,* o comportamiento caótico a escala cuántica. Los primeros intentos de entender ese reino singular han producido resultados matemática y científicamente importantes. Habiéndose encontrado caos en cualquier escala, no puede descartarse que nos topemos también con él en los dispositivos de dimensiones nanométricas, con la incertidumbre añadida, además, propia del mundo cuántico.

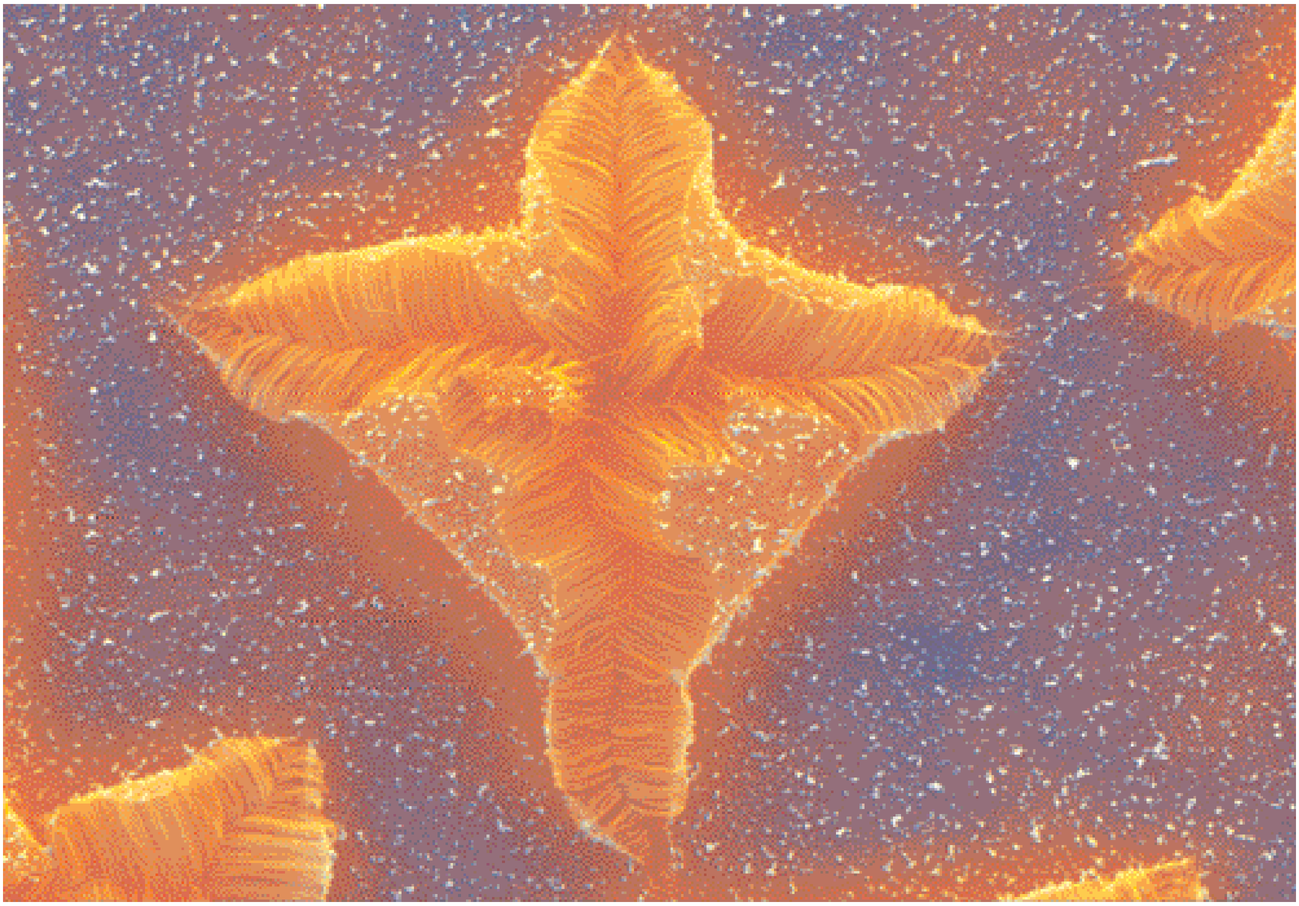
La búsqueda de indicios de una confluencia de la mecánica cuántica y el caos comenzó ya a finales del siglo XIX, cuando el matemático, físico y filósofo francés Henri Poincaré abordó las ecuaciones que habían de predecir las posiciones de los planetas en su movimiento de rotación alrededor del Sol. La tarea parecía en principio bastante fácil: se anotan las posiciones y velocidades iniciales, se resuelve con ellas un conjunto de ecuaciones basadas en las leyes de Newton del movimiento y los resultados predirán las posiciones futuras. Pero Poincaré derribó sus propias expectativas. Aun teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento de sólo dos planetas, unas mínimas diferencias en las condiciones iniciales —los valores iniciales de la posición y la velocidad— producían cambios notables en las posiciones futuras. Poincaré no usó la palabra “caótico”, pero así es como se llama a un sistema de esa naturaleza hoy en día.

