Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 3, 9—13

УДК 519.45

КОВАРИАНТЫ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ЕЕ АНАЛОГОВ В АЛГЕБРАХ А. ВЕЙЛЯ

А. А. Кириллов, И. М. Пак

1. В теории инвариантов многие красивые и важные результаты допускают нечетные и супераналоги.

Основным объектом исследования в этой теории является структура градуированного G-модуля $S(V)$ для заданного G-модуля V. Нечетным аналогом симметрической алгебры $S(V)$ служит внешняя алгебра $\Lambda(V)$, а супераналогом — алгебра $E(V)=S(V)\otimes\Lambda(V)$. Важная роль последней во многих алгебраических и гомологических конструкциях была выяснена А. Вейлем. Поэтому мы будем называть $E(V)$ алгеброй Вейля. Она биградуирована: $E^{p,q}(V)=S^p(V)\otimes\Lambda^q(V)$, и структуру ее изотипических компонент относительно действия группы удобно описывать рядом Пуанкаре:

$$P_\pi^G(t,s)=\sum_{p,q} m_{p,q}(\pi)\,t^p s^q, \tag{1}$$

где π — неприводимое представление группы G, а $m_{p,q}(\pi)$ — кратность вхождения этого представления в разложение $E^{p,q}(V)$. Для компактной группы G справедлива формула

$$P_\pi^G(t,s)=\int_G \chi_\pi(g)\det\frac{1+sT(g)}{1-tT(g)}\,dg, \tag{2}$$

где $\chi_\pi(g)$ — характер представления π, T — действие группы G в пространстве T, а dg — нормированная мера Хаара на G.

К сожалению, эта формула редко бывает пригодна для практических вычислений, так как требует знания характера представления π и суммирования большого числа слагаемых. В то же время хорошо известно (см. [1] или [2], упр. к § 5 гл. V), что для конечной группы G, порожденной отражениями в пространстве V, алгебра инвариантов $E(V)^G$ сама изоморфна алгебре типа $S(V_0)\otimes\Lambda(V_1)$ и ее ряд Пуанкаре имеет вид

$$P_{\pi_0}^G(t,s)=\prod_{i=1}^{h}\frac{1+st^{d_i-1}}{1-t^{d_i}}, \tag{3}$$

где $d_1,\ldots,d_n$ — степени базисных инвариантов группы G в $S(V)$. Далее, в работах [3—5] было обнаружено, что в случаях, когда $V=\mathbf{R}^n$, а G является либо симметрической группой $S(n)$, действующей перестановками координат, либо группой $C(n)=S(n)\times\mathbf{Z}_2^n$, действующей перестановками координат и изменением их знаков, либо, наконец, единственной собственной подгруппой $D(n)=S(n)\times\mathbf{Z}_2^{n-1}$ в $C(n)$, строго содержащей $S(n)$, выражение $P_\pi^G(t,0)$ для всех π может быть задано простой мультипликативной формулой. Эта формула имеет такой вид, как если бы исследуемая изотипическая компонента была свободным модулем ранга 1 над некоторой свободной коммутативной градуированной алгеброй.

В настоящей статье доказывается супераналог этого утверждения для групп $S(n)$ и $C(n)$ (см. ниже теорему 1 в п. 2), а также дается комбинаторная интерпретация кратностей. Постановка задачи и формулировка результатов принадлежат первому автору, доказательство и комбинаторная интерпретация — второму.

Авторы благодарны С. М. Архипову и А. В. Зелевинскому за плодотворные обсуждения.

2. Приведем необходимые для дальнейшего стандартные определения (см. [6, 7]).

Разбиением называется невозрастающая последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел с условием $|\lambda| = \Sigma\lambda_k < \infty$.

Диаграммой разбиения λ называется множество пар $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant j \leqslant \lambda_j$.

Через $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n, \ldots)$ обозначается двойственное к λ разбиение, диаграмма которого получается из диаграммы λ транспонированием: $(i, j) \to (j, i)$.

Длиной крюка элемента (i, j) диаграммы λ называется число $h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$.

Напомним еще, что классы эквивалентности неприводимых представлений группы $S(n)$ нумеруются разбиениями λ с $|\lambda| = n$, а классы эквивалентности неприводимых представлений $C(n)$ — упорядоченными парами разбиений (λ, μ) с $|\lambda| + |\mu| = n$.

Мы будем писать P_λ (соответственно $P_{\lambda,\mu}$) вместо P_π, если π — представление класса λ (соответственно, класса (λ, μ)).

