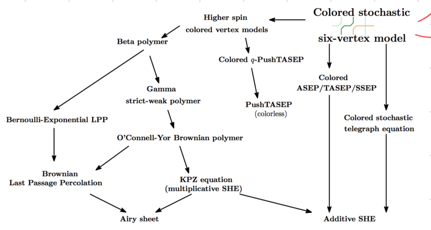
Симметрии стохастической цветной 6В модели.

arXiv: 2003.06330

- модель введена в 2016
- Предельные случаи:



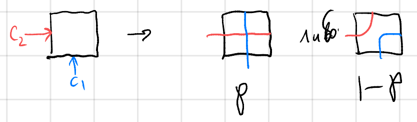
[BGW19] Alexei Borodin, Vadim Gorin, and Michael Wheeler. Shift-invariance for vertex models and polymers. arXiv:1912.02957, 2019.

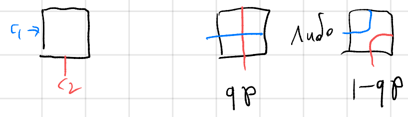
Определение.

- цветные пути на $\mathbb{Z}^2$

цвета: $\{1, 2, \ldots, n\}$

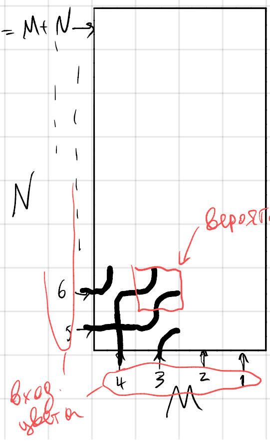
- $c_1 < c_2$

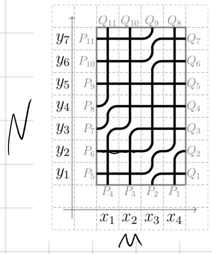




$0 < q < 1$ — фикс.

p — спектр. параметр.





$n = M + N \qquad \pi \in S_n$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 10 & 8 & 6 & 4 & 11 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$2^{M \cdot N}$ картинок $\longrightarrow$ $n!$ перестановок

y_j - - - $\boxed{p_{ij}}$ ⋮ x_i

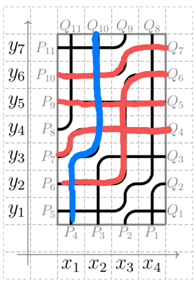
$$p_{ij} = \boxed{\frac{y_j - x_i}{y_j - q x_i}}$$

интегрируемые веса

$Z^{\pi}(x, y) =$ вероятность $\pi \in S_n$

$$\sum_{\pi \in S_n} Z^{\pi}(x, y) = 1$$

Граничные условия



$\mathbb{H}^{\pi} = \{(6,6), (7,4), (9,5), (10,7)\}$

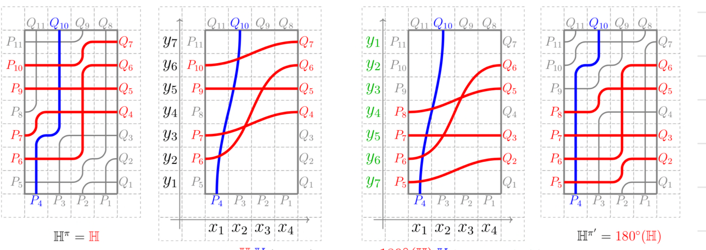
$\mathbb{V}^{\pi} = \{(4, 10)\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 10 & 8 & 6 & 4 & 11 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$Z^{\mathbb{H}, \mathbb{V}}(x, y) = \sum_{\substack{\pi \in S_n: \\ \mathbb{H}^{\pi} = \mathbb{H} \\ \mathbb{V}^{\pi} = \mathbb{V}}} Z^{\pi}(x, y)$$

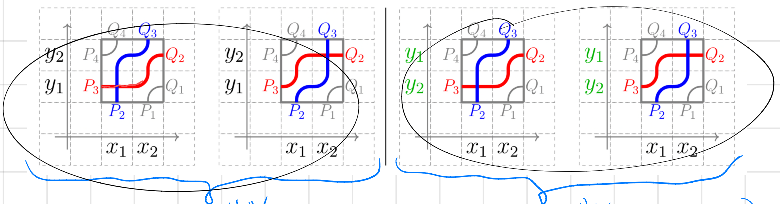
Флип.

