Cours fondamental 1 (M2 LMFI)
"Théorie des modèles et théorie des ensembles"
automne 2013

FEUILLE D'EXERCICES 5

Exercice 1 (Arithmétique de Presburger). Élaborer les méthodes de l'exercice 3 de la Feuille 4 et montrer que la théorie $T_{\mathrm{Pr}} = \mathrm{Th}\left(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <, (n\mathbb{Z})_{n\geq 2}\right)$ admet l'élimination des quanteurs dans le langage $L_{\mathrm{Pr}} = \left\{+, -, 0, 1, <, (P_n)_{n\geq 2}\right\}$.

Exercice 2 (Graphe de Rado). On appelle graphe (non orienté) tout couple $\mathcal{G} = (G, R)$ où G est un ensemble muni d'une relation binaire R antiréflexive et symétrique.

(1) Donner une axiomatisation T_0 de la classe des graphes dans le langage $L = \{R\}$ où R est un symbole de relation binaire.
(2) Pour chaque entier $n > 0$ soit $\theta_n = \theta_n(\bar{x}, \bar{y})$ la formule

$$(\bigwedge_{1\leq i,j\leq n} x_i \neq y_j \to \exists z \bigwedge_{1\leq i\leq n} (z \neq x_i \wedge z \neq y_i \wedge Rx_iz \wedge \neg Ry_iz))$$

et ϕ_n l'énoncé $\forall x_1, \dots \forall x_n, \forall y_1, \dots \forall y_n \theta_n(\bar{x}, \bar{y})$.
Montrer que pour tout graphe $\mathcal{G} = (G, R)$ il existe une extension $\mathcal{G}' = (G', R')$ de $\mathcal{G}$ qui est un graphe et telle que pour tous n-uplets $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de G, $\mathcal{G}' \models \theta_n(\bar{a}, \bar{b})$.
(3) On considère la théorie $T = T_0 \cup \{\phi_n \ : \ n > 0\} \cup \{\exists x \exists y \ x \neq y\}$. Montrer T est une théorie consistante, n'ayant que des modèles infinis et que tout graphe $\mathcal{G} = (G, R)$ se plonge dans un modèle de T dont le cardinal est $max\{\aleph_0, |G|\}$.
(4) Montrer que T est $\aleph_0$-catgorique, complète et admet l'élimination des quanteurs.
(5) Montrer que pour tout n, il exist une structure *finie* M_n telle que $M_n \models \phi_n$ (Indication: pour chaque entier naturel n, on peut considérer l'ensembles des (classes d'isomorphismes de) graphes de cardinalité n comme un espace probabilisé (X_n, P_n) (avec la loi uniforme). Alors on peut calculer que $P_n(\{M \in X_n, M \not\models \phi_k\}) \to 0$ pour $n \to \infty$. Conclure par la finitude de X_n).
Conclure que le même est vrai pour tous les énoncés de T.

Exercice 3. On considère une théorie T dans un langage dénombrable et un modèle M de T de cardinal κ infini.

(1) Dans cette question on suppose que T est κ-catégorique. Montrer que pour toute formule $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble $\phi(M) := \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \ ; \ M \models \phi(a_1, \dots, a_n)\}$ est soit fini soit de cardinal κ
(2) Soit maintenant T une théorie quelconque. Montrer qu'il existe une extension élémentaire de M de cardinal κ dans laquelle tout ensemble définissable avec paramètres dans M est fini ou de cardinal κ.

(3) En déduire qu'il existe une extension élémentaire N de M de cardinal κ dans laquelle tout ensemble définissable (avec paramètres dans N) est fini ou de cardinal κ.

Exercice 4 (Extensions terminales en arithmétique de Peano). On note $\mathcal{L}_{ar} = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ le langage de l'arithmétique de Peano, où S désigne la fonction successeur. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant (dû à MacDowell et Specker):

Soit M un modèle dénombrable de l'arithmétique de Peano $\mathcal{P}$. Alors il existe une extension élémentaire propre $N \succcurlyeq M$ telle que N soit une *extension terminale* de M: pour tout $m \in M$ et tout $n \in N \setminus M$ on a $N \models m < n$.

