1994 г. ноябрь — декабрь *т. 49, вып. 6(300)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.1

ВОЗРАСТАЮЩИЕ ДЕРЕВЬЯ И АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

А. Г. Кузнецов, И. М. Пак, А. Е. Постников

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение 79
§ 2. Альтернирующие перестановки и 0-1-2 деревья 80
§ 3. Четные деревья 87
§ 4. Деревья с разветвлениями на четных уровнях 91
§ 5. Вложенные и слабо вложенные деревья 93
§ 6. Геометрические классы деревьев 95
§ 7. Доказательства теорем 97
§ 8. Замечания, открытые проблемы и дальнейшие перспективы 100
Список литературы 109

§ 1. Введение

В статье рассматриваются некоторые возрастающие деревья, число которых равно числу альтернирующих (updown) перестановок, т.е. перестановок вида $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \cdots$. Оказывается, что существует несколько таких классов возрастающих деревьев, каждый из которых интересен по-своему. Особое внимание уделяется изучению различных статистик на этих деревьях, связанных с полиномами Андре и группой Фоата с одной стороны, и числами Энтрингера, возникающими при градуировке альтернирующих перестановок по первому элементу, с другой. Доказательства большинства утверждений основаны на построении явных биекций между классами деревьев и изучении их свойств. Получены также новые комбинаторные тождества для чисел Эйлера и Бернулли.

В п. 2 мы приводим основные определения и известные теоремы, относящиеся к альтернирующим перестановкам, бинарным и возрастающим деревьям. Мы определяем 0-1-2 деревья, т.е. деревья, у которых из любой вершины выходит не более двух ребер, устанавливаем биекцию между ними и орбитами действия группы Фоата на бинарных деревьях, рассматриваем различные статистики.

В п. 3 мы определяем четные деревья, т.е. деревья, у которых из каждой некорневой вершины выходит четное число ребер. Найдена явная биекция между ними и альтернирующими перестановками, установлена связь с инверсионным многочленом и дихроматом Татта полного графа.

© А. Г. Кузнецов, И. М. Пак, А. Е. Постников 1994

В п. 4 мы рассматриваем возрастающие деревья с разветвлениями на четных уровнях и различные статистики на них. Найдена биекция между ними и 0-1-2 деревьями, использующая некоторые бинарные деревья как промежуточный результат.

В п. 5 мы вводим вложенные и слабо вложенные деревья, изучаем статистики на них. Оказывается, что вложенные деревья являются представителями орбит действия группы Фоата на всех возрастающих деревьях. Устанавливается связь с числами Каталана и Белла.

В п. 6 авторами рассмотрены геометрические классы деревьев, т.е. такие множества возрастающих деревьев, что если некоторое дерево входит в него, то входят и все деревья, изоморфные ему, как непомеченные. Доказана общая теорема об эквивалентности на данном геометрическом классе деревьев некоторых статистик, найдены приложения к выше перечисленным классам деревьев.

В п. 7 приведены доказательства теорем из пп. 3–6, а в п. 8 сформулированы дальнейшие перспективы развития этой тематики.

В конце работы, для удобства читателей, помещены небольшие таблицы рассматриваемых классов деревьев.

На протяжении всей статьи мы будем придерживаться следующих обозначений:

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$,
$[\overline{n}] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел,
S_n – группа перестановок элементов множества $[n]$.

Классы возрастающих деревьев обозначаются большими латинскими буквами, индекс означает число ребер в них. Биекции и статистики на деревьях мы обозначаем маленькими греческими буквами. Все обозначения собраны в таблице в конце статьи.

Авторы благодарны Д. Фоата (D. Foata) и М.-П. Шютценберже (M.-P. Schutzenberger), под влиянием результатов и идей которых была написана эта статья. Авторы благодарны В.И. Арнольду за интерес к тематике настоящей работы.

§ 2. Альтернирующие перестановки и 0-1-2 деревья

2.1. Напомним некоторые известные определения (см. [1], [2]).

Альтернирующей (или *"updown"* перестановкой называется $\sigma \in S_n$, такая что $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \cdots$. Множество таких перестановок $\sigma \in S_n$ обозначим Alt_n; $\mathrm{Alt}_{n,k} := \{\sigma \in \mathrm{Alt}_n \mid \sigma(1) = k\}$ положим $a_n := |\mathrm{Alt}_n|$, $a_{n,k} := |\mathrm{Alt}_{n,k}|$. Числа $a_{n,k}$ называются *числами Энтрингера.*

Примеры.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}_1 = \{(1)\}; \quad \mathrm{Alt}_2 = \{(12)\}; \quad \mathrm{Alt}_3 = \{(123), (231\};\\
&\mathrm{Alt}_4 = \{(1324), (1423), (2314), (2413), (3412)\};\\
&\mathrm{Alt}_5 = \{(13254), (14253), (14352), (15243), (15342),\\
&\qquad (23154), (24153), (24351), (25143), (25341),\\
&\qquad (34152), (34251), (35142), (35241), (45132), (45231)\}.
\end{aligned}$$

Числа $a_{n,k}$ удобно расположить в виде треугольника, который называется *треугольником Эйлера – Бернулли* (см. рис. 1). Его левая сторона, на которой стоят числа $a_{2n+1,1} = a_{2n}$ называется *стороной Эйлера*; а правая, с числами $a_{2n,1} = a_{2n-1}$ – *стороной Бернулли.* Начальные значения $a_{n,k}$ см. на рис. 1.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & a_{1,1} & & & & & \\
 & & a_{2,2} & & a_{2,1} & & & & \\
 & a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & & \\
a_{4,4} & & a_{4,3} & & a_{4,2} & & a_{4,1} & & \\
a_{5,1} & & a_{5,2} & & a_{5,3} & & a_{5,4} & & a_{5,5} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 0 & & & \\
0 & & 1 & & 2 & & 2 & & \\
5 & & 5 & & 4 & & 2 & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Рис. 1

Предложение 1. *Пусть* $1 \le k < n$. *Тогда*

$$a_{n,k} = a_{n,k+1} + a_{n-1,n-k}. \tag{1}$$

Доказательство. Построим явную биекцию

$$\gamma\colon \mathrm{Alt}_{n,k+1} \sqcup \mathrm{Alt}_{n-1,n-k} \to \mathrm{Alt}_{n,k}$$

Пусть $\sigma \in \mathrm{Alt}_{n,k+1}$, $\sigma' \in \mathrm{Alt}_{n-1,n-k}$. Пусть также $\sigma_k = (k, k+1) \in S_n$, $\sigma'' = (n, n-\sigma'(1), \dots, n-\sigma'(n-1))$. Положим

$$\gamma(\sigma) = \sigma_k \circ \sigma, \qquad \gamma(\sigma') = \sigma'' \circ \sigma_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \sigma_k.$$

Тогда

$$\mathrm{Alt}_{n,k} \setminus \gamma(\mathrm{Alt}_{n,k+1}) = \{\sigma \in \mathrm{Alt}_n,\ \sigma(1) = k,\ \sigma(2) = k+1\} = \gamma(\mathrm{Alt}_{n-1,n-k}),$$

что и завершает доказательство предложения.

Предложение 2.

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]} (-1)^i \binom{k-1}{2i} a_{n-2i-1}, \qquad 1 \le k < n; \tag{2}$$

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{[(n-k-1)/2]} (-1)^i \binom{n-k}{2i+1} a_{n-2i-2}, \qquad 1 < k \le n. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что (1) есть соотношение между соседними числами в треугольнике Эйлера–Бернулли. Применяя многократно (1), выразим $a_{n,k}$ через числа, стоящие на сторонах треугольника. Ясно, что $a_{n,1} = a_{n-1}$ и $a_{n,n} = 0$. В зависимости от стороны треугольника и от четности n мы получим соотношения (2) и (3).

Предложение 3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$a_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i-1} a_{2i-1} a_{2n-2i+1}; \tag{4}$$

$$a_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} a_{2i} a_{2n-2i}; \tag{5}$$

$$a_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2i} a_{2i} a_{2n-2i-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Легко видеть, что $|\{\sigma \in \mathrm{Alt}_n,\ \sigma(j) = 1\}|$ равно $\binom{n-1}{j-1} a_{j-1} a_{n-j}$ при нечетном j, и 0 при четном. Суммируя по нечетным j получаем (5) и (6). Аналогично (4) получается при рассмотрении мест, на которых может стоять n.

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n / n!$, где $a_0 = a_{1,1} = 1$. Тогда из соотношений (4), (5), (6) получаем дифференциальное уравнение

$$2a'(x) = 1 + a(x)a(x). \tag{7}$$

Заметим, что $\mathrm{tg}(x)+\sec(x)$ удовлетворяет (7). Учитывая начальное условие $a(0) = 1$, сразу получаем

$$a(x) = \mathrm{tg}(x) + \sec(x). \tag{8}$$

Выражение (8) можно было получить также, без использования уравнения (7). Действительно, полагая в (2), (3) k равным 1 и n, и учитывая, что $a_{n,1} = a_{n-1}$, $a_{n,n} = 0$, получаем

$$a(x) \cdot \cos(x) = 1 + \sin(x), \tag{9}$$

откуда сразу следует (8).

Отметим, что $\mathrm{tg}(x)$ содержит лишь нечетные, а $\sec(x)$ – лишь четные члены в разложении. $E_n = a_{2n}$ – это числа Эйлера, а $B_n = n \cdot 2^{-2n}(2^{2n} - 1)^{-1} a_{2n+1}$ – числа Бернулли (см. [3]).

Впервые задача перечисления альтернирующих перестановок была решена Андре (см. [4], [5]). Числа $a_{n,k}$ были введены Энтрингером (см. [6], [7]). Нас будут интересовать комбинаторные интерпретации этих чисел, в виде числа некоторых деревьев.

2.2. *Деревом* с n некорневыми вершинами мы будем называть основное корневое дерево в полном графе K_{n+1} с вершинами из множества $[\bar{n}]$, ориентированное от корня в 0 (см. [8]– [10]).

Возрастающим деревом назовем дерево, вершины которого возрастают по ребрам. Обозначим множество деревьев и множество возрастающих деревьев с n некорневыми вершинами F_n и U_n соответственно. Классическая теорема Кэли утверждает, что $|F_n| = (n+1)^{n-1}$ (см. [1], [8], [9]). С другой стороны, $|U_n| = n!$. Действительно, вершину k можно добавить к дереву $t \in U_{k-1}$ ровно k различными способами. Отсюда, по индукции, сразу получаем, что $|U_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Бинарным деревом на множестве X назовем структуру, определяемую по индукции

а) она пуста, если $X = \varnothing$;

б) она состоит из *верхней вершины* $x_0 \in X$, *левой* и *правой* ветви, т.е. бинарных деревьев на множествах L и R, соответственно, таких, что $X = L \cup R \cup \{x_0\}$ и $|X| = |L| + |R| + 1$ (см., например, [11]).

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать бинарные деревья на множестве $[n]$ такие, что в каждой ветви верхняя вершина меньше всех вершин этой ветви. Множество таких бинарных деревьев обозначим B_n. Мы будем представлять бинарное дерево в виде возрастающего дерева, соединяя ребрами каждую верхнюю вершину с верхними вершинами левой и правой ветви (если эти ветви не пусты), называя их *левыми* и *правыми ребрами* соответственно.

Важно отметить, что бинарное дерево не есть дерево в традиционном смысле, а есть некоторая новая структура, занимающая, как мы увидим, промежуточное положение между возрастающими деревьями и перестановками.

Построим простую биекцию $\psi\colon S_n \to B_n$ по индукции. Пусть мы умеем сопоставлять перестановкам некоторого множества $I \subset [n]$ бинарное дерево с множеством вершин I, для всех $I, |I| < k$. Рассмотрим перестановку $\sigma\colon I \to I$, $|I| = k$. Пусть m – минимальный элемент в I. Тогда σ имеет вид $(\sigma' m \sigma'')$. Построим новое дерево с вершиной m, левой и правой ветвью – деревьями, отвечающими S' и соответственно (см. рис. 2). Легко видеть, что продолжая этот процесс, мы получим бинарное дерево (см. рис. 3). Биективность отображения также очевидна (см. [1], [12]). Отсюда, в частности, сразу получаем, что $|B_n| = n!$.

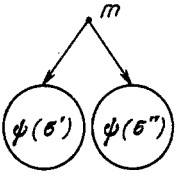


Рис. 2

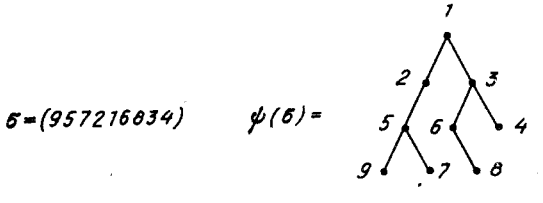


Рис. 3

Положим $V_n = \psi(\mathrm{Alt}_n) \subset B_n$, $V_{n,k} = \psi(\mathrm{Alt}_{n,k}) \subset V_n$, откуда $|V_n| = a_n$, $|V_{n,k}| = a_{n,k}$. Легко видеть, что V_n состоит из тех бинарных деревьев с n вершинами, у которых из каждой вершины выходит либо 0, либо 2 ребра кроме, быть может, крайней справа вершины. Назовем их 0–2 *бинарными деревьями*. Очевидно также, что 0–2 бинарное дерево $t \in V_{n,k}$, если его крайняя левая и нижняя вершина есть k.

