Топология и приложения вполне неотрицательных пространств

• Статьи:

[GKL17] P. Galashin, S. N. Karp, and T. Lam. The totally nonnegative Grassmannian is a ball. arXiv:1707.02010.

[GKL18] P. Galashin, S. N. Karp, and T. Lam. The totally nonnegative part of G/P is a ball. *Adv. Math.*, 351:614–620, 2019. arXiv:1801.08953

[GKL19] P. Galashin, S. N. Karp, and T. Lam. Regularity theorem for totally nonnegative flag varieties. arXiv:1904.00527.

[GL18] Pavel Galashin and Thomas Lam. Parity duality for the amplituhedron. *Compos. Math.*, to appear. arXiv:1805.00600.

[GP18] P. Galashin and P. Pylyavskyy. Ising model and the positive orthogonal Grassmannian. *Duke Math. J.*, to appear. arXiv:1807.03282.

Регулярные клеточные комплексы.

Определение. *Регулярный клеточный комплекс*: топологическое пространство, разбитое на клетки (открытые шары), такое, что замыкание каждой клетки гомеоморфно замкнутому шару, а граница – сфере.

Пример. Любой многогранник – регулярный клеточный комплекс.

• Клеточный комплекс $\mathcal{K} \mapsto$ Ч.У.М. $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ ($a \le b$ если замыкание клетки b содержит клетку a).

Теорема (Björner (1984))**.** *Топология регулярного клеточного комплекса $\mathcal{K}$ однозначно восстанавливается по комбинаторике его клеток $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$.*

Теорема (Björner (1984))**.** *Если ЧУМ P является* shellable*, то существует** *регулярный клеточный комплекс $\mathcal{K}$, такой, что $P = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}$.*

• Мотивация: некоторые интересные ЧУМы являются shellable. Пример: *порядок Брюа* на перестановках [BW82]. Соответствующий клеточный комплекс естественным образом появляется в теории вполне положительных матриц [Lus94]. Доказать, что он регулярный, — тяжело [FS00], но можно [Her14].

[BW82] Anders Björner and Michelle Wachs. Bruhat order of Coxeter groups and shellability. *Adv. in Math.*, 43(1):87–100, 1982.

[Lus94] G. Lusztig. Total positivity in reductive groups. In *Lie theory and geometry*, volume 123 of *Progr. Math.*, pages 531–568. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.

[FS00] Sergey Fomin and Michael Shapiro. Stratified spaces formed by totally positive varieties. *Michigan Math. J.*, 48:253–270, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.

[Her14] Patricia Hersh. Regular cell complexes in total positivity. *Invent. Math.*, 197(1):57–114, 2014.

Определение.

$$\mathrm{Gr}(k,n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\}$$
$$= \left\{ {}^{k \times n \text{ матрицы}}_{\text{ранга } k} \right\} / \left\{ {}^{\text{операции}}_{\text{над строками}} \right\}$$

Координаты Плюкера: для $I \subset \{1,2,\dots,n\}$, $|I| = k$, Δ_I=максимальный минор на столбцах из I.

[Pos06] Alexander Postnikov. Total positivity, Grassmannians, and networks. arXiv:0609764.

Определение (Постников (2006)).

$$\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n) = \{V \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \Delta_I(V) \geq 0 \ \forall I\}.$$

Клетки и их замыкания соответствуют "аффинному порядку Брюа".
• *Многообразие частичных флагов*: для $\mathbf{k} = (k_1 < k_2 < \cdots < k_r)$,

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{k},n) = \{V_{k_1} \subset V_{k_2} \subset \ldots \subset V_{k_r} \subset \mathbb{R}^n \mid \dim V_{k_i} = k_i \ \forall i\}.$$

• Lusztig (1998) определил вполне неотрицательную часть $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$. Для $\mathbf{k} = (k)$,

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{k},n) = \mathrm{Gr}(k,n), \quad \mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n) = \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n).$$

Гипотеза (Постников (2006), Williams (2007)).
• $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ – *регулярный клеточный комплекс, гомеоморфный $k(n-k)$-мерному шару.*
• $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$ – *регулярный клеточный комплекс, гомеоморфный шару.*

• Lusztig (1998): $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$ стягиваемо.
• Williams (2007): ЧУМ – shellable.
• Postnikov–Speyer–Williams (2009): $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ – CW комплекс.
• Rietsch–Williams (2008): $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$ – CW комплекс.
• Rietsch–Williams (2010): Замыкание каждой клетки стягиваемо.

Теорема (G.–Karp–Lam).