El significado profundo del trabajo de Poincaré se reconocería mucho más tarde, en la década de 1960, cuando el meteorólogo Edward Lorenz encontró comportamiento caótico en un conjunto sencillo de ecuaciones con el que estudiaba ciertas condiciones atmosféricas. Surgieron sistemas caóticos allá donde se mirase. Había caos en las órbitas galácticas y casi en cualquier tipo de oscilador, se tratara de unos muelles o de unos circuitos eléctricos.

Se ha encontrado comportamiento caótico también incluso en el mundo microscópico; los científicos todavía se preguntan cómo puede estudiarse

Los autores

MASON A. PORTER realiza desde 2002 sus trabajos posdoctorales en el Instituto de Tecnología de Georgia. Obtuvo una licenciatura en ciencias (matemática aplicada) en el Instituto de Tecnología de California en 1998 y se doctoró en la Universidad de Cornell. RICHARD L. LIBOFF ha sido profesor de ingeniería eléctrica, física aplicada y matemática aplicada en la Universidad de Cornell durante más de tres décadas; dirigió la tesis de Porter. Es autor de numerosos libros de texto.



1. LOS NANOTUBOS DE CARBONO, como muchos otros dispositivos del nanomundo, exhiben características caóticas a escala cuántica. Los modelos de fenómenos caóticos a escalas cuánticas han descubierto la aparición de caos en diversos sistemas nanotécnicos: los puntos cuánticos, los dispositivos superconductores de interferencia cuántica y los nanotubos de carbono alineados que se muestran en esta foto.

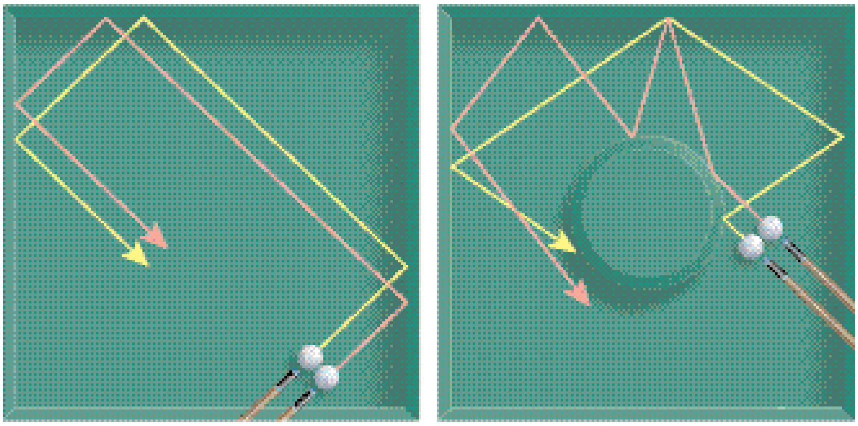
MICROFOTOGRAFIA CORTESIA DE LA ORGANIZACION AUSTRALIANA DE INVESTIGACIONES INDUSTRIALES Y CIENTIFICAS DE LA COMMONWEALTH

con más provecho el caos en el mundo cuántico. ¿Muestran características caóticas los sucesos que ocurren en el interior de átomos y moléculas? Mediante simulaciones matemáticas, hemos tomado una idea de caos que se predica de mundos enteros y hemos empequeñecido su objeto para que encaje en el reino cuántico de los átomos y los electrones. En algunos casos, el caos no aparece nunca. En otros, esas escalas minúsculas se manifiestan caóticas. Hay situaciones donde el caos crea más o menos desorden según las circunstancias. A partir de estos trabajos se están desarrollando nuevas teorías matemáticas y físicas. Se puede recurrir a ellas en una variedad de aplicaciones: puntos cuánticos, nanotubos, dispositivos superconductores de interferencia cuántica.

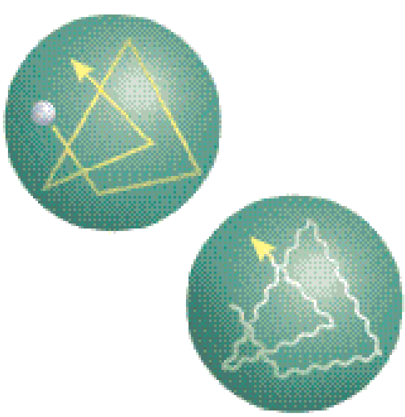
Una partida idealizada de billar

Los sistemas que pueden presentar comportamiento caótico (una clase compleja dentro de los llamados sistemas dinámicos) desafían a menudo un entendimiento intuitivo. Por tanto, para comenzar a estudiarlos se usan ejemplos muy simples, como el de una partícula en una caja. Una bola de billar que se mueve en una mesa sin troneras es una versión bidimensional de este modelo. Se simplifica aún más despreciando la fricción. Esta simple analogía nos va a facilitar el camino hacia el mundo del caos cuántico.

