Теорема 1 (см. [2]). *Триады $\tau_{m,k}$, $m \geqslant k$, устойчивы. Росток триады общего положения в точке квадратичного касания L с H эквивалентен ростку в нуле одной из триад $\tau_{m,k}$.*

Замечание. (L, l, H) — триада общего положения, если поле характеристических направлений на l приводимо к виду $\partial/\partial x$ диффеоморфизмом L, отправляющим l в гиперповерхность $x^k + u_1 x^{k-2} + \dots + u_{k-1} = 0$. Рассмотрим фильтрацию $H \cap \partial T^*M$: $H \cap \partial T^*M = H^0 \supset H^1 \supset H^2 \supset \dots$, где

$$H^i = \{x \in H^0 \mid \langle \varphi, h\rangle(x) = \dots = \langle \dots \langle\langle \varphi, \underbrace{h\rangle, h\rangle \dots, h}_{i\ \text{раз}}\rangle(x) = 0\},$$

$\langle\ ,\ \rangle$ — скобка Пуассона. Условие общности положения триады $(\overline{\partial} L, \overline{\partial} l, H'')$ состоит в том, что проектирование $H \cap \partial T^*M$ вдоль характеристик гиперповерхности H имеет только особенности Уитни, L_1 трансверсально ∂T^*M в T^*M и L_1 трансверсально H^i в H для каждого $i > 0$. Проектирование $H \cap \partial T^*M$ вдоль характеристик гиперповерхности H для H и ∂M общего положения имеет только особенности Уитни [1]. Условия на L_1 выполняются для общего L_1 по теореме трансверсальности. Доказана

Теорема 2. *Для начального фронта и границы препятствия общего положения многообразие геодезических на ∂M, стартующих из точек касания, локально симплектоморфно n-мерной надстройке $(k-1)$-мерного раскрытого ласточкиного хвоста. Здесь k — порядок касания ∂M и падающей на ∂M геодезической многообразия M, $n = \dim M - k - 2$.*

Автор признателен В. М. Закалюкину за полезные обсуждения.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 4. 1–14 (1981). **2.** *Гивенталь А. Б.* Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 33, ВИНИТИ, М. (1988).

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию
14 февраля 1994 г.

УДК 517.58

Трансверсальные матроиды и страты на грассманиане

© 1995. И. М. Пак, А. Е. Постников

В работе исследуются страты на грассманиане, которые связаны с трансверсальными матроидами, и изучаются ограничения гипергеометрических функций (см. [1–6]) на эти страты.

Авторы выражают благодарность В. С. Ретаху и А. М. Левину за полезные обсуждения.

1. Пусть Z_{kn} — многообразие невырожденных комплексных $k \times n$-матриц, $k < n$, G_{kn} — грассманиан k-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и $\pi\colon Z_{kn} \to G_{kn}$ —

естественная проекция ($\pi(z)$ есть k-мерное подпространство в $\mathbb{C}^n$, натянутое на строки матрицы z).

Обозначим через $p_I(z) = p_{i_1 \dots i_k}(z)$ минор матрицы $z \in Z_{kn}$, составленный из столбцов с номерами из множества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Назовем *списком* фиксированный набор B k-элементных подмножеств в $\{1, \dots, n\}$. *Стратом* $S = S_B \subset Z_{kn}$, отвечающим списку B, называется многообразие всех $z \in Z_{kn}$, таких, что $p_I(z) \neq 0 \iff I \in B$. Образ $s = s_B = \pi(S)$ страта S_B называется стратом на грассманиане G_{kn} (см. [2]). Ясно, что $G_{kn} = \bigcup_B s_B$.

Если списку B отвечает непустой страт, то B удовлетворяет аксиомам баз матроида (см. [7, 8]). Этот матроид будем называть матроидом, соответствующим указанному страту.

Для $U \subset \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, n\}$ обозначим через $Z(U)$ подмногообразие матриц $z = (z_{ij}) \in Z_{kn}$, у которых $z_{ij} = 0$ при $(i, j) \notin U$.

