ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών
University of California, Los Angeles
και Πανεπιστήμιο Αθηνών

μΠλ∀

ΕΛΛΑΔΑ
ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Προκαταρκτική έκδοση 2α.2, Σεπτέμβριος 2011

Αναδρομή και υπολογισιμότητα.
Προκαταρκτική έκδοση 2α.1, Μάρτιος 2008

Παρατηρήσεις και διορθώσεις για κάθε είδους λάθη (μαθηματικά, γλωσσικά, ορθογραφικά, τυπογραφικά) είναι ευπρόσδεκτες, καλύτερα με email στη διεύθυνση ynm@math.ucla.edu

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Σ' αυτές τις σημειώσεις θα χρησιμοποιήσουμε συστηματικά (ως συντομεύσεις) τους εξής βασικούς συμβολισμούς από τη λογική και τη συνολοθεωρία:

$$\begin{gathered}
\& : \text{και},\ \ \vee : \text{ή},\ \ \neg : \text{όχι},\ \ \Longrightarrow : \text{συνεπάγεται},\ \ \Longleftrightarrow : \text{τότε και μόνον αν},\\
\forall : \text{για κάθε},\ \ \exists : \text{υπάρχει},\ \ \exists! : \text{υπάρχει ακριβώς ένα}
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
x \in A &\iff \text{το στοιχείο } x \text{ ανήκει στο σύνολο } A\\
A \subseteq B &\iff \text{κάθε μέλος του } A \text{ είναι μέλος του } B\\
&\iff (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B]\\
A = B &\iff \text{τα σύνολα } A \text{ και } B \text{ έχουν ακριβώς τα ίδια μέλη}\\
&\iff A \subseteq B \ \&\ B \subseteq A\\
f : A \to B &\iff \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο εισόδου (ορισμού)}\\
&\qquad\ \text{το σύνολο } A \text{ και πεδίο εξόδου (τιμών) το σύνολο } B\\
f : A \rightarrowtail B &\iff \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός (ένα-προς-ένα συνάρτηση)}\\
f : A \mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow} B &\iff \text{η } f \text{ είναι αντιστοιχία (συνάρτηση ένα-προς-ένα και επί)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x \mid P(x)\} &= \text{το σύνολο όλων των } x \text{ που έχουν την ιδιότητα } P(x)\\
\{x \in A \mid P(x)\} &= \{x \mid x \in A \text{ και } P(x)\}\\
A \times B &= \{(a,b) \mid a \in A \text{ και } b \in B\}\\
&= \text{το σύνολο των ζευγών } (a,b) \text{ με } a \in A, b \in B\\
A \times B \times C &= \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}\\
&= \text{το σύνολο των τριάδων } (a,b,c) \text{ με } a \in A, b \in B, c \in C\\
f : A \times B \to C &\\
&\iff \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, στο } A \text{ και στο } B
\end{aligned}$$

Ο καλύτερος τρόπος να εξοικειωθεί ο αναγνώστης μ' αυτούς τους συμβολισμούς είναι (στην αρχή) να τους «μεταφράζει» και να κατασκευάζει «παραφράσεις» τους στη φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα, η συμβολική έκφραση της Αρχής Επαγωγής στο εδάφιο 1A.1 μπορεί να εκφραστεί στη φυσική γλώσσα ως εξής:

> Κάθε σύνολο A φυσικών αριθμών έχει την εξής ιδιότητα: αν το A περιέχει τον αριθμό 0, και αν για κάθε μέλος n του A, ο επόμενος αριθμός $n+1$ είναι επίσης μέλος του A, τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι μέλη του A.

Μετά από μερικές τέτοιες ασκήσεις, όχι μόνο μαθαίνεται ο τρόπος ανάγνωσης αυτών των συμβολισμών, αλλά και γίνεται πεντακάθαρο το γιατί η χρήση τους είναι απαραίτητη σ' αυτό τον κλάδο.

Υπενθυμίζουμε επίσης, ότι σε μαθηματικά κείμενα συχνά χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα *σε διαφορετικά αλφάβητα ή διαφορετικές γραμματοσειρές* για να ονομάσουμε διαφορετικά αντικείμενα: έτσι το 'f' πρέπει να θεωρείται διαφορετικό από το 'f', και (ακόμη χειρότερα), στο εδάφιο 2B, συστηματικά, το 'x' ονομάζει κάποια «συντακτική μεταβλητή» που φέρει ως τιμή το φυσικό αριθμό 'x'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΩΤΟΓΕΝΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγουμε αναδρομικούς ορισμούς, και θα μελετήσουμε δύο σημαντικές κλάσεις συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς, τις *πρωτογενώς αναδρομικές* και τις *ελαχιστικά αναδρομικές* συναρτήσεις.

1Α. Αναδρομικοί ορισμοί και επαγωγικές αποδείξεις

Ο μεγάλος μαθηματικός του 19ου αιώνα Leopold Kronecker φέρεται να είπε ότι

> ο Θεός μας έδωσε τους φυσικούς αριθμούς, όλα τα άλλα είναι ανθρώπινα κατασκευάσματα.

Για να κάνουμε χρήση των αριθμών όμως, ο Θεός μάλλον μας έδωσε μαζί τους και την εξής θεμελιακή

1Α.1. **Αρχή Επαγωγής**. Η χαρακτηριστική ιδιότητα του συνόλου των (φυσικών) *αριθμών*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

είναι ότι *κάθε σύνολο A που περιέχει το 0 και είναι κλειστό για την πράξη του επόμενου $n \mapsto n+1$, περιέχει όλους τους αριθμούς*, συμβολικά

$$\Big[0 \in A \;\&\; (\forall n)[n \in A \Longrightarrow n+1 \in A]\Big] \Longrightarrow \mathbb{N} \subseteq A.$$

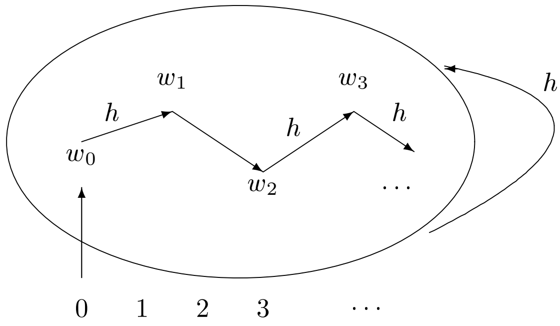
Τυπικά επικαλούμαστε την Αρχή Επαγωγής για να αποδείξουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποια ιδιότητα $P(n)$, δείχνοντας ξεχωριστά ότι

$$P(0) \text{ και (για κάθε } n)[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]\cdot$$

απ' αυτές τις προτάσεις και την Αρχή Επαγωγής, έπεται ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ περιέχει όλους τους αριθμούς, δηλαδή το ζητούμενο $(\forall n)P(n)$.

Η αρχή επαγωγής δικαιολογεί επίσης αποδείξεις με **πλήρη επαγωγή**, στις οποίες συμπεραίνουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποια ιδιότητα $P(n)$, δείχνοντας απλά ότι για κάθε n,

$$(\forall i < n)P(i) \Longrightarrow P(n)\cdot$$



Σχημα 1. Αναδρομικός ορισμός.

επειδή αν θέσουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall i < n)P(i)\},$$

τότε, προφανώς $0 \in A$ (επειδή δεν υπάρχουν αριθμοί $i < 0$, και επομένως η πρόταση

$$\textit{για κάθε } i < 0 \textit{ ισχύει η } P(i)$$

αληθεύει τετριμμένα), και η απαιτούμενη συνεπαγωγή $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$ συνάγεται αμέσως από την επαγωγική υπόθεση και την ισοδυναμία

$$(\forall i < n + 1)P(i) \iff (\forall i < n)P(i) \text{ και } P(n).$$

Η Αρχή Επαγωγής πηγάζει από τη βασική διαίσθηση ότι θα φτάσουμε κάθε φυσικό αριθμό αν ξεκινήσουμε από το 0 και επαναλάβουμε «επ' αόριστον» την πράξη του επόμενου. Η ίδια διαίσθηση οδηγεί και στο εξής θεμελιακό αποτέλεσμα, που δικαιώνει *αναδρομικούς ορισμούς* συναρτήσεων στο σύνολο των φυσικών:

1A.2. Λημμα (**Βασικό Λήμμα Αναδρομής**). *Για όλα τα σύνολα X, W και δοσμένες συναρτήσεις $g : X \to W$, $h : W \times \mathbb{N} \times X \to W$, υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times X \to W$ τέτοια που*

$$\begin{aligned} f(0, x) &= g(x), \\ f(n + 1, x) &= h(f(n, x), n, x). \end{aligned} \tag{1}$$

