Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΙΑ

ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ
Department of Mathematics
University of California, Los Angeles

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΦΕΛΗ

Αθήνα, 1993

Αφιερωμένο στη μνήμη του Νίκου Κριτικού

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Περί τίνος πρόκειται. Η **Θεωρία Συνόλων** είναι μια συναρπαστική, ζωντανή μαθηματική θεωρία, με τις δικές της βασικές έννοιες, θεμελιακά αποτελέσματα και προβλήματα, και με σημαντικές εφαρμογές σε άλλες μαθηματικές θεωρίες. Ξέχωρα απ' αυτά, η **Αξιωματική Συνολοθεωρία** θεωρείται από πολλούς ως **θεμελίωση των μαθηματικών**: εικάζεται ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πράγματι σύνολα, και ότι οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των λιτών, κομψών αξιωμάτων για τα σύνολα. Τίποτα τόσο απλοϊκό δεν μπορεί να είναι η πλήρης αλήθεια, αλλά οπωσδήποτε, στα σύγχρονα μαθηματικά το «να αποσαφηνίσεις» κάποια έννοια είναι συνώνυμο με το «να την ορίσεις στη συνολοθεωρία». Η θεωρία συνόλων είναι η επίσημη γλώσσα των μαθηματικών, όπως τα μαθηματικά είναι η επίσημη γλώσσα της επιστήμης.

Σαν όλους τους συγγραφείς εισαγωγικών, πρώτων βιβλίων για τα σύνολα, έχω κι εγώ προσπαθήσει να εξηγήσω και τις δύο αυτές απόψεις του κλάδου.

Από την «καθαρή» θεωρία συνόλων, οι Σημειώσεις αυτές καλύπτουν τα βασικά αποτελέσματα για «αφηρημένα σύνολα», το Αξίωμα Επιλογής, υπερπεπερασμένη αναδρομή, πληθικούς και διατακτικούς αριθμούς. Λιγότερο συνηθισμένο είναι το Κεφάλαιο **10** για «σημειοσύνολα», που περιέχει αποτελέσματα με εφαρμογές στην Ανάλυση και εισάγει τον αναγνώστη στο Πρόβλημα του Συνεχούς, κεντρική ερώτηση της συνολοθεωρίας από τα πρώτα της βήματα. Υπάρχει και κάποια καινοτομία στην ανάπτυξη της θεωρίας πληθαρίθμων, που εισάγονται νωρίς (κατά τον Cantor αλλά λίγο πονηρά), έτσι ώστε οι βασικοί τύποι της πληθικής αριθμητικής να μπορούν να διδαχθούν όσο πιο γρήγορα γίνεται. Το Παράρτημα **A** εξηγεί την «κατασκευή» των πραγματικών αριθμών εκτενέστερα απ' ό,τι συνηθίζεται στην εποχή μας και με κάποιες καινοτομίες στην πρόσβαση του προβλήματος και σε μερικές από τις λεπτομέρειες. Το τελευταίο Παράρτημα **B** αποτελεί μια κάπως εκκεντρική εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία **φυσικών προτύπων** διαφόρων αρχών της συνολοθεωρίας, μεταξύ των οποίων και η **Αρχή Αντιθεμελίωσης** του Aczel. Δεν απαιτεί γνώση της Λογικής, αλλά ο σοβαρός αναγνώστης του σίγουρα θ' αποφασίσει ότι πρέπει να μάθει Λογική.

