индексе дефекта $d(\mathbb{R})$ минимального симметрического интегрального оператора A, являющегося замыканием в $L^2(\mathbb{R})$ оператора

$$A_0 f(x) = \int_{x-a}^{x+a} G(x,y) f(y)\,dy, \qquad D(A_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}),\ a = \mathrm{const} > 0,$$

с эрмитовым ядром $G(x,y)$, непрерывным в полосе $|x-y| \leqslant a$ и неограниченным на бесконечности. Такие операторы возникают в некоторых задачах, связанных с одномерным волновым уравнением [4, 5]. Простые рассуждения, использующие квазианалитические векторы симметрических операторов, приводят к выводу, что $d(\mathbb{R}) = 0$, если

$$G(x,y) = O(|x|^p), \qquad |x| \to \infty,\ |x-y| \leqslant a, \tag{4}$$

при некотором $p \leqslant 1$. Замечая, что оператор A с ядром $G(x,y) = xy$ унитарно эквивалентен минимальному оператору $-(d/dx)(2x^{-1}\sin ax)(d/dx)$ в $L^2(\mathbb{R})$ (это свойство устанавливается с помощью преобразования Фурье), и применяя теорему 2, получаем пример оператора A с ядром, удовлетворяющим оценке (4) с $p = 2$, имеющего индекс дефекта $d(\mathbb{R}) = \infty$.

5. Автор благодарен У. Н. Эвериту, обратившему его внимание на тесную связь теоремы 2 с результатами, полученными в статье [6], и М. Ш. Бирману за полезные замечания, относящиеся к этой теореме.

Литература

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Наука, М. (1969). **2.** *Everitt W. N., Knowles I. W., Read T. T.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser A, **103**, 215–228 (1986). **3.** *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев (1954). **4.** *Орочко Ю. Б.* Матем. заметки, **48**, 86–94 (1990). **5.** *Орочко Ю. Б.* Укр. матем. ж., **44**, 948–956 (1992). **6.** *Everitt W. N., Zettl A.* Proc. London. Math. Soc. (3), **64**, 524–544 (1992).

Московский институт
электроники и математики

Поступило в редакцию
27 мая 1992 г.
В переработанном виде
15 декабря 1992 г.

УДК 512.547+511.217

Резольвенты для S_n-модулей, отвечающих косым крюкам, и комбинаторные приложения

 И. М. Пак, А. Е. Постников

1. В работе [1] приведен метод построения резольвент, «материализующих» классические формулы для S_n-модулей. В данной работе найдена новая резольвента. В частном случае она «материализует» известную в комбинаторике теорему о том, что значение инверсионного многочлена $f_n(t)$ для деревьев с $n+1$ вершинами при $t=-1$ равно числу up-down-перестановок (см. [2, 3]).

Пусть $A_q(n) = A_q := \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle/(x_ix_j - qx_jx_i, i < j)$ — алгебра функций на квантовом пространстве, которая имеет естественную градуировку: $A_q = A_q^0 \oplus A_q^1 \oplus A_q^2 \oplus \ldots$. Группа кос $\mathrm{Br}(n)$, порожденная образующими $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ и соотношениями $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$, $s_is_j = s_js_i$ при $|i-j| \geqslant 2$, действует на A_q следующим образом:

$$s_i(x_1^{b_1} \ldots x_i^{b_i} x_{i+1}^{b_{i+1}} \ldots x_n^{b_n}) := x_1^{b_1} \ldots x_{i+1}^{b_i} x_i^{b_{i+1}} \ldots x_n^{b_n}.$$

Легко видеть, что при $q = \pm 1$ выполняется также соотношение $s_i^2 = \mathrm{id}$, т.е. алгебра $A_{\pm 1}$ есть градуированный S_n-модуль. Далее мы будем рассматривать случай $q = -1$.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $|a| := a_1 + \cdots + a_n$. Рассмотрим подмодуль $\tau_a \subset A_{-1}$, порожденный одночленами $x_{\sigma(1)}^{b_1} \ldots x_{\sigma(n)}^{b_n}$, где $0 \leqslant b_i \leqslant a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma \in S_n$. Модуль τ_a также градуирован: $\tau_a = \tau_a^0 \oplus \tau_a^1 \oplus \ldots \oplus \tau_a^{|a|}$.

Построим теперь косую диаграмму $\theta(a) \subset \mathbb{Z}_+^2$, $\theta(a) = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, такую, что $\theta_1 = (1, n)$ и, если $\theta_{l-1} = (i, j)$, то $\theta_l = (i, j-1)$ при четном a_l и $\theta_l = (i+1, j)$ при нечетном a_l. Очевидно, что полученная диаграмма $\theta = \theta(a)$ является косым крюком (см. [4, 5]).

