

Пространства модулей шарнирных и квазишарнирных полигональных механизмов.

Паша Галашин

СПбГУ

pgalashin@gmail.com

12 мая 2014 г.

Многогранники, строящиеся по комбинаторным данным

- Пермutoэдр
- Ассоциоэдр
- Графассоциоэдр
- Обобщенный ассоциоэдр, обобщенный пермutoэдр
- Нэстоэдр

Что мы предлагаем?

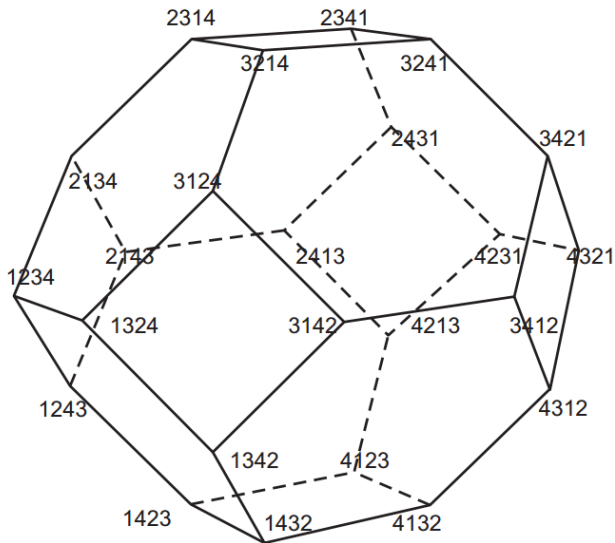
Определение

Простой игрой с n игроками называется функция $g : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1 Монотонность – если $T \subset S$, то $g(T) \leq g(S)$.
- 2 Постоянная сумма – для любого T верно $g(T) + g(\overline{T}) = 1$.

- Пермутоэдр + Простая игра $\longrightarrow$ Многообразие
- Мы получим семейство многообразий, в которых комбинаторно задается
 - клеточное разбиение
 - двойственное к нему
 - звезда любой вершины

Пермutoэдp



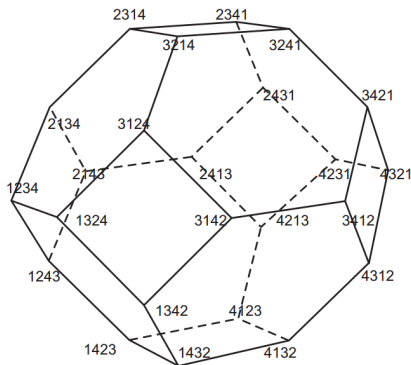


Рис.: Пермutoэдp с метками на вершинах

Свойства

- 1 k -мерные Грани $\longleftrightarrow$ линейно упорядоченные разбиения $[n]$ на $n - k$ множеств
- 2 Инцидентность граней соответствует подразбиениям
- 3 Грани – декартовы произведения пермutoэдpов меньшей размерностей

Определение

Плоский полигональный шарнирник с вектором длин $L = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ – это набор из n жестких ребер с длинами $l_1, \dots, l_n$, соединенных в замкнутую ломаную на плоскости.

Определение

Конфигурацией шарнирника L называется последовательность комплексных чисел $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ по модулю равных единице, такая, что

$$\sum_{i=1}^n u_i l_i = 0.$$

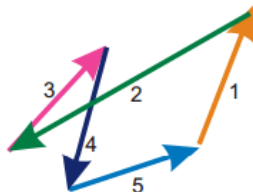
Мы рассматриваем пространство $M(L)$ всех возможных конфигураций шарнирника L , профакторизованное по сохраняющим ориентацию изометриям $\mathbb{R}^2$.

Определение

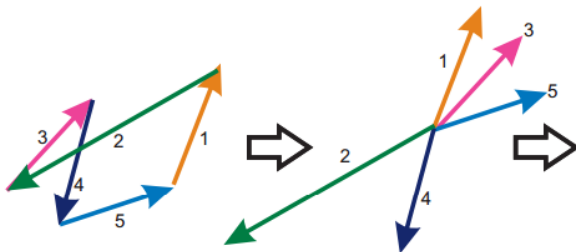
Шарнирник L общего положения, если не существует подмножества $J \subset [n]$ такого, что $\sum_{i \in J} l_i = \sum_{i \notin J} l_i$.