Όσον αφορά τη συνολοθεωρία ως θεμελίωση των μαθηματικών, οι Σημειώσεις αυτές διαφέρουν από τα συνηθισμένα με δύο τρόπους. Καταρχήν έχω πάρει στα σοβαρά αυτό το «κάθε μαθηματικό αντικείμενο είναι σύνολο» (που βέβαια δεν είναι), κι έχω προσπαθήσει να του δώσω νόημα με την έννοια της **πιστής απεικόνισης** μαθηματικών αντικειμένων από **δομημένα σύνολα**. Η ιδέα είναι παλιά, αλλά ίσως αυτό να είναι το πρώτο εισαγωγικό βιβλίο που την αποδέχεται, προσπαθεί να την εξηγήσει και τη χρησιμοποιεί με συνέπεια. Οι φίλοι της θεωρίας κατηγοριών θα αναγνωρίσουν μερικές από τις βασικές έννοιές της, ξεδιάντροπα περιτυλιγμένες από μια παραδοσιακή, καθαρά συνολοθεωρητική πρόσβαση στο πρόβλημα θεμελίωσης όπου «κατηγορίες» δεν αναφέρονται πουθενά. Και κατά δεύτερο λόγο, η **θεωρία υπολογισμού** θεωρείται μέρος των μαθηματικών που «χρήζουν θεμελίωσης», και τα σχετικά συνολοθεωρητικά αποτελέσματα καλύπτονται, μαζί με πολλά παραδείγματα. Η φιλοδοξία του βιβλίου είναι να εξηγήσει ό,τι για τα σύνολα πρέπει να μάθει κάθε σοβαρός φοιτητής και φοιτήτρια των μαθηματικών ή της θεωρητικής πληροφορικής.

Υπάρχουν πολλά ιστορικά σχόλια και περικοπές που σε μερικά μέρη δίνουν στις Σημειώσεις μια «λόγια» υφή που δεν τους αξίζει. Όλες οι περικοπές και οι περισσότερες παρατηρήσεις είναι από τις εξής δύο πολύτιμες συλλογές εργασιών, που ιδανικά θα πρέπει να είναι στη διάθεση του αναγνώστη.

Georg Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, μεταφρασμένο στα αγγλικά και με Εισαγωγή από τον Philip E. B. Jourdain, Dover Publications, New York.

Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, 1967.

Οδηγίες χρήσης. Περίπου το μισό βιβλίο μπορεί να καλυφθεί σ' ένα Τρίμηνο (δέκα βδομάδες), κάπως περισσότερο σ' ένα πλήρες Εξάμηνο. Τα Κεφάλαια **1** - **6** καλύπτουν τα βασικά και περιέχουν αρκετές λεπτομέρειες, έτσι ώστε ο σοβαρός φοιτητής να μπορεί να τα διαβάσει μόνος του, με λίγη βοήθεια. Για την επιτυχή χρήση αυτών των Σημειώσεων σε μάθημα είναι απαραίτητο αυτά τα βασικά να ξεπεραστούν γρήγορα: να παραλειφθεί το Κεφάλαιο **1**, που περιέχει κυρίως συμβολισμούς· περίπου μια βδομάδα για το Κεφάλαιο **2**, που εξηγεί τις θεμελιακές ιδέες του Cantor· και μετά «βήμα τροχάδην» μέσα από τα Κεφάλαια **3** - **6**, έτσι ώστε να φτάσει το μάθημα στη θεωρία καλά διατεταγμένων συνόλων του Κεφαλαίου **7** το πολύ την έκτη, αν είναι δυνατόν την πέμπτη βδομάδα. Από το Κεφάλαιο **7** και μετά, τα θεωρήματα γίνονται δυσκολότερα και η παρουσίασή τους πιο συνοπτική. Πόσα από την «πραγματική» συνολοθεωρία στα Κεφάλαια **7** - **12** μπορεί κανείς να καλύψει, εξαρτάται βέβαια από τους φοιτητές, το μήκος του μαθήματος, και πόσα θα παραλειφθούν. Αν οι φοιτητές είναι κυρίως της πληροφορικής, τότε το Κεφάλαιο **6** για Σταθερά Σημεία πρέπει να μελετηθεί πλήρως, με τα προβλήματά του, αλλά το Κεφάλαιο **10** για το χώρο Baire ίσως πρέπει να αφεθεί, όσο κι αν είναι κρίμα. Για φιλόδοξους αναλύστες, στο άλλο άκρο, το Κεφάλαιο **6** πρέπει να περικοπεί μετά το **6.26** (που κι αυτό είναι κρίμα), αλλά τουλάχιστον μια προσπάθεια πρέπει να γίνει να καλυφθεί μέρος του **10**.