Следуя установившейся традиции (см., например, [12]) под *статистикой* на множестве X мы будем понимать градуировку, т.е. отображение $\tau\colon X \to \mathbb{Z}_+$. Две статистики (градуировки) τ и τ' на множествах X и X' соответственно назовем *эквивалентными*, если для любого $k \in \mathbb{Z}_+$, $|X_\tau(k)| = |X'_{\tau'}(k)|$, где $X_\tau(k) = \{x \in \xi;\ \tau(X) = k\}$.

На этом языке, на множестве $S_n(\mathrm{Alt}_n)$ определена статистика по первому элементу перестановки, эквивалентная статистике на B_n (V_n) по крайней левой нижней вершине. Обозначим первую статистику через ε, в честь Энтрингера, а вторую – $\psi(\varepsilon)$.

Построим теперь важную биекцию $\varphi\colon U_n \to B_n$ (см., например, [11]). Пусть, по индукции, мы уже построили бинарные деревья, отвечающие ветвям нашего возрастающего дерева, полученным при удалении ребер, идущих из 0. Упорядочим корни этих ветвей по возрастанию и соединим их идущую влево цепочку. Затем каждый из них соединим идущим вправо ребром с соответствующим бинарным деревом (см. рис. 4). Биективность полученного отображения φ очевидна (см. рис. 5).

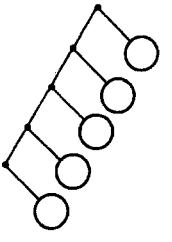


Рис. 4

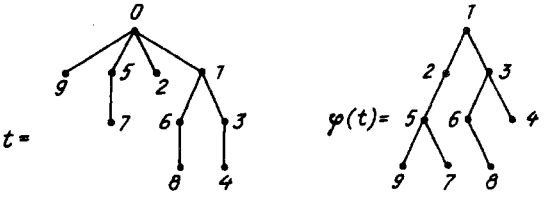


Рис. 5

Отображение φ позволяет все факты о деревьях и статистиках переносить с возрастающих на бинарные деревья и наоборот. Например, $\alpha = \varphi^{-1}(\psi(\varepsilon))$ – градуировка на возрастающих деревьях по максимальной вершине, соединенной ребром с корнем. Мы, однако, не будем рассматривать $\varphi^{-1}(V_n)$. Отметим, что отображение $\varphi^{-1} \circ \psi\colon S_n \to U_n$ совпадает с отображением с помощью рекордов (left-to-right maximum) (см. [12], а также [2]).

2.3. Определим *группу Фоата* G_n, действующую на B_n. Пусть она порождается образующими $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ такими, что s_i действует на дерево $t \in B_n$ заменой правого ребра, выходящего i-вершины, на левое, а левого на правое (если они есть). Легко видеть, что $s_i s_j = s_j s_i$, т.е. образующие коммутируют. Учитывая также, что $s_i^2 = 1$, сразу получаем $G_n \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$ (см. [13], [14]). (Мы даем здесь несколько отличное от оригинального описания группы Фоата.)

Пусть L_n – множество возрастающих деревьев с n некорневыми вершинами, из которых выходит не более двух ребер. Назовем такие деревья *0-1-2 возрастающими*

деревьями. Тогда очевидна биекция $\pi\colon B_n/G_n \to L_{n-1}$ между орбитами действия группы Фоата и 0–1–2 возрастающими деревьями. Важнейший факт состоит в том, что $|L_n| = a_{n+1}$. Впервые он был сформулирован Фоата (см. [13] и доказан Фоата и Стрелом (см. [14], а также биекцию в [15]).

ТЕОРЕМА 1. $|L_n| = a_{n+1}$.

Для удобства читателей, доказательства большинства теорем мы излагаем в п. 7 статьи. Здесь, однако, мы приведем простое биективное доказательство, принадлежащее Донагхи (см. [16]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение $\lambda\colon S_n \to B_n$, полученное модификацией биекции ψ и операции $\iota\colon S_n \to S_n$ дополнения, т.е.

$$\iota(\sigma) := (n+1-\sigma(1), \dots, n+1-\sigma(n)), \qquad \sigma \in S_n.$$

Пусть $\sigma\colon I \to I$, $I \subset [n]$ имеет вид $\sigma(\sigma' m_1 \sigma'')$, причем $m_2 \in \sigma''$, где m_1 и m_2 – минимальный и максимальный элементы в I соответственно. Тогда мы должны рассмотреть вершину m_1, из которой идут левое ребро в $\lambda(\sigma')$, правое – в $L(\sigma'')$, и положить биекцию по индукции, начиная с $I = [n]$. Если же $m_2 \in \sigma'$, то после естественного обобщения ι на перестановки $\sigma\colon I \to I$, $\iota(\sigma)$ будет иметь вид $\iota(\sigma) = (\sigma' m_1 \sigma'')$, $m_2 \in \sigma''$ и мы можем поступить аналогично. Это завершает построение отображения λ (см. рис. 6).

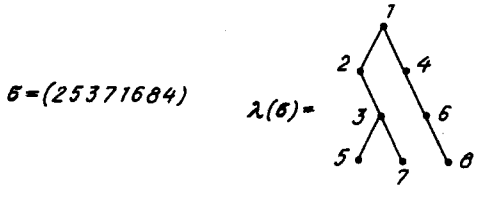


Рис. 6

Докажем теперь, что $\pi(\lambda(\mathrm{Alt}_n)) = L_{n-1}$. Действительно, $\lambda(S_n)$ состоит из тех бинарных деревьев, в которых максимальная вершина любого поддерева лежит в его правой ветви. Очевидно, что такие бинарные деревья являются представителями орбит действия группы Фоата. С другой стороны, по индукции легко показать, что в прообразе L^{-1} каждого такого дерева содержится ровно одна перестановка $\sigma \in \mathrm{Alt}_n$ и $\tilde{\sigma} \in \iota(\mathrm{Alt}_n)$ (см. [16]). Отсюда сразу следует биективность $\pi \circ \lambda\colon \mathrm{Alt}_n \to L_{n-1}$, что и доказывает теорему 1.

Положим $LB_n = \varphi(L_n)$. Легко видеть, что LB_n – множество бинарных деревьев, у которых для любой вершины цепочка ребер, идущих из нее влево, состоит не более чем одного ребра. По теореме 1, $|LB_n| = a_{n+1}$.

Минимальным спуском назовем цепочку ребер в возрастающем дереве, первое из которых выходит из корня, последнее входит в концевую вершину, и каждое из ребер входит в минимальную вершину из тех, в которые входят ребра, выходящие из той же вершины. Обозначим через β статистику на U_n по концевой вершине минимального спуска. Отметим, что $\varphi(\beta)$ – статистика на B_n по правой нижней вершине переходит в статистику $\varphi(\alpha) = \psi(\varepsilon)$ при действии элементом $(s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}) \in G_n$.

Обозначим через δ статистику на U_n по вершине, из которой идет ребро в n. Оказывается, что статистики β и δ на L_n эквивалентны статистике ε на Alt_n с точностью до сдвига. Более точно.

Теорема 2. *Число таких деревьев $t \in L_{n-1}$, что $\beta(t) = n - k$ равно числу таких деревьев $t \in L_n$, что $\delta(t) = n - k - 1$, и равно $a_{n,k}$.*

Эта теорема была впервые сформулирована и доказана Пупаром (см. [17]). Им же были впервые найдены статистики β и δ. Отметим также, что им были изучены статистики β и δ на множестве V_n/G_n (см. [18]), где они также эквивалентны с точностью до сдвига. Мы не будем в этой работе изучать такие деревья. (В п. 6 мы докажем эквивалентность β и δ на всех геометрических классах деревьев.)

2.4. Рассмотрим еще одну важную статистику ν на U_n по числу концевых вершин. Обозначим $d_{n,k}$ число 0–1–2 возрастающих деревьев с k концевыми вершинами. Тогда, по теореме 1 имеем

$$d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,[(n+1)/2]} = a_{n+1}, \tag{10}$$

так как у 0–1–2 дерева с $2n - 1$ или $2n$ вершинами не может быть больше n концевых вершин.

Рассмотрим орбиту O_t группы Фоата G_n, отвечающую 0–1–2 возрастающему дереву t, т.е. $O_t = \pi^{-1}(t) \subset B_n$. Тогда $|O_t| = 2^{m_t}$, где m_t – число образующих s_i, $i \in [n-1]$, действующих нетривиально, т.е. m_t – число неконцевых вершин дерева t. Таким образом, $m_t = n - \nu(t)$, т.е. мы получили соотношение

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} d_{n,k} \cdot 2^{n-k} = n!, \qquad \text{так как} \sum_{t \in L_n} |O_t| = |B_n| = n!. \tag{11}$$

Предложение 4. *Имеют место соотношения*

$$d_{n,1} = 1 \tag{12}$$

$$d_{n,k} = k \cdot d_{n-1,k} + (n + 2 - 2k) d_{n-1,k-1}, \qquad 1 < k \le (n-1)/2, \tag{13}$$

$$d_{2n+1,n+1} = a_{2n+1}/2^n. \tag{14}$$

Доказательство. Соотношение (12) очевидно, так как имеется ровно одно дерево с одной концевой вершиной, а именно цепочка из $n - 1$ ребра. Пусть фиксировано дерево $t \in L_{n-1}$, $\nu(t) = k$. Тогда в t, очевидно, $k - 1$ вершина, из которой выходит два ребра, $n - 2k - 1$ вершина, из которых выходит одно ребро, и k концевых вершин. Следовательно, новую n-ю вершину можно добавить $(n - 2k - 1) + k = (n - k - 1)$ способом, причем k из полученных деревьев имеют k вершин, а $n - 2k - 1 - k + 1$ концевую вершину. Отсюда сразу следует соотношение (13). Доказательство (14) основано на рассмотрении действия группы Фоата G_n. Действительно, если $t \in L_{2n+1}$ и $\nu(t) = n + 1$, то из каждой вершины дерева t выходит либо 0 либо 2 ребра. Следовательно, $O(t) \subset V_{2n+1}$, но $|O(t)| = 2^{(2n+1)-(n+1)} = 2^n$; отсюда сразу следует соотношение (14).

Отметим, что соотношения (12) и (14) однозначно определяют двухиндексную последовательность чисел $d_{n,k}$. Появление чисел $d_{n,k}$ при изучении подъемов и спусков на перестановках, связи с многочленами Эйлера и Андре рассмотрены в [15] (см. также [2] и библиографические ссылки в ней). Здесь мы не будем касаться этого вопроса (см., однако, п. 8).

§ 3. Четные деревья

3.1. Это новый класс возрастающих деревьев, изучаемый нами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Четными* называются возрастающие деревья, у которых из каждой некорневой вершины выходит четное число ребер.

Множество четных деревьев с n некорневыми вершинами обозначим E_n.

ТЕОРЕМА 3. $|E_n| = a_n$.

Примеры четных деревьев см. в таблицах в конце статьи.
Число четных деревьев $t \in E_n$, таких что $\nu(t) = k$ равно $d_{n,n-k+1}$.

ТЕОРЕМА 4. *Число таких четных деревьев $t \in E_n$, что $\delta(t) = k-1$ равно числу таких $t \in E_n$, что $\beta(t) = k$ равно $a_{n,k}$.*

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n) \in \mathrm{Alt}_n$, $\sigma_{i_1} = 1$ – минимальный из элементов множества $\{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$, σ_{i_2} – максимальный из элементов множества $\{\sigma_{i_1+1} \dots \sigma_n\}$, σ_{i_3} – минимальный из элементов множества $\{\sigma_{i_2+1} \dots \sigma_n\}$, и т. д. до $\sigma_{i_k} = \sigma_n$. Назовем элементы $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k}$ отмеченными. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5. *Число деревьев $t \in E_n$, у которых из корня выходит ровно k ребер, равно числу альтернирующих перестановок $\sigma \in \mathrm{Alt}_n$ с k отмеченными элементами.*

Доказательства теоремы 5 и первой части теоремы 4 см. в п. 7.

3.2. Для доказательства теоремы 3 нам потребуется дополнительное построение, представляющее самостоятельный интерес. Обозначим через R_n множество целочисленных последовательностей $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, в которых $1 \le z_i \le n+1-i$. Пусть $Z_n \subset R_n$ – множество таких последовательностей, что $z_1 \le z_2 > z_3 \le z_4 > z_5 \le \cdots$. Очевидно, $|R_n| = n!$. Мы построим такую биекцию $\omega\colon S_n \to R_n$, что $\omega(\mathrm{Alt}_n) = Z_n$.

Пусть $\sigma \in S_n$. Положим $\omega(\sigma) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $z_i = \#\{j \mid i \le j \le n,\ \sigma(j) \le \sigma(i)\}$. Легко видеть, что ω – биекция; неравенства для $\omega(\mathrm{Alt}_n)$ проверяются непосредственно, откуда сразу $|Z_n| = a_n$. Отметим, что $\omega(\sigma)$ – классический вектор инверсий перестановки σ (см., например, [1], [11], [12]). В дальнейшем будет важно, что $[\omega(\sigma)](1) = \sigma(1)$, то есть $\omega(\varepsilon)$ также является статистикой по первому элементу последовательности. Примеры Z_n см. в таблице.

