О нескольких теоремах Файна, об Эндрюсе, Дайсоне и об упущенных возможностях†

И. Пак*

Введение

История никогда не устроена в соответствии с нашими представлениями о том, как все должно было происходить, особенно если судить о событиях, покрытых пылью веков. То же самое верно и в математике. Известно много случаев, когда решение задачи не было найдено совершенно случайно, просто из-за неудачного стечения обстоятельств. В знаменитой статье [15] Фримен Дайсон описал некоторые «упущенные возможности»1), в частности, историю того, как он не открыл тождества Макдональда для η-функции. В следующем далее тексте рассказана история теорем Файна о разбиениях и комбинаторных доказательств этих теорем. Видно, что эти теоремы могли (и, возможно, должны были) быть доказано значительно раньше, если бы не пресловутые «упущенные возможности».

Важнейшее событие, положившее начало всей нашей истории, — публикация заметки [18] Натаном Файном. Следуя [5], можно сказать, что Файн *«анонсировал несколько элегантных и интригующих теорем о разбиениях. Результаты отличались сочетанием простоты формулировок и* [...] *глубины доказательств»*. Не посягая на глубину и красоту этих теорем, мы покажем, что многие из них имеют удивительно простые комбинаторные доказательства в стиле классических доказательств

*Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA 02139
pak@math.mit.edu
Работа частично поддержана грантами NSA и NSF.

†Перевод В. В. Доценко.

1)Читатель может подумать, что держит в руках вторую статью, в названии которой встречаются слова «упущенные возможности». В действительности эта статья третья, ибо по следам статьи Дайсона в журнале «Квант» появилась статья [27], примечательная не только сходным броским названием, но и тем, что она содержит наряду с научно-популярным изложением истории тождеств Макдональда описание рассматриваемой ниже инволюции Франклина ... —*Прим. перев.*

теорем о разбиениях. Возможно, с важными результатами так и должно быть …

Теоремы Файна можно разбить на две (перекрывающиеся) группы: имеющие дело с разбиениями на различные и нечетные слагаемые — в духе Эйлера — и имеющие дело с рангом разбиения — величиной, определенной Ф. Дайсоном немногим более полувека назад. Поскольку сходны эти сюжеты в основном тем, как развивались события, мы расскажем о них по отдельности.

В упоминавшейся заметке Файна не было доказательств и даже указаний к доказательству нетривиальных формул, использованных для вывода опубликованных там теорем. Заметка была напечатана в журнале Национальной Академии Наук США, посвященном сразу всем областям науки. Этого оказалось достаточно для того, чтобы результаты Файна не попадались на глаза практически никому в течение нескольких десятилетий после публикации. Хотя заметка Файна и содержала обещание опубликовать полностью доказательства в журнале, *«посвященном лишь математике»*, это обещание никогда не было выполнено. Как жаль!

Дальнейшая история развития событий относится к шестидесятым годам, когда Джордж Эндрюс, в то время аспирант в университете Пенсильвании, прослушал курс Файна по базисным гипергеометрическим рядам. Как он пишет в автобиографическом очерке [7], *«его [Файна — Перев.] курс был основан на рукописи, которую он совершенствовал десять лет, впоследствии изданной в виде* [19]*»*. Книга [19] вышла в 1988 году, ровно через сорок лет после заметки [18]. Она, в частности, содержит доказательства всех заявленных в заметке результатов. До публикации книги [19] Эндрюс хранил у себя рукопись и использовал ее от случая к случаю. Кроме прочего, он открыл новые аналитические доказательства ряда результатов, продемонстрировал связь результатов Файна с деятельностью в духе Роджерса–Рамануджана и, что для нас важно, обнаружил комбинаторные доказательства некоторых теорем. Многие не публиковавшиеся в течение долгого времени результаты Файна обязаны своей известностью усилиям Эндрюса.

В этом месте история делится на две. Оставшаяся часть статьи в меньшей степени научно-популярная. Ее основное содержание — новые комбинаторные доказательства теорем Файна. Имея в виду некую логику повествования, мы изменили порядок, в котором они обсуждаются в [18], и использовали немного другие обозначения. Завершается статья несколькими замечаниями общего характера.

Несколько общих слов про обозначения. То, что $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell)$ является разбиением числа n, обозначается $\lambda \vdash n$ или $|\lambda| = n$. Наибольшее слагаемое λ_1 разбиения λ и число слагаемых ℓ в этом разбиении обозначаются $a(\lambda)$ и $\ell(\lambda)$ соответственно. Через λ' обозначается сопряженное разбиение. Для изображения разбиений на плоскости мы используем диаграммы Юнга. Все стандартные ссылки, определения и детали можно найти в [2].