Теорема 1.



$$Z^{\mathbb{H},\mathbb{V}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Z^{180^\circ(\mathbb{H}),\mathbb{V}}(\mathbf{x},\mathrm{rev}(\mathbf{y}))$$

Пример. $M = N = 2$ $\quad \mathbb{H} = \{(3,2)\} = 180^\circ(\mathbb{H})$, $\quad \mathbb{V} = \{(2,3)\}$



$Z^{H,V}(x,y)$ $\qquad$ $Z^{180(H),V}(x, rev(y))$

$$p_{ij} = \frac{y_j - x_i}{y_j - q x_i} \qquad y/x = \frac{1-qt}{1-t} \qquad p_{ij} = t$$

x_2, y_1

$$Z^{H,V}(x,y) = (1-p_{21})(1-p_{12})\big(p_{11}\cdot(1-qp_{22}) + (1-p_{11})p_{22}\big)$$

$$Z^{180(H),V}(x,y) = (1-p_{22})(1-p_{11})\big(p_{12}(1-qp_{21}) + (1-p_{12})p_{21}\big)$$

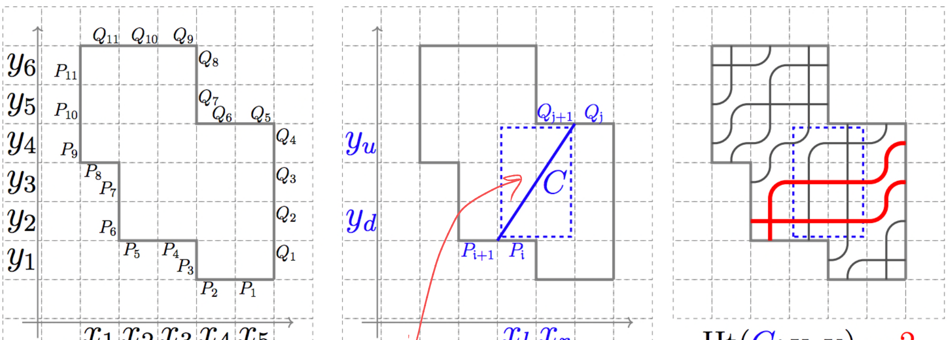
Следствие кол-во картинок для $Z^{H,V}$

$\|$

кол-ву картинок для $Z^{180(H),V}$.

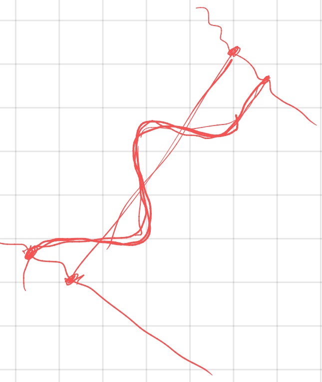
Функции высоты

$$Ht_\pi(i,j) = \#\{c > i \mid \pi(c) \le j\}$$



$\mathrm{Ht}(C;\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2$

лестн. область (P,Q) $\qquad$ (P,Q) - разрез



$Ht_\pi(C)$ - случ. величина.

π - вероятность $Z^{\mathbb{V}}(x,y)$

$$supp_H(C;x) = \{x_l, \dots, x_r\}$$

$$supp_V(C;y) = \{y_d, \dots, y_u\}$$

Факт: распр. $Ht_\pi(C)$ явл. симметрич. функцией
- от $\{x_l, \dots, x_r\}$
- от $\{y_d, \dots, y_u\}$.

я-б.

Теорема 2. Пусть дано:

- (P,Q), (P',Q')
- x' = перестан. x
- y' = перест. y

— $C = (C_1, \ldots, C_m)$ — набор разрезов для (P, Q)

— $C' = (C_1', \ldots, C_m')$ — наб. разр. для (P', Q')