Imaginemos una mesa ideal de billar, rectangular. Coloquemos una bola cerca de una esquina y golpeémosla hacia la banda más cercana. La bola golpea la banda, rebota con un ángulo de reflexión igual al de incidencia, atraviesa la mesa hasta que golpea otra banda y rebota de nuevo siguiendo la misma regla. Si la fricción u otra fuerza cualquiera no frena la bola, ésta continuará rebotando en la mesa para siempre. Para comparar las trayectorias de la bola cuando las condiciones iniciales varían un poco, se para la partida simulada y se coloca la bola casi en el mismo punto inicial de la partida anterior; sólo se lo desplaza una pizca. Golpeada como antes —con el mismo ángulo y con la misma fuerza—, la bola seguirá al principio un camino que apenas diferirá del de la primera partida. Pero si se dibuja el camino seguido por la bola en los dos juegos, se verá que las líneas resultantes se diferenciaban con el tiempo. Se llama a este fenómeno divergencia lineal*;* significa que la distancia que separa las dos trayectorias se incrementa en una cantidad proporcional a la cantidad de tiempo que transcurre. En conclusión, nin-



2. SE OBSERVA COMPORTAMIENTO CAOTICO en una partida idealizada de billar. En una mesa rectangular sin troneras (*izquierda*), la bola seguirá una trayectoria que dependerá de su posición inicial y de cómo se la haya golpeado. Con posiciones iniciales un poco distintas, golpes similares producirán trayectorias similares: es un caso de divergencia lineal. Si se pone en el centro de la mesa un obstáculo circular, una especie de quinta banda circular (*derecha*), se tendrá un "billar de Sinai". Un primer lanzamiento golpea la banda circular y rebota varias veces en las bandas laterales y en la central. Se desplaza de nuevo un poco la posición inicial de la bola. Esta vez, la segunda trayectoria será diferente de la primera por completo. Este ejemplo muestra una divergencia exponencial: las dos trayectorias se separan una de otra a un ritmo que crece de manera exponencial; es una característica definitoria de los fenómenos caóticos.



3. UNA PARTICULA ATRAPADA en una esfera sirve de modelo simple con que efectuar simulaciones matemáticas (*arriba*). Una partícula que rebota dentro de una esfera puede representar varios fenómenos físicos, el encierro de un electrón por ejemplo. En mecánica cuántica, las partículas exhiben algunas propiedades ondulatorias y viceversa; una simulación cuántica de una partícula en una esfera puede ejecutarse de manera equivalente con una onda confinada en la esfera (*abajo*), descrita con una ecuación de Schrödinger que representará sus propiedades cuánticas.

guna partida jugada en esta mesa se comportará caóticamente.

Añadamos ahora, en el centro de la mesa, un obstáculo fijo, circular, una quinta "banda circular". Apuntemos la bola hacia ella. Chocará contra el nuevo obstáculo, rebotará hacia una banda exterior, rodará hacia otra banda exterior, golpeará la circular de nuevo, etc. Como antes, volvamos a empezar; coloquemos la bola más o menos (pero no exactamente) en la misma posición inicial y golpeémosla de la misma manera. Muy pronto, quizás estará siguiendo una trayectoria completamente distinta de la primera; será un ejemplo de divergencia exponencial: con el tiempo, las dos trayectorias divergirán a un ritmo que irá siendo exponencialmente más rápido. Este billar, bautizado con el apellido del matemático Yakov Sinai, de la Universidad de Princeton, es caótico.

La mesa con la banda circular en medio ilustra una propiedad fundamental del caos, la dependencia sensible de las condiciones iniciales. En otras palabras, condiciones iniciales infinitesimalmente diferentes —aquí la posición inicial de la bola— producen resultados muy distintos. Lo mismo descubrió Poincaré al analizar las ecuaciones que describen el movimiento planetario. E igual ocurre en otros tipos de billares: una mesa cuya frontera exterior tenga la forma de la pista de atletismo de un estadio produce comportamiento caótico. Enseguida veremos que estos ejemplos nos ayudan a explorar cómo se manifiesta el caos en el dominio cuántico.