Лемма. *Если $Z(U) \notin \varnothing$, то существует и притом только один страт $S(U) \subset Z_{kn}$, такой, что множество $S(U) \cap Z(U)$ плотно в $Z(U)$.*

Множество B баз матроида, соответствующего страту $S(U)$, состоит из таких подмножеств $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, для которых найдется перестановка $\sigma_1 \dots \sigma_k$ множества $\{1, \dots, k\}$, такая, что $(\sigma_1, i_1), \dots, (\sigma_k, i_k) \in U$.

Страты вида $S(U)$, $s(U) := \pi(S(U)) \subset G_{kn}$ и соответствующие им матроиды будем называть *трансверсальными.* Изучению трансверсальных матроидов посвящена обширная литература (см., например, [7–10]).

Отметим, что трансверсальные страты под названием особых или линеаризуемых играли важную роль в работах [3, 4].

Будем обозначать через $\overline{s}$ замыкание страта $s \subset G_{kn}$.

Теорема 1. *Для любого страта $s \subset G_{kn}$ найдутся такие трансверсальные страты $s_1, \dots, s_l \subset G_{kn}$, что $\overline{s} = \overline{s_1} \cap \dots \cap \overline{s_l}$.*

Доказательство теоремы основано на результатах работы [10].

2. На G_{kn} естественно действует справа комплексный тор T^n, вложенный в $GL(n)$ как группа диагональных матриц. Пусть $\widetilde{G}_{kn} := G_{kn}/T^n$ и $\tau\colon G_{kn} \to \widetilde{G}_{kn}$ — естественная проекция. Отображение τ переносит стратификацию на $\widetilde{G}_{kn}$.

Мы вычислим размерность некоторых трансверсальных стратов в $\widetilde{G}_{kn}$.

Точнее, пусть

$$U = \{(1, 1), \dots, (k, k)\} \cup V, \quad \text{где } V \subset \{1, \dots, k\} \times \{k+1, \dots, n\}.$$

Страты вида $S(U)$, $s(U)$ и $\tilde{s}(U) := \tau(s(U))$ будем называть *сильно трансверсальными.* Соответствующие им матроиды появлялись в литературе под названием симплициальных [9] и фундаментальных трансверсальных [10].

Множество $V \subset \{1, \dots, k\} \times \{k+1, \dots, n\}$ удобно представлять в виде двудольного графа Γ_V. А именно, Γ_V — граф на множестве вершин $\{1, \dots, n\}$ и (i, j) является ребром графа Γ_V тогда и только тогда, когда $(i, j) \in V$.

Цикломатическим числом графа Γ называется $c(\Gamma) := e - v + d$, где e — число ребер графа Γ, v — число его вершин и d — число его связных компонент. Цикломатическое число может быть также определено как размерность одномерных гомологий графа.

Теорема 2. *Пусть* $\tilde{s}$ — *сильно трансверсальный страт в* $\widetilde{G}_{kn}$, *т.е.* $\tilde{s} = \tilde{s}(U)$, *где* $U = \{(1,1), \ldots, (k,k)\} \cup V$, $V \subset \{1, \ldots, k\} \times \{k+1, \ldots, n\}$. *Тогда комплексная размерность страта* $\tilde{s}$ *равна цикломатическому числу графа* Γ_V.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{Z}(V)$ многообразие таких $k \times (n-k)$-матриц $A = (a_{ij})$, что $a_{ij} = 0$ при $(i, j+k) \notin V$. Пусть $x \in \tilde{s}$. Тогда существует блочная матрица $z = (\mathbb{1}_k, A) \in (\tau \circ \pi)^{-1}(x)$, где $\mathbb{1}_k$ — единичная k-матрица и $A \in \widetilde{Z}(V)$, причем $(\tau \circ \pi)(z') = (\tau \circ \pi)(z'')$ для $z' = (\mathbb{1}_k, A')$, $z'' = (\mathbb{1}_k, A'')$ тогда и только тогда, когда $A' = t_1 A'' t_2$, где $t_1 \in T^k$, $t_2 \in T^{n-k}$. Для почти всех $A \in \widetilde{Z}(V)$ имеем $(\tau \circ \pi)(\mathbb{1}_k, A) \in \tilde{s}$. Итак, $\dim \tilde{s} = \dim T^k \backslash \widetilde{Z}(V) / T^{n-k}$. С другой стороны, легко видеть, что $\dim T^k \backslash \widetilde{Z}(V) / T^{n-k} = c(\Gamma_V)$. $\square$