Допустим,

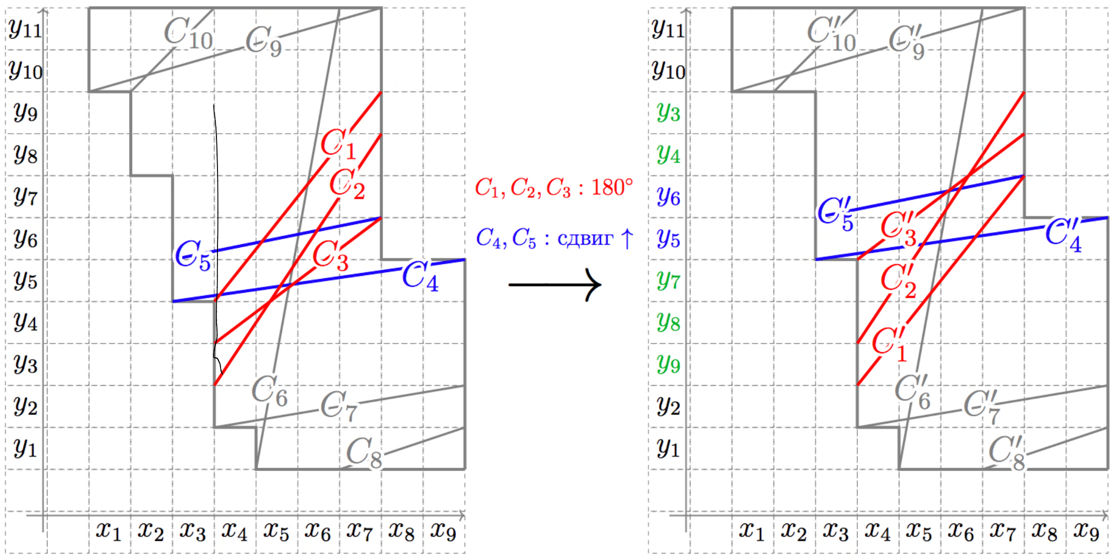
$$supp_H(C_i, x) = supp_H(C_i', x')$$
$$supp_V(C_i, y) = supp_V(C_i', y').$$

Тогда:

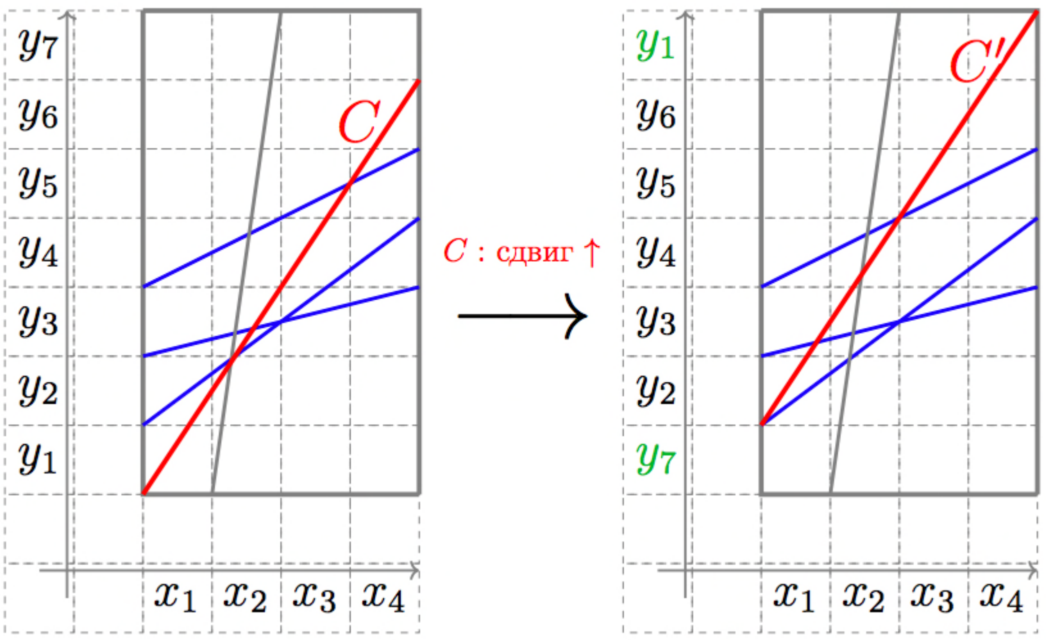
$$\left(Ht(C_1; x, y), \ldots, Ht(C_m; x, y)\right) \stackrel{?}{=} \left(Ht(C_1', x', y'), \ldots, Ht(C_m', x', y')\right)$$

