

СИММЕТРИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЦВЕТНОЙ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

• Статья:

Pavel Galashin. Symmetries of stochastic colored vertex models. [arXiv:2003.06330](https://arxiv.org/abs/2003.06330).

Стохастическая 6В модель.

• Введена в 2016:

[KMMO16] A. Kuniba, V. V. Mangazeev, S. Maruyama, and M. Okado. Stochastic R matrix for $U_q(A_n^{(1)})$. *Nuclear Phys. B*, 913:248–277, 2016.

• В пределе дает множество других известных вероятностных моделей.

[BGW19] Alexei Borodin, Vadim Gorin, and Michael Wheeler. Shift-invariance for vertex models and polymers. [arXiv:1912.02957](https://arxiv.org/abs/1912.02957).

Определение модели.

• Рассматриваем пути цветов $1, 2, \dots, n$ на квадратной решетке.

• Когда два пути цветов $c_1 < c_2$ входят в квадрат слева и снизу, они либо пересекаются, либо нет:

	$\rightarrow$		или	
Вероятность:		p		$1 - p$

	$\rightarrow$		или	
Вероятность:		qp		$1 - qp$

• $0 < q < 1$ фиксировано, p – спектральный параметр (для каждого квадрата свой).

• Стартовая ситуация: $M \times N$ прямоугольник, $n = M + N$ путей входят слева-снизу. Цвета входящих путей упорядочены и попарно различны.

• Строки помечены $x_1, \dots, x_M$, столбцы – $y_1, \dots, y_N$. Спектральный параметр квадрата (i, j) равен $p_{i,j} = \frac{y_j - x_i}{y_j - qx_i}$.

• На выходе справа-сверху получаем случайную перестановку $\pi \in S_n$ с вероятностью $Z_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Имеем $\sum_{\pi \in S_n} Z_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$.

Горизонтальные/вертикальные граничные условия.

• Для $\pi \in S_n$, обозначим

$$\mathbb{H}^\pi := \{(i, \pi(i)) \mid i > M \text{ и } \pi(i) \leq N\},$$

$$\mathbb{V}^\pi := \{(i, \pi(i)) \mid i \leq M \text{ и } \pi(i) > N\}.$$

• Вероятность увидеть заданные граничные условия $(\mathbb{H}, \mathbb{V})$ равна

$$Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{\pi \in S_n: \mathbb{H}^\pi = \mathbb{H} \text{ и } \mathbb{V}^\pi = \mathbb{V}} Z_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Флип.

• Для $\mathbb{H} = \{(l_1, r_1), \dots, (l_h, r_h)\}$, положим

$$180^\circ(\mathbb{H}) := \{(n + 1 - r_1, n + 1 - l_1), \dots,$$

$$(n + 1 - r_h, n + 1 - l_h)\}.$$

• $\text{rev}(\mathbf{y}) := (y_N, y_{N-1}, \dots, y_1)$

Теорема 1.

$$Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Z^{180^\circ(\mathbb{H}), \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \text{rev}(\mathbf{y})).$$

Пример. $M = 2, N = 2$

$$\mathbb{H} = 180^\circ(\mathbb{H}) = \{(3, 2)\}, \mathbb{V} = \{(2, 3)\}$$

$$\begin{aligned} LHS &= (1 - p_{1,2})(1 - p_{2,1}) \\ &\quad \times (p_{1,1}(1 - qp_{2,2}) + p_{2,2}(1 - p_{1,1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RHS &= (1 - p_{1,1})(1 - p_{2,2}) \\ &\quad \times (p_{1,2}(1 - qp_{2,1}) + p_{2,1}(1 - p_{1,2})), \end{aligned}$$

где $p_{i,j} = \frac{y_j - x_i}{y_j - qx_i}$.

Следствие. Количество конфигураций

для $Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равно количеству конфигураций для $Z^{180^\circ(\mathbb{H}), \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \text{rev}(\mathbf{y}))$.

Задача. Существует ли простая биекция?

Функции высоты.

• $\text{Ht}_\pi(i, j) := \#\{c > i \mid \pi(c) \leq j\}$.

• Рассмотрим *лестничную область* между двумя путями P, Q .

• (P, Q) -разрез: $C = (l, d, u, r)$, где диагональ прямоугольника $[l, r] \times [d, u]$ “разрезает” область (P, Q) на две части.

• $\text{Ht}_\pi(C)$ = количество путей, пересекающих эту диагональ слева направо.

• π – случайная перестановка (вероятность = $Z_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), $\text{Ht}(C; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ – соответствующая случайная величина.

$$\text{supp}_H(C; \mathbf{x}) := \{x_l, x_{l+1}, \dots, x_r\}$$

$$\text{supp}_V(C; \mathbf{y}) := \{y_d, y_{d+1}, \dots, y_u\}$$

• Факт: распределение $\text{Ht}(C; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть (симметрическая) функция от $x_l, x_{l+1}, \dots, x_r$ и от $y_d, y_{d+1}, \dots, y_u$.