Построим теперь биекцию $\mu\colon Z_n \to E_n$, последовательно соединяя ребрами вершины из $[\bar{n}]$. Точнее, биекция является результатом работы алгоритма, состоящего из $n+1$ шагов, причем результатом работы k-го шага ($k \le n$) является лес (т.е. граф без циклов) на множестве вершин $I_k \subset [n[$. Обозначим через J_k множество корней компонент связности леса, полученного после выполнения k-го шага. В начальный момент положим $I_0 = J_0 = \varnothing$. Пусть также $\tilde{J}_k = J_k \cup \{0; n+1\}$. Представим $\tilde{J}_k$ в виде $\{0 = j_{l+1} < j_l < \cdots < j_1 < j_0 = n+1\}$, где l – число корней леса после k-го шага. Рассмотрим также множество

$$M := \{m \in [n] \setminus I_k \mid j_{2p+1} < m < j_{2p},\ p \in \mathbb{Z}_+\} = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_s\}.$$

Если k – четно, положим $i_{k+1} = m_{z_{k+1}}$, а если нечетно – $i_{k+1} = m_{n-k+2-z_{k+1}}$. Пусть $j_{2p+1} < i_{k+1} < j_{2p}$. Тогда мы добавим к лесу вершину i_{k+1} и ребра, выходящие из i_{k+1} и идущие в вершины $j_1, j_2, \dots, j_{2p}$. Теперь $I_{k+1} := I_k \cup \{i_{k+1}\}$, $J_{k+1} := J_k \cup \{i_{k+1}\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{2p}\}$, и мы можем перейти к следующему шагу. На $(n+1)$-ом

шагу мы должны добавить вершину 0, соединить со всеми вершинами из J и закончить работу алгоритма.

Легко видеть, что $\mu(z) = \mu(z_1, \ldots, z_n)$ действительно четное дерево, так как на k-ом шаге мы соединяем вершину i_k с четным числом вершин, которые больше чем i_k. Неравенства для $z \in Z_n$ обеспечивают работу алгоритма, а именно существование $m_{z_{k+1}}$ $(m_{n-k+2-z_{k+1}})$, то есть $\mu(z)$ как результат работы алгоритма определен корректно. Легко определить действие обратного алгоритма, основанное на выкидывании каждый раз корня с максимальным номером. Отсюда сразу получаем биективность μ, что и доказывает теорему 3.

Пример. Пусть $\sigma = (58261734) \in \mathrm{Alt}_8$ $\omega(\sigma) = (57241311) \in Z_8$.

Имеем после 0-го шага $i_1 = 5$.

После 1-го шага

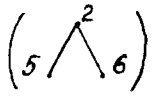
$\tilde{J} = \{0, 5, 9\}, M = \{6, 7, 8\}, i_2 = 6;$

После 2-го шага

$\tilde{J} = \{0, 5, 6, 9\}, M = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}, i_3 = 2;$

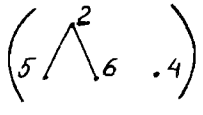
После 3-го шага

$\tilde{J} = \{0, 2, 9\}, M = \{3, 4, 7, 8\}, i_4 = 4;$



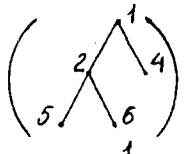
После 4-го шага

$\tilde{J} = \{0, 2, 4, 9\}, M = \{1, 7, 8\}, i_5 = 1;$



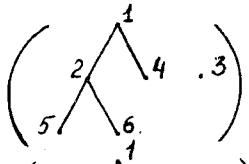
После 5-го шага

$\tilde{J} = \{0, 1, 9\}, M = \{3, 7, 8\}, i_6 = 3;$



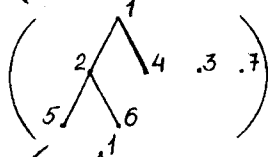
После 6-го шага

$\tilde{J} = \{0, 1, 3, 9\}, M = \{7, 8\}, i_7 = 7;$

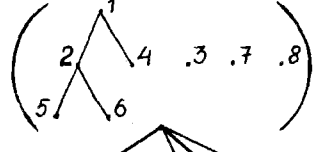


После 7-го шага

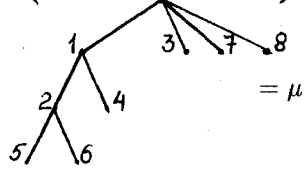
$\tilde{J} = \{0, 1, 3, 7, 9\}, M = \{8\}, i_8 = 8;$



После 8-го шага



После 9-го шага



$= \mu(\omega(\sigma))$

Покажем теперь, что биекция μ также доказывает вторую часть теоремы 4. Для этого нам достаточно проверить, что статистика $\mu(\omega(\sigma))$ совпадает со статистикой β на E_n. Действительно, как уже отмечалось ранее, при построении μ^{-1} мы должны выкидывать каждый раз максимальный корень, то есть статистика $\mu^{-1}(\beta)$ совпадает со статистикой по первому элементу, которая в свою очередь совпадает с $\omega(\varepsilon)$. Таким образом, $\beta = \mu(\omega(\varepsilon))$, и вторая часть теоремы 4 полностью доказана.

В оставшейся части п.3 мы рассмотрим связь четных деревьев с многочленом, перечисляющим деревья, по числу инверсий и дихроматтом Татта полного графа K_n.

3.3. Напомним, что F_n состоит из остовных корневых деревьев, ориентированных от корня в 0. Пусть фиксировано $t \in F_n$. Пару вершин $0 \le i < j \le n$ назовем *инверсией,* если цепочка ребер, идущая от корня в i проходит через j. Пусть $\mathrm{inv}(t)$ обозначает число инверсий дерева t.

Рассмотрим $f_n(x) = \sum_{t\in F_n} x^{\mathrm{inv}(t)}$ – *инверсионный многочлен.* Очевидно, что $f_n(1) = (n+1)^{n-1}$ – число всех деревьев, и $f_n(0) = n!$ – число деревьев с числом инверсий 0, то есть возрастающих деревьев (см. п. 2). Замечательное наблюдение (см. [1] п. 3.3.48) состоит в том, что $f_n(-1) = a_n$ и, с другой стороны, $f_n(2)$ – число связных графов с $(n+1)$-ой вершиной (см. [19], [20]). Здесь мы еще раз докажем это с единой точки зрения.

Положим $\tilde{F}_n$ – множество остовных корневых деревьев на множестве $[\bar{n}]$, ориентированных от корня в произвольной вершине. Аналогично $\tilde{f}_n(x) = \sum_{t\in \tilde{F}_n} x^{\mathrm{inv}(t)}$.

Предложение 5.

$$\tilde{f}_n(x) = (1 + x + \cdots + x^n) f_n(x).$$

Доказательство. Пусть $F_n^k = \{t \in \tilde{F}_n \text{ с корнем в } k\}$. Построим биекцию $\gamma_k \colon F_n^k \to F_n^{k+1}$ такую, что $\mathrm{inv}(\gamma_k(t)) = \mathrm{inv}(t) + 1$, $t \in F_n^k$. Действительно, пусть γ_k меняет в t вершины k и $k+1$. Тогда инверсии (i,j) дерева t сохранятся, и добавится ровно одна новая инверсия $(k, k+1)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{p} = \{P_1, P_2, \dots\}$ – такой конечный неупорядоченный набор подмножеств $P_i \subset [n]$, что $P_i \cap P_j = \varnothing$; $i =\neq j$; $\cup P_i = [n]$; $p_i = |P_i| > 0$. Пусть $\mathfrak{B}_n$ – множество всех таких наборов $\mathfrak{p}$, а $\mathfrak{B}_n^0$ – множество всех наборов $\mathfrak{p} = \{P_1, P_2, \dots\}$, что $p_i = |P_i|$ – нечетно для всех i.

Пусть также $(n)_x = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 6. *Имеют место соотношения*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (k+1)_x f_k(x) f_{n-k-1}(x); \tag{15}$$

$$f_n(x) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{B}_n} (p_1)_x \cdot f_{p_1-1}(x) \cdot (p_2)_x \cdot f_{p_2-1}(x) \cdot \dots \tag{16}$$

Доказательство. Разобьем дерево на два поддерева, удалив ребро, выходящее из корня в 0, после удаления которого 0 и n будут находиться в разных поддеревьях. Совершенно очевидно, что число инверсий дерева есть сумма числа инверсий корневых поддеревьев, одно из которых имеет корень 0. Суммируя по числу вершин во втором поддереве, получаем (15). Соотношение (16) получается аналогично, если разбивать дерево на поддеревья удалением всех ребер, выходящих из корня.

Заметим, что $(k)_{-1} = 0$ при k четном, и $(k)_{-1} = 1$ при k нечетном. Это сразу доказывает, что $f_n(-1) = a_n$. Действительно, при $x = -1$ соотношение (15) есть рекуррентное соотношение для чисел $f_n(-1)$, совпадающее с соотношениями (4)–(6). Покажем, что $f_n(-1) = |E_n|$. Это даст новое доказательство теоремы 3. Действительно, условия на деревья о нечетности числа вершин в ветвях эквивалентно условию о четности числа ребер, выходящих из каждой некорневой вершины. Теперь, действуя так же , как при доказательстве предложения 6, получаем, что для числа четных деревьев выполнено рекуррентное соотношение (16) при $x = -1$, то есть $f_n(-1) = |E_n|$. Сформулируем еще раз это новое, по-видимому, соотношение.

$$a_n = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}_n^0} a_{p_1 - 1} \cdot a_{p_2 - 1} \cdot \ldots . \tag{17}$$

Отметим, что с помощью биекций γ_k (см. доказательство предложения 5) можно построить инволюцию, неподвижную на возрастающих четных деревьях и меняющую четность числа инверсий у остальных деревьев. О многочлене $f_n(x)$ и соотношении (15) см. [20], [21]. При $x = 1$ соотношение (15) переходит в тождество типа Абеля (см. [22]).

3.4. Перейдем теперь к формулировке результатов о дихроматическом многочлене Татта полного графа $\chi(K_{n+1}; 1, x) = g_n(x)$. По теореме Татта (см. [10], [23]) одно из эквивалентных определений состоит в следующем.

Зададим на ребрах полного графа K_{n+1} лексикографический порядок: (i, j) меньше, чем (i', j') $(i < j, i' < j')$, если $i < i'$ или $i = i', j < j'$. Пусть фиксировано $t \in F_n$. Скажем, что ребро (i, j) графа K_{n+1} внешне активно по отношению к t, если $(i, j) \notin t$ и является минимальным ребром в единственном цикле, образованном ребрами дерева t и ребром (i, j). Положим $e(t)$ – число ребер, внешне активных по отношению к t, $g_n(x) = \sum_{t \in F_n} x^{e(t)}$.

Предложение 7. $f_n(x) = g_n(x)$.

Доказательство. Достаточно доказать для $g_n(x)$ рекуррентное соотношение, аналогичное (15). Как и раньше, разобьем дерево t на два поддерева t' и t'' удалением ребра, выходящего из корня, при этом 0 и n лежат в разных поддеревьях. Заметим, что ребро (i, j), $0 < i < j$ не может быть внешне активно к t, если вершины i и j лежат в разных поддеревьях, так как в противном случае цикл содержит ребро, выходящее из 1, которое заведомо меньше ребра (i, j) в лексикографическом порядке. Отсюда $e(t) = e(t') + e(t'') + m(t)$, где m – число внешне активных к t ребер вида $(0, j)$, что $0 \in t', j \in t''$. При различных удаленных ребрах и фиксированных t' и t'' число $m(t)$ принимает по одному разу все значения от 0 до $|t''| - 1$. Суммируя по числу вершин во втором поддереве, получаем $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1 + x + \cdots + x^k) \binom{n-1}{k-1} g_k(x) g_{n-k-1}(x)$, что и требовалось.

Отсюда сразу получаем $g_n(-1) = a_n$. С другой стороны, так как $g_n(x) = \chi(K_{n+1}; 1, x)$, где χ – дихроматт Татта полного графа (см. [10], [23]), то из свойств дихроматта сразу получаем, что $f_n(1 + x)$ – производящая функция для числа остовных связей подграфов графа K_{n+1} по числу ребер. Предложение 7 в таком виде впервые было сформулировано Бьернером в [40]. В частности, $f_n(2)$ – число всех остовных связных графов. Отметим, что в [24] и [20] построены явные биекции, доказывающие тождество $f_n(x) = g_n(x)$, и утверждение о том, что $f_n(1 + x)$ является производящей функцией для помеченных связных графов с $n + 1$-ой вершиной по числу ребер.

3.5. В качестве приложения разберем еще один пример, где появляются соотношения типа (15) и (16). Пусть FB_n – множество всех бинарных (необязательно возрастающих) деревьев на множестве $[n]$, $t \in FB_n$. Положим $\mathrm{inv}(t)$ – число таких пар $1 \le i < j \le n$, что цепочка ребер, выходящая из корня и идущая в i, проходит через j. Обозначим $fb_n(x) := \sum_{t \in FB_n} x^{\mathrm{inv}(t)}$. Тогда $fb_n(1) = |FB_n| = n! \cdot \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – число всех бинарных деревьев (см. [1], [9]), $fb_n(0) = |B_n| = n!$ – число всех возрастающих бинарных деревьев.

Предложение 8.

$$fb_n(-1) = \begin{cases} a_n, & \text{если } n \text{ – нечетно;} \\ 0, & \text{если } n \text{ – четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Будем действовать так же, как и при доказательстве предложений 5, 6. Рассмотрим многочлен $f\tilde{b}_n(x) = \sum x^{\mathrm{inv}(t)}$, где суммирование ведется по всем бинарным деревьям с верхней вершиной в 1. Имеем $f\tilde{b}_n(x) = fb_n(x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$. Аналогично $fb_n(x) \sum_{k=0}^{n-1} f\tilde{b}_k(x) \cdot fb_{n-k-1}(x)$. Отсюда $fb_n(-1) = 0$ при четном n, и $fb_n(-1) = 0$ равно числу четных бинарных деревьев, то есть $fb_n(-1) = 0 = |V_n| = a_n$, при нечетном n (см. п. 2). Это завершает доказательство предложения.