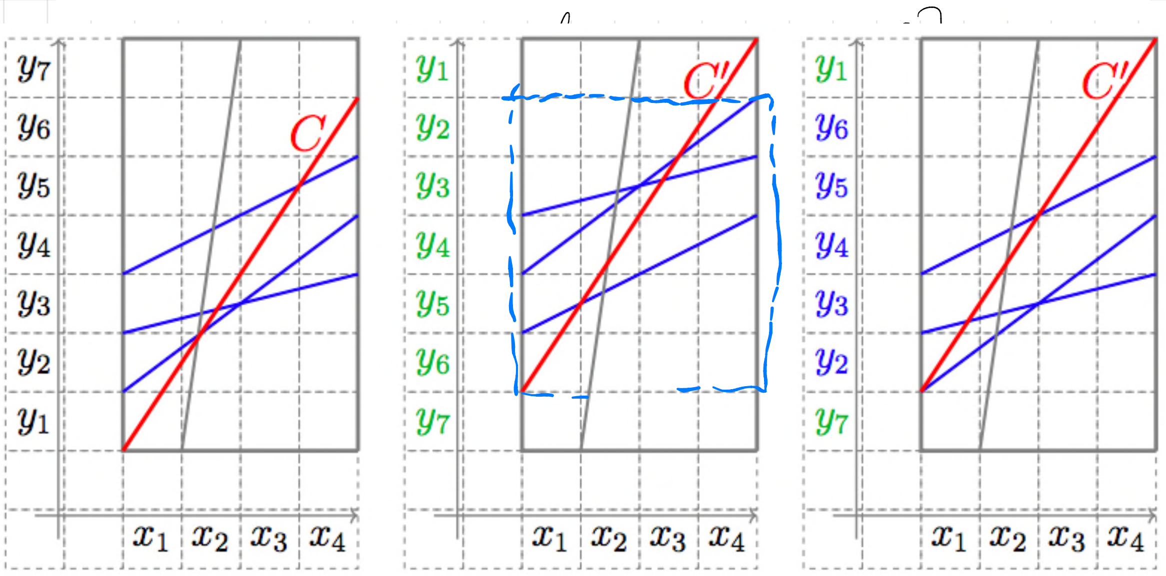
— Подтверждает гипотезу [BGrW19]

— Док-во основано на многокр. применении Теоремы 1



$$supp_H(C_i, x) = supp_H(C_i', x')$$
$$supp_V(C_3, y) = \{y_4, y_5, y_6\} = supp_V(C_3', y')$$





сдвиг из [BGW19] = двойной флип.

Алгебра Гекке $\mathcal{H}_q(S_n)$

Базис $\{T_\pi\}_{\pi \in S_n}$

кол-во инверсий

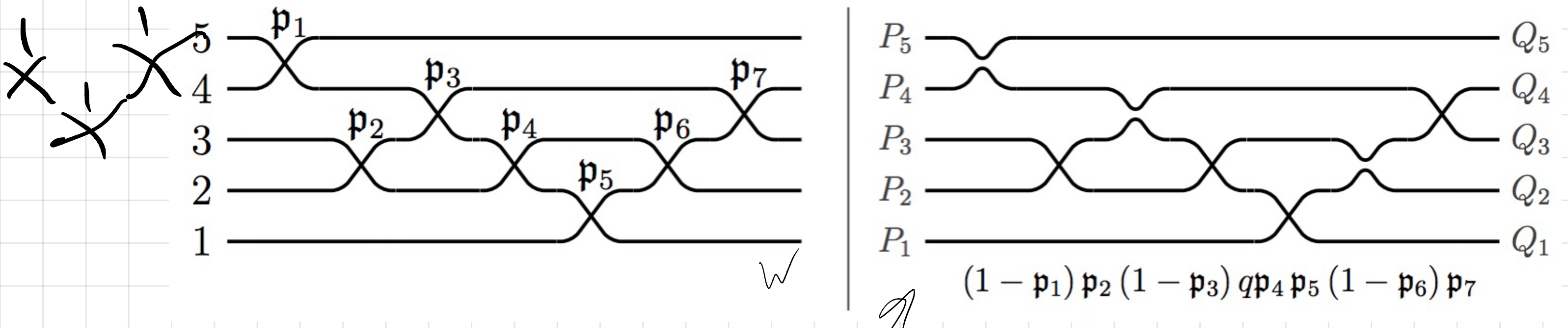
$$T_u \cdot T_w = T_{u \cdot w} \quad \text{если} \quad \ell(uw) = \ell(u) + \ell(w)$$

