УДК 517

БИЕКТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ КРЮКОВ И ЕЕ АНАЛОГОВ

И. М. Пак, А. В. Стояновский

1. Основным результатом работы является биективное доказательство мультипликативной формулы для размерности неприводимого представления симметрической группы, обычно называемой «формулой крюков», а также формулы для ряда Пуанкаре для кратности вхождения изотипической компоненты в симметрической алгебре $S(V)$ $(V=\mathbb{C}^n)$ рассматриваемой как градуированный S_n-модуль. В работе используются классические комбинаторные интерпретации (см. [1, 2]), в терминах которых и устанавливается биекция.

2. *Диаграммой Юнга* $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ называется множество пар $(i, j)\in\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих условиям $1\leqslant j\leqslant\lambda_i$; $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\in\mathbb{N}$. Будем считать, что $\mathbb{Z}^2$ расположено на плоскости $\mathbb{R}^2$, где первая координата i возрастает сверху вниз, вторая координата j — слева направо. Будем изображать диаграмму λ множеством клеток размера 1×1 с центрами в точках $(i, j)\in\lambda$. *Таблицей* A формы λ назовем функцию A: $\lambda\to\mathbb{N}$, изображаемую числами, вписанными в клетки диаграммы λ, строго возрастающими сверху вниз по столбцам и неубывающими слева направо по строкам. Обозначим через $|A|$ сумму чисел в таблице A; $|\lambda|:=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$. Назовем таблицу A *стандартной*, если каждое из чисел $1, \ldots, |\lambda|$ входит в A ровно один раз. Через $\lambda'=(\lambda_1', \lambda_2', \ldots)$ обозначим диаграмму, транспонированную к λ.

Напомним, что классы эквивалентности $[T_\lambda]$ неприводимых представлений симметрической группы S_n параметризуются диаграммами λ, $|\lambda|=n$; $\dim T_\lambda=:K_\lambda$ — число стандартных таблиц формы λ. Рассмотрим $\mathscr{H}=\oplus\mathscr{H}^i$ — пространство *гармонических многочленов* от n переменных (т. е. обнуляемых $\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{S_n}$) как S_n-модуль и положим $\mathbf{K}_\lambda(t):=\sum_i \dim\operatorname{Hom}(T_\lambda, \mathscr{H}^i)\,t^i$. Тогда в $\mathscr{H}$ реализуется регулярное представление S_n (см. [3]), причем $\mathbf{K}_\lambda(t)$ — производящая функция для числа стандартных таблиц формы λ с данным зарядом (см. ниже). Аналогично $\mathbf{P}_\lambda(t):=\sum_k \dim\operatorname{Hom}(T_\lambda, S^k(V))\,t^k$ равно производящей функции для числа таблиц A формы λ с данной суммой $|A|$ (см. [1]).

Теорема 1. $$\mathbf{K}_\lambda(t)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+t+\ldots+t^{i-1})}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(1+t+\ldots+t^{h(i,j)-1})/t^{i-1}},$$ *где* $h(i, j)=\lambda_i+\lambda_j'-i-j+1$.

Следствие (формула крюков): $$\mathbf{K}_\lambda(1)=K_\lambda=\frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda}h(i,j)}.$$

Теорема 2 $\mathbf{P}_\lambda(t) = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{t^{\lambda'_j-i}}{1-t^{h(i,j)}}$

Замечание. Многочлены $\mathbf{K}_\lambda(t)$ играют важную роль в теории представлений группы $GL(n)$ над комплексным и конечными полями (см. [1]), они являются частными случаями многочленов Каждана — Люстига. Производящая функция $\mathbf{P}_\lambda$ также хорошо известна как в комбинаторике (см. [1, 4]), так и в теории представлений [5—7]; известен ее супераналог [8].

3. Для доказательства теоремы 1 установим биекцию между следующими множествами (λ фиксировано, $|\lambda|=n$):

I множество пар (стандартная таблица формы λ; функция $f:\lambda\to\mathbb{Z}$, такая что $(\lambda_i-j)\geqslant f(i,j)\geqslant-(\lambda'_j-i)\ \forall (i,j)\in\lambda$);

II множество биективных заполнений диаграммы λ числами $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Фиксируем заполнение $A\in$ II. Положим $f\equiv 0$. Будем упорядочивать числа в A, начиная с правого столбца до левого, снизу вверх внутри столбца. Пусть заполнение до клетки (i_0, j_0) уже упорядочено, т. е. числа возрастают по строкам и по столбцам во всех (i, j), таких что $j>j_0$ либо $j=j_0$ и $i>i_0$. Будем выполнять следующие действия:

Положим $i=i_0$, $j=j_0$, $a=A(i_0, j_0)$.

1) Пусть

$$b=A(i, j+1) \text{ при } j<\lambda_i, \quad b=n+1 \text{ при } j=\lambda_i;$$
$$c=A(i+1, j) \text{ при } i<\lambda'_j, \quad c=n+1 \text{ при } i=\lambda'_j.$$

2) Если $a>b$ и $c>b$, то $A(i, j+1):=a$, $A(i, j):=b$; $f(i, j_0):=f(i, j_0)+1$, $j:=j+1$; перейти к 1).