Seguimiento de la posición de una partícula

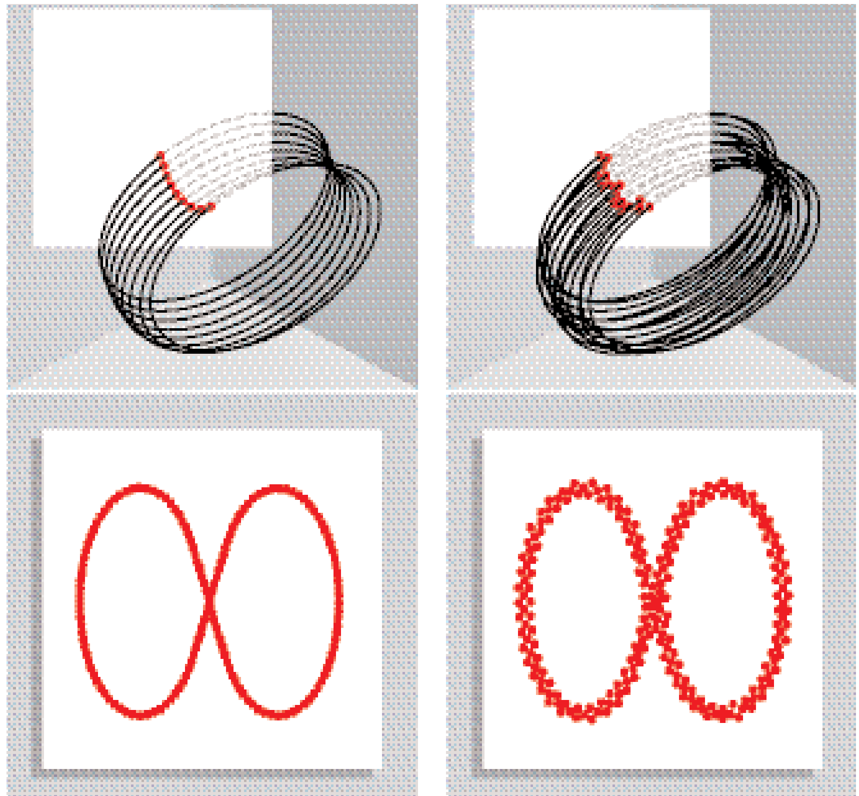
No cuesta seguir en los billares, con sólo unos pocos rebotes en las bandas, la trayectoria de la bola. Imaginemos un modelo de mesa de billar definido en una retícula bidimensional; para registrar la trayectoria, marquemos puntos en la retícula a intervalos de tiempo regulares. Tropezaremos con un problema: después de muchos rebotes, con la bola cruzando y recruzando su camino, y en algunos casos incluso volviendo a trazarlo, los puntos dibujados se convierten en una maraña que con frecuencia no aporta información alguna. Pero no es ésa la única manera de proceder.

Se recurre a menudo a otra manera de representar trayectorias, inspirada por unas ideas de Isaac Newton. En el siglo XVIII era común que se emplease un péndulo para estudiar las fuerzas de la naturaleza. Newton encontró que podía describir completamente el estado de un péndulo con dos variables: su posición y su momento. Los físicos y matemáticos actuales también utilizan esas variables para describir la actividad de las partículas subatómicas. En otras palabras, el estado de una partícula puede describirse por medio de su posición y su momento. Su representación gráfica —momento frente a posición— crea un *espacio de fases*.

El espacio de fases resuelve bastantes problemas matemáticos. Vale para seguir, por ejemplo, la actividad de un electrón. Eso sí, en cuanto se quiere examinar con él una partícula del mundo real, en tres dimensiones, pone en un brete a la imaginación. El espacio de fases tiene entonces seis dimensiones: tres para el espacio —una para cada eje de las coordenadas espaciales— y tres para el momento. Cualquiera puede generar una gráfica con sólo dos dimensiones, e incluso tres se pueden representar y entender con bastante facilidad. Pero, ¿cómo se imagina una representación en cuatro o más dimensiones?

En ocasiones, se solventan pegas así aferrándose a situaciones más simples. Los billares de que hemos estado hablando sólo permiten a la bola movimientos bidimensionales. El espacio de fases consta entonces sólo de cuatro dimensiones. Aun así, no es sencillo representar un fenómeno tetradimensional en una hoja de papel. Por suerte, un ordenador puede vérselas con cuatro dimensiones, o con muchas más. Se introducen en el ordenador los datos de posiciones y momentos para estudiar el movimiento de partículas incluso en espacios multidimensionales. El ordenador incorpora estos datos en forma de ecuaciones que tienen en cuenta todas esas dimensiones. Luego, ciertos programas seccionan esa mole multidimensional y extraen una rebanada: una sección del espacio de fases. Se la denomina *sección de Poincaré*. Proyectada sobre un espacio bidimensional, crea un conjunto de puntos que se visualizan en la pantalla del ordenador o se imprimen en una hoja de papel. El dibujo obtenido representa una serie de instantáneas del sistema que se está investigando. Gracias a esas instantáneas se percibe la relación entre condiciones y resultados; así, cada vez que se satisfaga alguna condición determinada, se puede tomar una instantánea para examinar algún aspecto del sistema.

Si un mapa de Poincaré consiste en una línea continua —no importa su curvatura—, el sistema no es caótico. Si, por el contrario, un mapa de Poincaré consta de una serie de puntos a todos los efectos aleatoria, el sistema será caótico. Así, dado cierto sistema —por ejemplo, uno de los billares de antes—, podremos describirlo mediante ecuaciones matemáticas, recopilar datos de la posición y el momento en el tiempo y generar un mapa de Poincaré. Los resultados, por lo usual fiables, permiten distinguir un comportamiento caótico de otro que no lo sea.