3. Общими гипергеометрическими функциями на Z_{kn} (см. [1–6]) называются решения следующей системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{ij} \partial z_{i'j'}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{ij'} \partial z_{i'j}}, && i, i' \in \{1, \ldots, k\},\ j, j' \in \{1, \ldots, n\},\\
&\sum_i z_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{ij}} = \alpha_j \Phi, && j \in \{1, \ldots, n\},\\
&\sum_j z_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{ij}} = -\Phi, && i \in \{1, \ldots, k\},\\
&\sum_j z_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i'j}} = 0, && i, i' \in \{1, \ldots, k\},\ i \neq i'.
\end{aligned}
$$

Здесь α_i — произвольные комплексные числа, связанные соотношением $\sum \alpha_j = -k$.

Из этих уравнений следуют условия однородности:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\alpha\,;\, z\delta) = \prod_j \delta_j^{\alpha_j} \Phi(\alpha\,;\, z), && \delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in T^n,\\
&\Phi(\alpha\,;\, gz) = (\det g)^{-1} \Phi(\alpha\,;\, z), && g \in GL(k).
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что ограничение $\Phi|_S$ на страт $S \subset Z_{kn}$ фактически зависит от $\dim (\tau \circ \pi)(S)$ параметров.

Мы будем изучать ограничения гипергеометрических функций на сильно трансверсальный страт

$$S = S(U), \quad U = \{(1,1), \ldots, (k,k)\} \cup V,\ V \subset \{1, \ldots, k\} \times \{k+1, \ldots, n\}.$$

Пусть $S_0 \subset S$ — пространство блочных матриц вида $(\mathbb{1}_k, A)$, где $A = (a_{ij}) \in \widetilde{Z}(V)$. Ясно (см. доказательство теоремы 2), что $GL(k) \cdot S_0 \cdot T^n = S$. Поэтому гипергеометрические функции, заданные на S_0, однозначно продолжаются, учитывая условия однородности, на S.

Теорема 3. *Пространство ограничений общих гипергеометрических функций на подмногообразие* S_0 *можно задать следующей системой уравнений*:

$$\frac{\partial^l \Psi}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \cdots \partial a_{i_l j_l}} = \frac{\partial^l \Psi}{\partial a_{i_1 j_l} \partial a_{i_2 j_1} \cdots \partial a_{i_l j_{l-1}}} \tag{1}$$

для любого цикла $((i_1, j_1+k), (j_1+k, i_2), (i_2, j_2+k), \ldots, (i_l, j_l+k), (j_l+k, i_1))$ *в графе* Γ_V, $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, k\}$, $j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n-k\}$;

$$\sum_j a_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial a_{ij}} = -(\alpha_i + 1)\Psi, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}; \tag{2}$$

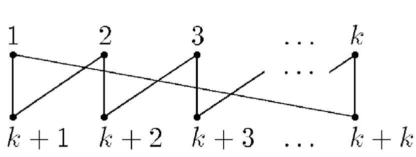
$$\sum_i a_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial a_{ij}} = \alpha_{j+k}\Psi, \qquad j \in \{1, \ldots, n-k\}. \tag{3}$$

Замечание. Согласно [5], (1)–(3) является гипергеометрической системой, связанной с действием на $\widetilde{Z}(V)$ тора $T^n = T^k \times T^{n-k}$. Теорема 3 означает, что пространство таких гипергеометрических функций совпадает с пространством ограничений на S_0 гипергеометрических функций на Z_{kn}. Отметим, что для произвольного страта подобное утверждение, вообще говоря, неверно. Пример нерегулярного поведения гипергеометрических функций в окрестности нетрансверсального страта был рассмотрен в [2].

4. Пример. Если граф Γ_V не имеет циклов, то $c(\Gamma_V) = 0$ и по теореме 2 пространство гипергеометрических функций на соответствующем страте тривиально. Первый содержательный пример — это случай, когда Γ_V состоит из одного цикла.

Отметим, что точки страта, соответствующего графу из одного цикла длины $2k$, являются k-гонами, которые естественно возникают при изучении когомологий проективных конфигураций и полилогарифмов (см. [11]).