- Для L общего положения $M(L)$ – гладкое многообразие размерности $n - 3$
- $M(L)$ зависит только от камеры, в которой находится L (только от простой игры, индуцированной L)
- K. Walker conjecture: камера L определяется по кольцу когомологий $M(L)$ с точностью до перестановки координат. Частично доказано (Farber, Hausmann, Schuetz, 2009)
- $M(L)$ гомеоморфно пространству стабильных L -взвешенных конфигураций точек на окружности (Karovich, Millson, 1995-1996)
- Группа гомологий $H_k(M(L), \mathbb{Z})$ свободная абелева ранга $a_k + a_{n-3-k}$ (Farber, Schuetz, 2007). a_k это количество коротких подмножеств $[n]$ размера $k + 1$, содержащих самое длинное ребро.

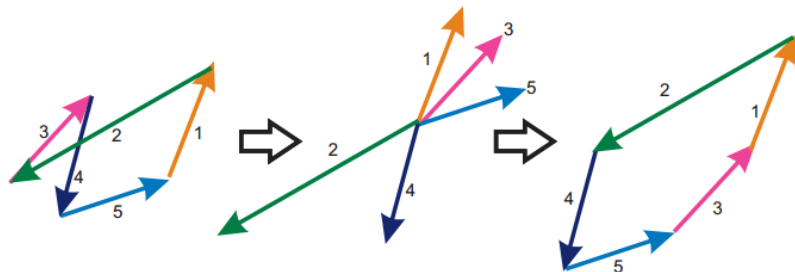
Клеточное разбиение $M(L)$



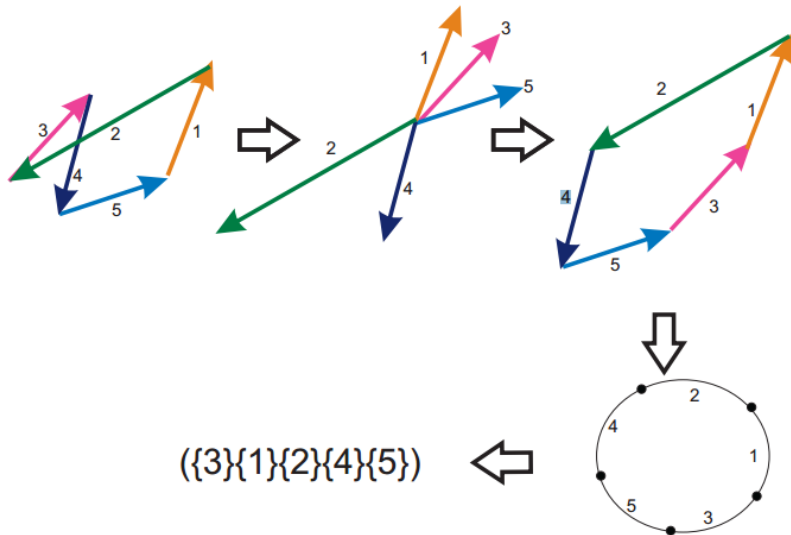
Клеточное разбиение $M(L)$



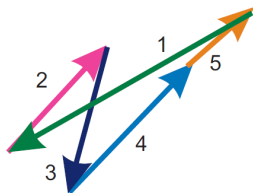
Клеточное разбиение $M(L)$



Клеточное разбиение $M(L)$



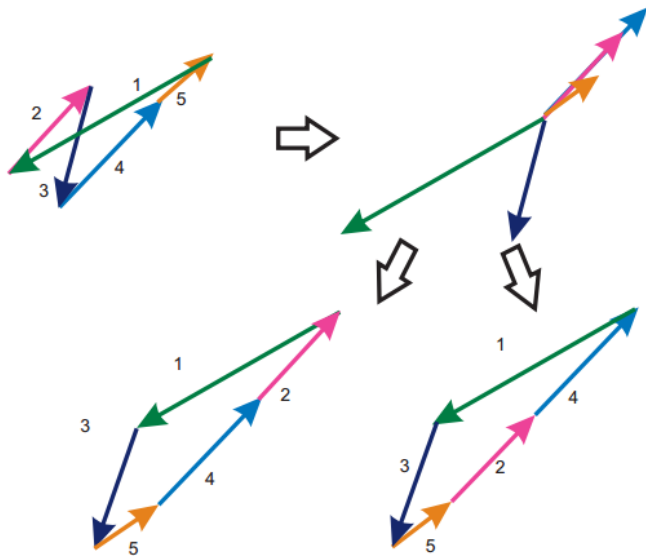
Клеточное разбиение $M(L)$



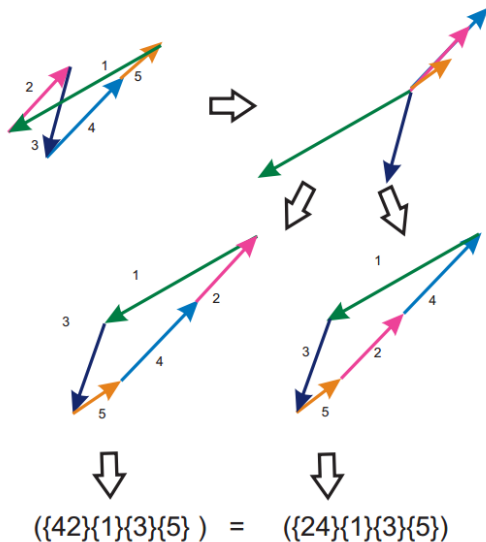
Клеточное разбиение $M(L)$



Клеточное разбиение $M(L)$



Клеточное разбиение $M(L)$



Теорема (Панина, 2012)

- $M(L)$ допускает структуру регулярного клеточного комплекса $CWM(L)$, схожую со структурой граней пермutoэдра, а именно:
- k -клетки помечены **циклически упорядоченными разбиениями множества $[n]$ на $k + 3$ непустых коротких подмножества.**
- Поскольку этот комплекс регулярный, а $M(L)$ многообразие, то мы можем также предъявить структуру двойственного комплекса $CWM^*(L)$:
- k -клетки помечены **циклически упорядоченными разбиениями множества $[n]$ на $n - k$ непустых коротких подмножества.**
- В обоих комплексах отношение инцидентности задается подразбиениями.

Определение