Ειδικότερα, χωρίς την παράμετρο x, για κάθε $w_0 \in W$ και κάθε συνάρτηση $h : W \times \mathbb{N} \to W$, υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to W$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0) = w_0, \quad f(n + 1) = h(f(n), n). \tag{2}$$

Το Σχήμα 1 απεικονίζει έναν αναδρομικό ορισμό στην απλούστατη περίπτωση, που η δοσμένη συνάρτηση $h : W \to W$ δεν εξαρτάται από την *μεταβλητή αναδρομής* n ή κάποια *παράμετρο* x, όταν δηλαδή η ζητούμενη f ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0) = w_0, \quad f(n+1) = h(f(n)).$$

Συνήθως το Βασικό Λήμμα Αναδρομής αποδείχνεται από την Αρχή της Επαγωγής (που είναι και ο λόγος που καλείται *Λήμμα*), Άσκηση x1A.1*· αλλά και η Αρχή Επαγωγής επίσης συνάγεται από το Βασικό Λήμμα Αναδρομής, Άσκηση x1A.2*, έτσι που μπορούμε να πούμε ότι οι δύο αυτές αρχές εκφράζουν ισοδύναμα την ίδια, χαρακτηριστική ιδιότητα των φυσικών αριθμών.

1A.3. **Αναδρομικοί ορισμοί.** Από την καθαρά μαθηματική σκοπιά, το Βασικό Λήμμα Αναδρομής 1A.2 είναι κλασικό παράδειγμα θεωρήματος *ύπαρξης* και *μοναδικότητας λύσης* για ένα σύστημα εξισώσεων (1), όπου ο «άγνωστος» γι' αυτά τα συστήματα είναι συνάρτηση. Κάθε θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης αποφέρει και μια *μέθοδο ορισμού*, του μοναδικού αντικειμένου του οποίου το θεώρημα εγγυάται την ύπαρξη· η ιδιαίτερη σημασία του Βασικού Λήμματος Αναδρομής πηγάζει από τις εξής τρεις θεμελιακές ιδιότητες *αναδρομικών ορισμών*:

(I) *Οι περισσότερες συναρτήσεις που ανακύπτουν στη θεωρία αριθμών και στην πληροφορική ορίζονται —ή μπορούν να οριστούν— αναδρομικά.*

Στο επόμενο εδάφιο 1B θα πάρουμε μια ιδέα του πλούτου του συνόλου «πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων».

(II) *Ο αναδρομικός ορισμός* (1) *παράγει* υπολογίσιμες *συναρτήσεις από δοσμένες υπολογίσιμες g και h.*

Αυτό θα το διατυπώσουμε αυστηρά και θα το αποδείξουμε στο εδάφιο 2B, αλλά είναι και κάπως προφανές: αν έχουμε «αλγορίθμους» που υπολογίζουν τις g και h, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε μια τυχαία τιμή $f(n,x)$ θέτοντας διαδοχικά

$$\begin{aligned} f(0,x) &= g(x) && = w_0 \\ f(1,x) &= h(w_0,0,x) && = w_1 \\ &\ \vdots \\ f(n-1,x) &= h(w_{n-2},n-2,x) && = w_{n-1} \\ f(n,x) &= h(w_{n-1},n-1,x). \end{aligned}$$

(III) *Η μορφή του αναδρομικού ορισμού* (1) *οδηγεί με φυσικό τρόπο σε επαγωγικές αποδείξεις ιδιοτήτων της συνάρτησης $f(n,x)$.*

Γενικότερα, η συσχέτιση

αναδρομικός ορισμός – επαγωγική απόδειξη είναι από τις πλέον θεμελιακές στα μαθηματικά και τη θεωρητική πληροφορική, και θα τη διερευνήσουμε σε βάθος. Εδώ θα περιοριστούμε σε δύο παραδείγματα, ξεκινώντας με την κλασική απόδειξη της *αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης*, που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της «διπλής επαγωγής». Γράφουμε $f(x,y)$ αντί για $x+y$ σ' αυτό το παράδειγμα, και βασίζουμε την απόδειξη μόνο στον αναδρομικό ορισμό της $f(x,y)$.

1Α.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $f(x,y)$ *στους αριθμούς που ορίζεται με τις αναδρομικές εξισώσεις*

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y \\ f(x+1,y) &= f(x,y)+1 \end{aligned}$$

είναι αντιμεταθετική, δηλαδή, για όλους τους x,y

$$f(x,y) = f(y,x).$$

ΛΥΣΗ. Δείχνουμε με επαγωγή,

$$(\text{για κάθε } x \in \mathbb{N})(\forall y)[f(x,y) = f(y,x)]. \tag{3}$$

ΒΑΣΗ, $x = 0$, $(\forall y)[f(0,y) = f(y,0)]$. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι πάλι με επαγωγή *στο* y, που καλείται *βοηθητική* της «κύριας» επαγωγικής απόδειξης της (3).

Βοηθητική Βάση, $y = 0$, $f(0,0) = f(0,0)$, τετριμμένα.

Βοηθητικό Επαγωγικό Βήμα. Δεχόμαστε τη *Βοηθητική Επαγωγική Υπόθεση*

$$f(0,y) = f(y,0) \tag{ΒΕΥ}$$

και δείχνουμε απ' αυτή ότι

$$f(0,y+1) = f(y+1,0)$$

με τον απλό υπολογισμό:

$$\begin{aligned} f(y+1,0) &= f(y,0)+1 && (\text{Ορισμός}) \\ &= f(0,y)+1 && (\text{ΒΕΥ}) \\ &= y+1 && (\text{Ορισμός}) \\ &= f(0,y+1) && (\text{Ορισμός}). \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο έχουμε συμπληρώσει τη Βοηθητική Επαγωγή για τη ΒΑΣΗ της κύριας επαγωγής.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Δεχόμαστε την ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

$$(\forall y)[f(x,y) = f(y,x)] \tag{ΕΥ}$$

και δείχνουμε, πάλι με Βοηθητική Επαγωγή ότι

$$(\forall y)[f(x+1,y) = f(y,x+1)].$$

Βοηθητική Βάση, $f(x+1,0) = f(0,x+1)$. Αυτό έπεται από την απόδειξη της ΒΑΣΗΣ, όπου δείξαμε ότι για κάθε y, $f(y,0) = f(0,y)$.

Βοηθητικό Επαγωγικό Βήμα. Δεχόμαστε τη *Βοηθητική Επαγωγική Υπόθεση*

$$\text{(ΒΕΥ)} \qquad f(x+1,y) = f(y,x+1)$$

και δείχνουμε το ζητούμενο

$$f(x+1,y+1) = f(y+1,x+1)$$

με τον εξής υπολογισμό:

$$\begin{aligned} f(x+1,y+1) &= f(x,y+1)+1 && \text{(Ορισμός)} \\ &= f(y+1,x)+1 && \text{(ΕΥ)} \\ &= (f(y,x)+1)+1 && \text{(Ορισμός)} \\ &= (f(x,y)+1)+1 && \text{(ΕΥ)} \\ &= f(x+1,y)+1 && \text{(Ορισμός)} \\ &= f(y,x+1)+1 && \text{(ΒΕΥ)} \\ &= f(y+1,x+1) && \text{(Ορισμός).} \end{aligned} \qquad \dashv$$

1A.5. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη της Πρότασης 1A.4 καλείται *διπλή επαγωγή*, επειδή χρειάστηκαν διαφορετικές, (βοηθητικές) επαγωγικές αποδείξεις της ΒΑΣΗΣ και του ΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ της «κύριας» επαγωγής της απόδειξης. Αυτό είναι χαρακτηριστικό επαγωγικών αποδείξεων για προτάσεις της μορφής

$$(\text{για κάθε } x)(\forall y)P(x,y),$$

όπως είναι η (3). Ο λόγος που αυτό είναι απαραίτητο γίνεται προφανής αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε κατευθείαν την ειδική περίπτωση

$$(\text{για κάθε } x)[f(x,17) = f(17,x)],$$

με επαγωγή στο x.