$s_k = (k, k+1)$ $\qquad (T_k + q)(T_k - 1) = 0$

$T_k = T_{s_k}$ $\qquad T_k^2 = (1-q)T_k + q \qquad T_{id} = 1 \in \mathcal{H}_q(S_n)$

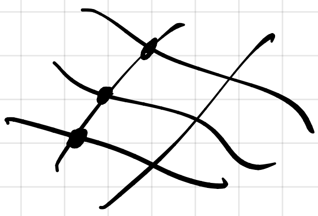
$$R_k(p) = pT_k + (1-p) \in \mathcal{H}_q(S_n)$$

$$T_\pi \cdot R_k(p) = \begin{cases} pT_{\pi s_k} + (1-p)T_\pi, & \text{если } \ell(\pi s_k) > \ell(\pi) \\ qpT_{\pi s_k} + (1-qp) \cdot T_\pi, & \text{если } \ell(\pi s_k) < \ell(\pi) \end{cases}$$



Вероятность $\pi \in S_n$ равна коэф-ту T_π в $R_{k_1}(p_1) \cdot R_{k_2}(p_2) \cdots R_{k_m}(p_m)$

$$\boxed{w = s_{k_1} \cdots s_{k_m}}$$



$$T_\pi \cdot R_k(p) = \begin{cases} pT_{\pi s_k} + (1-p)T_\pi, & \text{если } \ell(\pi s_k) > \ell(\pi) \\ qpT_{\pi s_k} + (1-qp) \cdot T_\pi, & \text{если } \ell(\pi s_k) < \ell(\pi) \end{cases}$$

$$R_k(p) \cdot T_\pi = \begin{cases} pT_{s_k\pi} + (1-p)T_\pi & \ell(s_k\pi) > \ell(\pi) \\ qpT_{s_k\pi} + (1-qp)T_\pi & \ell(s_k\pi) < \ell(\pi). \end{cases}$$

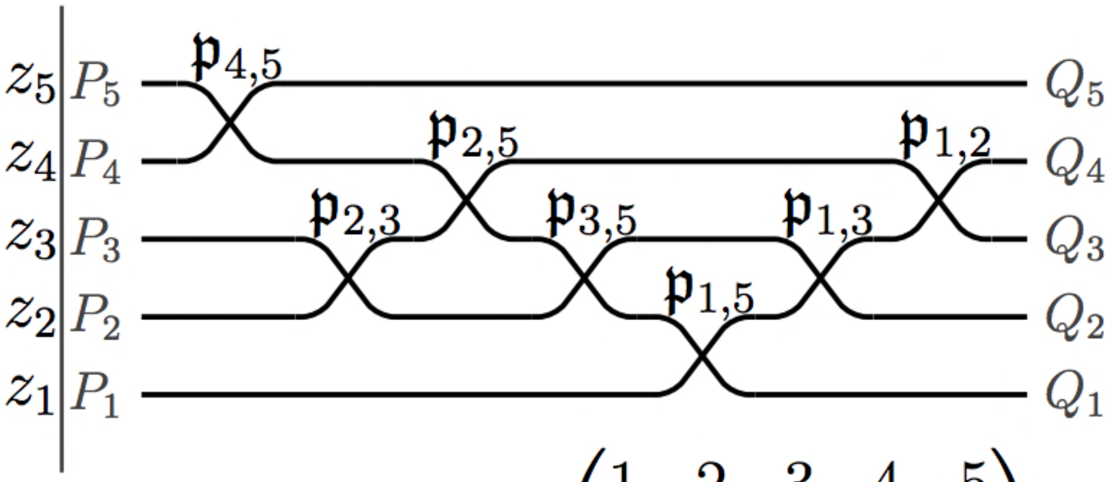
Теорема (BB19) коэф-т T_π в $R_{k_1}(p_1) \cdots R_{k_m}(p_m)$ равен коэф-ту

$T_{\pi^{-1}}$ в $R_{k_m}(\rho_m) \cdots R_{k_1}(\rho_1)$

Базис Я-Б.