1. Разбиения на различные слагаемые и инволюция Франклина

Начнем с формулировки одного из результатов [18].

Теорема 1 (Файн). *Пусть $\mathcal{D}_n^0$ и $\mathcal{D}_n^1$ — множества разбиений числа n на различные слагаемые с четным и нечетным наибольшим слагаемым соответственно. Тогда*

$$|\mathcal{D}_n^0| - |\mathcal{D}_n^1| = \begin{cases} 1, & \text{если } n = \dfrac{k(3k+1)}{2} \\ -1, & \text{если } n = \dfrac{k(3k-1)}{2} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эту теорему естественно сопоставить с внешне похожей *пентагональной теоремой Эйлера*, которую мы для вящего сходства сформулируем так:

Теорема 2 (Эйлер). *Пусть $\mathcal{Q}_n^0$ и $\mathcal{Q}_n^1$ — множества разбиений числа n на различные слагаемые с четным и нечетным числом слагаемых соответственно. Тогда*

$$|\mathcal{Q}_n^0| - |\mathcal{Q}_n^1| = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } n = \dfrac{k(3k\pm 1)}{2} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Конечно, это сходство не осталось без внимания. Файн отметил, что теорема 1 *«внешне похожа на знаменитую пентагональную теорему Эйлера, но мы не смогли обнаружить никакой внутренней связи этих теорем»*. В обзоре [23] Лемер отмечает: *«Этот результат параллелен известной теореме Эйлера»*.

Ниже мы продемонстрируем, что у теоремы 1 есть доказательство, которое практически идентично знаменитому доказательству Франклина теоремы 2. Франклин в период обучения в университете Джона Гопкинса был студентом Сильвестра и опубликовал свое доказательство в [20] незадолго до появления известного обзора Сильвестра [25]. Возможно, что эти два текста объясняют, почему «конструктивная теория разбиений» все еще существует.

Вряд ли можно винить Файна в том, что связь между этими теоремами не была тогда обнаружена. В те дни биекции мало использовались в доказательствах. Лишь в конце шестидесятых годов этот метод вновь стал популярным, о чем свидетельствуют многие статьи, где теоремы о разбиениях доказываются с помощью построения явных биекций. Нашла новые применения и инволюция Франклина, использованная как для доказательства ряда уточнений пентагональной теоремы Эйлера [22], так и для доказательства нового комбинаторного тождества [11]. Жаль, что ее применение для доказательства теоремы Файна оставалось неизвестным так долго.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^0 \cup \mathcal{D}_n^1$ множество разбиений числа n на различные слагаемые. Опишем инволюцию[2)] на множестве $\mathcal{D}_n$. Рассмотрим разбиение $\lambda \in \mathcal{D}_n$. Обозначим через $s(\lambda)$ наименьшее слагаемое разбиения λ, а через $b(\lambda)$ наибольшее $b \leqslant \ell(\lambda)$, для которого $\lambda_b = \lambda_1 - b + 1$. Геометрически $s(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — длины *нижнего основания* и *побочной диагонали* диаграммы Юнга разбиения λ (рис. 1). Мы опишем отображение как раз в терминах диаграммы Юнга. Если $s(\lambda) \leqslant b(\lambda)$, удалим нижнее основание и добавим побочную диагональ длины $s(\lambda)$. Если $s(\lambda) > b(\lambda)$, удалим побочную диагональ и добавим нижнее основание длины $b(\lambda)$. Если в одном из описанных случаев предписанные действия приводят не к диаграмме Юнга, то ничего делать не надо. Определенное нами отображение $\alpha : \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$ называется инволюцией Франклина.

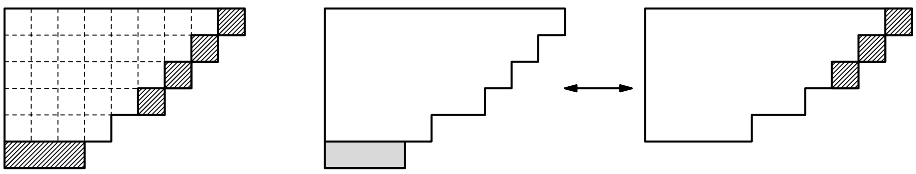

Рис. 1. *Диаграмма Юнга* $[\lambda]$, *соответствующая разбиению* $\lambda = (9, 8, 7, 6, 4, 3)$. *Для этого разбиения* $s(\lambda) = 3$, $b(\lambda) = 4$ *и* $\alpha(\lambda) = (10, 9, 8, 6, 4)$