Προσοχή: η Αρχή Επαγωγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη προτάσεων της μορφής

$$(4) \qquad (\text{για κάθε } n \in \mathbb{N})P(n),$$

και μόνο για προτάσεις αυτής της μορφής· για να αποδείξουμε με επαγωγή κάποια πρόταση της μορφής

$$(\forall n)(\forall m)Q(n,m),$$

για παράδειγμα, πρέπει να επιλέξουμε ποια $P(n)$ θα χρησιμοποιήσουμε, π.χ.,

$$\begin{aligned}P(n) &\iff Q(n,y) \quad (\text{για συγκεκριμένο, σταθερό } y),\\ P(n) &\iff Q(x,n) \quad (\text{για συγκεκριμένο, σταθερό } x),\\ P(n) &\iff (\forall y)Q(n,y),\\ P(n) &\iff (\forall x)Q(x,n),\end{aligned}$$

ή ακόμη και κάποια πιο περίπλοκη πρόταση $(\forall n)P(n)$ για την οποία μπορούμε να αποδείξουμε ανεξάρτητα ότι

$$(\forall n)P(n) \Longrightarrow (\forall x)(\forall y)Q(x,y).$$

Σε μερικές περιπτώσεις το πιο δύσκολο μέρος μιας επαγωγικής απόδειξης είναι ακριβώς η επιλογή της κατάλληλης πρότασης της μορφής (4) που δείχνεται εύκολα, και συνεπάγεται την πρόταση που μας ενδιαφέρει.

Για δεύτερο παράδειγμα θεωρούμε μια συνάρτηση λιγότερο οικεία από την πρόσθεση, αλλά με εξίσου ενδιαφέρουσες ιδιότητες και πολλές εφαρμογές.

1A.6. **Η συνάρτηση του Ackermann** ορίζεται με τη λεγόμενη *διπλή αναδρομή*

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} A(0,x) &= x+1\\ A(n+1,0) &= A(n,1)\\ A(n+1,x+1) &= A(n,A(n+1,x))\cdot \end{cases}$$

και για κάθε n, η «τομή» $A_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (της συνάρτησης) του Ackermann ορίζεται με την εξίσωση

$$\text{(6)} \qquad A_n(x) = A(n,x).$$

Για παράδειγμα,

$$A_0(x) = x+1$$

δηλαδή η A_0 είναι η συνάρτηση S του *επόμενου* στους φυσικούς αριθμούς.

Ο ορισμός πρέπει να δικαιολογηθεί, και η απόδειξη έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον επειδή απαιτεί επίκληση του Βασικού Λήμματος Αναδρομής για τον ορισμό συνάρτησης $f : \mathbb{N} \to W$ όπου $W \neq \mathbb{N}$:

1A.7. ΛΗΜΜΑ. *Το σύστημα συναρτησιακών εξισώσεων* (5) *έχει ακριβώς μια λύση,* δηλαδή ικανοποιείται από ακριβώς μία διμελή συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω W το σύνολο όλων των μονομελών συναρτήσεων στους φυσικούς, δηλαδή

$$p \in W \iff \text{η } p \text{ είναι συνάρτηση}, p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to W$ με επίκληση του Βασικού Λήμματος Αναδρομής, ως εξής:

$$f(0) = S,$$

δηλαδή η τιμή $f(0)$ είναι η συνάρτηση του επόμενου, $S(x) = x + 1\cdot$ και

$$f(n+1) = h(f(n)),$$

όπου η τιμή $g_p = h(p)$ της συνάρτησης $h : W \to W$ ορίζεται για κάθε $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με την εξής αναδρομή:

$$\begin{aligned} g_p(0) &= p(1) \\ g_p(x+1) &= p(g_p(x)). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$A_n = f(n),$$

τότε οι συναρτήσεις A_n ικανοποιούν τις εξής εξισώσεις:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= S(x) = x + 1 \\ A_{n+1}(x) &= h(A_n)(x) \end{aligned}$$

έτσι που

$$\begin{aligned} A_{n+1}(0) &= h(A_n)(0) = A_n(1), \\ A_{n+1}(x+1) &= A_n(h(A_n)(x)) \\ &= A_n(A_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Τελικά θέτουμε

$$A(n,x) = A_n(x)$$

και ξαναγράφουμε αυτές τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned} A(0,x) &= A_0(x) = x + 1 \\ A(n+1,0) &= A_{n+1}(0) = A_n(1) = A(n,1) \\ A(n+1,x+1) &= A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x)) = A(n, A(n+1,x)), \end{aligned}$$

έτσι που είναι ακριβώς οι εξισώσεις, για τις οποίες έπρεπε να δείξουμε ότι έχουν λύση.

Η μοναδικότητα της λύσης δείχνεται με (διπλή) επαγωγή στο n, ή με την προσεκτική εφαρμογή του Βασικού Λήμματος, που εγγυάται τη μοναδικότητα της συνάρτησης $f(n) = A_n$, Άσκηση x1A.7. $\dashv$

Η Αρχή Επαγωγής και το Βασικό Λήμμα Αναδρομής είναι βασικά «αξιώματα» για τους φυσικούς αριθμούς που δεν μπορούν να αποδειχτούν, παρά μόνον αν έχουμε κάποιο συγκεκριμένο ορισμό των αριθμών στο πλαίσιο μιας γενικότερης θεωρίας, π.χ., της θεωρίας συνόλων.

1A. Ασκήσεις

x1A.1*. Αποδείξτε το Βασικό Λήμμα Αναδρομής 1A.2 από την Αρχή Επαγωγής. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για την ύπαρξη της $f : \mathbb{N} \times X \to W$, θέτουμε

$$\begin{aligned} W^n &= \{(w_0, \dots, w_{n-1}) \mid w_0, \dots, w_{n-1} \in W\} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ P(n, x, w) &\iff w = (w_0, \dots, w_n) \in W^{n+1} \\ &\quad \;\& \; w_0 = g(x) \;\&\; (\forall i < n)[w_{i+1} = h(w_i, i, x)] \end{aligned}$$

και δείχνουμε με επαγωγή την πρόταση

$$(\forall n)(\exists! w) P(n, x, w).$$

Για τα τυχαία n, x, $w = w(n, x) = (w_0(n, x), \dots, w_n(n, x))$ είναι η μοναδική ακολουθία (μήκους $n + 1$) για την οποία ισχύει η $P(n, x, w)$, θέτουμε

$$f(n, x) = s \iff s = w_n(n, x).$$

x1A.2*. Δεχθείτε το Βασικό Λήμμα Αναδρομής 1A.2 ως αξίωμα, και δείξτε απ' αυτό την Αρχή Επαγωγής.

x1A.3. Δείξτε (από την Αρχή Επαγωγής) ότι κάθε μη-κενό σύνολο φυσικών $X \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο μέλος.

x1A.4. Δείξτε ότι για δύο πραγματικούς αριθμούς $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός q, τέτοιος που για κάποιον (πραγματικό) r,

$$\alpha = \beta q + r, \quad 0 \leq r < \beta.$$

Έπεται ότι και το r είναι μοναδικό, εφόσον $r = \alpha - \beta q$. Οι αριθμοί q και r είναι το *πηλίκο* (quotient) και το *υπόλοιπο* (remainder) της διαίρεσης του α δια του β, και τους συμβολίζουμε

$$\mathrm{quot}(\alpha, \beta) = q, \quad \mathrm{rm}(\alpha, \beta) = r$$

από τους Αγγλικούς όρους. Επίσης είναι βολικό θα θέσουμε

$$\mathrm{quot}(\alpha, 0) = 0, \quad \mathrm{rm}(\alpha, 0) = \alpha,$$

έτσι που οι συναρτήσεις αυτές είναι ορισμένες για όλα τα α, β και ικανοποιούν πάντα την εξίσωση $\alpha = \beta\, \mathrm{quot}(\alpha, \beta) + \mathrm{rm}(\alpha, \beta)$.

x1A.5. Δικαιολογήστε αναδρομικούς ορισμούς της μορφής

$$\begin{aligned} f(0, x) &= g_1(x), \\ f(1, x) &= g_2(x), \\ f(n + 2, x) &= h(f(n, x), f(n + 1, x), n, x), \end{aligned} \tag{7}$$

όπου οι g_1, g_2, h είναι δοσμένες συναρτήσεις στους αριθμούς.

x1A.6. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται με την αναδρομή

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}. \tag{8}$$

(a) Υπολογίστε την τιμή a_9.
(b) Δείξτε ότι για κάθε n,

$$a_{n+2} \geq \lambda^n, \text{ όπου } \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι ο λ είναι μία από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 = x + 1. \tag{9}$$

Δείξτε επίσης ότι αν ο $\rho = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ είναι η άλλη ρίζα της (9), τότε, για κάθε n

$$a_n = \frac{\lambda^n - \rho^n}{\sqrt{5}}.$$

x1A.7. Δείξτε ότι το πολύ μία συνάρτηση ικανοποιεί το σύστημα (5).

x1A.8. Υπολογίστε την τιμή $A(3, 2)$.