Напомним, что каждой косой диаграмме γ, $|\gamma| = n$, отвечает представление π_γ симметрической группы S_n, являющееся неприводимым, если γ — обычная диаграмма Юнга (см. [4, 5]).

Теорема. *Пусть $\theta = \theta(a)$. Существует естественная резольвента*

$$0 \to \tau_a^0 \to \tau_a^1 \to \cdots \to \tau_a^{|a|} \to \pi_\theta \to 0, \quad \text{если } a_1 \text{ четно, и}$$
$$0 \to \tau_a^0 \to \tau_a^1 \to \cdots \to \tau_a^{|a|} \to 0, \quad \text{если } a_1 \text{ нечетно.}$$

Приравнивая к нулю характеристику Эйлера–Пуанкаре, мы получаем формулу для характеров

$$\chi^{|a|} - \chi^{|a|-1} + \cdots + (-1)^{|a|}\chi^0 = \begin{cases} \chi_\theta, & a_1 \text{ четно}, \\ 0, & a_1 \text{ нечетно}, \end{cases} \tag{1}$$

где χ^i — характер представления τ_a^i, а χ_θ — характер представления π_θ.

Авторы нашли также чисто комбинаторное доказательство формулы (1), основанное на построении инволюции на таблицах специального вида. Доказательство теоремы и конструкция инволюции будут опубликованы позднее.

В оставшейся части статьи мы рассмотрим некоторые примеры и следствия этой теоремы, а также продолжим изучение градуированного S_n-модуля A_{-1}.

2. Пусть S_n действует на $V = \mathbb{C}^n$ перестановкой координат. Рассмотрим алгебру Вейля $E(V) = S(V) \otimes \Lambda(V) = \bigoplus S^k(V) \otimes \Lambda^l(V)$ как градуированный S_n-модуль, где градуировка на компоненте $S^k(V) \otimes \Lambda^l(V)$ равна $2k + l$. Можно показать, что A_{-1} изоморфна $E(V)$ как градуированный S_n-модуль. Отсюда, используя результаты работы [6] о разложении биградуированного S_n-модуля $E(V)$, сразу получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathrm{Hom}(\pi_\lambda, A_{-1}^k)\, t^k = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{t^{2i} + t^{2j+1}}{1 - t^{2h(i,j)}}, \tag{2}$$

где $\lambda \subset \mathbb{Z}_+^2$ — диаграмма Юнга, $|\lambda| = n$ и $h(i,j)$ — длина крюка в клетке (i,j) (см. [4, 5]).

3. Пусть $a = (0, 1, \dots, n-1)$ и $f_n(t) := \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \dim \tau_a^k t^{\binom{n}{2}-k}$. Известно, что $f_n(1) = \dim \tau_a = (n+1)^{n-1}$ — число отмеченных деревьев с $n+1$ вершинами, $f_n(1+t) = t^{-n} \sum c_{nk} t^k$, где c_{nk} — число связных графов с $n+1$ вершинами и k ребрами, $f_n(t)$ — инверсионный многочлен для деревьев с $n+1$ вершинами (см. [2, 3]).

Мы покажем, что из сформулированной теоремы следует равенство $f_n(-1) = \mathrm{ud}_n$, где ud_n — число up-down-перестановок, а именно

$$\mathrm{ud}_n := |\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \dots\}|.$$

Действительно, в этом случае диаграмма $\theta = \theta(a)$ имеет ступенчатый вид: $\theta = (n, n, n-1, n-2, \dots) \setminus (n-1, n-2, n-3, \dots)$. Отсюда, рассматривая (1) как тождество для размерностей, сразу получаем $f_n(-1) = \dim \theta = \mathrm{ud}_n$. Отметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{ud}_n\, t^n/n! = \operatorname{tg} t + \sec t$ (см. [2, 3]).

4. Пусть $a = (0, k, 2k, \dots, (n-1)k)$. Этот случай является естественным обобщением п. 3 на k-мерные деревья (см. [7]). В этом случае $\dim \tau_a = (kn+1)^{n-1}$, $\dim \theta(a) = \mathrm{ud}_n$, если k нечетно, и $\dim \theta(a) = 1$, если k четно.

5. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1 = \dots = a_n = k$, $\tau_{nk} := \tau_a$, $g_{nk}(t) := \sum \dim \tau_a^i t^i$. Можно показать, что $g_{nk}(t) = (1+t+\dots+t^k)^n$. Для S_n-инвариантов справедлива формула

$$\sum_{i,n} \dim (\tau_{nk}^i)^{S_n} t^i z^n = \frac{(1+zt)(1+zt^3)\dots}{(1-z)(1-zt^2)\dots}, \tag{3}$$

где правая часть состоит из k сомножителей. Так как $\varinjlim \tau_{nk}^i = A_{-1}^i(n)$ при $k \to \infty$, то из (3) следует, что

$$\sum_{i,n} \dim (A_{-1}^i(n))^{S_n} t^i z^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+zt^{2i+1}}{1-zt^{2i}}. \tag{4}$$

С другой стороны, из (2) для $\lambda = (n)$ получаем

$$\sum_{i} \dim (A_{-1}^i(n))^{S_n} t^i = \frac{(1+t)(1+t^3)\dots(1+t^{2n-1})}{(1-t^2)(1-t^4)\dots(1-t^{2n})}. \tag{5}$$

Суммируя правую часть (5) по всем n и сравнивая с правой частью (4), получаем известное тождество Эйлера (см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \prod_{i=0}^{n} \frac{1+t^{2i-1}}{1-t^{2i}} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1+zt^{2i+1}}{1-zt^{2i}}.$$

В связи с этим отметим, что S_n-инварианты алгебры $A_{-1}(n)$ порождены многочленами $e_i(x_1^2, \dots, x_n^2)$ и $p_{2i-1}(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, где e_i — элементарные, а p_l — степенные симметрические многочлены (см., например, [4]).

Литература

1. *Зелевинский А. В.* Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 2, 74–75 (1987). **2.** *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика, Наука, М. (1990). **3.** *Kreweras G.* Periodica Mathematica Hungarica, **11**, No. 4, 309–320 (1980). **4.** *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла, Мир, М. (1985). **5.** *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group, Addison-Vesley, P.G. (1981). **6.** *Кириллов А. А., Пак И. М.* Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 9–13 (1990). **7.** *Moon J. W.* J. Combin. Theory, **6**, 196–199 (1969).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Московский независимый университет

Поступило в редакцию 19 апреля 1993 г.

УДК 512.554.3+512.813.4

Тело рациональных функций на $GL_q(n, K)$

 А. Н. Панов

Для любого поля K кольцо регулярных функций на квантовой алгебре матриц $M_q(n, K)$ определяется через порождающие элементы и отношения между ними [1, 2]. Это кольцо является K-алгеброй и порождается как K-алгебра элементами $\{a_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ и $K[q, q^{-1}]$. Переменная q перестановочна с a_{ij}, и матричные элементы связаны следующими соотношениями: $a_{ij}a_{ik} = q^{-1}a_{ik}a_{ij}$ для $j < k$, $a_{ki}a_{mi} = q^{-1}a_{mi}a_{ki}$ для $k < m$, $a_{ij}a_{km} = a_{km}a_{ij}$ для $i < k$, $j > m$ и $a_{ij}a_{km} - a_{km}a_{ij} = (q^{-1} - q)a_{im}a_{kj}$ для $i < k$, $j < m$. Кольцо регулярных функций на квантовой алгебре матриц $M_q(n, K)$ обозначим через $K[M_q(n, K)]$ или $\mathfrak{F}_q$. Для любого $\varepsilon \in K$, $\varepsilon \neq 0$, алгебра $\mathfrak{F}_q$ содержит идеал $\mathfrak{F}_q(q - \varepsilon)$, и можно определить специализацию $\mathfrak{F}_\varepsilon = \mathfrak{F}_q/\mathfrak{F}_q(q - \varepsilon)$. В дальнейшем мы будем пользоваться одним символом $\mathfrak{F}_q$ для обозначения обоих колец $\mathfrak{F}_q$ и $\mathfrak{F}_\varepsilon$, оговаривая при его использовании, является q переменной или элементом поля K.

Для подстановки σ через $l(\sigma)$ обозначим число инверсий в перестановке $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$. Квантовый определитель $\det_q$ — это элемент алгебры $\mathfrak{F}_q$, равный сумме $\sum(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ по всем подстановкам $\sigma \in S_n$. В случае q общего вида (т.е. q — или переменная, или принадлежит K, но не является корнем из единицы) квантовый определитель порождает центр кольца $\mathfrak{F}_q$ [1].

Предложение 1 [2, 3, 5]. *Кольцо $\mathfrak{F}_q$ является нётеровым и не содержит делителей нуля.*

Кольцо $K[GL_q(n)]$ регулярных функций на квантовой группе $GL_q(n, K)$ определяется как локализация кольца $\mathfrak{F}_q$ по мультипликативному подмножеству, порожденному элементом $\det_q$. Кольцо $K[GL_q(n)]$ также является нётеровым кольцом без делителей нуля. Такое кольцо имеет тело частных [4, теорема 3.6.12]. Тела частных колец $K[GL_q(n)]$ и $\mathfrak{F}_q$ совпадают.