Заметим, что если разбиение λ не является неподвижной точкой, то отображение α изменяет четность числа слагаемых. Кроме того, неподвижные точки соответствуют диаграммам, у которых нижнее основание и побочная диагональ имеют общую клетку и $s(\lambda) - b(\lambda)$ равно нулю или единице (рис. 2). Число квадратиков в такой диаграмме есть $k(3k \pm 1)/2$ — «пентагональное число»[3)]. Поэтому $|\mathcal{Q}_n^0| - |\mathcal{Q}_n^1| = 0$, если n не является пентагональным числом, а иначе эта разность равна единице или минус

[2)] Инволюция на множестве A — это биекция $f : A \to A$ с тем дополнительным условием, что $f \circ f = \mathrm{id}$, т. е. отображение f совпадает со своим обратным. —*Прим. перев.*

[3)] Т. е. пятиугольное. Древние греки умели выкладывать правильный пятиугольник из такого количества камушков. —*Прим. перев.*

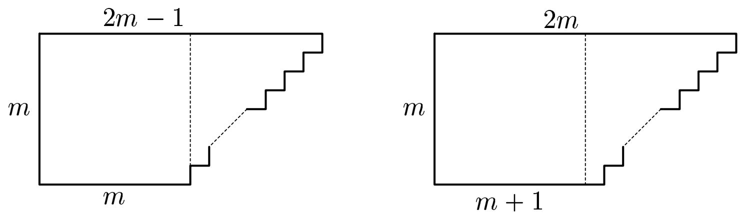

Рис. 2. *Неподвижные точки инволюции Франклина*

единице: с помощью построенной инволюции все разбиения, кроме неподвижных точек, группируются в пары, причем разбиения, входящие в одну пару, вносят одинаковый вклад — по единице — в $|\mathcal{Q}_0|$ и $|\mathcal{Q}_1|$, вклад же неподвижных точек легко вычисляется. Это доказывает теорему 2.

Аналогично можно заметить, что отображение α изменяет четность наибольшего слагаемого. Поэтому $|\mathcal{D}_n^0| - |\mathcal{D}_n^1| = 0$, если n не является пентагональным числом, а иначе эта разность равна единице или минус единице. Теорема 1 доказана.

2. Разбиения на нечетные части и биекция Сильвестра

Другая теорема Эйлера гласит, что количество разбиений числа n на различные слагаемые равно количеству разбиений числа n на нечетные слагаемые. В [18] эта теорема уточнена так:

Теорема 3 (Файн). *Пусть $\mathcal{O}_n^1$ и $\mathcal{O}_n^3$ — множества разбиений числа n на нечетные слагаемые с $a(\lambda) \equiv 1$ и $3 \pmod 4$ соответственно. Тогда*

$$|\mathcal{O}_n^1| = |\mathcal{D}_n^0|, \quad |\mathcal{O}_n^3| = |\mathcal{D}_n^1|, \quad \text{если } n \text{ четно,}$$
$$|\mathcal{O}_n^1| = |\mathcal{D}_n^1|, \quad |\mathcal{O}_n^3| = |\mathcal{D}_n^0|, \quad \text{если } n \text{ нечетно.}$$

Как мы сейчас увидим, эта теорема следует из другого результата Файна [19]:

Теорема 4 (Файн). *Количество разбиений $\mu \vdash n$ на различные слагаемые с $a(\mu) = k$ равно количеству разбиений $\lambda \vdash n$ на нечетные слагаемые с $a(\lambda) + 2\ell(\lambda) = 2k + 1$.*

В одной из своих ранних статей [1] Эндрюс опубликовал комбинаторное доказательство теоремы 4, но не заметил, что из нее следует теорема 3. Возможно, дело в том, что в [18] теорема 3 была объединена с теоремой 1, в то время как доказательства используют два совершенно разных классических комбинаторных рассуждения. Теоремы 3 и 4 можно доказать с помощью классического отображения «fish-hook construction»[4)]. Эта биекция между разбиениями на различные и нечетные слагаемые, доказывающая теорему Эйлера (см. [1, 2]), изобретена Сильвестром.

Биекция Сильвестра, как и инволюция Франклина, является хрестоматийным примером доказательства из конструктивной теории разбиений. Она была переформулирована многими способами (в том числе для координат Фробениуса на множестве разбиений и модулярного представления разбиений по модулю 2) в [5,10,24] и была использована для доказательства других уточнений теоремы Эйлера [21]. Если бы о теореме 3 было вовремя рассказано широкой общественности (например, в [23] она не упомянута), приводимое доказательство могло быть давно обнаружено.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n^1 \cup \mathcal{O}_n^3$ множество разбиений числа n на нечетные слагаемые. Определим *биекцию Сильвестра* $\varphi\colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{D}_n$, как показано на рис. 3. Заметим, что если $\mu = \varphi(\lambda)$, то $a(\mu) = (a(\lambda) - 1)/2 + \ell(\lambda)$. Поскольку это можно переписать в виде $a(\lambda) + 2\ell(\lambda) = 2a(\mu) + 1$, теорема 4 доказана.