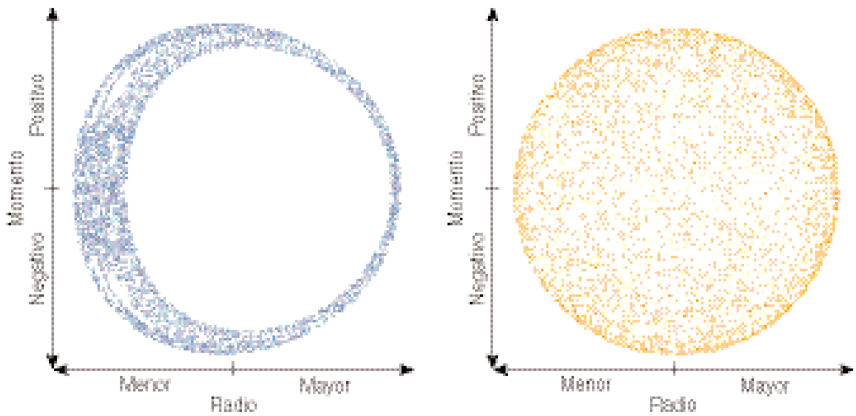


4. LAS SECCIONES DE POINCARE revelan el comportamiento caótico. Sea un electrón que rebota en el interior de una esfera, como en la figura 3, pero esta vez permítase que el radio de la esfera vibre en función del tiempo. Es decir: la partícula encerrada interacciona con la pared esférica vibratoria que la rodea. Los autores describen este sistema mediante un conjunto de ecuaciones, introducen los datos iniciales del sistema y lo dejan evolucionar. Los resultados toman la forma de una curva cerrada en el espacio (*superior izquierda*). Sólo se recopilan los datos que se ajustan a condiciones específicas, como por ejemplo que alguna variable se iguale a 0. Si los datos se toman en tres dimensiones, esa criba equivaldrá a insertar una hoja de papel para que el movimiento trace en ella una imagen bidimensional, llamada sección de Poincaré. En este caso, se proyecta sobre el plano que describe la posición y el momento del radio de la esfera. La sección de Poincaré resultante (*inferior izquierda*) contiene sólo curvas continuas, así que el sistema no es caótico. Cambiando el sistema ligeramente —por ejemplo, comenzando con una esfera con un radio apenas menor o mayor—, la simulación produciría nuevos datos (*superior derecha*). Aunque ambos conjuntos de datos (*paneles superiores*) puedan parecer virtualmente idénticos, crearán secciones de Poincaré muy distintas. En el caso ilustrado aquí, la segunda sección de Poincaré (*inferior derecha*) incluye áreas manchadas: el sistema exhibe un comportamiento caótico.

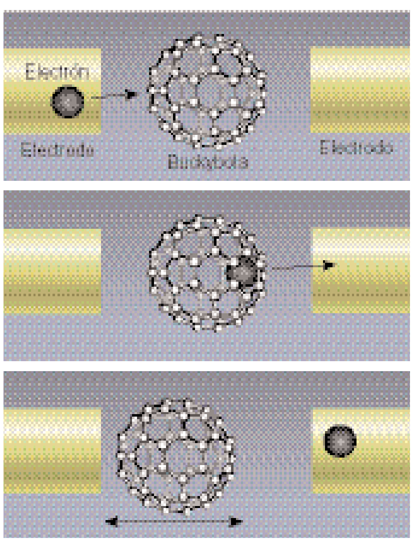
Una partícula encerrada en una caja

Con estos conceptos podemos ya explicar algunos aspectos de nuestras investigaciones del caos cuántico. Para empezar, consideremos una versión un poco más complicada de la partícula en la caja. Imaginemos una mesa de billar tridimensional con forma de esfera y supongamos que no encierra una bola de billar, sino un electrón. Este sistema es un ejemplo de *billar cuántico*. Lo estudiamos por medio de simulaciones informáticas que exhiben el movimiento del electrón a medida que colisiona con las paredes de su prisión esférica.

Dado que este sistema reside en el dominio cuántico, describiremos la partícula con una ecuación, la ecuación de Schrödinger, que sintetiza las extrañas características



5. EL CAOS PUEDE DARSE tanto en las variables clásicas como en las cuánticas de los billares cuánticos vibratorios. El gráfico generado al proyectar una sección de Poincaré sobre un plano descrito por el radio y el momento de una esfera vibratoria (*izquierda*) consiste en un anillo distorsionado de puntos. Claramente, no es una línea continua, lo que indica un comportamiento caótico. Una proyección de una sección de Poincaré que muestra las variables cuánticas de este mismo sistema (*derecha*) también exhibe caos.



6. SE ESPERA que los transistores unimoleculares exhiban caos semicuántico (la aparición de fenómenos caóticos en sistemas con componentes de ambos tipos, clásico y cuántico). Hongkun Park y sus colaboradores del Laboratorio Nacional Lawrence de Berkeley conectaron una molécula de carbono-60, una buckybola, a un par de electrodos de oro (*arriba*). Cuando un electrón salta del electrodo de la izquierda a la buckybola (*medio*) y luego de ésta al electrodo de la derecha, la bola rebota hacia adelante y hacia atrás (*inferior*). Se elabora un modelo de este sistema mediante procedimientos que se asemejan a los que los autores usaron para los electrones atrapados en esferas vibratorias.

de la mecánica cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que no se pueden determinar a la vez con toda exactitud la posición y el momento de una partícula, es decir, cuanto más preciso es el conocimiento de la posición, menos lo es el del momento. La ecuación de Schrödinger incorpora este principio.