Теорема 1. *Справедливы формулы*

$$P_\lambda^{S(n)} = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{t^i + st^j}{1 - t^{h(i,j)}} \quad \text{для } G = S(n), \tag{4}$$

$$P_{\lambda,\mu}^{C(n)} = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{t^{2i} + st^{2j+1}}{1 - t^{2h(i,j)}} \prod_{(k,l)\in\mu} \frac{t^{2k+1} + st^{2l}}{1 - t^{2h(k,l)}} \quad \text{для } G = C(n). \tag{5}$$

Замечание 1. Формулы (4) и (5) показывают, что изотопические компоненты как градуированные пространства изоморфны свободному модулю ранга 1 над некоторой градуированной свободной суперкоммутативной алгеброй.

Замечание 2. Неприводимые представления группы $D(n)$ получаются ограничением неприводимых представлений $\pi_{\lambda,\mu}$ группы $C(n)$ при $\lambda = \mu$, за исключением специальных представлений $\pi_\lambda^{\pm}$, которые возникают при ограничении $\pi_{\lambda,\lambda}$.

Это значит, что формулы типа (4) и (5), вообще говоря, не имеют места для неприводимых представлений $D(n)$.

3. Покажем, что второе утверждение теоремы 1 следует из первого.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$P_{\lambda,\mu}^{C(n)}(t, s) = P_\lambda^{S(n)}(t^2, st)\, t^{|\mu|} P_\mu^{S(n)}(t^2, st^{-1}). \tag{6}$$

Для доказательства леммы нам понадобится явное описание представления π типа (λ, μ). Как известно, оно имеет вид

$$\pi_{\lambda,\mu} = \operatorname{Ind}_{C(|\lambda|)\times C(|\mu|)}^{C(n)} (\pi'_\lambda \times \pi''_\mu), \tag{7}$$

где через π'_λ обозначено представление группы $C(|\lambda|)$, которое на $S(|\lambda|)$ совпадает с π_λ, а на нормальной подгруппе $\mathbf{Z}_2^{|\lambda|}$ тривиально, через π''_μ обозначено представление группы $C(|\mu|)$, которое на $S(|\mu|)$ совпадает с π_μ, а на нормальной подгруппе $\mathbf{Z}_2^{|\mu|}$ — с представлением знака.

Из (7), (2) и формулы Фробениуса для характера индуцированного представления (см., например, [8]) вытекает, что равенство (6) достаточно доказать в «крайних» случаях, когда либо $\mu = \varnothing$, либо $\lambda = \varnothing$. В первом случае оно следует из того, что инварианты алгебры Вейля $E(\mathbf{R}^n)$ относительно группы $\mathbf{Z}_2^n$, действующей отражениями в координатных гиперплоскостях, сами образуют алгебру Вейля с четными образующими $x_1^2, \ldots, x_n^2$ и нечетными $x_1 dx_1, \ldots, x_n dx_n$. Во втором случае нас интересуют элементы $E(\mathbf{R}^n)$, антисимметричные относительно $\mathbf{Z}_2^n$. Легко видеть, что они образуют свободный модуль ранга 1 с порождающим элементом $x_1 x_2 \ldots x_n$ над алгеброй симметричных элементов, порожденной четными образующими $x_1^2, \ldots, x_n^2$ и нечетными образующими $x_1^{-1} dx_1, \ldots, x_n^{-1} dx_n$. Лемма доказана.

4. Перейдем теперь к комбинаторной интерпретации коэффициентов $m_{p,q}(\pi)$. Напомним еще два стандартных определения.

Таблицей типа λ называется функция f на диаграмме λ, принимающая целые неотрицательные значения и такая, что множества $\lambda^k = \{(i, j) \in \lambda \mid f(i, j) \leqslant k\}$ также являются диаграммами некоторых разбиений.

Удобно изображать элементы диаграммы не точками (i, j), а квадратными клетками с центрами в этих точках; таблица получается вписыванием в клетки значений функций f.

Весом последовательности $k = (k_1, k_2, \ldots)$ целых неотрицательных чисел назовем последовательность $\mu(k) = (\mu_0(k), \mu_1(k), \ldots)$, где $\mu_i(k) = \# \{j \mid k_j = i\}$. Отметим, что вес не меняется при перестановках членов исходной последовательности.

Определим соответствующие супераналоги.

Супертаблицей типа λ назовем функцию $f = (f_0, f_1)$ на диаграмме λ, принимающую значения в $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_2$ и такую, что $f_0, f_0 + f_1$ — обычные таблицы. Удобно изображать супертаблицу, вписывая в клетку (i, j) число $f_0(i, j)$ и называя его белым, если $f_1(i, j) = 0$, и черным, если $f_1(i, j) = 1$.

Супертаблицу f типа λ назовем *правильной*, если множество $A_{k,\varepsilon} = \{(i, j) \in \lambda \mid f_0(i, j) = k,\ f_1(i, j) = \varepsilon\}$ содержит не более одной клетки в каждом столбце при $\varepsilon = 0$ и не более одной клетки в каждой строке при $\varepsilon = 1$.