x1A.9. Για τις τομές του Ackermann, δείξτε ότι

$$A_1(x) = x + 2,$$
$$A_2(x) = 2x + 3.$$

x1A.10. Βρείτε ένα «κλειστό» τύπο για την $A_3(x)$.

x1A.11. Δείξτε ότι για κάθε n και x, $A_n(x) \geq 1$.

x1A.12. Δείξτε ότι κάθε τομή A_n της συνάρτησης του Ackermann είναι *αυστηρά αύξουσα*, δηλαδή

$$x < y \Longrightarrow A_n(x) < A_n(y),$$

από το οποίο έπεται ότι $A_n(x) \geq x$. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Δείξτε με «διπλή επαγωγή» ότι $A_n(x) < A_n(x+1)$.

x1A.13. Δείξτε ότι για όλα τα n, m και x,

$$n < m \Longrightarrow A_n(x) < A_m(x).$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Δείξτε με «διπλή επαγωγή» ότι $A_n(x) < A_{n+1}(x)$.

x1A.14. Δείξτε ότι για κάθε n και x,

$$A_n(A_n(x)) < A_{n+2}(x).$$

1B. Πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις

1B.1. Ορισμος. Ένα σύνολο F πλειομελών[1] συναρτήσεων στους φυσικούς είναι **πρωτογενώς κλειστό** αν:

(a) Η συνάρτηση $S(x) = x + 1$ του *επόμενου* ανήκει στο F.

(b) Για κάθε n και q, η σταθερή συνάρτηση n μεταβλητών

$$C_q^n(x_1, \ldots, x_n) = q$$

ανήκει στο F. Αν $n = 0$, τότε (συμβατικά) $C_q^0 = q$, δηλαδή ταυτίζουμε τη συνάρτηση «0 μεταβλητών» με τη (μοναδική) τιμή της.

(c) Για κάθε n και i, $1 \leq i \leq n$, η *προβολή*

$$P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

ανήκει στο F. Παρατηρούμε ότι η P_1^1 είναι η *ταυτοτική* συνάρτηση στο $\mathbb{N}$, $P_1^1(x) = x$.

(d) **Κλειστότητα για σύνθεση**. Αν η m-μελής $g(u_1, \ldots, u_m)$ και οι m, n-μελείς συναρτήσεις

$$h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})$$

ανήκουν στο F, με $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε και η

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})) \tag{10}$$

ανήκει στο F.

(e) **Κλειστότητα για πρωτογενή αναδρομή**. Αν η n-μελής g και η $(n + 2)$-μελής h ανήκουν στο F, και αν η $(n + 1)$-μελής f ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} f(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(y + 1, \vec{x}) &= h(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}), \end{cases} \tag{11}$$

τότε και η f ανήκει στο F. Συμβατικά περιλαμβάνουμε σ' αυτό το σχήμα την περίπτωση $n = 0$, οπότε το σχήμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} f(0) &= q \qquad (= C_q^0) \\ f(y + 1) &= h(f(y), y). \end{cases}$$

---

[1] **Πλειομελής** συνάρτηση (function of several variables) στο σύνολο M είναι η τυχαία συνάρτηση

$$f : M^n \to M$$

μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών στο M, και η **πλειομέλεια** (arity) της f είναι ο αριθμός n των μεταβλητών της. Η ταυτόχρονη μελέτη όλων των πλειομελών συναρτήσεων σε ένα δοσμένο σύνολο ξεχωρίζει τη λογική από άλλους κλάδους των μαθηματικών όπου, τυπικά, μελετούμε ξεχωριστά τις συναρτήσεις μιας, ή δύο, ..., ή n μεταβλητών — και ίσως γι' αυτό να μην υπάρχει καθιερωμένος όρος για την έννοια. Η πρόταση για τους όρους «πλειομέλεια» και «πλειομελής» οφείλεται στην Α. Γραικιώτη.

Η συνάρτηση f είναι **πρωτογενώς αναδρομική** (primitive recursive) αν ανήκει σε κάθε πρωτογενώς κλειστό σύνολο συναρτήσεων, και **πρωτογενώς αναδρομική στο** Ψ, για τυχαίο σύνολο Ψ «δοσμένων» πλειομελών συναρτήσεων, αν ανήκει σε κάθε πρωτογενώς κλειστό σύνολο που περιέχει το Ψ. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_p &= \{f \mid \text{η } f \text{ είναι πρωτογενώς αναδρομική}\},\\ \mathcal{R}_p(\Psi) &= \{f \mid \text{η } f \text{ είναι πρωτογενώς αναδρομική στο } \Psi\},\end{aligned}$$

έτσι που

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p(\emptyset).$$

Για παράδειγμα, η πρόσθεση

$$s(x,y) = x + y$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική επειδή ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} s(0,y) &= P^1_1(y) &&= y,\\ s(x+1,y) &= h(s(x,y),x,y) &&= s(x,y)+1, \end{aligned} \tag{12}$$

όπου η συνάρτηση $h(w,x,y) = S(w)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική επειδή ορίζεται με τη σύνθεση

$$h(w,x,y) = S(P^3_1(w,x,y)). \tag{13}$$

Με παρόμοια χρήση προβολών μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}_p(\Psi)$ είναι κλειστό για «ρητούς ορισμούς» πάσης φύσεως. Π.χ., αν

$$f(x,y) = h(x, g_1(y,x+1), g_2(y,y)),$$

τότε η f είναι πρωτογενώς αναδρομική στις h, g_1, g_2 (δηλαδή στο σύνολο $\mathcal{R}_p(h,g_1,g_2)$), επειδή

$$f(x,y) = h(P^2_1(x,y), g^*_1(x,y), g^*_2(x,y)), \tag{14}$$

όπου

$$S^*(x,y) = S(P^2_1(x,y)) \qquad = x+1 \tag{15}$$

$$g^*_1(x,y) = g_1(P^2_2(x,y), S^*(x,y)) \qquad = g_1(y,x+1) \tag{16}$$

$$g^*_2(x,y) = g_2(P^2_2(x,y), P^2_2(x,y)) \tag{17}$$

έτσι που η f ορίζεται από τις δοσμένες συναρτήσεις με διαδοχικές εφαρμογές σύνθεσης.

Η επόμενη πρόταση είναι τετριμμένη, αλλά χρήσιμη:

1B.2. Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{R}_p(\Psi)$ των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων στο Ψ περιέχει το Ψ και είναι πρωτογενώς κλειστό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν, π.χ., η f ορίζεται με πρωτογενή αναδρομή από τις $g, h \in \mathcal{R}_p(\Psi)$, τότε, $g, h \in F$ για κάθε πρωτογενώς κλειστό F που περιέχει το Ψ· άρα, $f \in F$, για κάθε πρωτογενώς κλειστό F που περιέχει το Ψ· άρα $f \in \mathcal{R}_p(\Psi)$. ⊣

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(w, y) &= w + y \\ h(w, x, y) &= g(P^3_1(w, x, y), P^3_3(w, x, y)) = w + y \end{aligned}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές, και επομένως, αν θέσουμε

$$\begin{aligned} f(0, y) &= 0 && = C^1_0(y) \\ f(x + 1, y) &= h(f(x, y), x, y) &&= f(x, y) + y, \end{aligned} \tag{18}$$

τότε και η $f(x, y)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική· αλλά, προφανώς (με επαγωγή στο x, αν δεν φαίνεται προφανές!), $f(x, y) = x \cdot y$, άρα και ο πολλαπλασιασμός είναι πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση. Στο μέλλον θα εφαρμόσουμε την 1B.2 «σιωπηλά».

1B.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η πρόσθεση $x + y$, ο πολλαπλασιασμός $x \cdot y$ και οι επόμενες συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές.*

#1. $x! = 1 \cdot 2 \cdots x$
$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (x + 1)! &= x!(x + 1) \end{aligned}$$

#2. $Pd(x) =$ αν $(x = 0)$ τότε 0 αλλιώς $x - 1$
$$\begin{aligned} Pd(0) &= 0 \\ Pd(x + 1) &= x \end{aligned}$$

#3. $x \dot{-} y =$ αν $(x < y)$ τότε 0 αλλιώς $x - y$
$$\begin{aligned} x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} (y + 1) &= Pd(x \dot{-} y) \end{aligned}$$

#4. $\min(x, y)$ $\qquad \min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

#5. $\max(x, y)$ $\qquad \max(x, y) = (x + y) \dot{-} \min(x, y)$

#6. $|x - y|$ $\qquad |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

#7. x^y
$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ x^{y+1} &= x^y \cdot x \end{aligned}$$

Οι αποδείξεις των περισσοτέρων από τις προτάσεις σ' αυτό το εδάφιο είναι απλές, και θα τις αφήσουμε για ασκήσεις.