Στην ανάγκη, μπορούν να παραλειφθούν οι λεπτομέρειες για τις αριθμητικές πράξεις στο Κεφάλαιο **5**, ως επίσης και μερικά από τα ειδικότερα πορίσματα του Αξιώματος Επιλογής στο **9**. Κάπως απίθανο να βρεθεί χρόνος σε κανονικό μάθημα για τα Παραρτήματα (εγώ αφιερώνω μόνο μια διάλεξη για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών), αλλά ελπίζω ότι ίσως είναι χρήσιμα για Σεμινάρια ή ατομική μελέτη.

Εφόσον μαθήματα συνολοθεωρίας δεν διδάσκονται συχνά και σπάνια καλύπτουν όσα πρέπει, προσπάθησα ιδιαίτερα να γράψω αυτές τις Σημειώσεις έτσι που να είναι κατάλληλες για ατομική μελέτη, από τον ικανό και σοβαρό φοιτητή. Υπάρχουν πολλές, απλές ***Ασκήσεις***, που ελέγχουν την κατανόηση καινούριων εννοιών αμέσως μετά την εισαγωγή τους. Στο μάθημα παρουσιάζω μερικές απ' αυτές, για παραδείγματα, και αναθέτω τις υπόλοιπες στους φοιτητές. Τα **Προβλήματα** στο τέλος κάθε κεφαλαίου είναι ποικίλης δυσκολίας, και μερικά απ' αυτά καλύπτουν επιπρόσθετη ύλη. Όπως συνηθίζεται, τα πιο δύσκολα από τα προβλήματα σημαδεύονται μ' έναν *.

Ευχαριστίες. Ευχαριστώ το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών για την ευκαιρία που μου έδωσε να διδάξω Συνολοθεωρία στην Αθήνα το Χειμώνα του 1990· τη Δήμητρα Κίτσιου και τον Στράτο Πάσχο για την πάλη τους με διάφορους υπολογιστές και εκτυπωτές του Πολυτεχνείου το 1990 όταν τυπώσαμε την πρώτη προκαταρκτική έκδοση· και ιδιαίτερα τον Θανάση Τσαρπαλιά που συνήθως διδάσκει το μάθημα Συνολοθεωρίας στο Πανεπιστήμιο, που χρησιμοποίησε τη δεύτερη προκαταρκτική έκδοση αυτών των Σημειώσεων το Χειμώνα του 1992 και που μου πρόσφερε πληθώρα χρήσιμων συμβουλών για το περιεχόμενο, τις ασκήσεις και την ελληνική ορολογία. Είμαι ευγνώμων στους συναδέλφους και φίλους στο UCLA και το Caltech (κέντρα έρευνας στη συνολοθεωρία) από τους οποίους έχω μάθει ό,τι ξέρω για τον κλάδο. Και είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στη γυναίκα μου Joan Rand Moschovakis και το φοιτητή μου Darren Kessner που διάβασαν μεγάλα μέρη από το κείμενο, έλυσαν τα περισσότερα Προβλήματα και διόρθωσαν πολλά από τα λάθη μου.

Το βιβλίο γράφηκε σχεδόν ταυτόχρονα στα ελληνικά και στα αγγλικά, με τη μαγεία του δίγλωσσου LaTeX[1] και σαν ακριβής αντικατοπτρισμός της προσωπικής μου μοίρας. Το αφιερώνω στον αείμνηστο Καθηγητή Νίκο Κριτικό για τα αξέχαστα απογεύματα που πέρασα μαζί του το Χειμώνα και την Άνοιξη του 1973 προσπαθώντας να μάθω με την πολύτιμη βοήθειά του πώς να μιλώ και να γράφω μαθηματικά στη μητρική μου γλώσσα. Λίγες ώρες με το Νίκο Κριτικό,

[1] Οι Έλληνες μαθηματικοί έχουμε μεγάλη υποχρέωση στον Silvio Levy, που προγραμμάτισε τόσο όμορφα τα Ελληνικά «απλά» στο `METAFONT` έτσι που να μπορούμε να χρησιμοποιούμε το TeX του Knuth και το LaTeX του Lamport για τη στοιχειοθέτηση ελληνικών μαθηματικών κειμένων. Όσοι ενδιαφέρονται για το πακέτο (δημοσίων, ελεύθερων) προγραμμάτων με το οποίο στοιχειοθέτησα την ελληνική έκδοση αυτού του βιβλίου μπορούν να μου γράφουν για περισσότερες πληροφορίες, αν γίνεται ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση ynm@math.ucla.edu.