Además, los objetos a escala cuántica exhiben características tanto de partícula como de onda (la *dualidad onda-partícula*). Las soluciones de la ecuación de Schrödinger reciben el nombre de funciones de onda; la partícula que, imaginamos, rebota en el interior de una esfera puede también conceptualizarse como una onda que se refleja en el interior de ese mismo espacio esférico. En vez de añadir otra ecuación para representar la esfera, se define la ecuación de Schrödinger de modo que haga desaparecer una onda en la nada cuando alcanza la frontera de la esfera. Describimos la situación entera —una partícula, u onda, en una esfera— con sólo una ecuación de Schrödinger.

Las ondas son elementos cruciales para entender los fenómenos que se desarrollan dentro de la esfera. Muchas ondas ordinarias —las olas del mar o las vibraciones de una cuerda de guitarra— consisten en una suma de ondas de diversas frecuencias. Se llama *modo normal* a una onda compuesta de una sola frecuencia, una onda mucho más simple. Escojamos una onda así, de una frecuencia apropiada, e introduzcámosla en la ecuación de Schrödinger; los resultados nos enseñarán cómo rebotaría esa onda dentro de la esfera. A continuación puede considerarse qué sucedería en presencia de múltiples modos normales.

En los ejemplos de los billares, buscamos el caos variando un poco la posición inicial de una bola y siguiendo luego su trayectoria. Aquí, en lugar de cambiar la posición inicial, se añade un segundo modo normal con una frecuencia diferente. Para obtener la solución completa de la ecuación de Schrödinger, habríamos de incluir una serie infinita de modos normales, cada uno caracterizado por su energía y su geometría. Sin embargo, a fin de que la simulación se complique lo menos posible, se introducen sólo dos modos en la función de onda. De esa manera se llega a una ecuación de la que se sabe que nunca produce caos. Se concluye así que no hay comportamiento caótico en una partícula que se mueve dentro de una esfera estacionaria. Se puede comparar este sistema a uno de los billares mencionados antes: en la analogía, el comportamiento regular de las funciones de onda haría las veces de la divergencia lineal que se observaba entre las trayectorias cercanas en una esfera de billar clásica. Con este ejemplo no hemos dado todavía con un modelo de un sistema cuántico caótico.

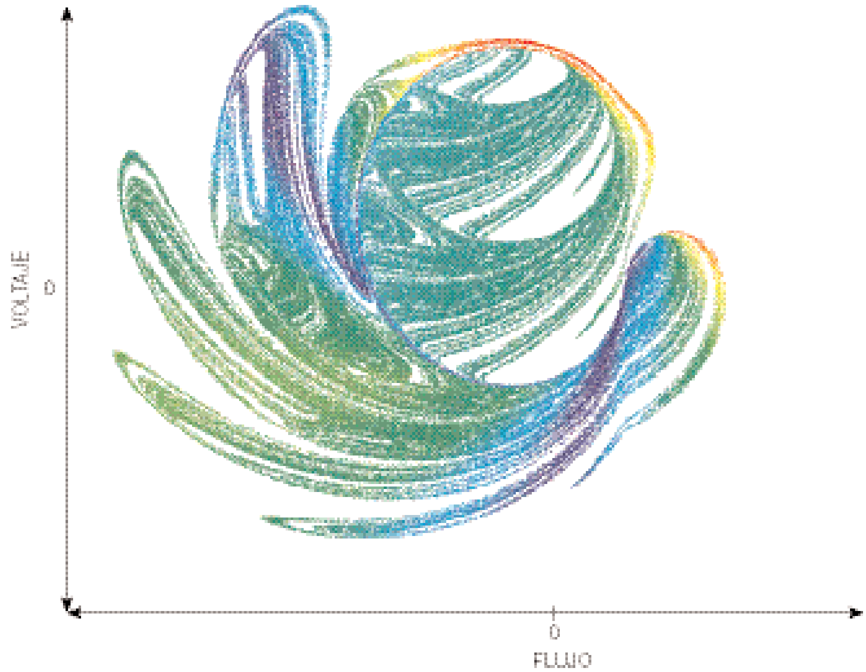
Se añaden más rebotes al billar

Compliquemos un poco el ejemplo anterior: la frontera de la esfera vibra hacia adentro y hacia afuera. Cuando una partícula golpea esta pared vibratoria, el resultado depende tanto del estado de la pared como del estado de la partícula. Este caso lleva un poco más de trabajo, pero es una dificultad necesaria si queremos simular el caos cuántico. (En este caso, simulamos lo que se conoce como *caos semicuántico*, por razones que se aclararán más tarde.)

Para simular este sistema se empieza exactamente como en el caso de la partícula en una esfera estacionaria: se plantea una ecuación de Schrödinger para la partícula. Pero esta vez debe haber también una ecuación para la vibración de la frontera; en esta simulación la actividad de la partícula depende de sus propiedades y de las de la pared. Puede atribuirse un movimiento mecánico a la pared, esto es, se puede describirla con una ecuación clásica (en vez de con una cuántica). En otras palabras, este ejemplo de la partícula en la esfera vibrante nos lleva a la frontera entre los mundos clásico y cuántico. Afortunadamente, una cantidad, el *hamiltoniano*, codifica el comportamiento dinámico combinando la ecuación de Schrödinger de la partícula y la ecuación mecánica de la pared. El hamiltoniano desempeña el papel de la energía conservada y produce las ecuaciones diferenciales ordinarias necesarias para esta simulación.