1B.4. ΟΡΙΣΜΟΣ. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** μιας σχέσης $P(\vec{x})$ είναι η

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } P(\vec{x}), \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{19}$$

και η σχέση $P(\vec{x})$ είναι **πρωτογενώς αναδρομική** αν η $\chi_P(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική. Το ίδιο για σύνολα: η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι η

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{20}$$

και το A είναι πρωτογενώς αναδρομικό αν η χ_A είναι πρωτογενώς αναδρομική.

1B.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η $P(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική σχέση, οι $g(\vec{x})$ και $h(\vec{x})$ πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις και η $f(\vec{x})$ ορίζεται απ' αυτές με περιπτώσεις,*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}), & \text{αν } P(\vec{x}), \\ h(\vec{x}), & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

τότε και η $f(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $f(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x})g(\vec{x}) + (1 \dot{-} \chi_P(\vec{x}))h(\vec{x})$. ⊣

Με διαδοχικές εφαρμογές αυτής της πρότασης δείχνουμε ότι το σύνολο των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων είναι κλειστό για ορισμούς με n περιπτώσεις, για κάθε $n \geq 2$.

1B.6. ΠΡΟΤΑΣΗ. (a) *Οι εξής συναρτήσεις και σχέσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές*:

#8. $x = y$ $\qquad \chi_=(x, y) = 1 \dot{-} |x - y|$

#9. $x \leq y, x < y$

$$\begin{aligned} \chi_\leq(x, y) &= 1 \dot{-} (x \dot{-} y) \\ \chi_<(x, y) &= \chi_\leq(x + 1, y) \end{aligned}$$

#10. $\mathrm{rm}(x, y)$

$$\begin{aligned} \mathrm{rm}(0, y) &= 0 \\ \mathrm{rm}(x + 1, y) &= \begin{cases} x + 1, \text{αν } y = 0, \\ \mathrm{rm}(x, y) + 1, \\ \quad \text{αλλιώς, αν } \mathrm{rm}(x, y) + 1 < y, \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

#11. $x \mid y$ (ο x διαιρεί τον y) $\qquad \chi_|(x, y) = 1 \dot{-} \mathrm{rm}(y, x)$

#12. $\mathrm{quot}(x,y)$

$$\begin{aligned}\mathrm{quot}(0,y) &= 0\\ \mathrm{quot}(x+1,y) &= \begin{cases}0, \text{αν } y=0,\\ \mathrm{quot}(x,y)+1,\\ \quad \text{αλλιώς, αν } \mathrm{rm}(x+1,y)=0,\\ \mathrm{quot}(x,y), \text{αλλιώς}\end{cases}\end{aligned}$$

(b) Το σύνολο των πρωτογενώς αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για τους προτασιακούς τελεστές $\neg, \vee, \&, \Longrightarrow$, π.χ., αν

$$P(\vec{x}) \iff Q(\vec{x}) \ \&\ R(\vec{x})$$

και οι Q, R είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η P είναι πρωτογενώς αναδρομική.

(c) Αν η σχέση $Q(\vec{y})$ και οι συναρτήσεις $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η σχέση

$$P(\vec{x}) \iff Q(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

(d) Αν η $P(i,\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική και

$$\begin{aligned}Q(z,\vec{x}) &\iff (\exists i \le z)P(i,\vec{x})\\ R(z,\vec{x}) &\iff (\forall i \le z)P(i,\vec{x}),\end{aligned}$$

τότε και οι $Q(z,\vec{x})$, $R(z,\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε πάλι στις ασκήσεις.

1B.7. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν η σχέση $P(i,\vec{x})$ και η συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε πρωτογενώς αναδρομικές είναι και οι σχέσεις*

$$\begin{aligned}Q(\vec{x}) &\iff (\exists i \le f(\vec{x}))P(i,\vec{x})\\ R(\vec{x}) &\iff (\forall i \le f(\vec{x}))P(i,\vec{x}),\end{aligned}$$

και το ίδιο με $<$ στη θέση του $\le$. Έπεται ότι η σχέση

$$\mathrm{Prime}(x) \iff \text{ο } x \text{ είναι πρώτος αριθμός}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

1B.8. Ο τελεστής **φραγμένης ελαχιστοποίησης** ορίζεται ως

$$(\mu i \le z)R(i,\vec{x}) = \begin{cases}\text{ο ελάχιστος } i \le z \text{ τέτοιος που } R(i,\vec{x}), & \text{αν } (\exists i \le z)R(i,\vec{x}),\\ z+1 \ \text{ αλλιώς.}\end{cases}$$

1B.9. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε πρωτογενώς αναδρομική σχέση $R(i,\vec{x})$, η συνάρτηση*

$$f(z,\vec{x}) = (\mu i \le z)R(i,\vec{x})$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική. Έπεται ότι αν η $g(\vec{x})$ είναι επίσης πρωτογενώς αναδρομική, τότε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η συνάρτηση

$$h(\vec{x}) = (\mu i \leq g(\vec{x}))R(i, \vec{x}) \quad (= f(g(\vec{x}), \vec{x})).$$

Αποδειξη στην Άσκηση x1B.10. $\dashv$

1B.10. Πορισμα. *Η συνάρτηση*

$$p_i = \text{ο } i\text{'οστός πρώτος αριθμός}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Αποδειξη. Η p_i ορίζεται με την πρωτογενή αναδρομή

$$\begin{aligned} p_0 &= 2 \\ p_{i+1} &= (\mu t \leq p_i! + 1)[p_i < t \ \&\ \text{Prime}(t)], \end{aligned}$$

επειδή (εύκολα, x1B.9) για κάθε k, υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος που $k < p \leq k! + 1$. $\dashv$

1B.11. **Κωδικοποίηση ακολουθιών**. Γενικά, **κωδικοποίηση** ενός συνόλου A σε ένα σύνολο C είναι η τυχαία ένα-προς-ένα συνάρτηση $c : A \rightarrowtail C$, που (θεωρητικά) μας επιτρέπει να «ανακτήσουμε» ένα τυχαίο στοιχείο $x \in A$ από το *κωδικό* του $c(x)$· για παράδειγμα, η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε ενήλικο έλληνα τον αριθμό της ταυτότητάς του. Στη συνέχεια, θα κωδικοποιήσουμε πολλά σύνολα στο σύνολο $\mathbb{N}$, σχεδόν πάντα χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο κάποια απλή κωδικοποίηση του συνόλου $\mathbb{N}^*$ των (πεπερασμένων) ακολουθιών από αριθμούς, με χρήσιμες ιδιότητες, ως εξής.

Η τυχαία κωδικοποίηση

$$\langle\ \rangle : \mathbb{N}^* \rightarrowtail \mathbb{N}$$

του $\mathbb{N}^*$ είναι **πρωτογενώς αναδρομική**, αν για κάθε ακολουθία φυσικών αριθμών $u_0, \dots, u_{n-1}$,

$$u_i < \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle \quad (i < n) \cdot \tag{21}$$

η σχέση

$$\text{Seq}(u) \iff u = \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle \text{ για κάποια } u_0, \dots, u_{n-1} \tag{22}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική· για κάθε n, η n-μελής συνάρτηση

$$f_n(u_0, \dots, u_{n-1}) = \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle \tag{23}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική· και υπάρχουν πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

$$\begin{aligned} \text{lh}(\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle) &= n \\ \text{proj}(\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle, i) = (\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle)_i &= u_i \qquad (i < n) \\ \text{append}(\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle, y) &= \langle u_0, \dots, u_{n-1}, y \rangle. \end{aligned}$$

Επίσης είναι (τεχνικά) χρήσιμο να απαιτήσουμε

$$[\neg \mathrm{Seq}(u) \vee i \geq \mathrm{lh}(u)] \Longrightarrow \mathrm{lh}(u) = (u)_i = 0,$$

αν και οι τιμές $\mathrm{lh}(u)$, $(u)_i$ είναι άνευ σημασίας όταν ο u δεν είναι κωδικός ακολουθίας ή το i είναι μεγαλύτερο από το μήκος της σχετικής ακολουθίας. Παρατηρούμε ότι με την (21), οι απαιτήσεις αυτές συνεπάγονται την ανισότητα

$$u > 0 \Longrightarrow (u)_i < u. \tag{24}$$

Οι συμβολισμοί $\mathrm{Seq}(u), \mathrm{lh}(u)$ και $\mathrm{proj}(u,i)$ προέρχονται από τους Αγγλικούς όρους *sequence* (ακολουθία), *length* (μήκος) και *projection* (προβολή).