να κατεβάζει τα Λεξικά (από τα γερμανικά στα ελληνικά, από τα λατινικά στα γερμανικά) για να βρει ακριβώς την τέλεια μετάφραση κάποιου όρου, σου μάθαιναν περισσότερα για την αγάπη της επιστήμης και της γλώσσας απ' ό,τι χρόνια τυπικών μεταπτυχιακών σπουδών. Θέλω επίσης να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στο φίλο Τάκη Κουφόπουλο, που διάβασε προσεκτικά και κριτικά την προκαταρκτική έκδοση αυτού του βιβλίου, διόρθωσε τα χειρότερα γλωσσικά μου αμαρτήματα και πρότεινε μια σειρά αλλαγών που βελτίωσαν σημαντικά το τελειωμένο έργο.

Santa Monica, California — Ιανουάριος 1993

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή **1**

2. Ισοπληθικότητα **7**

2.10. Απαριθμητή ένωση απαριθμητών ... 9
2.14. Οι πραγματικοί αριθμοί αναπαρίθμητοι ... 12
2.21. $A <_c \mathcal{P}(A)$ ... 15
2.24. Θεώρημα Schröder-Bernstein ... 17

3. Παράδοξα και αξιώματα **21**

3.5. Το παράδοξο του Russell ... 24
3.7. Αξιώματα (**I**) - (**VI**) ... 27
3.18. Αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές ... 30
3.19. Κλάσεις ... 31

4. Τα πάντα σύνολα; **37**

4.4. Διατεταγμένα ζεύγη ... 39
4.7. Ξένη ένωση ... 40
4.9. Σχέσεις ... 41
4.12. Σχέσεις ισοδυναμίας ... 42
4.16. Συναρτήσεις ... 44
4.21. Πληθικοί αριθμοί ... 47
4.26. Δομημένα σύνολα, χώροι ... 50

5. Οι φυσικοί αριθμοί **59**

5.3. Ύπαρξη Φυσικών Αριθμών ... 60
5.4. Μοναδικότητα Φυσικών Αριθμών ... 60
5.6. Θεώρημα Αναδρομής ... 61

5.11. Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός 65
5.25. Αρχή του Περιστερεώνα 71
5.29. Λέξεις 74
5.32. Το συνεχές 76

6. Σταθερά Σημεία **81**

6.1. Μερικά διατεταγμένοι χώροι 81
6.7. Μερικές συναρτήσεις 84
6.10. Επαγωγικοί χώροι 85
6.21. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου 87
6.26. Περί τοπολογίας 90
6.33. Γραφήματα 94
6.36. Ρεύματα 97
6.39. Η τοπολογία του Scott 100
6.40. Κατευθυνόμενα πλήρεις χώροι 101

7. Καλά διατεταγμένοι χώροι **103**

7.22. Υπερπεπερασμένη επαγωγή 109
7.24. Υπερπεπερασμένη αναδρομή 110
7.25. Λήμμα Επανάληψης 111
7.31. Συγκρισιμότητα καλά διατεταγμένων χώρων 115
7.33. Καλή θεμελίωση του $\leq_o$ 116
7.34. Θεώρημα Hartogs 117
7.35. Θεώρημα Σταθερού Σημείου 119
7.36. Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου 120

8. Επιλογές **129**

8.1. Αξίωμα Επιλογής 129
8.9. Ισοδύναμα του **AC** 133
8.11. Αρχή Απαριθμητής Επιλογής, $\mathbf{AC}_N$ 135
8.12. Αξίωμα (**VI**) Εξαρτημένων Επιλογών, **DC** 135
8.19. Οι αξιωματικές θεωρίες **ZDC**, **ZAC** 138
8.20. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας 138