Простой игрой с n игроками называется функция $g : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1 Монотонность – если $T \subset S$, то $g(T) \leq g(S)$.
- 2 Постоянная сумма – для любого T верно $g(T) + g(\overline{T}) = 1$.

Любую простую игру мы также будем называть *квазишарнирником*.

Определение

Пусть дан квазишарнирник $g : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}$. Флипом этого квазишарнирника относительно множества T называется функция $\mathcal{F}_T^g : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}$, такая, что:

- $\mathcal{F}_T^g(T) = 1 - g(T)$, $\mathcal{F}_T^g(\overline{T}) = 1 - g(\overline{T})$.
- $\mathcal{F}_T^g(S) = g(S)$ для $S \neq T, \overline{T}$.

Утверждение

Если T было максимальным (по включению) коротким множеством или минимальным длинным множеством, то тогда $\mathcal{F}_T^g$ также будет квазишарнирником.

Любой шарнирник является квазишарнирником. Вопрос: в каком случае квазишарнирник является шарнирником?

Определение

Простая игра удовлетворяет условию устойчивости к обмену, если для любого N и для любого семейства из N коротких подмножеств множества $[n]$ нельзя так переставить их элементы, чтобы получить N длинных множеств.

Теорема (Слинько, 2000)

Дана простая игра (квазишарнирник). Следующие два условия равносильны:

- *Она удовлетворяет условию устойчивости к обмену.*
- *Существует шарнирник, индуцирующий эту простую игру.*

Квазишарнирники $\neq$ шарнирники

- Для $n \leq 5$ любой квазишарнирник является шарнирником.
- Приведем пример квазишарнирника, который не является шарнирником.
- Нанем с простой игры g , индуцированной шарнирником с длинами $L = (1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1, 1, 1)$.
- Пусть T это множество из трех последних ребер. Оно максимальное короткое.