Como antes, podemos atacar las ecuaciones insertándoles dos modos normales. En nuestra investigación, simulamos por ordenador las ecuaciones diferenciales obtenidas del hamiltoniano para examinar el comportamiento de este billar. Después de cada cálculo, cambiamos un poco las condiciones iniciales, por ejemplo dándole un valor inicial diferente al radio, cambiante con el tiempo, de la esfera. Los datos de cada caso se representaron en forma de sección de Poincaré. En estas simulaciones, que describían el comportamiento tanto de la pared de la esfera como de la partícula encerrada, examinamos los mapas de Poincaré para cada componente del sistema.

Las simulaciones matemáticas revelaron caos en diversas formas. Por ejemplo, algunos mapas de Poincaré de las variables clásicas —el radio del muro y su momento— consistían en un anillo disperso de puntos; la ausencia de una línea continua indicaba que existían fenómenos caóticos. Otros mapas de Poincaré mostraron formas de caos más ordenadas en las variables clásicas. En otras palabras: algunos de los mapas de Poincaré resultantes de estas simulaciones incluían áreas más estructuradas: líneas que no eran demasiado continuas, pero tampoco tan dispersas en apariencia como las anteriores. Por su parte, las variables cuánticas que describen la partícula en estas simulaciones también produjeron características caóticas en mapas de Poincaré.



7. LOS DISPOSITIVOS SUPERCONDUCTORES DE INTERFERENCIA CUANTICA, o SQUID, muestran caos semicuántico. Un anillo superconductor y un resonador de corriente alterna acoplados desarrollaron un comportamiento cuántico caótico. El equipo de la universidad de Sussex que efectuó el experimento calculó además soluciones que expresan la dinámica observada en el sistema. El comportamiento de este circuito se visualiza en la sección de Poincaré mostrada, que es una relación entre el voltaje a través del resonador clásico acoplado y el flujo magnético en la espira, o inductor del circuito tanque (circuito oscilatorio). La imagen fue generada mediante el cambio de los parámetros del sistema.

CORTESIA DE T. D. CLARK, *Universidad de Sussex*

De esta clase de sistemas, donde tanto las componentes clásicas como las cuánticas tienen aspectos caóticos, puede decirse que exhibe *caos semicuántico*. El movimiento clásicamente caótico del radio conduce al *caos ondulatorio* de los modos normales dentro del billar esférico que vibra radialmente. En otras palabras, el caos surge en las ondas que rebotan dentro de la esfera porque dependen del radio de la esfera: si el radio muestra caos, lo mismo les pasará a las ondas asociadas.

Es posible convertir un billar que vibra en un sistema por entero cuántico. Requiere, eso sí, establecer las condiciones de frontera del billar en términos cuánticos en vez de clásicos; se tendrá así un sistema plenamente cuantizado. Por ahora, no se sabe si hay en la naturaleza un sistema plenamente cuantizado con dependencia sensible de las condiciones iniciales. Sólo una minoría ha aceptado los pocos ejemplos de caos cuántico genuino que se han propuesto.

La búsqueda del caos a pequeñas escalas

Nuestro trabajo sobre las simulaciones de caos cuántico se extiende más allá de las matemáticas y la física teórica y llega a las aplicaciones. Con las técnicas desarrolladas para el estudio del caos cuántico se crean modelos de una amplia variedad de fenómenos de escala atómica. Tales simulaciones mejoran nuestro conocimiento de cómo actúan los sistemas a escala nanométrica; gracias a ello, quizá aprendamos a controlarlos mejor.

En algunos aspectos, estas simulaciones parecen aplicables sobre todo a los llamados puntos cuánticos. Un punto cuántico es una estructura que no mide más de unos nanómetros, compuesta de un semiconductor —arseniuro de indio, arseniuro de galio o silicio— o un metal. La estructura debe ser tan pequeña que atrape sólo unos pocos electrones. Aunque los billares cuánticos vibratorios pueden ser útiles para estudiar los puntos cuánticos, es más corriente que se recurra a los billares cuánticos de frontera estacionaria. Cuando tienen formas irregulares —como los billares clásicos de estadio y de Sinai de que hablamos al principio— exhiben otra forma de caos cuántico, el *caos cuantizado*, que describe las características cuánticas del caos clásico.

Un punto cuántico puede estudiarse tomando como modelo una partícula, o unas pocas partículas, encerrada en una caja. Con un conocimiento más hondo de los puntos cuánticos, cabe pensar en mejorar su utilización como conmutadores binarios.

Además, las ideas del caos a escala cuántica podrían mejorar los conmutadores convencionales o los propios transistores, especialmente los fabricados por medios poco corrientes. Así, Hongkun Park y sus colaboradores del Laboratorio Nacional Lawrence de Berkeley han construido hace poco un transistor unimolecular conectando una buckybola a unos electrodos de oro. (Una buckybola es una molécula de 60 átomos de carbono conformada como un balón de fútbol, con un diámetro del orden de un nanómetro.)