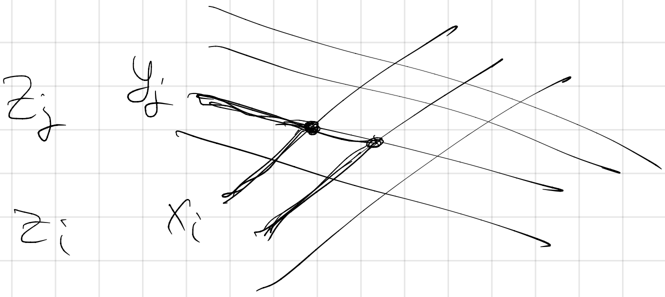
$$\rho_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{z_j - q z_i}$$

$$R_k(\rho_{a,b}) \cdot R_{k+1}(\rho_{a,c}) \cdot R_k(\rho_{b,c}) = R_{k+1}(\rho_{bc}) \cdot R_k(\rho_{ac}) \cdot R_{k+1}(\rho_{ab})$$



$$Y^w \text{ для } w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^w := R_{k_1}(\rho_{i_1 j_1}) \cdots R_{k_m}(\rho_{i_m j_m})$$

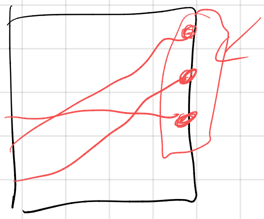


$\{Y^w\}_{w \in S_n}$ базис Я-Б

Вероятности $\pi \in S_n$ = коэф-ты матрицы перехода от $\{Y^w\}$ к $\{T_\pi\}$.