Супервесом последовательности $k = (k_1, k_2, \ldots)$ черных и белых чисел назовем пару последовательностей $\widetilde{\mu}(k) = (\mu'(k), \mu''(k))$, где $\mu'(k)$ — вес подпоследовательности белых чисел, а $\mu''(k)$ — вес подпоследовательности черных чисел.

Каждому супервесу $\widetilde{\mu} = (\mu', \mu'')$ соответствует $S(|\mu|)$ — модуль $M^{\widetilde{\mu}}$, который строится по следующему правилу:

$$M^{\widetilde{\mu}} = \operatorname{Ind}_{S(|\mu'|)\times S(|\mu''|)}^{S(|\mu|)} (1 \otimes \operatorname{sgn}). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь в алгебре Вейля $E(\mathbf{R}^n)$ моном вида $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\, dx_1^{\varepsilon_1} \wedge \ldots \wedge dx_n^{\varepsilon_n}$. Супервесом этого монома назовем супервес последовательности $(k_1, \ldots, k_n)$, считая число k_j белым или черным, если $\varepsilon_j = 0$ или 1.

Имеет место очевидная

Лемма 2. *Совокупность мономов супервеса* $\widetilde{\mu}$ *в алгебре Вейля порождает подмодуль, изоморфный* $M^{\widetilde{\mu}}$.

Доказательство непосредственно вытекает из определения индуцированного модуля (см. [8]).

Обозначим через $K_{\lambda, \widetilde{\mu}}$ кратность вхождения неприводимого представления типа λ в модуль $M^{\widetilde{\mu}}$. В случае, когда $\mu'' = 0$, это — классическое число Костки, для которого давно известно несколько комбинаторных интерпретаций. Интересующая нас величина выражается через супераналоги чисел Костки по формуле

$$P_\lambda(t, s) = \sum_{k,\varepsilon} K_{\lambda, \widetilde{\mu}(k,\varepsilon)} t^{|\mu'(k,\varepsilon)|} s^{|\mu''(k,\varepsilon)|}, \tag{9}$$

как видно непосредственно из разложения алгебры Вейля на подмодули, порожденные мономами данного супервеса.

5. Таким образом, задача сводится к отысканию производящей функции для супераналогов чисел Костки. Для этого необходимо, прежде всего, понять комбинаторную интерпретацию чисел $K_{\lambda, \tilde{\mu}(k, \varepsilon)}$.

Определим супервес супертаблицы как супервес последовательности $| A_{k, \varepsilon}|_{k \geqslant 0, \varepsilon \in \{0, 1\}}$. Тогда число $K_{\lambda, \tilde{\mu}(k, \varepsilon)}$ равно числу правильных супертаблиц супервеса $\tilde{\mu}$ и типа λ (см. [10]). Дадим новую комбинаторную интерпретацию супераналогов числа Костки, эквивалентную классической. но для которой производящая функция легко считается.

Закрашенной таблицей типа λ назовем функцию $f = (f_0, f_1)$ на диаграмме λ, принимающую значения в $\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_2$ и такую, что $g(i, j) := f_0 + f_1 (i - j) - i$ — обычная таблица. Будем, как и раньше, называть число, которое мы вписываем в клетку $(i, j) \in \lambda$, белым или черным, если $f_1(i, j) = 0$ или $f_1(i, j) = 1$ соответственно.

Определим супервес закрашенной таблицы так же, как и супертаблицы.

В новых терминах число $K_{\lambda, \tilde{\mu}(k, \varepsilon)}$ равно числу закрашенных таблиц супервеса $\tilde{\mu}$ и типа λ. Для доказательства этого утверждения необходима комбинаторная

Лемма 3. *Число супертаблиц типа* λ *и супервеса* $\tilde{\mu}$ *равно числу закрашенных таблиц типа* λ *и супервеса* $\tilde{\mu}$.

Идея доказательства заключается в явном построении биекции между двумя множествами. Действительно, будем по супертаблице строить закрашенную таблицу. Для этого будем последовательно заполнять числами множества $(i, j) \in A_{(k, \varepsilon)}$, увеличивая k, ε до тех пор, пока не заполним всю диаграмму λ. При этом на каждом этапе у нас будет получаться закрашенная таблица типа $A_{k, \varepsilon}$ и супервеса $\tilde{\mu}_{(k, \varepsilon)}$, полученная ограничением длины последовательностей μ' и μ'' до (k) и $(k - 1 + \varepsilon)$ соответственно. Итак, нам нужно осуществить переход от закрашенной таблицы типа $A_{k, 0}$ к $A_{k, 1}$ либо от таблицы типа $A_{k-1, 1}$ к $A_{k, 0}$. Разберем подробно первый случай.