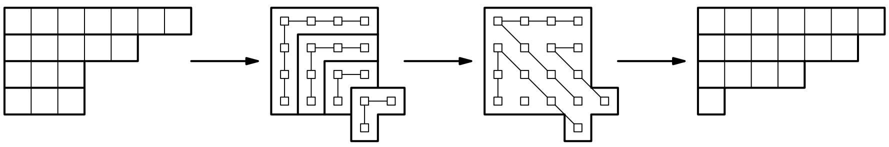

Рис. 3. *Биекция Сильвестра* $\varphi\colon (7,5,3,3) \to (7,6,4,1)$

Заметим, что при $\lambda \in \mathcal{O}_n$ выполнено сравнение $\ell(\lambda) \equiv n \pmod 2$. Отсюда видно, что φ в действительности осуществляет биекцию между множествами из теоремы 3, что доказывает эту теорему.

3. Ранг разбиения и отображение Дайсона

Эта история началась с публикации статьи Дайсона [12] в сборнике работ студентов Кембриджа. В этой работе Дайсон определил *ранг* разбиения и сформулировал несколько гипотез о количестве разбиений с заданным рангом. Их непосредственным следствием являются, в частности, теоремы Рамануджана о делимости функции разбиений, не имевшие до этого комбинаторной интерпретации. Дайсон тогда не смог доказать свои гипотезы. Их доказали Аткин и Суиннертон-Дайер [8] десять лет спустя.

[4)]Иначе говоря, *конструкция с рыболовными крючками*. В русскоязычной литературе это эффектное название пока не встречалось. —*Прим. перев.*

К счастью, Дайсон, переехав в США, опубликовал свои гипотезы в виде задачи в журнале «American Mathematical Monthly» [13]. Этой задачей заинтересовался Натан Файн, доказавший в [18] три теоремы о перечислении разбиений с заданным рангом (см. ниже). Тогда эти результаты представлялись совершенно загадочными. Из книги [19] стали известны идеи, стоявшие за доказательством Файна (ватсоновские [26] тождества на фальшивые тета-функции[5]), использованные и в [8]). Здесь же мы приводим комбинаторные доказательства теорем Файна с помощью отображения, описанного Дайсоном в [14]. Эта статья Дайсона (см. также [17]) содержала простое доказательство формулы для производящей функции чисел разбиений с заданным рангом. Эта формула, впервые опубликованная в упоминавшейся студенческой работе Дайсона, была доказана (неэлементарно) в [8]. Не зная о деятельности Файна, Дайсон переоткрыл одну из его (тогда неопубликованных) теорем и дал ей биективное доказательство. Это помогло ему доказать формулу для производящей функции и получить новое доказательство пентагональной теоремы Эйлера. Мы отсылаем читателя к рассказу самого Дайсона [16] об этих событиях.

К сожалению, то, что отображение Дайсона, иногда называемое «дайсоновское присоединенное разбиение» [9], позволяет получить биективное доказательство результатов Файна, было использовано лишь в заметке Эндрюса [4]. Мы еще скажем про это в следующем разделе. Однако даже Эндрюс, по-видимому, не заметил, что отображение Дайсона доказывает сразу три теоремы Файна о рангах.

Определим *ранг* разбиения λ равенством $r(\lambda) = a(\lambda) - \ell(\lambda)$. Пусть $\mathcal{P}_{n,r}$ — множество всех разбиений $\lambda \vdash n$ с $r(\lambda) = r$, а $p(n,r) = |\mathcal{P}_{n,r}|$. Еще нам понадобятся множества $\mathcal{H}_{n,r}$ ($\mathcal{G}_{n,r}$) разбиений $\lambda \vdash n$ с $r(\lambda) \leqslant r$ ($r(\lambda) \geqslant r$). Пусть $h(n,r) = |\mathcal{H}_{n,r}|$, $g(n,r) = |\mathcal{G}_{n,r}|$. Ясно, что $p(n,r) = h(n,r) - h(n,r-1)$ и $g(n,r) = h(n,-r)$. Кроме того, $h(n,r) + g(n,r+1) = p(n)$, где $p(n) = h(n,n-1) = \sum_r p(n,r)$ — количество всех разбиений числа n.