Теорема 2. Пусть заданы:

• Лестничные области (P, Q) и (P', Q') ;

• $\mathbf{x}'$ – перестановка переменных $\mathbf{x}$;

• $\mathbf{y}'$ – перестановка переменных $\mathbf{y}$;

• набор $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_m)$ (P, Q) -разрезов;

• набор $\mathcal{C}' = (C'_1, \dots, C'_m)$ (P', Q') -разрезов;

Допустим, что для $i = 1, \dots, m$,

$$\text{supp}_H(C_i; \mathbf{x}) = \text{supp}_H(C'_i; \mathbf{x}'),$$

$$\text{supp}_V(C_i; \mathbf{y}) = \text{supp}_V(C'_i; \mathbf{y}').$$

Тогда следующие распределения равны:

$$\begin{aligned} & \left(\text{Ht}(C_1; \mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, \text{Ht}(C_m; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \\ & \stackrel{d}{=} \left(\text{Ht}(C'_1; \mathbf{x}', \mathbf{y}'), \dots, \text{Ht}(C'_m; \mathbf{x}', \mathbf{y}') \right). \end{aligned}$$

• Теорема говорит, что любое преобразование, сохраняющее одномерные распределения функций высоты, сохраняет и их совместное распределение.

• Подтверждает гипотезу [BGW19].

• Доказательство сводится к многократному применению флипов.

• Сдвиг [BGW19] = двойной флип.

Алгебра Гекке $\mathcal{H}_q(S_n)$.

- Образующие: $\{T_\pi\}_{\pi \in S_n}$, соотношения:

$$T_u T_w = T_{uw} \quad \text{для } \ell(uw) = \ell(u) + \ell(w),$$

$$(T_k + q)(T_k - 1) = 0 \quad \text{для } k = 1, \dots, n-1.$$

$\ell(\pi)$ = количество инверсий π .

- Обозначим $s_k := (k, k+1) \in S_n$, $T_k := T_{s_k}$.
- Для $k = 1, \dots, n-1$, введем

$$R_k(\mathbf{p}) := \mathbf{p}T_k + (1 - \mathbf{p}) \in \mathcal{H}_q(S_n).$$

- Чему равно $T_\pi \cdot R_k(\mathbf{p})$?

$$T_\pi \cdot R_k(\mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{p}T_{\pi s_k} + (1 - \mathbf{p})T_\pi, & \pi s_k > \pi, \\ q\mathbf{p}T_{\pi s_k} + (1 - q\mathbf{p})T_\pi, & \pi s_k < \pi. \end{cases}$$

- Получаем интерпретацию стохастической 6В модели на языке $\mathcal{H}_q(S_n)$: вероятность $Z_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равна коэффициенту T_π в разложении элемента

$$R_{k_1}(\mathbf{p}_{1,1}) \cdots R_{k_{MN}}(\mathbf{p}_{M,N})$$

по T -базису.

- Симметрия между умножением слева и справа:

$$T_\pi \cdot R_k(\mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{p}T_{\pi s_k} + (1 - \mathbf{p})T_\pi, & \pi s_k > \pi, \\ q\mathbf{p}T_{\pi s_k} + (1 - q\mathbf{p})T_\pi, & \pi s_k < \pi. \end{cases}$$

$$R_k(\mathbf{p}) \cdot T_\pi = \begin{cases} \mathbf{p}T_{s_k \pi} + (1 - \mathbf{p})T_\pi, & s_k \pi > \pi, \\ q\mathbf{p}T_{s_k \pi} + (1 - q\mathbf{p})T_\pi, & s_k \pi < \pi. \end{cases}$$

[BB19] Alexei Borodin and Alexey Bufetov. Color-position symmetry in interacting particle systems.

[arXiv:1905.04692](#)

Теорема ([BB19]). Коэффициент T_π в $R_{k_1}(\mathbf{p}_1) \cdots R_{k_r}(\mathbf{p}_r)$ равен коэффициенту $T_{\pi^{-1}}$ в $R_{k_r}(\mathbf{p}_r) \cdots R_{k_1}(\mathbf{p}_1)$.

Базис Янга–Бакстера.

- Элементы $R_k(\mathbf{p}_{i,j})$ удовлетворяют

$$R_k(\mathbf{p}_{a,b})R_{k+1}(\mathbf{p}_{a,c})R_k(\mathbf{p}_{b,c}) = R_{k+1}(\mathbf{p}_{b,c})R_k(\mathbf{p}_{a,c})R_{k+1}(\mathbf{p}_{a,b}).$$

(где $\mathbf{p}_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{z_j - qz_i}$.)

- Значит, для $w = s_{k_1} \cdots s_{k_r} \in S_n$, элемент

$$Y^w = R_{k_1}(\mathbf{p}_{i_1,j_1}) \cdots R_{k_r}(\mathbf{p}_{i_r,j_r})$$

однозначно определен. Элементы $\{Y^w\}_{w \in S_n}$ образуют базис Янга–Бакстера в $\mathcal{H}_q(S_n)$.