Заполним $A_{k, 1} \setminus A_{k, 0}$ черными числами так, как ими была заполнена стандартная таблица. По определению супертаблицы и множества $A_{k, \varepsilon}$ все эти числа равны k и в каждой строке стоит не более одной клетки, заполненной черным числом k. Будем теперь «продвигать» эти клетки по строкам сколько возможно, т. е. будем менять значения клетки x, содержащей черное число k, и соседней в строке белой y (i, j), если

$$f_0 (y) - i > k - j - 1. \tag{*}$$

Легко видеть, что при (*) меняется лишь возрастание f внутри строки, а по столбцам порядок сохраняется, т. е. после выполнения ряда (*) для всех строк, содержащих черные k, мы получим закрашенную таблицу типа $A_{k, 1}$ с тем же супервесом, что и соответствующая супертаблица типа $A_{k, 1}$. Для второго случая необходимо действовать аналогично, заменив строки столбцами «продвигая» белые клетки, содержащие k при условии

$$f(y) + j > k - i - 1. \tag{**}$$

Итак, осталось доказать биективность нашего соответствия. Она очевидна из следующего соображения. Построим обратное соответствие индуктивно, путем выделения горизонтальных и вертикальных полос, действуя в обратном порядке. Тогда обратимость, а следовательно, и биективность очевидна.

Вспомним теперь о величине (9), явное выражение для которой мы хотим получить. При суммировании $K_{\alpha, \tilde{\mu}(k, \varepsilon)}$ по всем μ в наших новых терминах мы получим, что коэффициент, стоящий в (9) при $t^p s^q$, равен в точности числу закрашенных таблиц с суммой всех чисел p и числом черных чисел q. Теперь уже написать производящую функцию не составляет труда. Действительно, вспомним, что каждая закрашенная таблица типа λ есть функция $\tilde{f} = (f_0, f_1)$ на диаграмме λ такая, что $\tilde{f} = (f_0', 0) + (f_0'', f_1)$, где f_0' — обычная таблица, а $f_0''(i, j) = \begin{cases} i, f_1(i, j) = 0, \\ j, f_1(i, j) = 1. \end{cases}$ Отсюда ясно, что производящая функция для числа закрашенных таблиц равна произведению производящих функций для обычных таблиц и «координатных» закрашенных таблиц. Но первая производящая функция хорошо известна (см. [6, 9]) и равна $\prod\limits_{(i,\, j)\in\lambda} \frac{1}{1 - t^{h(i,\, j)}}$, где коэффициент при $t^{p'}$ есть число таблиц с суммой p'. Вторая же производящая функция, очевидно, равна $\prod\limits_{(i,\, j)\in\lambda} (t^i + st^j)$, где коэффициент при $t^{p''}s^q$ есть число «координатных» закрашенных таблиц с суммой всех чисел p'' и числом черных чисел q.

Итак, доказана

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\prod_{(i,\, j)\in\lambda} \frac{t^i + st^j}{1 - t^{h(i,\, j)}} = \sum_{p,q} m_{p,q}(\lambda)\, t^p s^q, \tag{10}$$

где $m_{p,q}$ есть число закрашенных таблиц с суммой всех чисел и числом черных чисел q.

Таким образом, мы получим из (9) и (10)

$$P_\lambda(t, s) = \prod_{(i,\, j)\in\lambda} \frac{t^i + st^j}{1 - t^{h(i,\, j)}}, \tag{11}$$

что и доказывает теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Solomon L.* Invariants of finite reflection groups // Nagoya Math. J.— 1963.— V. 22.— P. 57—64.
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 4—6.— М.: Мир, 1972.
3. *Steinberg R.* A geometric approach to the representations of the full linear group over Galois field // Trans. Amer. Math. Soc.— 1956.— V. 71.— P. 274—282.
4. *Lusztig G.* Irreducible representations of finite classical groups // Invent. Math.— 1977.— V. 43.— P. 25—175.
5. *Кириллов А. А.* О полиномиальных ковариантах симметрической группы и некоторых ее аналогов // Функц. анал. и его прилож.— 1984.— Т. 18, вып. 1 — С. 74—75.
6. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла.— М.: Мир, 1985.
7. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп.— М.: Мир, 1982.
8. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.
9. *Stanley R.* Theory and applications of plane partitions. P. 1—2 // Studies of Appl. Math.— V. 1, № 2—3.— P. 167—188, 259—279.
10. *Донин И. Ф.* Разложения тензорных произведений представлений симметрической группы и симметрических и внешних степеней присоединенного представления *gl* (*N*) // ДАН СССР.— 1988.— Т. 303, № 6.— С. 1296—1301.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
2 марта 1990 г.