Теорема 5 (Файн). *Для всех $n > 0$ верно равенство $h(n,r) = h(n+r,1-r)$.*

Доказательство. Достаточно построить биекцию $\psi\colon \mathcal{H}_{n,r+1} \to \mathcal{G}_{n+r,r-1}$. Рассмотрим диаграмму Юнга разбиения λ. Удалим первый столбец (состоящий из $\ell = \ell(\lambda)$ клеточек) и добавим верхний ряд из $\ell + r$ клеточек. Получившееся разбиение обозначим μ (см. рис. 4). Отображение $\psi = \psi_r\colon \lambda \mapsto \mu$ называется *отображением Дайсона*.

По предположению разбиение λ таково, что $r(\lambda) = a(\lambda) - \ell \leqslant r + 1$, поэтому $\ell + r \geqslant a(\lambda) - 1$ и верхний ряд действительно самый длинный,

[5]) Иногда используется более высокопарный перевод *«тета-подобные функции»*, но он представляется недостаточно адекватным английскому слову *“mock”*. —*Прим. перев.*

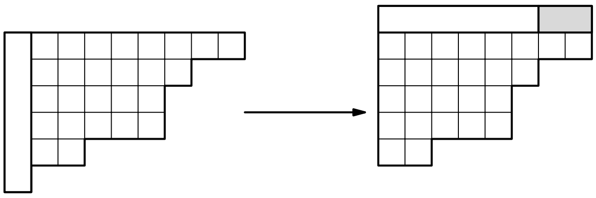

Рис. 4. *Отображение Дайсона* $\psi\colon \lambda \to \mu$ *для* $\lambda = (9,7,6,6,3,1) \in \mathcal{H}_{32,r+1}$, $\mu = (8,8,6,5,5,2)$

т. е. получилась диаграмма Юнга. Кроме того, $|\mu| = |\lambda| - \ell + (\ell + r) = n + r$. Наконец, $r(\mu) = a(\mu) - \ell(\mu) = \ell(\lambda) + r - (\lambda_2' + 1) \geqslant r - 1$. Поэтому $\psi_r(\lambda) \in \mathcal{G}_{n+r,r-1}$. Теорема доказана.

Следующие четыре соотношения объединены в одну теорему и в [18].

Теорема 6 (Файн). *Имеют место равенства:*

1) $p(n+1,0) + p(n,0) + 2p(n-1,3) = p(n+1) - p(n)$ *при* $n > 1$,
2) $p(n-1,0) - p(n,1) + p(n-2,3) - p(n-3,4) = 0$ *при* $n > 3$,
3) $p(n,0) - p(n-1,1) - p(n-1,2) + p(n-2,3) = 0$ *при* $n > 2$,
4) $p(n,r+1) - p(n-1,r) - p(n-r-2,r+3) + p(n-r-3,r+4) = 0$ *при* $n > r+3$.

Доказательство. Полагая $r = 0$ и $r = -1$ в последнем равенстве и используя соотношение $p(m,r) = p(m,-r)$, мы без труда убеждаемся в справедливости второго и третьего равенств. Первое из равенств легко вывести из теоремы 5 с помощью нескольких очевидных переходов:

$$\begin{aligned}
&p(n+1) - p(n) = \\
&= (h(n+1,0)+g(n+1,1)) - (h(n,0)+g(n,1)) = (h(n+1,0)+h(n+1,-1)) - \\
&- (h(n,0) + h(n,-1)) = (h(n+1,0) - h(n+1,-1)) + (h(n,0) - h(n,-1)) + \\
&+ 2(h(n+1,-1) - h(n,0)) = p(n+1,0) + p(n,0) + 2(h(n-1,3) - h(n-1,2)) = \\
&= p(n+1,0) + p(n,0) + 2p(n-1,3).
\end{aligned}$$

Тем же способом мы без труда докажем и последнее равенство:

$$\begin{aligned}
&p(n-r-3,r+4) - p(n-r-2,r+3) = \\
&= (h(n-r-3,r+4) - h(n-r-3,r+3)) - (h(n-r-2,r+3) - h(n-r-2,r+2)) = \\
&= h(n,-r-2) - h(n-1,-r-1) - h(n,-r-1) + h(n-1,-r) = \\
&= p(n-1,-r) - p(n,-r-1),
\end{aligned}$$

откуда $p(n,r+1) - p(n-1,r) - p(n-r-2,r+3) + p(n-r-3,r+4) = 0$, что и требовалось.