El grupo de Park estudió las vibraciones de estos nanotransistores, a través de los cuales sólo puede fluir un electrón a la vez. Imaginemos una buckybola en reposo entre dos electrodos. Rebotará a medida que los electrones salten adentro y afuera de la molécula. Simplifiquemos la buckybola; considerémosla una esfera. Tendremos así un sistema similar a ese que hemos estado comentando antes, sólo que ahora la esfera no vibra, rebota. Esta diferencia se refleja en el hamiltoniano, aunque también existen en este caso dos componentes, uno clásico y otro cuántico. Si se toma en cuenta la geometría real de la buckybola, las complicaciones aumentan mucho.

Las técnicas del caos cuántico se pueden aplicar a los nanotubos de carbono, semejantes a las buckybolas, sólo que su patrón repetitivo se extiende formando un tubo en lugar de una bola. Su longitud varía entre unos micrometros y varios milímetros; vienen a tener un nanómetro de diámetro. Sus dimensiones —tanto su longitud como su diámetro— vibran de manera similar a la esfera de nuestras simulaciones. Además, los nanotubos vibran también como una cuerda de guitarra, es decir, de manera que el tubo entero oscile, pero mantenga su forma. Muchos de estos aspectos de los nanotubos no han sido explorados todavía mediante modelos como los nuestros. No obstante, sabemos que un electrón atrapado en un nanotubo con forma de tubo de pastillas —un cilindro con tapas esféricas en ambos extremos— experimentaría fenómenos caóticos. Esperamos que gracias a los billares cuánticos se estudien más a fondo las nanocornetas, estructuras de carbono a cuya forma alude su nombre.

El caos semicuántico ofrece también modelos para otra clase de sistemas reales. Se ha observado ese tipo de comportamiento en los dispositivos superconductores de interferencia cuántica (SQUID). Realizan las mediciones más sensibles de campos magnéticos. No ocupan mucho espacio, por lo normal no más de un milímetro, pero ese milímetro contiene un buen número de componentes. Para montar un SQUID se necesita, antes que nada, un superconductor, un material que, a una temperatura muy baja, carezca de resistencia eléctrica y, por tanto, conduzca corriente sin perder energía. En el SQUID se le dará forma circular, a veces cuadrada, y recibirá energía de un oscilador eléctrico que le aplicará una corriente; se generará con ello una caída de potencial en el SQUID. Cuando se expone un SQUID a un campo magnético, ese voltaje cambia de manera que la magnitud del cambio mide la intensidad del campo magnético. Para entender mejor el comportamiento global de un SQUID, Joseph Diggins y sus compañeros de la Universidad de Sussex se valieron de la mecánica cuántica para elaborar un modelo del movimiento de los electrones en el anillo superconductor. También encontraron fenómenos caóticos en este sistema de dimensiones atómicas.

A medida que avance la búsqueda, se espera que emerjan una y otra vez aspectos caóticos en el reino cuántico. Esta bestia mítica, sin embargo, puede mostrarse beneficiosa. Un mejor conocimiento de la fenomenología nanométrica contribuiría a que los diseñadores proyectasen dispositivos más sencillos de manejar. En cualquier caso, queda aún mucho trabajo por hacer, tanto en la teoría como en las aplicaciones, en este campo todavía bastante joven; numerosos problemas no han sido ni siquiera abordados hasta ahora. Como hemos mostrado aquí, sin embargo, esta teoría cuenta con una bella estructura matemática y cabe esperar que ayude al progreso en bastantes áreas de la física, tanto teóricas como prácticas.

Bibliografía complementaria

CHAOTIC DYNAMICS IN THE RF SUPERCONDUCTING QUANTUM-INTERFERENCE-DEVICE MAGNETOMETER: A COUPLED QUANTUM-CLASSICAL SYSTEM. J. Diggins, J. F. Ralph, T. P. Spiller, T. D. Clark, H. Prance y R. J. Prance, en *Physical Review E*, vol. 48, págs. 1854-1859. 1994.

WAVE CHAOS IN THE STADIUM: STATISTICAL PROPERTIES OF SHORT-WAVE SOLUTIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION. S. W. MacDonald y A. N. Kaufman, en *Physical Review A*, vol. 37, págs. 3067; 1998.

QUANTUM CHAOS FOR THE RADIALLY VIBRATING SPHERICAL BILLIARD. R. L. Liboff y M. A. Porter, en *Chaos*, vol. 10, págs. 366-370; 2000.

NANOMECHANICAL OSCILLATIONS IN A SINGLE-C_{60} TRANSISTOR. H. Park, J. Park, A. K. Lim, E. H. Anderson, A. P. Alivisatos y P. L. McEuen, en *Nature*, vol. 407, págs. 57-60; 2000.

IS SEMIQUANTUM CHAOS REAL? L. E. Ballentine, en *Physical Review E*, vol. 63, págs. 1-7, 2001.

NONADIABATIC DYNAMICS IN SEMIQUANTAL PHYSICS. M. A. Porter, en *Reports on Progress in Physics*, vol. 64, n.º 9, págs. 1165-1189; 2001.