§ 4. Деревья с разветвлениями на четных уровнях

4.1. Введем новый класс возрастающих деревьев.

Определение 2. *Уровнем* вершины i в возрастающем дереве t назовем число ребер в цепочке ребер, выходящей из корня и уходящей в вершину i. *Деревьями с разветвлениями на четных уровнях* назовем возрастающие деревья, у которых разветвления, то есть, вершины, из которых выходит более одного ребра, лежат лишь на четных уровнях (корень лежит на нулевом, то есть на четном уровне). Множество таких деревьев обозначим W_n.

Теорема 6. $|W_n| = a_{n+1}$.

Ее доказательство мы дадим в этом пункте с помощью явной биекции.

Теорема 7. *Число таких деревьев $t \in W_n$, что $\alpha(t) = k$ равно $a_{n+1,n-k+1}$ ($\alpha(t)$ – статистика по максимальной вершине, соединенной с корнем, см. п. 2).*

Теорема 8. *Число таких деревьев $t \in W_n$, что $\beta(t) = k$, равно числу таких деревьев $t \in W_n$, что $\delta(t) = k-1$ (где $\beta(t)$ – статистика по концу минимального спуска, а $\delta(t)$ – статистика по вершине, соединенной ребром с вершиной n, см. п. 2).*

Теорема 9. *Число деревьев $t \in W_{n-1}$ с $n-2k+1$ концевыми вершинами на нечетных уровнях равно $d_{n,k}$.*

Отметим, что статистика, найденная в теореме 8, является, видимо, новой. Доказательство теорем 8,9 см. в п. 7. Примеры см. в таблице.

4.2. Построим явную биекцию $\rho\colon W_n \to L_n$. Для этого определим $\varphi(W_n)$.

Уровнем вершины i в бинарном дереве $t \in B_n$ назовем число ребер, идущих влево в цепочке ребер, выходящей из корня и входящей в вершину i. Рассмотрим множество $WB_n = \varphi(W_n) \subset B_n$ бинарных деревьев $t \in B_n$, у которых нет ребер, идущих влево и выходящих из вершины на нечетном уровне. Легко видеть, что $WB_n = \varphi(W_n) \subset B_n$.

Определим $\overline{LB}_n \subset B_n$ – множество бинарных деревьев, у которых цепочка ребер, идущих вправо из каждой вершины, имеет длину, не большую 1. Очевидно, что $h\colon t \to h \cdot t$ задает биекцию между $\overline{LB}_n$ и LB_n, где $h = (s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n) \in G_n$ (надо заменить правые ребра на левые и наоборот).

Мы построим биекцию $\eta\colon WB_n \to \overline{LB}_n$. Тогда искомая биекция – $\rho = \varphi \circ \eta \circ h \circ \varphi^{-1}$. Так как из вершин на нечетных уровнях влево не могут идти ребра, то пусть η состоит в замене ребер, идущих вправо и выходящих из вершины на нечетном уровне, на ребро, идущее влево (см. рис. 7). Тогда, разумеется, цепочки, идущие вправо, будут длины не большей, чем 1, откуда $\eta(WB_n) \subset \overline{LB}_n$. Для построения $\eta^{-1}(t)$ рассмотрим вершины x дерева t, в которые входит правое ребро и из которых выходит левое ребро. Так как по определению $\overline{LB}_n$ из вершины x не выходит правого ребра, поменяем во всех таких вершинах x левое ребро на правое. Отсюда обратимость η, а, следовательно, и биективность, очевидна. Это доказывает теорему 6.

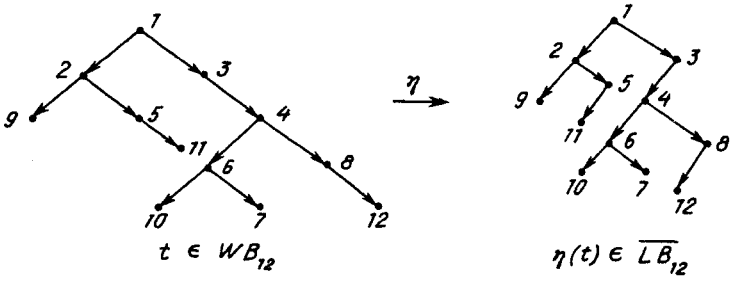


Рис. 7

Покажем, что мы одновременно доказали теорему 7. Действительно, биекция η не меняет крайней левой нижней вершины, то есть $\varphi(\alpha)(t) = \varphi(\alpha)(\eta(t))$, $t \in B_n$. Но биекция h переводит, очевидно, статистику $\varphi(\alpha)$ в статистику $\varphi(\beta)$ (см. п. 2). Отсюда

$$\alpha(t) = \varphi(\alpha)(\varphi(t)) = \varphi(\alpha)(\eta \circ \varphi(t)) = \varphi(\beta)(\varphi^{-1} \circ h\eta \circ \varphi(t)) = \beta(\rho(t)),$$

то есть, статистика α на W_n эквивалентна статистике β на L_n, то есть теорема 7 есть следствие уже известной нам теоремы 2.

Совершенно аналогично можно показать, что $n+1-2\rho^{-1}(\nu)$ – статистика по числу концевых вершин на нечетных уровнях в дереве $t \in W_n$, и тем самым, доказать теорему 9. Другое доказательство теоремы 9 с помощью рекуррентных соотношений (12), (13) (см. п. 2) будет дано в п. 8.

Отметим также еще одно важное следствие конструкции для биекции ρ.

Теорема 10. *Число деревьев $t \in W_n$, у которых из корня выходит k ребер, равно числу деревьев $t \in L_n$, у которых длина минимального спуска равна k (см. п. 2).*

Доказательство. Действительно, как уже отмечалось выше, биекция ρ переводит множество вершин дерева t, в которые идет ребро из корня, во множество вершин, в которые входят ребра минимального спуска. Значит, ρ переводит статистику по числу ребер, выходящих из корня, в статистику по длине минимального спуска, что и доказывает теорему 10.

4.3. При удалении ребер, выходящих из корня, дерево $t \in W_n$ распадается на несколько деревьев. Этому соответствует рекуррентное соотношение

$$a_{n+1} = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}} a_{p_1-1} \cdot a_{p_2-1} \cdot \ldots . \tag{18}$$

Соотношение (18) становится более удивительным при сравнении с (17) (см. п. 3). Мы еще вернемся к нему в следующем пункте.

§ 5. Вложенные и слабо вложенные деревья

5.1. Пусть t – ветвь возрастающего дерева $t_0 \in U_n$. Обозначим $\min(t)$ и $\max(t)$ – минимальную и максимальную вершину ветви t.

Определение 3. *Вложенными* назовем такие возрастающие деревья $t \in U_n$, что при удалении ребер, выходящих из любой вершины $a \in t$, полученные ветви $t_1, t_2, \ldots, t_k$ удовлетворяют *условию вложенности*:

$$\min(t_1) < \min(t_2) < \cdots < \min(t_k) \leq \max(t_k) < \cdots < \max(t_2) < \max(t_1).$$

Обозначим T_n множество вложенных деревьев с n вершинами.

Теорема 11. $|T_n| = a_n$.

Теорема 12. *Число таких вложенных деревьев $t \in T_n$, что $\alpha(t) = k$, равно числу таких вложенных деревьев $t \in T_n$, что $\delta(t) = n - k$, и равно $a_{n,k}$ (см. п. 2).*

Мы докажем теоремы 11 и 12, установив явную биекцию между T_n и L_{n-1}.

Примеры вложенных деревьев см. в таблице VII.

5.2. Рассмотрим множество $TB_n \subset B_n$ бинарных деревьев t, у которых для любой вершины a максимальная вершина ее левой ветви меньше максимальной вершины ее правой ветви. Покажем, что $TB_n = \varphi(B_n)$.

Действительно, если a – вершина дерева $t \in T_n$, то множество вершин правой ветви вершины $\min(t_1) \in \varphi(t)$ есть в точности $\varphi(t_1)$ (см. определение 3), а множество вершин ее левой ветви – $\cup_{i=2}^k \varphi(t_i)$, откуда сразу из условия вложенности

$$\max(\varphi(t_1)) = \max(t_1) > \max(t_2) \max(\cup_{i=2}^k \varphi(t_i)).$$

Следовательно, $\varphi(T_n) \subset TB_n$.

Обратно, пусть $t \in U_n$ и $\varphi(t) \in TB_n$. Тогда, применяя определение TB_n для вершины $\varphi(\min(t_1))$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – ветви, выходящие из $a \in t$, так что $\min(t_1) < \min(t_2) < \cdots < \min(t_k)$, имеем $\max\left(\bigcup_{i=2}^k \varphi(t_n)\right) < \max(t_1)$. Аналогично, для вершины $\min(\varphi(t_2))$ – $\max\left(\bigcup_{i=3}^k \varphi(t_n)\right) < \max(t_2)$, и т. д., для вершины $\min(\varphi(t_{k-1}))$ – $\max\left(\bigcup_{i=k}^k \varphi(t_n)\right) < \max(t_{k-1})$. Отсюда сразу следует условие вложенности $\max(t_k) < \cdots < \max(t_2) < \max(t_1)$, то есть $t \in T$.

Покажем теперь, что TB_n есть множество представителей орбит действия группы Фоата G_n на B_n. Пусть $t \in B_n$, $h_I = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdot \ldots$, где $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество вершин i_j дерева t, в которых максимальная вершина левой ветви больше максимальной вершины правой ветви. Тогда очевидно, что $\tilde{t} = h_I \cdot t \in TB_n$, и если деревья t_1 и t_2 лежат в разных орбитах действия группы Фоаты, то $\tilde{t}_1 \neq \tilde{t}_2$. Таким образом, мы

установили биекцию π^{-1} между L_n и TB_n, состоящую в том, что мы должны считать ребра правыми или левыми в зависимости от того, максимальная вершина какой из ветвей больше. Отсюда $\xi = \varphi^{-1} \circ \pi^{-1}$ – искомая биекция между L_n и T_{n+1}. Отметим, что отображение $\pi : TB_n \to L_n$ тривиально и состоит в забывании структуры правых и левых ребер (см. п. 2).

Таким образом, теорема 11 доказана полностью. Покажем, что нами доказана также вторая часть теоремы 12. Для этого проверим, что $\xi(\delta) = \delta$. Действительно, если в дереве $t \in T_n$ из вершины a ребро идет в вершину n, то, по условию вложенности для вершины a, из нее не выходит других ребер. Следовательно, по определению биекции φ, ребро (a, n) принадлежит дереву $\varphi(t)$, а значит, и дереву $\xi^{-1}(t)$, то есть $\xi(\delta) = \delta$, и вторая часть теоремы 12 следует из теоремы 2. Первая часть теоремы 12 будет нами доказана в п. 7. Отметим также, что для любого дерева $t \in T_n$, $\beta(t) = n$, так как максимальная вершина в данной ветви всегда лежит в подветви с минимальным корнем по условию вложенности.

5.3. Рассмотрим еще один класс возрастающих деревьев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть Q_n – множество возрастающих деревьев на множестве вершин $[\bar{n}]$, удовлетворяющих условию вложенности для всех некорневых вершин. Назовем такие деревья *слабо вложенными. Очевидно, что* $T_n \subset Q_n$.

Для большей наглядности представим каждое дерево $t \in Q_n$ в виде леса, полученного удалением ребер, выходящих из корня (см. примеры в таблице VII).

ТЕОРЕМА 13. $|Q_n| = a_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как ветви слабо вложенного дерева, полученные удалением ребер, выходящих из корня, – вложенные деревья, имеем

$$|Q_n| = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}_n} |T_{p_1-1}| \cdot |T_{p_2-1}| \cdots = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}_n} a_{p_1-1} \cdot a_{p_2-1} \cdot = a_{n+1}$$

по теореме 11 и из соотношения 17.

ТЕОРЕМА 14. *Число таких деревьев $t \in Q_n$, что $\alpha(t) = n+1-k$, равно $a_{n+1,k}$.*

ТЕОРЕМА 15. *Число деревьев $t \in Q_n$, у которых из корня выходит k ребер, равно числу деревьев $t \in L_n$, у которых длина минимального спуска равна k.*

Для доказательства теорем построим биекцию $\zeta \colon Q_n \to W_n$. Пусть $t \in Q_n$ – слабо вложенное дерево; $t_1 \in T_{p_1-1}, t_2 \in T_{p_2-1}, \dots$ – неупорядоченный набор вложенных деревьев, полученных из дерева t удалением ребер, выходящих из корня; $\mathfrak{p} = \{P_1, P_2, \dots\} \in \mathfrak{B}_n$ – соответствующий неупорядоченный набор множеств вершин деревьев t_i (см. выше). Пронумеруем теперь вершины дерева $\rho^{-1}(\xi^{-1}(t_i))$ элементами множества $P_i\{\min(P_i)\}, i = 1, 2, \dots$. Рассмотрим теперь дерево $\zeta(t)$, имеющее корень в 0, из которого идут ребра в вершины $\min(P_i)$, из которых уже выходит по одному ребру в $\rho^{-1}(\xi^{-1}(t_i))$ (см. рис. 8). Очевидно, что $\xi \colon Q_n \to W_n$ – биекция, так как ζ, а обратимость ζ следует из биективности ρ и ζ. Это дает нам новое доказательство теоремы 13. Отметим, что $\xi \circ \rho \circ \zeta$ – биекция между Q_n и T_{n+1}.