Отметим,что доказанные равенства немедленно следуют из соотношений на числа $h(n,r)$. Поэтому нетрудно получить и комбинаторные доказательства, перенеся слагаемые из одной части в другую так, чтобы надо было доказывать равенство двух неотрицательных чисел, и применяя отображение Дайсона к подходящим множествам разбиений. Мы приведем здесь такое доказательство для другой теоремы из [18].

Теорема 7 (Файн). *При $r \geqslant n-3$ верно равенство $p(n)-p(n-1) = p(n+r+1,r)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ множество разбиений $\lambda \vdash n$ с наименьшей частью $s(\lambda) \geqslant 2$. Заметим, что $|\mathcal{F}_n| = p(n) - p(n-1)$. Действительно, в разбиение числа n единица либо не входит (и тогда это разбиение из $\mathcal{F}_n$), либо входит (и тогда можно ее выбросить, получив разбиение числа $n-1$).

Возьмем произвольное разбиение $\lambda \in \mathcal{F}_n$ и применим к нему отображение Дайсона ψ_{r+1} (соответствущее рангу $r+1$), результат обозначим за μ. Видно, что $\mu_1 = \ell(\lambda) + r + 1 \geqslant 1 + n - 3 + 1 = n - 1$. С другой стороны, $\mu_2 = \lambda_1 - 1 \leqslant n-1$, поскольку $\lambda \vdash n$. Поэтому $\mu_1 \geqslant \mu_2$, т. е. получилось разбиение. Поскольку $\lambda \in \mathcal{F}_n$, мы можем вычислить $r(\mu)$: $r(\mu) = (\ell(\lambda)+r+1) - (\ell(\lambda)+1) = r$. Поэтому $\mu \in \mathcal{P}_{n+r+1,r}$. Наше отображение, конечно, обратимо, поэтому теорема доказана.

4. Итерация отображения Дайсона

В заметке [4] Эндрюс опубликовал комбинаторное доказательство следующего утверждения, доказанного в [18].

Теорема 8 (Файн). *Пусть $\mathcal{D}_{n,r}$ — множество разбиений числа n на различные части, имеющих ранг r (т. е. $\mathcal{D}_{n,r} = \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_{n,r}$), $\mathcal{O}_{n,2k+1}$ — множество разбиений числа n на нечетные части с наибольшей частью $2k+1$. Тогда*

$$|\mathcal{O}_{n,2r+1}| = |\mathcal{D}_{n,2r+1}| + |\mathcal{D}_{n,2r}|.$$

Эту теорему можно рассматривать как очередное уточнение теоремы Эйлера о разбиениях на различные и нечетные слагаемые. Доказательство основано на изучении свойств отображения Дайсона ψ_r. Жаль, что доказательство Эндрюса было опубликовано в малоизвестном журнале и, по-видимому, было оставлено без внимания. Предъявленное ниже отображение — биекция между $\mathcal{O}_n$ и $\mathcal{D}_n$, отличная как от биекции Сильвестра, описанной выше, так и от биекции Глэшера [2]. Ее преимущество в том, что она доказывает теорему 8. Естественно, наша конструкция мотивирована заметкой [4].

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathcal{O}_n$ — разбиение на нечетные слагаемые. Рассмотрим последовательность разбиений $\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^\ell$, где ν^ℓ состоит из одной части λ_ℓ, а при $i < \ell$ разбиение ν^i получается из ν^{i+1} применением отображения Дайсона ψ_{λ_i}. Положим $\mu = \nu^1$. Назовем отображение $\xi\colon \lambda \mapsto \mu$ *итерацией отображения Дайсона* (рис. 5).

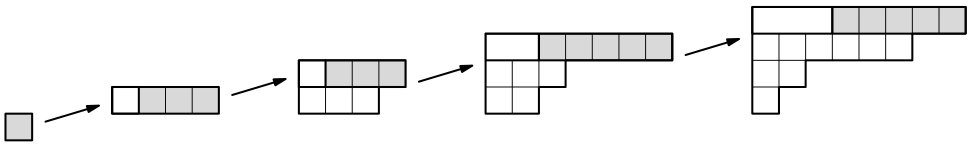

Рис. 5. *Итерация отображения Дайсона* $\zeta\colon \lambda \to \mu$ *для* $\lambda = (5,5,3,3,1) \in \in \mathcal{O}_{17,5}$, $\mu = (8,6,2,1) \in \mathcal{O}_{17,4}$

Теорема 9. *Итерация отображения Дайсона* ξ *— биекция между множествами* $\mathcal{O}_n$ *и* $\mathcal{D}_n$*. Более того,* $\xi(\mathcal{O}_{n,2r+1}) = \mathcal{D}_{n,2r} \cup \mathcal{D}_{n,2r+1}$*.*

Ясно, что из этой теоремы следует теорема 8. Было бы интересно обнаружить какие-либо другие применения отображения ξ в теории разбиений.