3) Если $a>c$ и $b>c$, то $A(i+1, j):=a$, $A(i, j):=c$; поменять местами значения $f(i, j_0)$ и $f(i+1, j_0)$; $f(i, j_0):=f(i, j_0)-1$, $i:=i+1$: перейти к 1).

4) Если $c>a$ и $b>a$, то закончить работу.

В результате мы, действуя таким образом, упорядочим всё заполнение (элемент множества II) и получим стандартную таблицу A и функцию f (т. е. элемент множества I).

Предложение 1. *Построенное отображение* II$\to$I *является биекцией.*

Пусть $\omega(A)$ — перестановка чисел $1, \ldots, |\lambda|$, полученная в результате прочтения таблицы A справа налево и сверху вниз, построчечно. Положим $\operatorname{ind}(1):=0$; $\operatorname{ind}(i+1):=\operatorname{ind}(i)$ при $\omega^{-1}(i+1)>\omega^{-1}(i)$; $\operatorname{ind}(i+1):=\operatorname{ind}(i)+1$ при $\omega^{-1}(i+1)<\omega^{-1}(i)$. *Зарядом* стандартной таблицы A назовем число $c(A):=\sum_{i=1}^{|\lambda|}\operatorname{ind}(i)$. Определим градуировку на множестве I как $c(A)+\sum_{(i,j)\in\lambda} f(i,j)$ и перенесем ее с помощью биекции на множество II.

Предложение 2. *Полученная градуировка эквивалентна стандартной градуировке на множестве S_n по числу инверсий* (см. [9]) (*в смысле равенства числа элементов с данной градуировкой*).

Из предложений 1 и 2 выводим

$$\mathbf{K}_\lambda(t) \prod_{(i,j)\in\lambda}(1+t+\ldots+t^{h(i,j)-1})/t^{\lambda'_j-i} = \prod_{i=1}^{n}(1+t+\ldots+t^{i-1}),$$

откуда немедленно следует теорема 1.

Для доказательства теоремы 2 установим биекцию между следующими двумя бесконечными градуированными множествами:

III – множество пар (стандартная таблица A формы λ; разбиение $\mu=(\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_n)$, $n=|\lambda|$), где градуировка определяется как $c(A)+|\mu|$;

IV – множество таблиц B формы λ с градуировкой $|B|$.

Построим явное отображение III$\to$IV. Пусть $I(i,j)=\mathrm{ind}(A(i,j))$; $D(i,j)=\mu_{n+1-A(i,j)}$, $(i,j)\in\lambda$. Легко видеть, что I – таблица формы λ, $|I|=c(A)$; D – заполнение, неубывающее по строкам и по столбцам, $|D|=|\mu|$. Теперь положим $B(i,j):=I(i,j)+D(i,j)$; это искомая таблица формы λ; $|B|=c(A)+|\mu|$, т. е. наше отображение сохраняет градуировку

Предложение 3. *Построенное выше отображение III$\to$IV является биекцией.*

Итак, из предложения 3 и теоремы 1 получаем

$$\mathbf{P}_\lambda=\frac{\sum\limits_{A} t^{c(A)}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-t^i)}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-t^i)\prod\limits_{(i,j)\in\lambda}\frac{t^{i-1}}{1-t^{h(i,j)}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-t^i)}=\prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{t^{i-1}}{1-t^{h(i,j)}},$$

что и доказывает теорему 2.

Замечание. Последняя биекция является комбинаторным аналогом разложения Костанта (см. [3]) $S(V)=\mathscr{A}\otimes\mathscr{H}$, где $\mathscr{A}$ – алгебра инвариантов относительно действия группы Вейля (в нашем случае – симметрических многочленов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла.– М.: Мир, 1985. 2. *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. Addison-Wesley, 1981. 3. *Konstant B.* // Amer. J. Math. 1963. V. 85. P. 327–404. 4. *Stanley R.* // Studies of Appl. Math.– V. 1, No 2, 3. P. 167–188, 259–279. 5. *Steinberg R.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 71. P. 274–282. 6. *Lustig G.*, Invent Math. 1977. V. 43.– P. 25–175. 7. *Кириллов А. А.* // ФАН.– 1984. Т. 18, вып. 1. С. 74–75. 8. *Кириллов А. А., Пак И. М.* // ФАН.– 1990.– Т. 24, вып. 3.– С. 9–1?. 9. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Т. 1. М.: Мир, 1990.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
14 мая 1991 г.

УДК 517.97

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

А. А. Панков

0. В настоящее время получен ряд результатов о разрешимости полулинейных эллиптических уравнений вида $-\Delta u=f(u)$ в $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2], где имеется подробная библиография). Подобные уравнения представляют интерес и на произвольных полных римановых многообразиях,