Покажем теперь, что $\zeta(\alpha) = \alpha$. Действительно, как следует из построения биекции ζ, множество вершин, соединенных ребром с корнем, то есть имеющих уровень, равный 1, не изменится. Таким образом, теоремы 14 и 15 следуют из теорем 7 и 10 о деревьях с разветвлениями на четных уровнях соответственно.

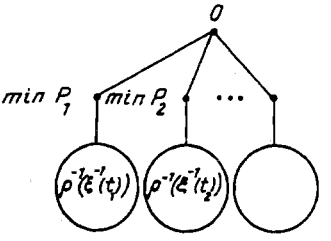


Рис. 8

5.4. В заключении этого пункта рассмотрим две другие классические последовательности чисел.

Числом Белла b_n называется число разбиений $[n]$ на неупорядоченные части, то есть $b_n = |\mathfrak{B}_n|$. *Числом Каталана* c_n называется число бинарных непомеченных деревьев. Точнее, c_n есть число орбит естественного действия группы перестановок S_n на множестве всех бинарных деревьев FB_n (см. п. 3.5). Явные формулы и различные комбинаторные интерпретации для чисел Белла и Каталана см. в [1], [12], [22].

Назовем ребра (i_1, j_1) и (i_2, j_2) возрастающего дерева $t \in U_n$ *вложенными,* если $0 < i_1 < i_2 < j_2 < j_1$.

Предложение 9. *Число слабо вложенных деревьев $t \in Q_n$ без разветвлений в некорневых вершинах равно b_n. Среди них число деревьев без вложенных ребер равно c_n.*

В качестве простого следствия предложения 9 получаем $c_n \le b_n \le a_{n+1}$. Отметим, что при $n \le 3$ $c_n = b_n = a_{n+1}$, а также $c_4 = 14 < b_4 = 15 < a_5 = 16$ (см. таблицу).

§ 6. Геометрические классы деревьев

6.1. Мы докажем общую теорему об эквивалентных статистиках на геометрических классах деревьев.

Определение 5. Множество возрастающих деревьев $H \subset U_n$ назовем *геометрическим,* если со всяким деревом $t \in H$ оно содержит и дерево $t' \in U_n$, изоморфное t как корневое непомеченное дерево. Иными словами, H – геометрическое тогда и только тогда, когда из того, что $t \in H$ следует, что $\mathrm{Or}_t \cap U_n \subseteq H$, где Or_t – орбита, содержащая дерево t, группы перестановок S_n, действующей на F_n перестановками вершин.

Легко видеть, что классы 0–1–2 деревьев, четных деревьев, деревьев с разветвлениями на четных уровнях – геометрические, а классы вложенных и слабо вложенных деревьев – не геометрические.

Для формулировки основной теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $t \in U_n$. Назовем *вектором минимального спуска* дерева t такой набор чисел $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$, что минимальный спуск (см. п. 2) дерева t состоит из ребер $(0,1)$, $(1, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_{l-1,x_l})$, и $\beta(t) = x_l$ – конец минимального спуска (см. п. 2). Назовем *n-спуском* единственный путь, идущий из корня в вершину n. Его длина m, по определению, равна уровню вершины n. Назовем *вектором n-спуска* дерева t такой набор чисел $y(t) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, что n-спуск дерева t состоит из ребер $(0, y_1)$, $(y_1, y_2), \ldots, (y_{m-1}, y_m)$, (y_m, n). Ясно, что $x(t)$ и $y(t)$ – многомерные статистики на множестве U_n.

Теорема 16. *Пусть H – геометрическое множество возрастающих деревьев, $H \subset U_n$. Тогда статистики по вектору n-спуска и минимального спуска – эквивалентны с точностью до сдвига. Точнее, число таких деревьев $t \in H$, что $x(t) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, равно числу таких деревьев $t \in H$, что $y(t) = (v_1 - 1, v_2 - 1, \ldots, v_k - 1)$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы построим явную биекцию $\theta\colon H \to H$, что $y(\theta(t)) = (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1)$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x(t)$.

Пусть $t \in H$, $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Рассмотрим дерево t' на множестве $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, полученное заменой вершины 0 на вершину 1, вершины 1 на вершину x_1, вершины x_1 на вершину x_2 и т. д., вершины x_{k-1} на вершину x_k, вершины x_k на вершину $n+1$. Положим $\theta(t)$ – дерево, полученное уменьшением номеров всех вершин дерева t' на единицу. Очевидно, что $y(\theta(t)) = (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_k - 1)$. Покажем теперь, что $\theta(t) \in H$. Для этого достаточно показать, что $\theta(t) \in U_n$, так как множество H – геометрическое, а изоморфность t, t' и $\theta(t)$ ясна из построения. Предположим, что дерево t' содержит ребро (x_i, z), такое, что $z < x_i$. Тогда дерево t содержит ребро (x_{i-1}, z) и ребро (x_{i-1}, x_i), что невозможно, так как $z < x_i$, а ребро (x_{i-1}, x_i) содержится в минимальном спуске дерева t. Таким образом, t' – возрастающее дерево, а $\theta(t) \in U_n$. Обратимость, а значит, и биективность θ очевидна, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 16 принадлежит Шютценберже и является частным случаем утверждения 5.1 работы [25]. Доказательство теоремы 16 также следует работе [25].

6.2. Особо отметим два важных следствия теоремы 16.

Следствие 1. *Пусть H – геометрическое множество возрастающих деревьев, $H \subset U_n$. Тогда число таких деревьев $t \in H$, что $\beta(t) = k$, равно числу таких деревьев $t \in H$, что $\delta(t) = k - 1$.*

Доказательство. Действительно, как уже отмечалось выше, если $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$, $y(t) = (y_1, y(2, \ldots, y_m)$, то $\beta(t) = x_l$, $\delta(t) = y_m$, откуда немедленно получаем утверждение следствия.

Таким образом, нами доказаны теоремы Пупара об эквивалентности с точностью до сдвига статистик β и δ на L_n и V_n/G_n (см. теорему 2 в п. 2), теорема 8 (см. п .4) и эквивалентность первой и второй части теоремы 4 (см. п. 3).

Следствие 2. *Пусть H – геометрическое множество возрастающих деревьев, $H \subset U_n$. Тогда число деревьев $t \in H$, у которых длина минимального спуска равна k, равна числу деревьев $t \in H$, у которых вершина n находится на уровне k.*

Тем самым, в случае $H = L_n$ найдена статистика по уровню вершины L_n, эквивалентная статистике на L_n по длине минимального спуска, которая по теоремам 10 и 15 в вою очередь эквивалентна статистикам на W_n и Q_n по числу ребер, выходящих из корня. Чтобы подчеркнуть важность этой статистики, сформулируем теорему о статистике, ей эквивалентной, на множестве альтернирующих перестановок Alt_{n+1}.

Назовем элемент $\sigma(i)$, $2 \le i \le n$ *крайним* в перестановке $\sigma \in S_n$, если $\sigma(j) < \sigma(i)$ для всех $1 \le j < i$ или $\sigma(j) > \sigma(i)$ для всех $1 \le j < i$, то есть, элементы перестановки, находящиеся левее $\sigma(i)$ либо все меньше $\sigma(i)$, либо все больше $\sigma(i)$. Положим $\varkappa(\sigma)$ – число крайних элементов в перестановке σ.

ТЕОРЕМА 17. *Число таких альтернирующих перестановок $\sigma \in \mathrm{Alt}_{n+1}$, что $\varkappa(\sigma) = k$, равно числу 0–1–2 деревьев $t \in L_n$, у которых длина минимального спуска равна k.*

Мы докажем теорему 17 в п. 7 с помощью рекуррентных соотношений, найденных для этой статистики.

6.3. В заключении этого пункта скажем несколько слов о самом геометрическом подходе к задачам перечисления перестановок и деревьев.

Класс перестановок, или статистика на перестановках, называются геометрическими, если определяются только подъемами и спусками в перестановке, то есть сравнениями $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ или $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. В частности, классические статистики Эйлера по числу спусков и Мак-Магона по сумме мест спусков – геометрические (см. [1], [2], [12]). Впервые систематическое изучение геометрических классов перестановок и статистик, видимо, было начато в [2] и затем продолжено в ряде других работ. Не имея возможности провести обзор указанного цикла статей, отметим в этой связи длинную серию работ Карлитца (Carlitz) и его соавторов, посвященную обобщениям чисел $a_{n,k}$ для других регулярных конфигураций подъемов и спусков, оригинальный подход Стенли с помощью функций Мебиуса для биномиальных частично упорядоченных множеств (см. [26], [12]), а также богатый фактический материал, собранный в главе 4 монографии [1] (см. там же список литературы). Относительно перечисления числа деревьев в геометрических классах также существует большое количество результатов, в основном связанных с применением техники дифференциальных уравнений (см., например, [27], [1]). Отметим здесь преимущество биективного подхода, позволяющего формулировать и доказывать негеометрические результаты о перестановках в терминах геометрических классов деревьев, и наоборот.

§ 7. Доказательства теорем

Для начала отметим, что нами построена полная система биекций между Alt_n и L_{n-1}, E_n, W_n, T_n, Q_{n-1} (см. рис. к таблице 1). Отсюда сразу получаем утверждения теорем 1, 3, 6, 11, 13. При изучении свойств биекций, как показано в п. 3–5, были получены доказательства теорем 7, 9, 14, 15, а также вторых частей теорем 4 и 12. Далее, теорема 16 и следующие из нее теорема 8 и первая часть теоремы 4 были доказаны в п. 6. Доказательство теоремы 2 см. в [17]. Здесь мы дадим доказательства оставшихся теорем 5, 17 и первой части теоремы 12, а также приведем второе доказательство теоремы 9.

7.1. Доказательство теоремы 4. Обозначим через $c_{n,k}$ число деревьев $t \in E_n$ с k концевыми вершинами. Имеет место соотношение

$$c_{n,k} = \sum_{l=1}^{[(n-1)/2]} \sum_{m=1}^{k-1} \binom{n-1}{2l} c_{2l,m} \cdot c_{n-2l-1,k-m} + c_{n-1,k-1}. \tag{19}$$

Действительно, разобьем дерево $t \in E_n$ на два поддерева t' и t'' удалением ребра $(0,1)$. Пусть $2l+1$ – число вершин в поддереве t', содержащем вершину 1, m – число концевых вершин в t'. Тогда, если $l > 0$, в t'' всего $n-2l-1$ вершин, и из них $k-m$ – концевые. Разбирая отдельно случаи $l = 0$ и $l > 0$, суммируя по l и m, получаем (19).

Обозначим через $b_{n,k}$ число деревьев $t \in L_{n-1}$ с k неконцевыми вершинами. Тогда

$$b_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{k-1} \binom{n-2}{l} b_{l,m} \cdot b_{n-l-1,k-m} + b_{n-1,k-1}. \tag{20}$$

Соотношение (20) доказывается аналогично, только в этом случае удаляются все ребра, выходящие из корня, и рассматриваются отдельно случаи, когда этих ребер одно или два. Вспомним теперь, что $b_{n,k} = d_{n,n-k+1}$ по определению последовательности $d_{n,k}$ (см. п. 2). Теперь, учитывая явные выражения для биномиальных коэффициентов и соотношения (12), можно вывести (19) из соотношения (20) для последовательности $b_{n,k}$. Так как (19) задает последовательность $c_{n,k}$ однозначно с точностью до начальных значений, то $b_{n,k} = c_{n,k}$. Это завершает доказательство теоремы 5, так как в четном дереве любая неконцевая и некорневая вершина является разветвлением.

7.2. Доказательство теоремы 5. Обозначим через $c_{n,k}$ число деревьев $t \in E_n$, у которых из корня выходит k ребер. Тогда имеет место соотношение

$$c_{n,k} = \sum_{l=1}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1}{2l} a_{2l} \cdot c_{n-2l-1,k-1}. \tag{21}$$

Действительно, разобьем дерево t на два поддерева t' и t'' удалением ребра $(0,1)$, и пусть t'' содержит вершину 0, t' содержит ровно $2l+1$ вершину. Теперь, суммируя по всем t' и t'', получаем соотношение (21).

Обозначим $b_{n,k}$ число альтернирующих перестановок с k отмеченными элементами. Выведем для последовательности $b_{n,k}$ соотношение (21). Пусть $\sigma_{i_1} = 1$ – первый отмеченный элемент в перестановке σ. Представим σ в виде $(\sigma' 1 \sigma'')$, где $\sigma' = (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{i_1-1})$, $\sigma'' = (\sigma_{i_1+1} \ldots \sigma_n)$. Тогда $i_1 = 2l+1$, и все отмеченные элементы кроме σ_{i_1} лежат в σ''. Суммируя по σ' и σ'', сразу получаем соотношение (21) для последовательности $b_{n,k}$, что и завершает доказательство теоремы 5.

7.3. Доказательство теоремы 9. Обозначим через $c_{n,k}$ число деревьев $t \in W_{n-1}$ с $n-2k+1$ концевыми вершинами на нечетных уровнях. Очевидно, $c_{n,1} = 1$, так как дерево $t \in U_{n-1}$ с $n-1$ концевыми вершинами есть в точности дерево t_0, содержащее $n-1$ ребро, выходящее из корня. Докажем теперь соотношения (13) для последовательности $c_{n,k}$. Рассмотрим $t \in W_{n-1}$ с k вершинами на четных уровнях. Тогда у него $k-1$ неконцевых вершин на нечетных уровнях и $n-k-(k-1) = n-2k+1$ концевых вершин на нечетных уровнях. Следовательно, новую вершину мы можем добавить $(k) + (n-2k+1)$ различными способами, причем в k случаях число концевых вершин на нечетных уровнях станет равным $n-2k+2$, а в $n-2k+1$ случаях – станет равным $n-2k$. Отсюда $c_{n,k} = k \cdot c_{n-1,k} + (n-2k+2) \cdot c_{n-1,k-1}$, и мы доказали соотношение (13) для последовательности $c_{n,k}$, что и завершает доказательство теоремы 9.