Доказательство. Во-первых, $|\nu^i| = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_\ell$, откуда $|\mu| = = |\nu^1| = |\lambda| = n$. Докажем теперь индукцией по i следующее утверждение:

Все слагаемые разбиения ν^i *различны, а его ранг равен* λ_i *или* $\lambda_i - 1$*.*

База индукции: $i = \ell$. Утверждение очевидно из определения ν^ℓ.

Пусть наше утверждение выполнено для ν_{i+1}, т. е. $a(\nu^{i+1}) - \ell(\nu^{i+1})$ равно либо λ_{i+1}, либо $\lambda_{i+1} - 1$. Поскольку $a(\nu^i) = \ell(\nu^{i+1}) + \lambda_i$, имеет место цепочка неравенств

$$(\nu^i)_1 = a(\nu^i) \geqslant (a(\nu^{i+1}) - \lambda_{i+1}) + \lambda_i > a(\nu^{i+1}) - 1 = (\nu^i)_2,$$

откуда следует, что ν^i — разбиение на различные слагаемые. Понятно, что величина $\ell(\nu^i)$ равна $\ell(\nu^{i+1})$ или $\ell(\nu^{i+1}) - 1$. Значит,

$$r(\nu^i) = a(\nu^i) - \ell(\nu^i) = (\ell(\nu^{i+1}) + \lambda_i) - \ell(\nu^i) \in \{\lambda_i, \lambda_i - 1\},$$

что доказывает возможность индуктивного перехода.

Пока мы не использовали то, что λ — разбиение на нечетные слагаемые. Это важно при построении обратного отображения. Определим отображение ξ^{-1} индуктивно, начиная с $\mu = \nu^1$ и применяя каждый раз отображение, обратное к отображению Дайсона ψ_r. Для того, чтобы конструкция была определена, надо оговорить, как именно мы выбираем r. Но поскольку должно выполняться одно из равенств $r = a(\nu^i) - \ell(\nu^i)$,

$r = a(\nu^i) - \ell(\nu^i) + 1$, и r должно быть нечетным, r можно выбрать единственным способом. Поэтому наше определение корректно, и отображение ξ является биекцией. Второе утверждение теоремы тоже моментально следует из доказанного выше. Теорема 9 доказана полностью.

5. Замечания

Одна теорема Файна из [18] еще не получила простого комбинаторного доказательства. А именно, обозначим через $\mathcal{L}_n$ множество разбиений λ числа n с нечетной наименьшей частью $s(\lambda)$. Теорема гласит, что $|\mathcal{L}_n|$ четно для всех n, не являющихся полными квадратами, и нечетно иначе. Мы предполагаем, что существует инволюция, доказывающая это утверждение[6)].

Формулировки теорем 6, 7 слегка изменены по сравнению с исходными формулировками Файна с целью их уточнения и упрощения (например, чтобы не определять $p(n,r)$ при $n \leqslant 0$). Традиционное отображение Дайсона получается из нашего сопряжением. Эта незначительная модификация представляется более удобной для наших целей.

Итерация отображения Дайсона, судя по всему, является новой сущностью. В основном, это материализация рекуррентного соотношения Эндрюса на числа $|\mathcal{O}_{n,2k+1}|$ и $|\mathcal{D}_{n,r}|$ (см. [4]). Вне зависимости от того, найдет ли отображение ξ применения в теории разбиений или нет, это отображение дает столь же естественное доказательство теоремы 8, сколь естественно доказательство теоремы 5 с помощью отображения Дайсона. К сожалению, отображение ξ, по-видимому, по своей природе итеративно и не допускает более простого описания. Как сказал однажды Ксавье Вьенно автору этого текста, *«иногда рекурсивная биекция — наибольшее, чего можно достичь»*.

В недавней статье [9] была определена модулярная версия по модулю 2 отображения Дайсона. Используя дайсоновский метод доказательства пентагональной теоремы Эйлера (см. [14, 17]), авторы статьи применили построенное отображение для комбинаторного доказательства тождества Гаусса. Любопытно изучить свойства итерации этого отображения и выяснить, какие теоремы о разбиениях можно доказать таким образом.

Мотивировкой для этого текста послужило замечание из статьи [9]: *«По-видимому, единственное известное применение преобразования Дайсона содержится в* [4]*»*. Возможно, что если бы препринт [9] не был

[6)] Верно даже более точное утверждение, напоминающее теоремы 1, 2. А именно, пусть $\mathcal{L}_n^0$ и $\mathcal{L}_n^1$ — множества таких разбиений на четное и нечетное число частей соответственно. Теорема утверждает, что если n не является полным квадратом, то $|\mathcal{L}_n^0| - |\mathcal{L}_n^1| = 0$, а иначе эта разность равна $(-1)^n$. —*Прим. перев.*

помещен в Интернет, этот текст не был бы написан. Это стало бы очередной «упущенной возможностью» ...