1B.12. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική κωδικοποίηση του* $\mathbb{N}^*$, *συγκεκριμένα η «κλασική» κωδικοποίηση*

$$\langle u_0, \dots , u_{n-1} \rangle = p_0^{u_0+1} \cdot p_1^{u_1+1} \cdots p_{n-1}^{u_{n-1}+1} \tag{25}$$

με $\langle\ \rangle = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην Άσκηση x1B.13. ⊣

Η κλασική κωδικοποίηση του $\mathbb{N}^*$ δεν είναι «αποτελεσματική», και στις ασκήσεις θα διερευνήσουμε πιο ρεαλιστικές κωδικοποιήσεις που χρησιμοποιούνται σε μελέτες *πολυπλοκότητας*, αλλά από την άποψη της *υπολογισιμότητας* που είναι το κύριο θέμα μας, όλες οι πρωτογενώς αναδρομικές κωδικοποιήσεις του $\mathbb{N}^*$ είναι ισοδύναμες, x1B.24.

Από δω και πέρα σταθεροποιούμε μια συγκεκριμένη πρωτογενώς αναδρομική κωδικοποίηση $\langle\ \rangle : \mathbb{N}^* \rightarrowtail \mathbb{N}$, πιθανόν όχι την κλασική.

1B.13. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Υπάρχουν πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις* $u \restriction i$ *και* $u * v$, *τέτοιες που*

$$\begin{aligned} \langle u_0, \dots , u_{n-1} \rangle * \langle v_0, \dots , v_{m-1} \rangle &= \langle u_0, \dots , u_{n-1}, v_0, \dots , v_{m-1} \rangle \\ \langle u_0, \dots , u_{n-1} \rangle \restriction i &= \langle u_0, \dots , u_{i-1} \rangle \qquad (i \leq n). \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην Άσκηση x1B.14. ⊣

1B.14. ΠΡΟΤΑΣΗ (**Αμοιβαία πρωτογενής αναδρομή**). *Αν οι* g_1, g_2, h_1 *και* h_2 *είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε πρωτογενώς αναδρομικές είναι και οι* f_1 *και* f_2 *που ορίζονται με τις εξισώσεις:*

$$\begin{aligned} f_1(0, \vec{x}) &= g_1(\vec{x}) \\ f_1(y+1, \vec{x}) &= h_1(f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}), y, \vec{x}) \\[1ex] f_2(0, \vec{x}) &= g_2(\vec{x}) \\ f_2(y+1, \vec{x}) &= h_2(f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}), y, \vec{x}). \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην Άσκηση x1B.15. ⊣

1B.15. ΠΡΟΤΑΣΗ (**Πλήρης πρωτογενής αναδρομή**). *Αν η h είναι πρωτογενώς αναδρομική, τότε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η f που ορίζεται με την εξίσωση*

$$f(y,\vec{x}) = h(\langle f(0,\vec{x}),\dots,f(y \dot{-} 1,\vec{x})\rangle, y, \vec{x})$$

(έτσι που $f(0,\vec{x}) = h(\langle\ \rangle, 0, \vec{x})$, $f(1,\vec{x}) = h(\langle f(0,\vec{x})\rangle, 1, \vec{x})$, κ.λπ.).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρώτα ορίζουμε με πρωτογενή αναδρομή την

$$\begin{aligned} g(0,\vec{x}) &= \langle\ \rangle, \\ g(y+1,\vec{x}) &= g(y,\vec{x}) * \langle h(g(y,\vec{x}), y, \vec{x})\rangle, \end{aligned}$$

και μετά επαληθεύουμε ότι η

$$f(y,\vec{x}) = (g(y+1,\vec{x}))_y$$

ικανοποιεί την απαιτούμενη εξίσωση· τελικά δείχνουμε με πλήρη επαγωγή στο y ότι μόνο μια συνάρτηση ικανοποιεί την απαιτούμενη εξίσωση. $\dashv$

1B. Ασκήσεις

1B.16. **Πρωτογενές αναδρομικό πρόγραμμα** είναι η τυχαία ακολουθία πλειομελών συναρτήσεων

$$E = (f_0, f_1, \dots, f_n)$$

τέτοια που για κάθε $j \le n$ αληθεύει ένα από τα εξής:

(1) Η f_j είναι μια από τις βασικές πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις S, P^n_i, C^n_q.

(2) Η f_j ορίζεται με σύνθεση (10), όπου οι $g, h_1, \dots, h_m$ είναι βασικές πρωτογενώς ανδρομικές συναρτήσεις συναρτήσεις ή εμφανίζονται στην ακολουθία $f_0, \dots, f_{j-1}$.

(3) Η f_j ορίζεται με πρωτογενή αναδρομή (11), όπου οι g, h είναι βασικές πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις ή εμφανίζονται στην ακολουθία $f_0, \dots, f_{j-1}$.

x1B.1. Δείξτε ότι η τυχαία $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική αν και μόνον αν $f = f_n$ είναι για κάποιο πρωτογενές αναδρομικό πρόγραμμα $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

x1B.2. Δείξτε (κατευθείαν, από τους ορισμούς) ότι αν

$$f(x,y) = h(g_1(y), g_2(y,x), y)$$

και οι h, g_1, g_2 είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η f είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.3. Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ είναι πρωτογενώς αναδρομική, τότε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η

$$f(x, y) = g(y, x).$$

x1B.4. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 3$, οι n-μελείς συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \min_n(x_1, \dots, x_n) &= \text{ο ελάχιστος των } x_1, \dots, x_n \\ \max_n(x_1, \dots, x_n) &= \text{ο μέγιστος των } x_1, \dots, x_n \end{aligned}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

x1B.5. Δείξτε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(x, y) = x^y$ (με $0^0 = 1$) είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.6. Δείξτε ότι οι διμελείς σχέσεις $x \leq y$, $x < y$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

x1B.7. Δείξτε ότι αν η $Q(i, y, x)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική, και

$$P(y, x) \iff (\forall i < y) Q(i, y, x),$$

τότε και η $P(y, x)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.8. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{quot}(m, n)$ και $\mathrm{rm}(m, n)$ του πηλίκου και υπόλοιπου είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

x1B.9. Δείξτε ότι για κάθε n, υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος που $n < p < n! + 1$. (Ένα από τα πορίσματα είναι το πως υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι αριθμοί, το λεγόμενο *Θεώρημα του Ευκλείδη*.) ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν ο $n! + 1$ δεν είναι πρώτος, τότε κάποιος πρώτος αριθμός $p \mid n! + 1$.

x1B.10. Δείξτε ότι αν η διμελής σχέση $R(x, y)$ και η συνάρτηση $g(x)$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η συνάρτηση

$$f(x) = (\mu y \leq g(x)) R(x, y).$$

Ο *μέγιστος κοινός διαιρέτης* δύο αριθμών $x, y \geq 1$ είναι (φυσικά!) ο μεγαλύτερος αριθμός που διαιρεί και τους δύο, και για την πληρότητα του ορισμού θέτουμε

$$(26) \qquad \gcd(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0, \\ \text{ο μεγαλύτερος } m \text{ τέτοιος που} & \\ \qquad m \mid x \text{ και } m \mid y, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

x1B.11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\gcd(x, y)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.12. Γιατί δεν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια «πρωτογενώς αναδρομικής κωδικοποίησης του $\mathbb{N}^*$» με το απλό

$$\text{1-1, πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση } \langle\ \rangle : \mathbb{N}^* \rightarrowtail \mathbb{N}$$

αντί για τις περίπλοκες (και πολλές) συνθήκες στις οποίες βασίσαμε τον ορισμό;

x1B.13. Δείξτε ότι η «κλασική κωδικοποίηση» του $\mathbb{N}^*$ στην Πρόταση 1B.12 είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.14. Δείξτε ότι οι εξής δύο συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές:

$$u \upharpoonright i = \begin{cases} \langle u_0, \dots, u_{i-1} \rangle & \text{αν } u = \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle \text{ με } i \leq n, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$u * v = \begin{cases} \langle u_0, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{m-1} \rangle, & \text{αν } u = \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle, \\ & \qquad v = \langle v_0, \dots, v_{m-1} \rangle, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

x1B.15. Δείξτε την Πρόταση 1B.14.