7.4. Доказательство первой части теоремы 12. Пусть $t \in L_n$. *Антимаксимальным спуском* в t назовем цепочку ребер, первое из которых выходит из корня, последнее входит в неразветвленную вершину дерева t (то есть вершину, из которой выходит не более одного ребра), такую, что ребро, выходящее из вершины i входит в ветвь, содержащую минимальную из максимальных вершин ветвей, выходящих из вершины i. Обозначим через $\bar{\beta}$ статистику по концу антимаксимального спуска. Покажем, что $\bar{\beta} = [\pi \circ \varphi](\alpha) = \xi^{-1}(\alpha)$. Действительно, как показано в п. 2, $\varphi(\alpha)$ – статистика по концу максимальной цепочки, идущей влево. Но, по определению $TB_n = \varphi(T_n)$,

максимальная из вершин i лежит в правой полуветви, откуда сразу $\bar{\beta} = \xi^{-1}(\alpha)$. Обозначим через $b_{n,k}$ число деревьев $t \in L_{n-1}$, что $\bar{\beta}(t) = \alpha(\xi(t)) = k-1$. Покажем, что $b_{n,k} = a_{n,k}$. Для этого выведем рекуррентные соотношения $c_{n,1} = a_{n-1}$ и

$$c_{n,k} = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{k-2}{l} \binom{n-k-1}{m} c_{n-l-m-2,k-l-1} \cdot a_{l+m+1} \tag{22}$$

для $c_{n,k} = a_{n,k}$ и $c_{n,k} = b_{n,k}$ независимо.

Пусть $t \in L_{n-1}$. Если $\bar{\beta}(t) = 0$, то из корня выходит ровно одно ребро, и, следовательно, $b_{n,1} = a_{n-1}$. Пусть теперь $\bar{\beta}(t) > 0$, то есть из корня t выходят ровно два ребра ($t \in L_{n-1}$). Разобьем дерево t на два поддерева t' и t'' удалением этих ребер. Пусть вершина n содержится в t'. Тогда ясно, что вершина $k-1$ содержится в t'' (по определению антимаксимального спуска). Обозначим через l число вершин дерева t'', меньших $k-1$, m – число вершин t', больших $k-1$. Суммируя по всем t' и t'', сразу получаем соотношение (22) для последовательности $b_{n,k}$.

Пусть $\sigma \in \mathrm{Alt}_n$, $k = \varepsilon(\sigma)$ – первый элемент перестановки σ. Ясно, что $a_{n,1} = a_{n-1}$ (см. п. 1). Пусть теперь $k > 1$, $\sigma_{i_1} = 1$, $\sigma_{i_2} = n$, $i = \min(i_1, i_2)$. Представим перестановку σ в виде $(\sigma'\sigma_i\sigma'')$, где $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$, $\sigma'' = (\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$. Обозначим через l число элементов σ_j в σ'', таких, что $1 < \sigma_j \le k$, m – число элементов σ_j в σ'', таких, что $k < \sigma_j < n$. Покажем, что, суммируя по по всем σ' и σ'', мы получим соотношение (22) для последовательности $a_{n,k}$. Для этого заметим, что при $i = i_1$ суммирование будет вестись по таким l и m, что $n-l-m$ – четно, а при $i = i_2$ – по таким l и m, что $n-l-m$ – нечетно. Таким образом, нами доказаны одинаковые рекуррентные соотношения для $a_{n,k}$ и $b_{n,k}$, что и завершает доказательство теоремы.

7.5. Доказательство теоремы 17. Обозначим через $c_{n,k}$ число деревьев $t \in W_n$, у которых из вершины выходит ровно k ребер. Имеет место следующее соотношение

$$c_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} c_{n-l-1,k-1} \cdot a_l + c_{n-1,k-1}. \tag{23}$$

Действительно, разобьем дерево t на два поддерева t' и t'' удалением ребра $(0,1)$. Пусть t'' содержит $l+1$ вершину, t' содержит вершину 0. Разбирая отдельно два случая $l = 0$ и $l > 0$ и суммируя по всем t' и t'', получаем соотношение (23).

Докажем теперь соотношение (23) для последовательности $b_{n,k}$, где $b_{n,k}$ – число перестановок $\sigma \in \mathrm{Alt}_n$, $\varkappa(\sigma) = k$, $\sigma_{i_1} = 1$, $\sigma_{i_2} = n$, $i = \max(i_1, i_2)$. Представим перестановку σ в виде $(\sigma'\sigma_i\sigma'')$, где $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$, $\sigma'' = (\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$. Заметим, что σ' содержит $k-1$ крайний элемент, а σ'' – не содержит их, а также, что при $i = i_1$ число i – четно, а при $i = i_2$ i – нечетно. Разбирая отдельно случаи $i = n$ и $i < n$, суммируя по σ' и σ'', сразу получаем соотношение (23) для последовательности $b_{n,k}$, в котором суммирование идет по $l = n-i$. Это завершает доказательство теоремы 17, так как по теореме 10 статистика на L_n по длине минимального спуска эквивалентна статистике на W_n по числу ребер, выходящих из корня.

7.6. Доказательство предложения 9. Построим сюръекцию $\gamma\colon Q_n \to \mathfrak{B}_n$ следующим образом. Пусть $t \in Q_n$ – слабо вложенное дерево, $P_1, P_2, \dots$ – множества вершин его поддеревьев, полученных удалением всех ребер, выходящих из корня. Положим $\gamma(t) = \mathfrak{p} = (P_1, P_2 \dots) \in \mathfrak{B}_n$. Покажем, что γ осуществляет биекцию

между слабо вложенными деревьями без разветвлений в некорневых вершинах и $\mathfrak{B}_n$. Действительно, если одно из поддеревьев дерева t, полученных удалением всех ребер, выходящих из корня, содержит вершины из множества $P = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_l\}$, то из вершины p_1 может идти только одно ребро в p_2, из p_2 – в p_3 и т.д. Таким образом, слабо вложенное дерево t без разветвлений в некорневых вершинах восстанавливается однозначно по $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}_n$, $\gamma(t) = \mathfrak{p}$, что и влечет за собой первую часть предложения 9.

Доказательство второй части предложения 9 основано на иной конструкции. Пусть $\{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_l, q_l)\}$ – множество невыходящих из корня ребер слабо вложенного дерева t, причем $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$, что возможно, если t – без разветвлений. Условие отсутствия вложенных ребер на этом языке означает, что $q_1 < q_2 < \cdots < q_l$ (если $q_i > q_{i+1}$, то ребра (p_i, q_i) и (p_{i+1}, q_{i+1}) – вложенные). Рассмотрим теперь *путь на решетке* $\mathbb{Z}^2$ *с началом* $(0,0)$ *и концом* $(2n, 0)$ (определения см., например, в [1]), имеющий вид

$$\begin{gathered}(0,0), (1,1), (2,2), \ldots, (q_1, q_1), (q_1+1, q_1-1), \ldots,\\ (q_1+p_1, q_1-p_1), (q_1+p_1+1, q_1-p_1+1), , \ldots, (q_2+p_1, q_2-p_1), \ldots,\\ (q_2+p_2, q_2-p_2), \ldots, (q_l+p_l, q_l-p_l), \ldots, (n+p_l, n-p_l), \ldots, (2n, 0).\end{gathered}$$

Хорошо известно, что число таких путей и равно числу Каталана (см., например, [1] п. 5.2), что и завершает доказательство предложения 9.

§ 8. Замечания, открытые проблемы и дальнейшие перспективы

8.1. Было бы интересно получить прямые комбинаторные доказательства тождеств типа (1) для статистик, эквивалентных статистике Энтрингера, на различных классах возрастающих деревьев.

8.2. Спрингер [28] и Арнольд [29], [30] предложили обобщения чисел $a_{n,k}$ на другие системы корней. Авторам неизвестна их интерпретация в виде числа некоторых деревьев. Особенно интересно было бы получить обобщение предложения 7 и тождества $\chi(A_n; 1, -1) = a_{n-1}$. В этом случае, видимо, нужно рассматривать дихроматт Татта соответствующей системы корней. Авторы намерены вернуться к этому вопросу в дальнейшем.

8.3. В работе [31] авторы рассматривают "непомеченный аналог" биекции ρ настоящей работы. Роль возрастающих деревьев играют плоские деревья с висячим корнем, которых, как известно (см. [1]), число Каталана. На них также вводится действие "непомеченного аналога" группы Фоата, число орбит которой равно числу плоских деревьев с разветвлениями на четных уровнях и равно числу Моцкина (см., например, [1], [32], [33]). Возможно, существуют непомеченные аналоги других классических комбинаторных объектов.

8.4. Пусть $N(n)$ – подгруппа группы $GL(n, \mathbb{F}_2)$, состоящая из верхних треугольных матриц с единицами на диагонали. А.А. Кириллов в работе [34] заметил, что число классов сопряженных элементов группы $N(n)$, так же как и число орбит коприсоединенного представления $N(n)$, при малых значениях n равно 1, 2, 5, 16, 61, то есть совпадают с a_n, $n \leq 5$. Однако уже при $n = 6$ мы получим $275 > 272 = a_6$ классов сопряженности (см. [35]). Если бы оказалось, что число *каких-то* классов сопряженности $N(n)$ равно a_n, было бы интересно обобщить этот факт на все поля $\mathbb{F}_q$ и на другие системы корней.

8.5. В работе [36] была установлена связь между многочленом $f_n(x)$ (см. п.3) и мажорирующими последовательностями. Явная инволюция на мажорирующих последовательностях, доказывающая, что $f_n(-1) = a_n$, различные обобщения и связь

с теорией представлений симметрической группы рассмотрены последними двумя авторами в работе [37].

8.6. Теорема 16 об эквивалентности статистик β и δ на геометрических классах возрастающих деревьев связана со *сдвигом Щютценберже* (jeu de taquin), играющим фундаментальную роль в теории представлений симметрической группы (см. [25], [38]). Обобщение на любое частично упорядоченное множество было получено в работе [25]. Обобщения, связанные со статистиками α, ν и т. д., авторам не известны.

8.7. Хорошо известны "многомерные аналоги" классических комбинаторных объектов. Так, роль обычных деревьев играют k-мерные деревья, бинарных – $(k+1)$-арные деревья и т.д. (см., например, [9]). Было бы интересно получить многомерное обобщение чисел a_n и многочленов $f_n(x)$ в духе настоящей статьи.

8.8. Авторам не известна простая явная биекция между T_n и Q_{n-1}. Возможно, ее нахождение дало бы прямое доказательство теорем 12–15.

8.9. Различными авторами в разное время изучались q-аналоги чисел a_n, связанные со статистикой на Alt_n по числу инверсий перестановок. Обширная информация о них собрана в книге [1]. Было бы интересно получить q-аналоги соответствующих статистик на возрастающих деревьях. В связи с этим отметим работу [39], в которой предложен своего рода q-аналог формулы Кэли.

8.10. Интересно было бы получить обобщение соотношений типа (15) для многочленов Татта двудольных и k-дольных графов (см., например, [8], [9]), так как в этих случаях существуют простые мультипликативные формулы для числа остовных деревьев.

Таблица I. Список обозначений

1. Множества

Alt_n – альтернирующие перестановки, п. 2.1.

F_n – множество всех деревьев, п. 2.2.

U_n – множество возрастающих (increasing) деревьев, п. 2.2.

B_n – множество бинарных (binary) возрастающих деревьев, п. 2.2.

V_n – множество 0–2 бинарных деревьев, п. 2.2.

G_n – группа Фоата, п. 2.3.

L_n – множество 0–1–2 возрастающих деревьев, п. 2.3.

LB_n – множество 0–1–2 возрастающих бинарных деревьев, $LB_n = \varphi(L_n)$, п. 2.3.

O_t – множество деревьев в орбите группы Фоата, отвечающей данному $t \in L_n$, п. 2.3.

E_n – множество четных (even) деревьев, п. 3.1.

R_n – множество целочисленных последовательностей $(z_1, \dots, z_n)$, в которых $1 \le z_i \le n+1-i$, п. 3.2.

Z_n – множество таких элементов R_n, что $z_1 \le z_2 > z_3 \le \dots$, п. 3.2.

$\tilde{F}_n$ – множество корневых деревьев с произвольным корнем, п. 3.3.

$\mathfrak{p} = (P_1, P_2, \dots)$ – набор неупорядоченных подмножеств фиксированного множества
$[n] = \{1, \dots, n\}$, что $P_i \cap P_j = \varnothing$, $i \ne j$, $P_i \ne \varnothing$, $\bigcup_i P_i = [n]$, п. 3.3.

$\mathfrak{B}_n$ – множество таких наборов, п. 3.3.

$\mathfrak{B}_n^0$ – множество таких наборов, что $|P_i|$ – нечетно, п. 3.3.

FB_n – множество бинарных деревьев, п. 3.5.

W_n – множество деревьев с разветвлениями на четных уровнях, п. 4.1.
$WB_n = \varphi(W_n)$ п. 4.2.

$\overline{LB}_n = h(LB)$ – деревья, симметричные LB_n, п. 4.2.
T_n – множество вложенных деревьев, п. 5.1.
$TB_n = \varphi(T_n)$ п. 5.2.
Q_n – множество слабо вложенных деревьев, п. 5.3.