Список литературы

[1] Andrews G. E. *On basic hypergeometric series, mock theta functions, and partitions* (II) // Quart. J. Math., 1966. Vol. 17. P. 132–143.

[2] Andrews G. E. *The theory of partitions.* Addison–Wesley, Reading, MA, 1976. (Имеется русский перевод: Эндрюс Г. Теория разбиений, М.:Наука, 1982.)

[3] Andrews G. E. *Ramanujan's "Lost" Notebook. I. Partial θ-functions* // Adv. Math., 1981. Vol. 41. P. 137–172.

[4] Andrews G. E. *On a partition theorem of N. J. Fine* // J. Nat. Acad. Math India, 1983. Vol. 1. P. 105–107.

[5] Andrews G. E. *Use and extension of Frobenius' representation of partitions* // Enumeration and design. Academic Press, Toronto, ON, 1984. P. 51–65.

[6] Andrews G. E. Предисловие к книге [19], 1988.

[7] Andrews G. E. *Some debts I owe* // Sém. Lothar. Combin., 1999. V. 42. Art. B42a.

[8] Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer H. P. F. *Some properties of partitions* // Proc. London Math. Soc., 1954. Vol. (3) 4. P. 84–106.

[9] Berkovich A., Garvan F. G. *Some observations on Dyson's new symmetries of partitions*, 2002. Preprint. `http://www.math.ufl.edu/~frank.`

[10] Bessenrodt C. *A bijection for Lebesgue's partition identity in spirit of Sylvester* // Discrete Math., 1994. Vol. 132. P. 1–10.

[11] Chapman R.[7], *Franklin's argument proves an identity of Zagier* // El. J. Comb., 2000. Vol. 7. RP54.

[12] Dyson F. J. *Some guesses in the theory of partitions* // Eureka (Cambridge),1944. Vol. 8. P. 10–15.

[13] Dyson F. J. Problem 4261 // Amer. Math. Monthly, 1947. Vol. 54. P. 418.

[14] Dyson F. J. *A new symmetry of partitions* // J. Combin. Theory, 1969. Vol. 7. P. 56–61.

[7] См. также R. Chapman, Combinatorial proofs of q-series identities, `math.CO/0109010` — *Прим. перев.*

[15] Dyson F. J. *Missed opportunities* // Bull. Amer. Math. Soc., 1972. Vol. 78. P. 635–652. (Имеется русский перевод: Дайсон Ф. *Упущенные возможности* // УМН, 1980. Т. 35. Вып. 1. С. 171–191.)

[16] Dyson F. J. *A walk through Ramanujan's garden* // Ramanujan revisited. Academic Press, Boston, 1988. P. 7–28.

[17] Dyson F. J. *Mappings and symmetries of partitions* // J. Combin. Theory Ser. A, 1989. Vol. 51. P. 169–180.

[18] Fine N. J. *Some new results on partitions* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948. Vol. 34. P. 616–618.

[19] Fine N. J. *Basic hypergeometric series and applications*. Math. Surveys and Monographs. No 27. AMS, Providence, 1988.

[20] Franklin F. *Sure le développement du produit infini* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ // C. R. Acad. Paris Ser. A 1881. V. 92. P. 448–450.

[21] Kim D., Yee A. J. *A note on partitions into distinct parts and odd parts* // Ramanujan J., 1999. Vol. 3. P. 227–231.

[22] Knuth D. E., Paterson M. S. *Identities from partition involutions* // Fibonacci Quart., 1978. Vol. 16. P. 198–212.

[23] Lehmer D. H. Math. Review 10, 356d и Errata 10, 856.

[24] Pak I., Postnikov A. *A generalization of Sylvester's identity* // Discrete Math., 1998. Vol. 178. P. 277–281.

[25] Sylvester J. J., with insertions by F. Franklin. *A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and exodion* // Amer. J. Math., 1882. Vol. 5. P. 251–330, 334–336. (См. также The collected mathematical papers of J. J. Sylvester. Vol. 4. Chelsea, New York, 1974. P. 1–83.)

[26] Watson G. N. *The final problem: An account of the mock theta-functions* // J. London. Math. Soc., 1936. Vol. 11. P. 55–80.

[27] Фукс Д. Б. *О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях* // Квант, 1981. №8. С. 12–20.