[GKL17] $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ *гомеоморфен шару.*
[GKL18] $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$ *гомеоморфно шару.*
[GKL19] $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ *и* $\mathrm{Fl}_{\geq 0}(\mathbf{k},n)$ – *регулярные клеточные комплексы.*

Следствие из доказательства:

[Her14] Patricia Hersh. Regular cell complexes in total positivity. *Invent. Math.*, 197(1):57–114, 2014.

[GKL19] P. Galashin, S. N. Karp, and T. Lam. Regularity theorem for totally nonnegative flag varieties. arXiv:1904.00527.

• Ингредиенты доказательства в [GKL19]:
 (i) Обобщенная гипотеза Пуанкаре (Smale (1960), Freedman (1982), Перельман (2003));
 (ii) Вложение в аффинное многообразие флагов;

[GKL17] P. Galashin, S. N. Karp, and T. Lam. The totally nonnegative Grassmannian is a ball. arXiv:1707.02010.

Теорема ([GKL17]).

$\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ *гомеоморфен шару.*

Вопрос. Как доказать, что любой многогранник гомеоморфен шару?

Определение. *Циклическая симметрия*:

$$S : \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$$
$$[u_1|\ldots|u_n] \mapsto [(-1)^{k-1}u_n|u_1|\ldots|u_{n-1}].$$

Вопрос. Сколько точек $\mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$ инвариантны относительно действия S?

Предложение. *Существует единственная точка $X_0 \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$, такая, что $S(X_0) = X_0$.*

Лемма. *Пусть $X \in \mathrm{Gr}_{\geq 0}(k,n)$. Тогда:*
 (1) $\lim_{t\to\infty} X \cdot \exp(tS) = X_0$.
 (2) $X \cdot \exp(tS) \in \mathrm{Gr}_{>0}(k,n)$ *для* $t > 0$.

Тот же метод работает в других случаях:
• Циклически симметричный амплитуэдр;
• Пространство планарных электрических цепей;
• Пространство матриц корреляций планарной модели Изинга.

Приложения

Модель Изинга.
• Пусть $G=(V,E)$–планарный граф, нарисованный в диске, $J:E\to\mathbb{R}_{>0}$ – *энергия взаимодействия.*
• *Модель Изинга* – это вероятностная мера на пространстве $\{\pm1\}^V$ конфигураций спинов на вершинах G.
• Для конфигурации $\sigma\in\{\pm1\}^V$, вероятность пропорциональна ее *весу*:
$$\mathrm{wt}(\sigma):=\prod_{\{u,v\}\in E}\exp\left(J_{\{u,v\}}\sigma_u\sigma_v\right).$$
• Статсумма:
$$Z=\sum_{\sigma\in\{\pm1\}^V}\mathrm{wt}(\sigma).$$
• Вероятность конфигурации σ:
$$\mathrm{Prob}(\sigma):=\frac{\mathrm{wt}(\sigma)}{Z}.$$
• Корреляция: для $u,v\in V$,
$$\langle\sigma_u\sigma_v\rangle:=\mathrm{Prob}(\sigma_u=\sigma_v)-\mathrm{Prob}(\sigma_u\neq\sigma_v).$$

Теорема (Griffiths (1967))**.** *Для всех* $u,v\in V$, $\langle\sigma_u\sigma_v\rangle\geq 0$.

Теорема (Kelly–Sherman (1968))**.** *Для всех* $u,v,w\in V$,
$$\langle\sigma_u\sigma_w\rangle\geq\langle\sigma_u\sigma_v\rangle\cdot\langle\sigma_v\sigma_w\rangle.$$

Задача (Kelly–Sherman (1968))**.** Найти все неравенства, описывающие корреляции модели Изинга.

• M. Lis (2017): больше неравенств из теории вполне положительных матриц

[GP18] P. Galashin and P. Pylyavskyy. Ising model and the positive orthogonal Grassmannian. *Duke Math. J.*, to appear. arXiv:1807.03282.