2. Биекции

$\psi\colon S_n \to B_n, \psi\colon \mathrm{Alt}_n \to V_n$, п. 2.2.
$\varphi\colon U_n \to B_n$, п. 2.2.
$\pi\colon B_n/G_n \to L_{n-1}$, п. 2.3.
$\lambda\colon \mathrm{Alt}_n \to B_n/G_n$, п. 2.3.
$\omega\colon S_n \to R_n, \omega\colon \mathrm{Alt}_n \to Z_n$, п. 3.2.
$\mu\colon Z_n \to E_n$, п. 3.2.
$\rho\colon W_n \to L_n$, п. 4.2.
$h\colon LB_n \to \overline{LB}_n$, п. 4.2.
$\eta\colon WB_n \to LB_n$, п. 4.2.
$\pi\colon TB_n \to L_n$, п. 5.2.
$\xi\colon L_n \to T_{n+1}$, п. 5.2.
$\zeta\colon Q_n \to W_n$, п. 5.3.
$\theta\colon H \to H$, H – любой геометрический класс деревьев, п. 6.1.

3. Статистики

$\varepsilon\colon S_n \to \mathbb{Z}_+, \varepsilon\colon \mathrm{Alt}_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по первому элементу, п. 2.2.

$\alpha = \varphi^{-1}(\psi(\varepsilon))\colon U_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по максимальной вершине, соединенная с корнем, п. 2.2.

$\beta\colon U_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по концевой вершине минимального спуска, п. 2.3.

$\delta\colon U_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по вершине, соединенной ребром с n, п. 2.3.

$\nu\colon U_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по числу концевых вершин, п. 2.4.

$\mathrm{inv}\colon F_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по числу инверсий дерева, п. 3.3.

$y\colon U_n \to$ последовательности, статистика по вектору минимального спуска, п. 6.1.

$\varkappa\colon S_n \to \mathbb{Z}_+, \varkappa\colon \mathrm{Alt}_n \to \mathbb{Z}_+$, статистика по числу крайних элементов перестановки, п. 6.2.

4. Последовательности

a_n – число альтернирующих перестановок, п. 2.1.
$a_{n,k}$ – число Энтрингера, п. 2.1.
$d_{n,k}$ – число число 0–1–2 деревьев с k концевыми вершинами, п. 2.4.
b_n – число Белла, п. 5.4.
c_n – число Каталана, п. 5.4.

$$\begin{tikzcd}
V_n & \mathrm{Alt}_n \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\mu\circ\omega"] \arrow[d, "\pi\circ\lambda"] & E_n \\
T_n & L_{n-1} \arrow[l, "\xi"'] & W_{n-1} \arrow[l, "\rho"'] & Q_{n-1}. \arrow[l, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

Таблица II. Некоторые значения последовательностей

1) Числа альтернирующих перестановок.

2) Треугольник Эйлера–Бернулли, числа Энтрингера $a_{n,k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 5 & & 5 & & 4 & & 2 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16 & & \\
 & 61 & & 61 & & 56 & & 46 & & 32 & & 16 & & 0 & \\
0 & & 61 & & 122 & & 178 & & 224 & & 256 & & 272 & & 272 \\
1385 & & 1385 & & 1324 & & 1202 & & 1024 & & 800 & & 544 & & 272 & & 0
\end{array}
$$

$a_{2n} = E_n$ – числа Эйлера;
$a_{2n+1} = 2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n/2n$, где B_n – числа Бернулли.

3) Числа $d_{n,k}$.

n \ k	1	2	3	4
1	1			
2	1	1		
3	1	4		
4	1	11	4	
5	1	26	34	
6	1	57	180	34
7	1	120	768	496

4) Числа Каталана и Белла.

n	1	2	3	4	5
c_n	1	2	5	14	42
b_n	1	2	5	15	52

ТАБЛИЦА III. Множества $\mathrm{Alt}(n)$ и V_n, $n \le 5$

1) $\mathrm{Alt}(n)$, $n \le 5$.

$n = 1$	(1) $\quad n = 2$ (12) $\quad n = 3$ (132), (231)
$n = 4$	(1324), (1423), (2314), (2431), (3412)
$n = 5$	(15243), (15342), (14253), (14352), (13254), (25143), (25341), (24153), (24351), (23154), (35142), (35241), (34152), (34251), (45132), (45231)

2) V_n, $n \le 5$.

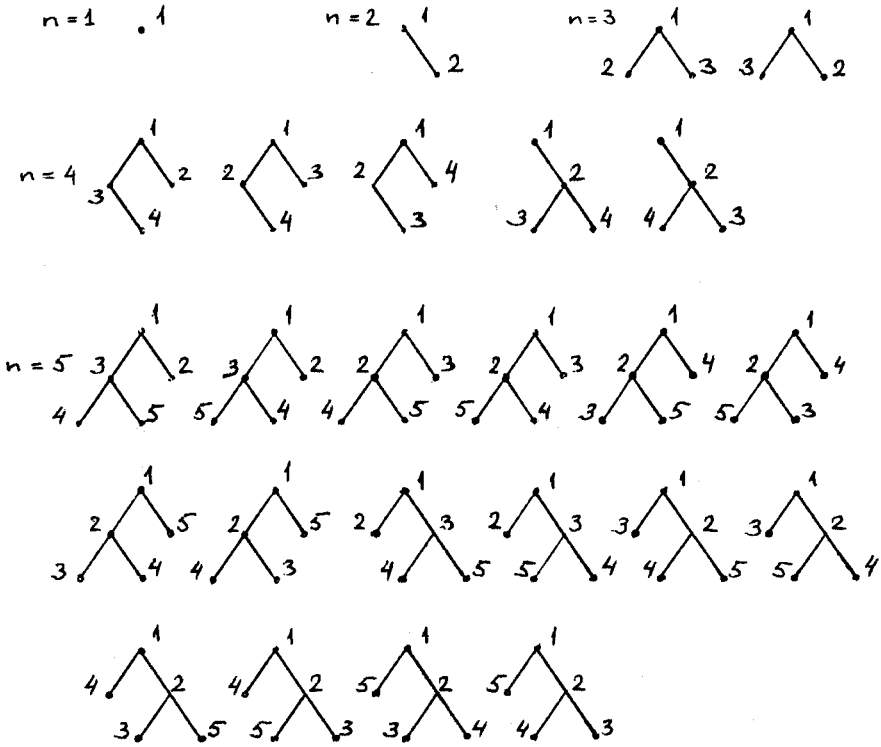
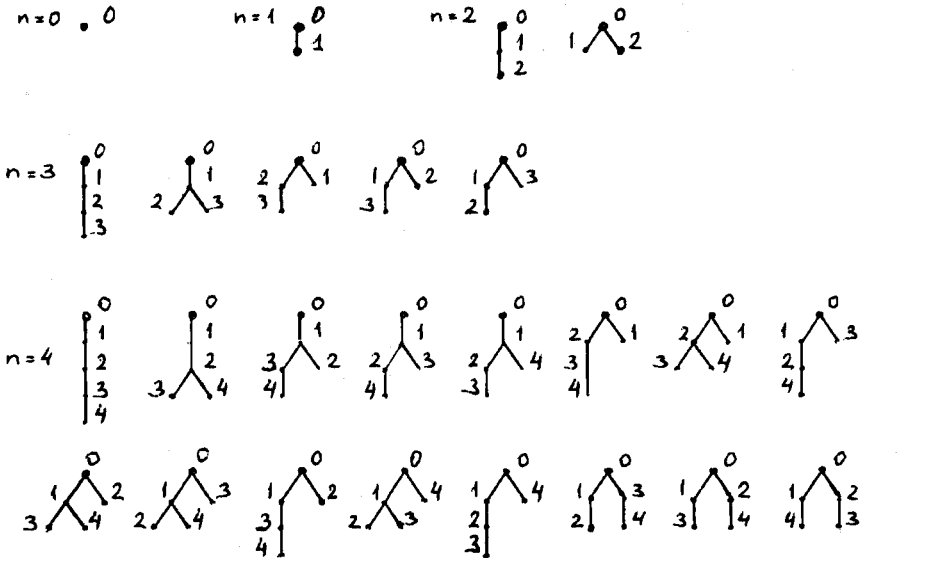


Таблица IV. Множества L_n, LB_n, $n \leq 5$

1) L_n, $n \leq 5$.



2) LB_n, $n \leq 4$.

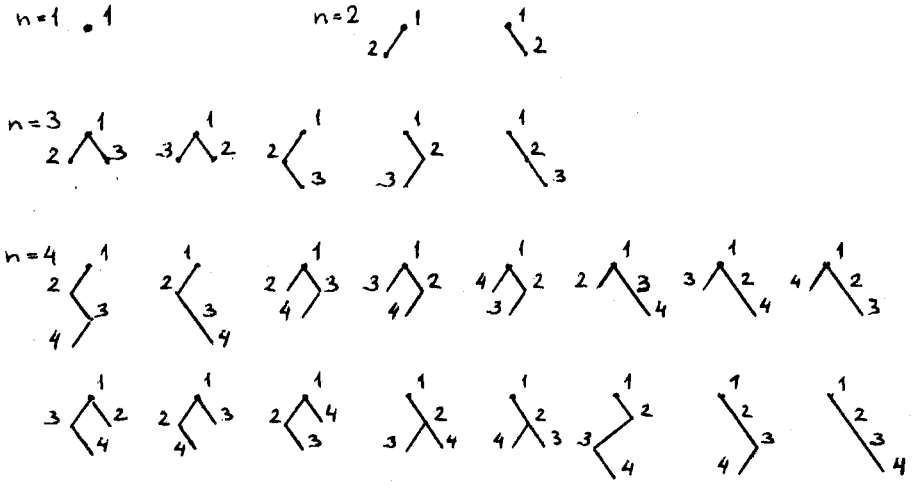


Таблица V. Множества E_n, $n \leq 5$

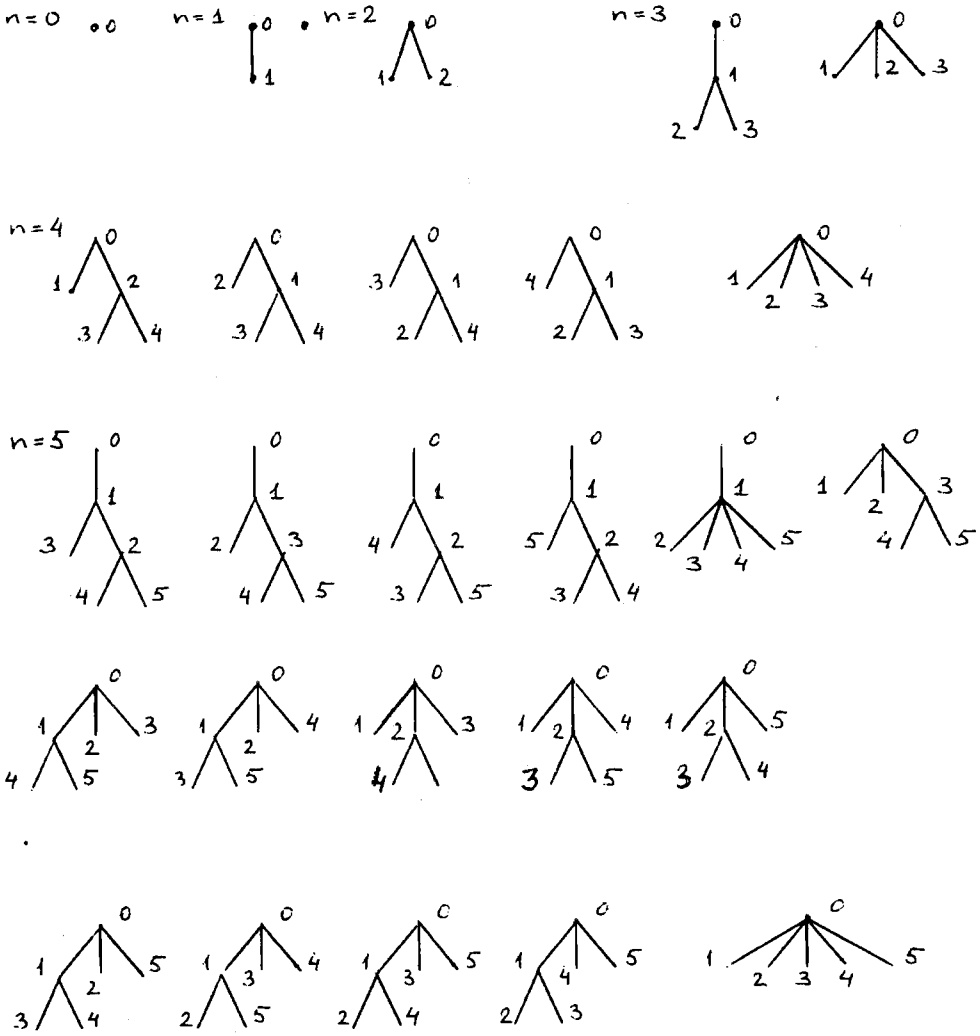
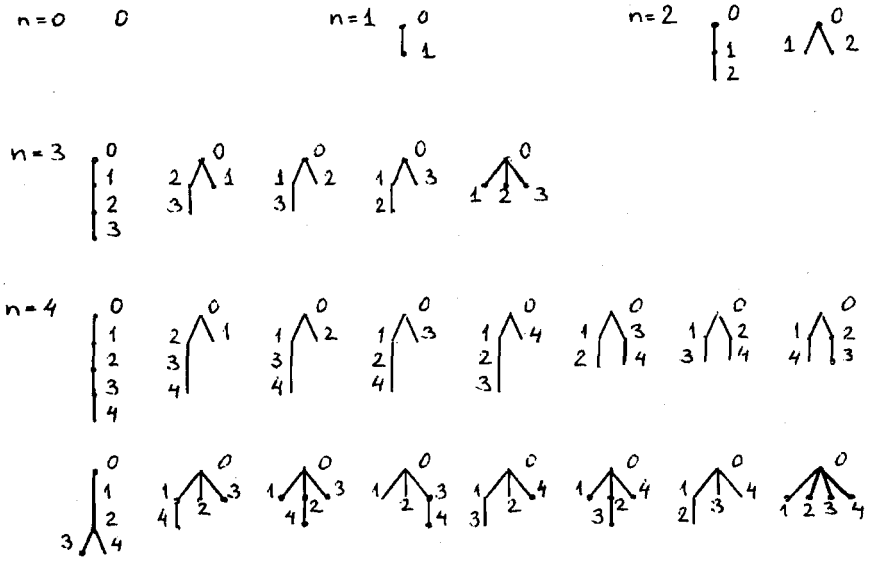


ТАБЛИЦА VI. Множества W_n и WB_n, $n \leq 4$

1) $W_n, n \leq 4$.



