Cours fondamental 1 (M2 LMFI) "Théorie des modèles et théorie des ensembles"
automne 2013

FEUILLE D'EXERCICES 7

Exercice 1 (Axiomes du choix). On considère les trois énoncés suivants:

(AC) tout produit d'ensembles non vides est non vide,

(ACD) si $\mathcal{R}$ est une partie de $X \times X$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ACDen) tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

(AC) est appelé *axiome du choix*, **(ACD)** est appelé *axiome des choix dépendants* et **(ACden)** est appelé *axiome du choix dénombrable.*

(1) Montrer que **(ACD)** implique **(ACden)**.
(2) Montrer que **(AC)** implique **(ACD)**.
(3) Montrer que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 2. Montrer que pour tout ensemble a il y a équivalence entre:

(1) a est transitif,	(2) $a \subseteq \mathcal{P}(a)$,
(3) $\bigcup a \subseteq a$,	(4) pour tout b, $b \subseteq a \to \bigcup b \subseteq a$,
(5) $\mathcal{P}(a)$ est transitif,	(6) $\bigcup(a^+) = a$, où $a^+ = a \cup \{a\}$.

Exercice 3. Soit α un ordinal. Vérifier:

(1) $\bigcup \alpha \leq \alpha$ et $\beta < \alpha$ entraine $\beta \leq \bigcup \alpha$.
(2) α successeur ssi α admet un maximum ssi $\bigcup \alpha = \max \alpha$ ssi $\cup\alpha \in \alpha$ ssi $\alpha = (\bigcup \alpha)^+$.
(3) α limite ssi α n'admet pas de maximum ssi $\bigcup \alpha = \alpha$ ssi pour tout ordinal β, $\beta < \alpha \to \beta^+ < \alpha$.

Exercice 4. On considère un univers $\mathcal{U}$ modèle de la théorie des ensembles ZF. On dit qu'un ensemble a de $\mathcal{U}$ est *héréditairement transitif* si tout élément de a^+ est transitif.

(1) Montrer que tout ordinal est héréditairement transitif.
(2) Soit a un ensemble transitif. Montrer que a est un ordinal ssi tous les éléments de a sont des ordinaux.
(3) Montrer que tout élément d'un ensemble héréditairement transitif est héréditairement transitif.
(4) On suppose de plus que $\mathcal{U}$ satisfait l'axiome de fondation. Montrer que tout ensemble héréditairement transitif est un ordinal.

Exercice 5. Soit θ une classe fonctionnelle avec $\mathrm{Dom}\,(\theta) = Ord$ et $\mathrm{Im}\,(\theta) \subseteq Ord$.

(1) Montrer que si θ est strictement croissante alors pour tout ordinal α on a $\alpha \leqslant \theta(\alpha)$.
(2) Montrer que si θ est continue[1] et si pour tout ordinal α, $\theta(\alpha+1) \geq \theta(\alpha)$ (resp. $\theta(\alpha+1) > \theta(\alpha)$) alors θ est croissante (resp. strictement croissante).
(3) Dorénavant on suppose que θ est strictement croissante et continue. On veut montrer que θ a un point fixe, plus précisément que pour tout ordinal α il existe un ordinal $\gamma \geq \alpha$ tel que $\theta(\gamma) = \gamma$. Expliquez pourquoi $\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$ est bien un ensemble.
(4) Soit $\beta = \sup\{\theta^n(\alpha) : n \in \omega\}$. Montrer que si $\theta(\alpha) \neq \alpha$ alors β est un ordinal limite. En déduire que β répond à la question.
(5) Montrer que la collection des points fixes de θ n'est pas un ensemble.

Artem Chernikov
chernikov@math.jussieu.fr
chernikov.me

[1]Si λ est un ordinal limite, on dit que θ est *continue* en λ si elle vérifie $\theta(\lambda) = \sup\{\theta(\gamma) : \gamma < \lambda\}$