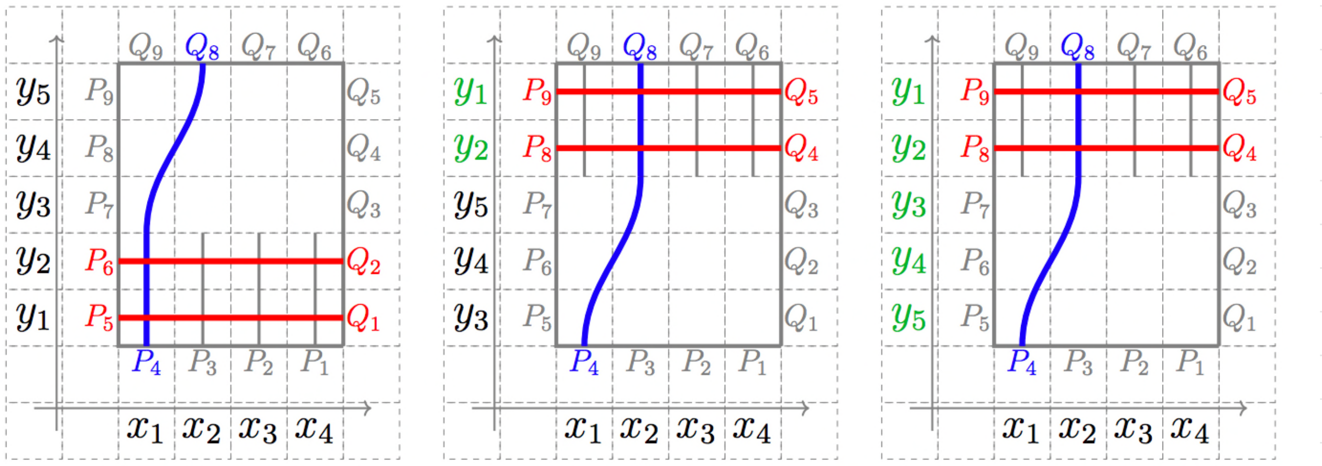
Док-во флипа

индукция по



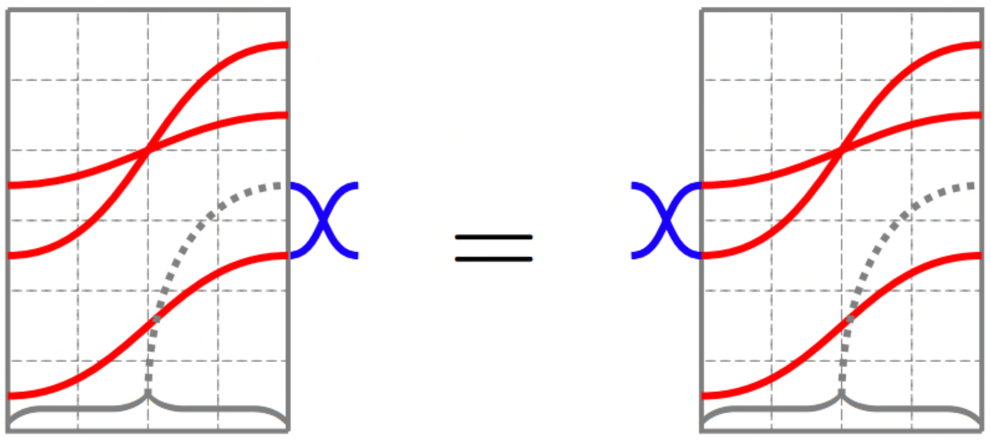
сумме индексов.

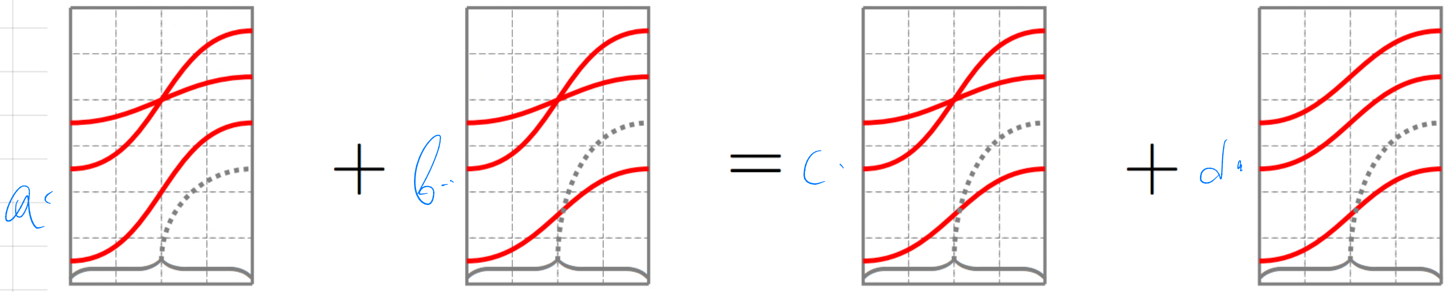
База инд.



$$Z^{\mathbb{H}_0,\mathbb{V}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = Z^{180^\circ(\mathbb{H}_0),\mathbb{V}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = Z^{180^\circ(\mathbb{H}_0),\mathbb{V}}(\mathbf{x},\mathrm{rev}(\mathbf{y}))$$

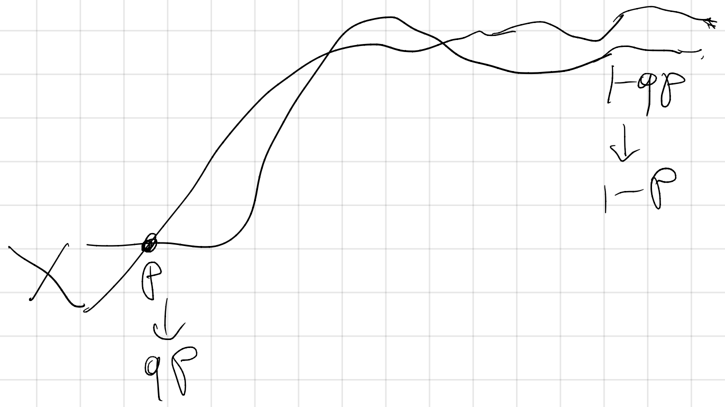
Переход:





$\underline{Z^{\mathbb{H},\mathbb{V}}}$

$T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}$



$p_{ij} = \dfrac{y_j - x_i}{y_j - q x_i}$ $\quad \underline{y \to 0} \quad$ $p_{ij} \to 1/q$

$p = 1/q \qquad 1 - p = 1 - 1/q$

$qp = 1 \qquad 1 - qp = 0$

Deodhar's distinguished subexpr.