[LLT97] Alain Lascoux, Bernard Leclerc, and Jean-Yves Thibon. Flag varieties and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 40(1):75–90, 1997.

- Вероятности 6В модели = коэффициенты матрицы перехода из $\{Y^w\}$ в $\{T_\pi\}$.

Флип: доказательство.

- Индукция по сумме высот правых концов горизонтальных отрезков.
- База: $\mathbb{H}_0$ = пути плотно упакованы снизу.
- Переход: уравнение Я–Б.
- $Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выражается через $Z^{\mathbb{H}_0, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симметрично тому как $Z^{180^\circ(\mathbb{H}), \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \text{rev}(\mathbf{y}))$ выражается через $Z^{180^\circ(\mathbb{H}_0), \mathbb{V}}(\mathbf{x}, \text{rev}(\mathbf{y}))$. $\square$

Позитроидные многообразия.

- Грассманиан:

$$\text{Gr}(k, n) = \{V \subseteq \mathbb{F}^n \mid \dim(V) = k\}.$$

- Если выбрать базис, можно представить V как линейную оболочку строк $k \times n$ матрицы M .
- Смена базиса = операции над строками.
- $\Delta_I(M)$ – координаты Плюкера (максимальные миноры матрицы M)

[KLS13] Allen Knutson, Thomas Lam, and David E. Speyer. Positroid varieties: juggling and geometry. *Compos. Math.*, 149(10):1710–1752, 2013.

- Позитроидное многообразие $\Pi_{k,n}^\circ \subseteq \text{Gr}(k, n)$:

$$\Pi_{k,n}^\circ := \{\Delta_{1,\dots,k}, \Delta_{2,\dots,k+1}, \dots, \Delta_{n,\dots,k-1} \neq 0\}.$$

- Сколько точек в $\Pi_{k,n}^\circ$ над $\mathbb{F}_q$?

Пример. Для $k = 2$, $n = 4$, точки $\Pi_{k,n}^\circ$ находятся в биекции с множеством

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} \middle| a \neq 0, d \neq 0, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Количество таких матриц:

$$(q-1)^2(q^2 - (q-1)) = (q-1)^4 + q(q-1)^2.$$

- Это конкретный R -многочлен Каждана–Люстига.

- 6В модель при $\mathbf{y} \rightarrow 0$: $\mathbf{p}_{i,j} = \frac{y_j - x_i}{y_j - qx_i} \rightarrow 1/q$.

	$\rightarrow$		или	
Вероятность:		$1/q$		$1 - 1/q$

	$\rightarrow$		или	
Вероятность:		1		0

- Вероятность тождественной перестановки в 6В модели при $\mathbf{y} = 0$:

$$Z^{\text{id}}(\mathbf{x}, 0) = (1 - 1/q)^4 + 1/q \cdot (1 - 1/q)^2$$

Предложение. Количество точек $\Pi_{k,n}^\circ$ над $\mathbb{F}_q$ равно $q^{k(n-k)} Z^{\text{id}}(\mathbf{x}, 0)$, где

$Z^{\text{id}}(\mathbf{x}, 0)$ = вероятность тождественной перестановки в 6В модели внутри $k \times (n-k)$ прямоугольника при $\mathbf{y} \rightarrow 0$.

- Доказательство: 6В-конфигурации находятся в биекции с “Deodhar’s distinguished subexpressions”.

[Deo85] Vinay V. Deodhar. On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells. *Invent. Math.*, 79(3):499–511, 1985.

- Обобщается на случай $Z^\pi(\mathbf{x}, 0)$ для произвольного $\pi \in S_n$.
- При $\mathbf{y} \rightarrow 0$, обе части флипа

$$Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(\mathbf{x}, 0) = Z^{180^\circ(\mathbb{H}), \mathbb{V}}(\mathbf{x}, 0)$$

считают количество точек в разных подмногообразиях $\text{Gr}(k, n)$ над $\mathbb{F}_q$.

- Доказательство флипа с помощью Я–Б “поднимается” на уровень $\text{Gr}(k, n)$:

[MS16] Greg Muller and David E. Speyer. Cluster algebras of Grassmannians are locally acyclic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(8):3267–3281, 2016.

[GL19] Pavel Galashin and Thomas Lam. Positroid varieties and cluster algebras. [arXiv:1906.03501](#)

Вопрос. Можно ли поднять всю 6В модель на уровень $\text{Gr}(k, n)$?

Связь с RSK.

[Dau20] Duncan Dauvergne. Hidden invariance of last passage percolation and directed polymers. [arXiv:2002.09459](#)

- Результаты очень похожи, но наборы моделей практически не пересекаются

- Дункан тоже по сути сводит все преобразования к композиции флипов. У него флип выводится из геометрического RSK-алгоритма.

Вопрос. Помогает ли это обобщить RSK на 6В модель?