2) $WB_n, n \leq 4$.

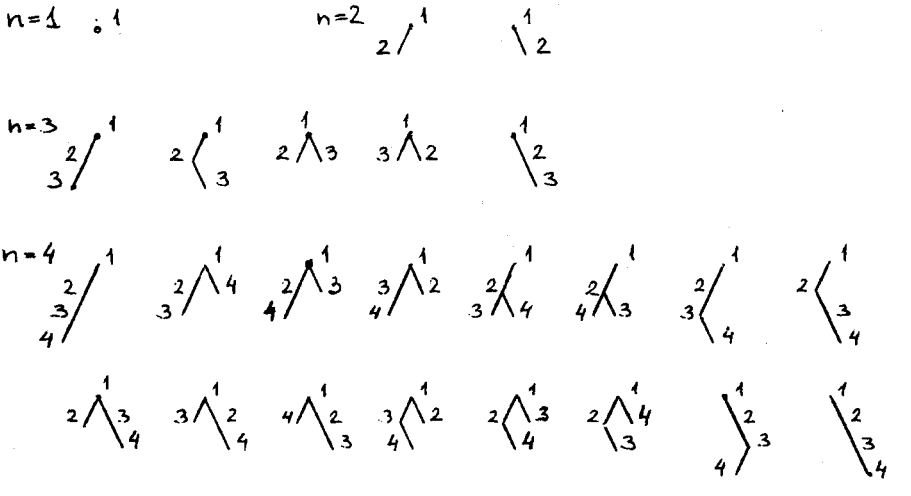
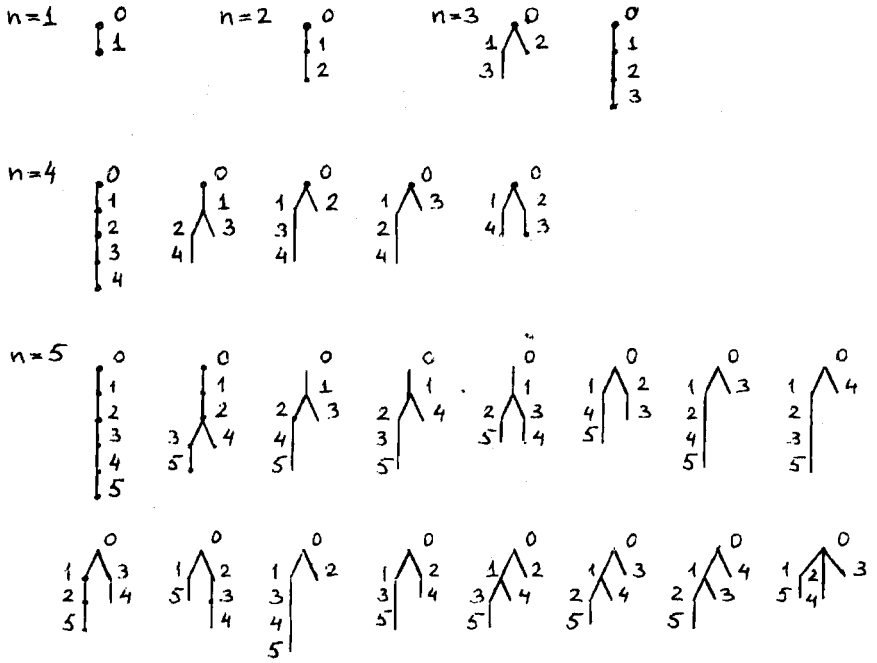
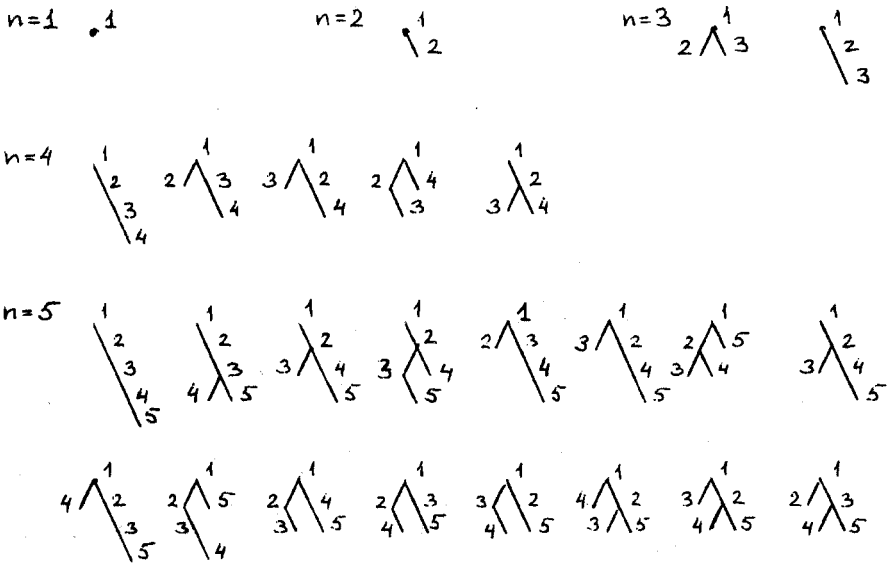


ТАБЛИЦА VII. Множества T_n и TB_n, Q_n

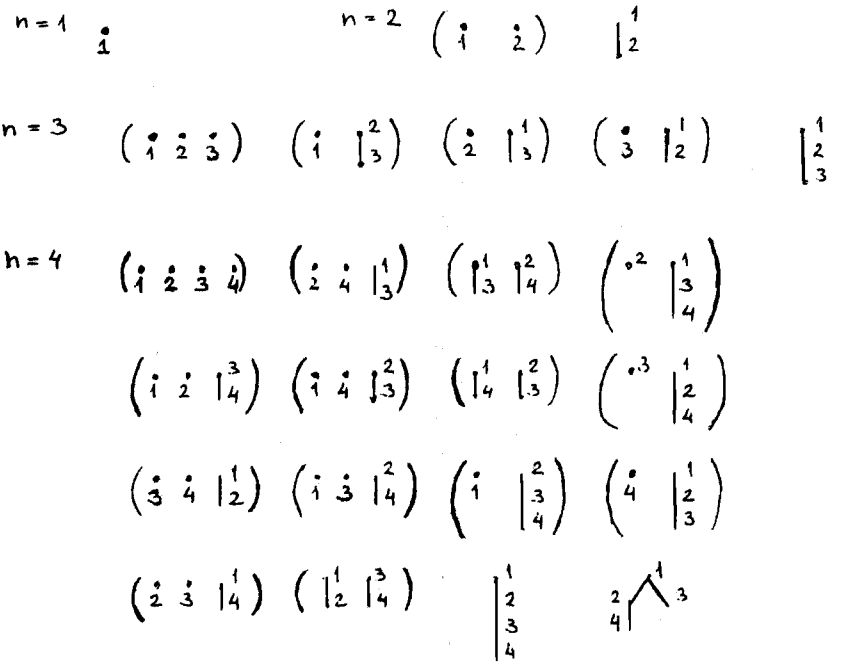
1) T_n, $n \leq 5$.



2) TB_n, $n \leq 5$.



3) $Q_n, n \leq 4$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.

[2] Foata D., Schutzenberger M.P. Theorie Geometrique des Polinomes Euleriens // Lect. Notes in Math. V. 138. 1970.

[3] Бейтмен Г., Эрдерли А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

[4] Andre D. // G. r. Acad. Sci. Paris 1879. V. 88. P. 965–967.

[5] Andre D. Sur les permutations alternees // J. Math. pur Appl. 1881. V. 7. P. 167–184.

[6] Entringer R. C A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers // Niew. Arch. Wisk. 1966. V. 14. P. 241.

[7] Knuth D.E., Buckholtz T.J. Computation of Tangent, Euler and Bernoulli numbers // Math. Comp. 1967. V. 21. P. 663–688.

[8] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

[9] Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.

[10] Татт У. Теория графов. М.: Мир, 1988.

[11] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы. М.: Мир, 1976.

[12] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.

[13] Foata D. Groupes de rearrangements et numbers d'Euler // G. r. Acad. Sci. Paris 1972. V. 275. P. 1147–1150.

[14] Foata D., Strehl V. Rearrangements of the Symmetric Group and Enumerative Properties of the Tangent ang Secant numbers // Math. Z. 1974. V. 137. P. 257–264.

[15] Foata D., Schutzenberger M.P. Nombres d'Euler et permutations alternantes // A Survey of Combinatorial Theory / ed. J.N. Srivastava et al. Amsterdam: North–Holland. 1973. P. 173–187.

[16] Donaghey R. Alternating Permutations and Binary Icreasing Trees // J. Comb. Theory, Ser. A. 1975. V. 18. P. 141–148.

[17] Pourard C. De Nouvelles Significations enumeratives des nombres d'Entinger // Discrete Math. 1982. V. 38. P. 265–271.
[18] Pourard C. Deux Proprietes des Arbees Binaires Ordonnes Stricts // Europ. J. Comb. 1989. V. 10. P. 369–374.
[19] Mallows C. L., Riordan J. The inversion enumerator for labelled trees // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 92–94.
[20] Gessel J., Da Lun Wang Depth–first search as a combinatorial correspondence // J. Comb. Theory, Ser. A. 1979. V. 26. P. 308–313.
[21] Cowan D. D., Mullin R. C., Stanton R. G. Counting Algorithms for connected labelled Graphs // Proc. 6-th Southeast. Conf. Combinatorics, Graph Theory and Comput. Winnipeg: Basa Raton. 1975. P. 225–236.
[22] Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.
[23] Tutte W, T. A contribution of chromatic polynomials // Can. J. Math. 1953. V. 6. P. 80–91.
[24] Beissinger J. S. On External Activity and Inversions in Trees // J. Comb. Theory, Ser. B. 1982. V. 33. P. 87–92.
[25] Schutzenberger M. P. Promotion des morphismes d'ensembles ordonnes // J. Discrete Math. 1972. V. 2. P. 73–94.
[26] Stanley R.P. Binomial Posets, Mobius Inversion, and Permutation Enumeration // J. Comb. Theory, Ser. A. 1976. V. 20. P. 336–356.
[27] Leroux P. Combinatorial resolution of systems of differential ecuations, I. Ordinary differential ecuations, in Combinatoric Enumerative. Lect. Notes in Math..V. 1234, 1973.
[28] Springer T. A. Remarks on a combinatorial problem // Niew Archief voor Wiskunde 1971. XIX. V. 1. P. 30–36.
[29] Arnold V. I. Bernoulli–Euler updown numbers associated with functions singularities, their combinatorics and arithmetics // Duke Math. J. 1991. V. 63. №2. P. 537–555.
[30] Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН 1992. Т. 47. №1. С. 3–45.
[31] Kuznetsov A., Pak I., Postnikov A. On a new class of trees associated with Motzkin numbers (to appear).
[32] Donaghey R. Restricted Plane Tree Representations of four Motzkin–Catalan Equations // J. Comb. Theory, Ser. B. 1977. V. 22. P. 114–121.
[33] Donaghey R., Shapiro L. W. Motzkin numbers // J. Comb. Theory, Ser. B. 1977. V. 23. P. 291–301.
[34] Кириллов А. А. О комбинаторике присоединенных орбит // Функциональный анализ и его приложения 1993. Т. 27. №1. С. 73–75.
[35] Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Циткин Л. И. Кибернетика. Киев, 1990.
[36] Kreweras G. Une famille de polynomes ayant plusieurs properietes enumeratives // Periodica Mathematica Hungaria 1980. V. 11. №4. P. 309–320.
[37] Кузнецов А. Г, И. М. Пак И. М., Постников А. Е. Резольвенты для S_n-модулей, отвечающих косым крюкам, и комбинаторные приложения // Функциональный анализ и его приложения 1994. Т. 28. №2.
[38] Schutzenberger M. P. La correspondence de Robinson // Lect. Notes in Math. 1977. V. 579. P. 61–117.
[39] Egecioglu O., Remmel J. B. Bijections for Cayley Trees, Spanning Trees, and Their q-Analogues // J. Comb. Theory, Ser. B. 1986. V. 42. №1. P. 15–30.
[40] Bjorner A. Homology and Shellability of Matroids and Geometric Lattices // Matroid Applications / ed. N. White: Cambridge Univ. Press. 1992. P. 226–283.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.05.1994