Итак, пусть $n = 2k$ и Γ_V — граф с ребрами $(1, k+1), (k+1, 2), (2, k+2), \ldots, (k, k+k), (k+k, 1)$:



Цикломатическое число $c(\Gamma_V)$ равно 1. Поэтому, согласно теореме 2 решение Ψ системы (1)–(3) фактически зависит от одного параметра.

Пусть $t = (a_{11}a_{22}\cdots a_{kk})(a_{21}a_{32}\cdots a_{1k})^{-1}$. Тогда

$$\Psi(a_{ij}) = a_{22}^{\gamma_1} a_{33}^{\gamma_2} \cdots a_{kk}^{\gamma_{k-1}} a_{21}^{\beta_1} a_{32}^{\beta_2} \cdots a_{1k}^{\beta_k} f(t),$$

где γ_i и β_j могут быть найдены из системы

$$\begin{aligned} \beta_k &= -\alpha_1 - 1, & \beta_1 &= \alpha_{k+1}, \\ \gamma_1 + \beta_1 &= -\alpha_2 - 1, & \gamma_1 + \beta_2 &= \alpha_{k+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{k-1} + \beta_{k-1} &= -\alpha_k - 1, & \gamma_{k-1} + \beta_k &= \alpha_{k+k}. \end{aligned}$$

В этом случае дифференциальное уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению для $f(t)$:

$$\{D(D+\gamma_1-1)\cdots(D+\gamma_{k-1}-1)-t(D+\beta_1)\cdots(D+\beta_k)\}f(t)=0,$$

где $D:=t\,d/dt$.

Одно из решение этого уравнения задается рядом Похгаммера (см. [12]):

$$f(t)={}_kF_{k-1}\left(\begin{matrix}\beta_1,\dots,\beta_k\\ \gamma_1,\dots,\gamma_{k-1}\end{matrix};t\right):=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\beta_1)_n\cdots(\beta_k)_n}{(\gamma_1)_n\cdots(\gamma_{k-1})_n}\frac{t^n}{n!},$$

где $(a)_n:=a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

Литература

1. *Васильев В. А., Гельфанд И. М., Зелевинский А. И.* Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 1, 23–38 (1987). **2.** *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Матем. сб., **180**, №1, 3–38 (1989). **3.** *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* Препринт ИПМ №64 (1990). **4.** *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* Препринт ИПМ №138 (1990). **5.** *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* УМН, **47**, вып. 4, 3–82 (1992). **6.** *Gelfand I. M., Graev M. I., Retakh V. S.* Russian J. Math. Phys., **1**, No. 1, 19–56 (1993). **7.** *Welsh D. J. A.* Matroid Theory. Academic Press, London (1976). **8.** *Айгнер М.* Комбинаторная теория. Мир, М. (1982). **9.** *Инглтон Э. У.* В сб.: Проблемы комбинаторного анализа. Мир, М. (1980). **10.** *Bondy J. A., Welsh D. J. A.* Quart. J. Math., **22**, 435–451 (1972). **11.** *Goncharov A. B.* Preprint MPI, Bonn (1991). **12.** *Бейтмен Р., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, Наука, М. (1973).

Московский государственный
университет им М. В. Ломоносова

Московский независимый университет

Поступило в редакцию
24 августа 1993 г.

УДК 512.54

Кратное перемешивание и локальный ранг динамических систем

 В. В. Рыжиков[1]

Проблема Рохлина о кратном перемешивании состоит в следующем. Если автоморфизм T пространства Лебега $(X,\mathcal{B},\mu)$, где $\mu(X)=1$ и $\mathcal{B}$ — алгебра μ-измеримых подмножеств множества X, перемешивает с кратностью 1, будет ли он перемешивать с кратностью $k\geqslant 2$?

Напомним, что автоморфизм T *перемешивает с кратностью* k, если для любых $A_0,\dots,A_k\in\mathcal{B}$ при $|z_p-z_q|\to\infty$, $0\leqslant p<q\leqslant k$,

$$\mu(T^{z_0}A_0\cap T^{z_1}A_1\cap\cdots\cap T^{z_k}A_k)\to\mu(A_0)\,\mu(A_1)\dots\mu(A_k). \qquad (1)$$

[1]Работа поддержана Международным научным фондом Дж. Сороса, грант No. M1E000.