x1B.16. Δείξτε ότι για κάθε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $g(x)$, η συνάρτηση

$$f(x) = \prod\nolimits_{y<x} g(y)$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.17 (**Πλήρης πρωτογενής αναδρομή για σχέσεις**). Δείξτε ότι αν η σχέση $H(w, \vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική και η $P(y, \vec{x})$ ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$P(y, \vec{x}) \iff H(\langle \chi_P(0, \vec{x}), \dots, \chi_P(y \dot{-} 1, \vec{x}) \rangle, y, \vec{x}),$$

τότε και η $P(y, \vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική.

x1B.18* (**Φωλιασμένη πρωτογενής αναδρομή**, nested recursion). Δείξτε ότι για κάθε τρεις συναρτήσεις $g(x)$, $h(w, x, y)$ και $\tau(x, y)$, υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f(x, y)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h(f(x, \tau(x, y)), x, y) \cdot \end{aligned}$$

και αν οι δοσμένες συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η $f(x, y)$.

x1B.19. Δείξτε ότι υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική, ένα-προς-ένα συνάρτηση $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, τέτοια που

$$g(x, y) \leq (x + y + 1)^2.$$

Γενικότερα, δείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική, ένα-προς-ένα συνάρτηση $g_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, τέτοια που

$$g_n(x_1, \dots, x_n) \leq P_n(x_1, \dots, x_n), \tag{27}$$

όπου το $P_n(x_1, \dots, x_n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

x1B.20. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$, δεν υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ που να ικανοποιεί την (27) με πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$.

x1B.21. Δείξτε ότι υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική κωδικοποίηση ακολουθιών, τέτοια που για κάθε n, και όλα τα $x_1, \ldots , x_n$,

$$\langle x_1, \ldots , x_n \rangle \leq 2^n P_n(x_1, \ldots , x_n),$$

όπου το πολυώνυμο P_n είναι βαθμού n.

x1B.22. Δείξτε ότι για κάθε κωδικοποίηση $\langle\ \rangle : \mathbb{N}^* \rightarrowtail \mathbb{N}$ των ακολουθιών από το $\mathbb{N}$,

$$\max\{\langle x_1, \ldots , x_n \rangle \mid x_1, \ldots , x_n \leq k\} \geq 2^n \quad (k, n \geq 2)$$

x1B.23*. (a) Δείξτε ότι κάθε τομή $A_n(x)$ της συνάρτησης του Ackermann είναι πρωτογενώς αναδρομική.

(b) Δείξτε ότι για κάθε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $f(x_1, \ldots , x_n)$, υπάρχει κάποιο m τέτοιο που

$$(28) \qquad f(x_1, \ldots , x_n) < A_m(\max(x_1, \ldots , x_n)) \quad (x_{,} \ldots , x_n \in \mathbb{N}).$$

(c) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Ackermann $A(n, x)$ δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Δείξτε ότι το σύνολο των *A-φραγμένων* συναρτήσεων (δηλαδή των συναρτήσεων που ικανοποιούν την (28) με κάποιο m) είναι πρωτογενώς κλειστό. Οι ασκήσεις x1A.11 – x1A.14 παρέχουν τα απαραίτητα Λήμματα.

x1B.24. Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις

$$\langle\ \rangle_1, \langle\ \rangle_2 : \mathbb{N}^* \rightarrowtail \mathbb{N}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομικές κωδικοποιήσεις, τότε υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, τέτοια που

$$\pi(\langle \vec{x} \rangle_1) = \langle \vec{x} \rangle_2 \quad (\vec{x} \in \mathbb{N}^*).$$

1C. Ελαχιστικά αναδρομικές μερικές συναρτήσεις

Ο αριθμός x καλείται *δίδυμος πρώτος* αν είναι πρώτος, και ο $x + 2$ είναι επίσης πρώτος· για παράδειγμα, ο 5 είναι δίδυμος πρώτος, αλλά ο 7 δεν είναι. Υπάρχουν ακριβώς τριάντα πέντε δίδυμοι πρώτοι μικρότεροι του 1000, οι εξής, ο καθένας ζευγαρωμένος με τον «επόμενο πρώτο» που τον ακολουθεί:

3:5	5:7	11:13	17:19	29:31
41:43	59:61	71:73	101:103	107:109
137:139	149:151	179:181	191:193	197:199
227:229	239:241	269:271	281:283	311:313
347:349	419:421	431:433	461:463	521:523
569:571	599:601	617:619	641:643	659:661
809:811	821:823	827:829	857:859	881:883

Η εικασία ότι *υπάρχουν άπειροι το πλήθος δίδυμοι πρώτοι* είναι ένα από τα αρχαιότερα ανοικτά προβλήματα της αριθμοθεωρίας, και (όπως μας λένε οι αριθμοθεωροί) δεν υπάρχει ρεαλιστική προσδοκία ότι θα αποδειχτεί σύντομα. Ας υποθέσουμε ότι πράγματι ισχύει, και ας ορίσουμε τη συνάρτηση

$$p^\delta_i = \text{ο } i\text{-οστός δίδυμος πρώτος αριθμός},$$

έτσι που (από τον πίνακα),

$$p^\delta_0 = 3,\ p^\delta_9 = 107,\ p^\delta_{34} = 881.$$

Η συνάρτηση p^δ_i προφανώς ικανοποιεί την αναδρομική εξίσωση

$$\begin{aligned} p^\delta_0 &= 3, \\ p^\delta_{i+1} &= h(p^\delta_i + 1), \end{aligned}$$

όπου

$$(29)\quad h(w) = \text{ο μικρότερος δίδυμος πρώτος } x \geq w. \\ = (\mu y \geq w)\text{Prime}^\delta(y),$$

και η σχέση

$$\text{Prime}^\delta(x) \iff \text{ο } x \text{ είναι δίδυμος πρώτος}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική. Αυτό όμως δεν συνεπάγεται ότι η p^δ_i είναι πρωτογενώς αναδρομική (όπως στην απόδειξη της ανάλογης Πρότασης 1B.10 για τη συνάρτηση p_i), επειδή δεν μπορούμε να δείξουμε ότι η $h(w)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική — κι αυτό επειδή δεν ξέρουμε κάποιο φράγμα για τον «επόμενο δίδυμο πρώτο». Από την άλλη μεριά, η $h(w)$ μπορεί να υπολογιστεί με την προφανή «βλακώδη αναζήτηση» (dumb search), όπου διαδοχικά ελέγχουμε τις συνθήκες

$$\text{Prime}^\delta(w+1),\ \text{Prime}^\delta(w+2),\ \text{Prime}^\delta(w+3), \dots,$$

μέχρις ότου βρούμε κάποιο $w + 1 + i$ που είναι, πράγματι, δίδυμος πρώτος. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} h(6) &= h(7) \text{ επειδή } \neg\text{Prime}^\delta(6) \\ &= h(8) \text{ επειδή } \neg\text{Prime}^\delta(7) \\ &= h(9) \text{ επειδή } \neg\text{Prime}^\delta(8) \\ &= h(10) \text{επειδή } \neg\text{Prime}^\delta(9) \\ &= h(11) \text{επειδή } \neg\text{Prime}^\delta(10) \\ &= 11 \quad \text{επειδή } \text{Prime}^\delta(11) \cdot \end{aligned}$$

άρα και η p_i^δ υπολογίζεται ως συνήθως,[2]

$$p_0^\delta = 3,\ p_1^\delta = h(p_0^\delta + 1),\ \dots, p_i^\delta = h(p_{i-1}^\delta + 1).$$

Παρά την υποτιμητική της ονομασία, η διαδικασία της βλακώδους αναζήτησης είναι ίσως το βασικότερο συστατικό στην κατασκευή αλγορίθμων στους φυσικούς αριθμούς. Εκφράζεται από τον τελεστή **απεριόριστης (μηφραγμένης)** ελαχιστοποίησης που (κατ' αρχήν) εφαρμόζεται σε μια σχέση, όπως αυτός της φραγμένης ελαχιστοποίησης 1B.8:

$$(30)\quad (\mu i \geq y)R(i, \vec{x}) = \text{ο μικρότερος } i \geq y \text{ (αν υπάρχει) τέτοιος που } R(i, \vec{x}),$$

και κάπως απλούστερα, για βλακώδη αναζήτηση που αρχίζει από το 0,

$$\mu i R(i, \vec{x}) = (\mu i \geq 0)R(i, \vec{x}).$$

Η εφαρμογή της όμως οδηγεί φυσικά στην εισαγωγή «μερικών συναρτήσεων» που δεν αποδίδουν πάντα τιμή, και θα την ορίσουμε αυστηρά σ' αυτό το ευρύτερο πλαίσιο.