Утверждение

Квазишарнирник $\mathcal{F}_T^g$ не является шарнирником.

Суперсимметричный пример

Рассмотрим такой квазишарнирник на 6 элементах: все множества размера ≤ 2 короткие, их дополнения длинные, а из 20 множеств размера 3 длинные только множества из этого списка:

123, 124, 135, 146, 156, 236, 245, 256, 345, 346.

Утверждение

Этот квазишарнирник не является шарнирником.

Пусть дан квазишарнирник g . Дословно повторим конструкцию клеточного разбиения для шарнирников и возьмем ее за определение пространства модулей $CWM^*(g)$ квазишарнирника g :

- k -клетки помечены **циклически упорядоченными разбиениями множества $[n]$ на $n - k$ непустых коротких подмножества**.
- отношение инцидентности задается подразбиениями.

Утверждение

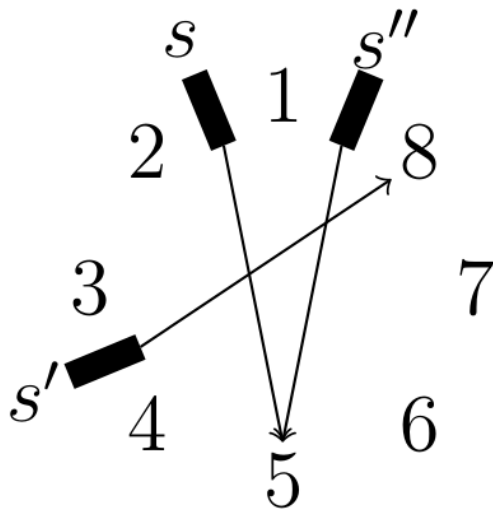
Это действительно клеточный комплекс. То есть, граница каждой “клетки” комбинаторно изоморфна сфере, так как является декартовым произведением пермутоэдров.

Теорема

Для любого квазишарнирника g комплекс $CWM^(g)$ является комбинаторным многообразием размерности $n - 3$.*

Теорема

Для любой вершины v этого комплекса существует вектор длин L_v и вершина u в $CWM^(L_v)$, такая, что звезды u и v комбинаторно изоморфны.*



$$l_i := 1 + \langle \text{количество входящих в } i \text{ стрелочек} \rangle.$$

Утверждение

Флип квазишарнирика относительно короткого множества T осуществляет на его пространстве модулей перестройку Морса индекса $n - |T| - 1$.

Доказательство.

Мы вырезаем подкомплекс

$$(\partial \Pi_{n-|T|}) \times \Pi_{|T|},$$

а вклеиваем взамен подкомплекс

$$\Pi_{n-|T|} \times \partial \Pi_{|T|}$$

с той же границей.

Здесь Π_k обозначает пермutoэдр на k элементах, он гомеоморфен шару размерности $k - 1$.



- Напомним, что для шарнирника числа Бетти выражаются формулой

$$\beta_k(M(L)) = a_k + a_{n-3-k}.$$

где a_k это количество коротких подмножеств $[n]$ размера $k + 1$, содержащих самое длинное ребро.

- **Проблема:** у квазিশарнирника нет самого длинного ребра!

Вспомогательные симплициальные комплексы

Пусть дан квазишарнирник g . Для каждого $k \leq n$ введем симплициальный комплекс Δ_k :

- Вершины нумеруются числами $1, \dots, n$.
- Если множество вершин T имеет размер не больше k , то оно заклеено симплексом.
- Если множество вершин T имеет размер $k + 1$, то оно заклеено симплексом только если оно длинное.

Утверждение

Для любого шарнирника $\beta_{n-k-2}(\Delta_{n-k-2}) = a_k$.

Теорема

Для любого квазишарнирника

$$\beta_k(CWM^*(g)) = \beta_{n-k-2}(\Delta_{n-k-2}) + \beta_{k+1}(\Delta_{k+1}).$$

Спасибо!