9. Επιλογής επόμενα **143**

9.3. Δέντρα 144
9.7. Λήμμα του König 145

9.9. Θεώρημα Βεντάλιας 146
9.10. Καλή Θεμελίωση του $\leq_c$ 147
9.13. Άριστες διατάξεις 148
9.16. Κανόνες απορρόφησης 150
9.21. Θεώρημα του König 152
9.23. Ομοτελικότητα, κανονικοί πληθάριθμοι 154

10. Ο χώρος Baire **161**

10.8. Πληθικότητα τέλειων σημειοσυνόλων 165
10.9. Θεώρημα Cantor-Bendixson 165
10.10. Ιδιότητα **P** 167
10.12. Αναλυτικά σημειοσύνολα 167
10.18. Θεώρημα Τέλειου Συνόλου 171
10.23. Σύνολα Borel 175
10.26. Αντιπαράδειγμα για τη γενική ιδιότητα **P** 177
10.27. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας 179
10.34. Borel ισομορφισμοί 182

11. Αντικατάσταση και άλλα αξιώματα **185**

11.1. Αξίωμα Αντικατάστασης (**VIII**) 186
11.2. Οι αξιωματικές θεωρίες **ZFDC**, **ZFAC** 186
11.5. Θεώρημα Εδραιωμένης Αναδρομής 188
11.8. Μεταβατικές κλάσεις 190
11.15. Βασικό Λήμμα Κλειστότητας 192
11.18. Κληρονομικά πεπερασμένα σύνολα 193
11.19. Κόσμοι του Zermelo 194
11.25. Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo 196
11.26. Εδραιωμένα σύνολα 197
11.29. Αρχή Θεμελίωσης 198
11.31. Η αξιωματική θεωρία Zemelo-Fraenkel, **ZFC** 199
11.33. Z-F κόσμοι 201
11.34. Η κλάση $\mathcal{V}$ του von Neumann 201
11.36. Λήμμα Συμπίεσης του Mostowski 201
11.37. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας 202

12. Διατακτικοί αριθμοί **207**

12.8. Χαρακτηρισμός του Διατακτικού Τελεστή 212
12.9. Χαρακτηρισμός των διατακτικών αριθμών 213

12.14. Αναδρομή στην κλάση ON 216
12.15. Διατακτική πρόσθεση και πολλαπλασιασμός 216
12.16. Πληθάριθμοι του von Neumann 217
12.20. Ο τελεστής $\aleph_\alpha$ 220
12.23. Η συσσωρευμένη ιεραρχία 220
x12.13. Ο τελεστής $\beth_\alpha$ 224
12.28. Ισχυρά απρόσιτοι πληθάριθμοι 226
12.29. Πληθάριθμοι κατά τον Frege 226
x12.22. Πηλίκα συνθηκών ισοδυναμίας 227

A. Οι πραγματικοί αριθμοί **229**

A.1. Σχέσεις ομοιότητας 229
A.4. Σώματα 231
A.8. Διατεταγμένα σώματα 233
A.14. Μοναδικότητα των ρητών αριθμών 234
A.16. Ύπαρξη των ρητών αριθμών 236
A.22. Αριθμήσιμοι, πυκνοί, γραμμικοί χώροι 240
A.25. Ιδιότητα του Αρχημήδη 243
A.40. Αρχή του Κιβωτισμού 247
A.45. Τομές Dedekind 251
A.48. Ύπαρξη των πραγματικών αριθμών 253
A.52. Μοναδικότητα των πραγματικών αριθμών 256

B. Αξιώματα και πρότυπα **261**

B.3. Κόσμοι συνόλων 264
B.4. Προτάσεις και σχετικοποιήσεις 265
B.10. Κόσμοι του Rieger 270
B.11. Θεώρημα του Rieger 270
B.19. Αρχή Αντιθεμελίωσης, **AFA** 277
B.24. Προσομοιώσεις 279
B.31. Ο αντιθεμελιωμένος κόσμος 282
B.32. Θεώρημα του Aczel 283

Δείκτης **291**