(1) Montrer que le *principe des tiroirs* est vrai dans tout modèle M de l'arithmétique de Peano: Si $\theta(v, z)$ est une $L_{ar}(M)$-formule, alors pour tout $a \in M$ on a

$$M \models [\forall x \exists z > x\, \exists v < a\, \theta(v, z)] \to \exists v < a\, \forall x \exists z > x\, \theta(v, z).$$

(2) Soit $M \models \mathcal{P}$. Soit c une constante qui n'est pas dans $L_{ar}(M)$. On pose $L = L_{ar}(M) \cup \{c\}$, et on considère la L-théorie $T := D(M) \cup \{c > m \mid m \in M\}$, où $D(M)$ désigne le diagramme complet de M.
   (a) Observer que T est consistante.
   (b) Soit $a \in M$, et soit $\theta(v, z)$ une $L(M)$-formule telle que $T \vdash \forall v(\theta(v, c) \to v < a)$ et telle que $T \cup \{\exists v \theta(v, c)\}$ soit consistante.
   Montrer qu'il existe $m \in M$ avec $m < a$ et telle que $M \models \forall x \exists z > x\, \theta(m, z)$.
   (c) Soit $a \in M$ un élément non-standard. On considère l'ensemble de formules $\pi_a(v) := \{v < a\} \cup \{v \neq m \mid m \in M\}$. Montrer que π_a est un 1-type non-isolé dans T.

(3) Conclure.

Exercice 5 (Corps réels clos).

(1) Soit K un corps considéré dans le langage des anneaux $L_{an} = \{0, 1, +, -, \times\}$. Montrer: si K élimine les quanteurs, alors tout sous-ensemble définissable de K est fini ou cofini.

(2) Observer que la théorie $T = \mathrm{Th}\,(\mathbb{R}, 0, 1+, -, \times)$ n'a pas l'EQ dans L_{an}.

(3) Voici quelques définitions et faits algébriques bien connus:
   (a) Un corps ordonné est une structure $(K, <)$ où $K = (K, 0, 1, +, -, \times)$ est un corps et $<$ est un ordre total sur K satisfaisant, pour tous $x, y, z \in K$, $(x < y) \to x + z < y + z$ et $(x < y \wedge 0 < z) \to xz < xy$.
   (b) Un corps ordonné $(K, <)$ est réel clos s'il satisfait:
      (i) $\forall x \left(x > 0 \to \exists y\, y^2 = x\right)$,
      (ii) chaque polynôme de degré impair a un zéro.
   En particulier, le corps ordonné $\mathbb{R}$ est réel clos.
   (c) $(R, <)$ est une *clôture réelle* de $(K, <)$ si c'est une extension de $(K, <)$ avec $(R, <)$ réel clos et R algébrique sur K.
   (d) Soit $(K, <)$ un corps ordonnée. Il existe une clôture réelle F de K, et si F' est une autre clôture réelle de K, il existe un isomorphisme $f : F \to F'$ sur K.
   (e) Si R est réel clos, les seules polynômes unitaires irréductibles sont de la forme suivante: $(X - a)\,, (X - b)^2 + c$ (pour $a, b, c \in R$ avec $c > 0$).

(4) Soit RCF la théorie des corps réels clos dans le langage $L_{c.ord} = L_{an} \cup \{<\}$. Montrer que la théorie RCF est décidable, complète et admet l'élimination des quanteurs dans $L_{c.ord}$, (Théorème de Tarski). Quelques indications:
   (a) Soit $(K_1, <), (K_2, <)$ des corps réels clos, et soit R un sous-anneau de K_1 et K_2. Soit $\rho(y)$ une formule sans quanteurs, et supposons que $K_1 \models \exists y \rho(y)$. On doit montrer que $K_2 \models \exists y \rho(y)$.
   (b) Soient F_i les corps des fractions de R dans K_i pour $i = 1, 2$. Montrer qu'il existe un isomorphisme $f : (F_1, <) \to (F_2, <)$ qui fixe R élément par élément.
   (c) Soit G_i la clôture algébrique relative de F_i dans K_i. Notons que G_i est la clôture réelle de $(F_i, <)$, donc f s'étend à un isomorphisme $g : (G_1, <) \to (G_2, <)$.
   (d) Soit $b_1 \in K_1$ satisfaisant $\rho(y)$. On peut supposer que $b_1 \notin G_1$, et b_1 est donc transcendant sur G, autrement dit le corps $G_1(b_1)$ est isomorphe au corps des fonctions rationelles $G_1(X)$.
   (e) Soit $G_1^g = \{a \in G_1 : a < b_1\}, G_1^d = \{b \in G_1 : b_1 < b\}$. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $(K_2', <) \succeq (K_2, <)$ et $b_2 \in K_2'$ tels que $g(G_1^g) < b_2 < g(G_1^d)$. En particulier b_2 est transcendant sur G_2, donc g s'étend à un isomorphisme $h : G_1(b_1) \to G_2(b_2)$.
   (f) Montrer que h préserve l'ordre. (Indication: par 3(e) il suffit de montrer que h préserve l'ordre sur $G_1[b_1]$.)
   (g) Conclure.

En cas de problème, vous pouvez par exemple consulter le livre de Katrin Tent & Martin Ziegler "A Course in Model Theory".

Artem Chernikov
chernikov@math.jussieu.fr
chernikov.me