Теорема (G.–Pylyavskyy (2018))**.** *Описание граничных корреляций планарной модели Изинга.*

Определение. Пусть $b_1,\dots,b_n$ – граничные вершины. Введем $n\times n$ матрицу $M(G,J)=(m_{ij})$,
$$m_{ij}=\langle\sigma_{b_i}\sigma_{b_j}\rangle.$$
• M – симметрическая матрица $(m_{ij}=m_{ji})$
• $m_{ii}=1$
• $0\leq m_{ij}\leq 1$.
• $M\in[0,1]^{\binom{n}{2}}$

Определение.
$$\mathcal{X}_n:=\{M(G,J)\mid G \text{ – планарный граф с } n \text{ граничными вершинами}, J:E(G)\to\mathbb{R}_{>0}\};$$
$$\overline{\mathcal{X}}_n:=\text{замыкание } \mathcal{X}_n \text{ в } [0,1]^{\binom{n}{2}}.$$

Пример $(n=2)$**.**
$$M(G,J)=\begin{pmatrix}1 & m_{12}\\ m_{12} & 1\end{pmatrix},$$
$$m_{12}=\langle\sigma_1\sigma_2\rangle=\frac{2\exp(J_e)-2\exp(-J_e)}{2\exp(J_e)+2\exp(-J_e)}$$

$J_e=0$	$J_e\in(0,\infty)$	$J_e=\infty$
$m_{12}=0$	$m_{12}\in(0,1)$	$m_{12}=1$

• $\mathcal{X}_2\cong[0,1)$
• $\overline{\mathcal{X}}_2\cong[0,1]$

• В $\overline{\mathcal{X}}_n$ разрешается стягивать ребра.
• Ортогональный грассманиан:
$$\mathrm{OG}(n,2n):=\{W\in\mathrm{Gr}(n,2n)\mid \Delta_I(W)=\Delta_{[2n]\setminus I}(W)\quad\forall I\}.$$

Определение (Huang–Wen (2013))**.**
$$\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n):=\mathrm{OG}(n,2n)\cap\mathrm{Gr}_{\geq0}(n,2n).$$
• $\dim\mathrm{Gr}_{\geq0}(n,2n)=n^2$;
• $\dim\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n)=\binom{n}{2}$;
• Клеточное разбиение приходит из $\mathrm{Gr}_{\geq0}(n,2n)$.
• *Удваивающее отображение:*
$$\phi:[0,1]^{\binom{n}{2}}\hookrightarrow\mathrm{OG}(n,2n)$$
$$M\mapsto\widetilde{M}$$

Теорема (G.–Pylyavskyy (2018))**.**
• *ϕ дает гомеоморфизм*
$$\overline{\mathcal{X}}_n\xrightarrow{\sim}\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n).$$
• *Оба пространства гомеоморфны замкнутому $\binom{n}{2}$-мерному шару.*

Пример $(n=2)$**.**
$$\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1 & 1 & m & -m\\ -m & m & 1 & 1\end{pmatrix}$$
• $\overline{\mathcal{X}}_n:\ 0\leq m\leq 1$
• $\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n):$
$$\Delta_{12}=\Delta_{34}=2m\geq0;$$
$$\Delta_{13}=\Delta_{24}=1+m^2\geq0;$$
$$\Delta_{14}=\Delta_{23}=1-m^2\geq0.$$

• Получаем описание граничных корреляций полиномиальными неравенствами.
• Также это дает способ восстановить веса ребер по измерениям на границе.

Вопрос. Как найти критическую температуру модели Изинга?

Двойственность K–W.

[KW41] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. I. *Phys. Rev. (2)*, 60:252–262, 1941.

• $(G,J)\xrightarrow{\mathrm{KWD}}(G^*,J^*)$
• G^*=двойственный G граф
• $J^*_{e^*}$ – единственное положительное решение
$$\sinh(2J_e)\sinh(2J^*_{e^*})=1.$$
• Критическую температуру $J=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$ для $\mathbb{Z}^2$ можно найти из уравнения
$$\sinh(2J)\sinh(2J)=1.$$
• Для треугольной/шестиугольной решетки, критическую температуру можно найти из условия $(G,J)\approx(G^*,J^*)$.

Вопрос. Что будет, если применить эту двойственность дважды?

Теорема (G.–Pylyavskyy (2018))**.**
• *ϕ дает гомеоморфизм*
$$\overline{\mathcal{X}}_n\xrightarrow{\sim}\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n).$$
• *Оба пространства гомеоморфны замкнутому $\binom{n}{2}$-мерному шару.*
• *ϕ переводит* KWD *в циклический сдвиг*
$$S:\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n)\xrightarrow{\sim}\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n).$$
• *Для каждого $n\geq2$, существует единственная* KWD*-инвариантная $n\times n$ матрица корреляций M_0 (а именно, $M_0=\phi^{-1}(X_0)$).*

• В следующих сериях...

Теорема (G.–Pylyavskyy (2020+))**.** *Критическая модель Изинга в диске $\leftrightarrow$ циклически неподвижная точка $X_0\in\mathrm{OG}_{\geq0}(n,2n)$.*