1C.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Μερική συνάρτηση** (partial function) (από το *πεδίο εισόδου* A στο *πεδίο τιμών ή εξόδου* B)

$$f : A \rightharpoonup B$$

είναι η τυχαία συνάρτηση

$$f : A_0 \to B \quad (A_0 = \text{Domain}(f) \subseteq A),$$

όπου το A_0 καλείται το *πεδίο σύγκλισης* (domain of convergence) της f· ισοδύναμα, η τυχαία συνάρτηση

$$f : A \to B \cup \{\bot\}$$

όπου $\bot$ (πάτος, bottom) είναι κάποιο (συμβατικά επιλεγμένο) αντικείμενο που δεν ανήκει στο B. Ερμηνεύουμε την «τιμή» $f(x) = \bot$ ως $x \notin \text{Domain}(f)$, και λέμε ότι η f *αποκλίνει* στο x αν $f(x) = \bot$, ενώ αν $f(x) \in B$, τότε η f

---

[2] Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το πρόγραμμα που δημιούργησε τον πίνακα των διδύμων πρώτων στην αρχή αυτού του εδαφίου βασίζεται στον πολύ αποτελεσματικότερο αλγόριθμο του «κόσκινου του Ερατοσθένη».

συγκλίνει στο x.[3] Συμβολικά, θέτουμε

$$\begin{aligned} f(x)\downarrow &\iff x \in \mathrm{Domain}(f) \iff f(x) \in B, \\ f(x)\uparrow &\iff x \notin \mathrm{Domain}(f) \iff f(x) = \perp, \end{aligned}$$

και ειδικά για n-μελείς μερικές συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ στους φυσικούς αριθμούς,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) > 0 &\iff f(\vec{x})\downarrow \;\&\; f(\vec{x}) > 0, \\ f(\vec{x}) < g(\vec{y}) &\iff f(\vec{x})\downarrow \;\&\; g(\vec{y})\downarrow \;\&\; f(\vec{x}) < g(\vec{y}), \end{aligned}$$

κ.λπ. Η ακραία περίπτωση μερικής συνάρτησης είναι η

$$\varepsilon(x) = \perp \quad (x \in A) \tag{31}$$

με $\mathrm{Domain}(f) = \emptyset$ που αποκλίνει για κάθε είσοδο (!), ενώ κάθε (συνήθης, «ολική») συνάρτηση $f : A \to B$ είναι μερική συνάρτηση, με $\mathrm{Domain}(f) = A$.

Για δύο n-μελείς μερικές συναρτήσεις $f, g : A \rightharpoonup B$, θέτουμε

$$f \sqsubseteq g \iff (\forall \vec{x})[f(\vec{x})\downarrow \Longrightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x})]. \tag{32}$$

Η σχέση $f \sqsubseteq g$ είναι (εύκολα, x1C.2) *μερική διάταξη* στο σύνολο

$$(A \rightharpoonup B) = \{f \mid f : A \rightharpoonup B\}$$

όλων των μερικών συναρτήσεων με πεδίο εισόδου A και πεδίο τιμών B, δηλαδή

$$f \sqsubseteq f, \quad [f \sqsubseteq g \;\&\; g \sqsubseteq h] \Longrightarrow f \sqsubseteq h, \quad [f \sqsubseteq g \;\&\; g \sqsubseteq f] \Longrightarrow f = g.$$

1C.2. **Σύνθεση και πρωτογενής αναδρομή.** Αυτοί οι τελεστές ερμηνεύονται για μερικές συναρτήσεις με το φυσικό τρόπο του υπολογισμού τους: αν, π.χ., $g, h : A \rightharpoonup B$ και $f : B^2 \rightharpoonup C$, τότε για όλα τα $x \in A, w \in C$,

$$f(g(x), h(x)) = w \iff (\exists u, v \in B)[g(x) = u \;\&\; h(x) = v \;\&\; f(u, v) = w]\cdot$$

και αν

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(y + 1, \vec{x}) &= h(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}) \end{aligned}$$

---

[3] Ο Dana Scott που εισήγαγε αυτό τον εναλλακτικό ορισμό των μερικών συναρτήσεων αναφέρεται στο αντικείμενο $\perp$ ως μια «αντικειμενοποίηση της απόκλισης». Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θέσουμε γι' αυτές τις Σημειώσεις

$$\perp = \text{Λυκαβηττός},$$

οπότε μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ είναι η τυχαία (ολική) συνάρτηση

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\text{Λυκαβηττός}\},$$

και όπου ερμηνεύουμε την τιμή $f(3) = \text{Λυκαβηττός}$ ως $f(3)\uparrow$, επειδή ο Λυκαβηττός δεν είναι αριθμός (είναι λόφος).

και οι g, h είναι μερικές συναρτήσεις στο σύνολο των αριθμών $\mathbb{N}$, τότε, για όλα τα $y, \vec{x}, w \in \mathbb{N}$,

$$(33) \quad f(y,\vec{x}) = w \iff (\exists w_0, \dots, w_y \in \mathbb{N}) \\ [w_0 = g(\vec{x}) \\ \& \ (\forall i, 0 < i \leq y)[w_i = h(w_{i \dot{-} 1}, i \dot{-} 1, \vec{x})] \\ \& \ w_y = w].$$

Πόρισμα αυτού του ορισμού είναι ότι

$$g(\vec{x})\uparrow \Longrightarrow (\forall y)[f(y,\vec{x})\uparrow],$$

επειδή, για κάθε y, ο υπολογισμός της τιμής $f(y,\vec{x})$ «ανάγεται» τελικά στον υπολογισμό της $f(0,\vec{x}) = g(\vec{x})$.

Η ισοδυναμία (33) αποδίδει ένα *ρητό ορισμό* για τη συνάρτηση $f(y,\vec{x})$ που ορίζεται αναδρομικά, και καλείται *κατά Dedekind ανάλυση της αναδρομής*. Παρατηρούμε ότι ο ρητός ορισμός της $f(y,\vec{x})$ χρησιμοποιεί τον ποσοδείκτη $(\exists w_0, \dots, w_y \in \mathbb{N})$ πάνω σε *πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών*.

Με αυτούς τους ορισμούς, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του συνόλου $\mathcal{R}_p(\Psi)$ των Ψ-*πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων* στην περίπτωση που το Ψ περιέχει μερικές συναρτήσεις. Η έννοια δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αλλά χρειάζεται για το βασικό ορισμό 1C.4.

1C.3. ΟΡΙΣΜΟΣ. Η **ελαχιστοποίηση** της μερικής συνάρτησης $g(i,\vec{x})$ είναι η μερική συνάρτηση

$$(34) \quad f(y,\vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i,\vec{x}) = 0] \\ = \text{ο ελάχιστος } w \geq y, \text{ τέτοιος που} \\ g(w,\vec{x}) = 0 \ \& \ (\forall i)[y \leq i < w \Longrightarrow g(i,\vec{x}) > 0],$$

όπου, υπενθυμίζουμε,

$$g(i,\vec{x}) > 0 \iff \text{για κάποιο } z, g(i,\vec{x}) = z + 1.$$

Για παράδειγμα,

$$g(1)\uparrow \Longrightarrow (\mu i \geq 1)[g(i) = 0]\uparrow,$$

ακόμη κιαν $g(2) = 0$.

Παρατηρούμε επίσης, ότι αν η $g(i,\vec{x})$ είναι ολική συνάρτηση και θέσουμε

$$R(i,\vec{x}) \iff g(i,\vec{x}) = 0,$$

τότε $(\mu i \geq y)[g(i,\vec{x}) = 0] = (\mu i \geq y)R(i,\vec{x})$ σύμφωνα με τον ορισμό (30).

1C.4. ΟΡΙΣΜΟΣ. Η τυχαία μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ είναι **ελαχιστικά αναδρομική** (ή μ-αναδρομική, μ-recursive) στο σύνολο μερικών συναρτήσεων Ψ, αν η f ανήκει σε κάθε σύνολο μερικών συναρτήσεων που περιέχει το Ψ και είναι πρωτογενώς κλειστό και κλειστό για ελαχιστοποίηση. Συμβολικά:

$$\mathcal{R}_\mu(\Psi) = \{f \mid \text{η } f \text{ είναι } \mu\text{-αναδρομική στο } \Psi\},$$
$$\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\mu(\emptyset).$$

Η τυχαία σχέση $R(\vec{x})$ είναι ελαχιστικά αναδρομική αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική.

Το σύνολο $\mathcal{R}_\mu(\Psi)$ των Ψ-ελαχιστικά αναδρομικών μερικών συναρτήσεων είναι κλειστό για πρωτογενή αναδρομή από τον ορισμό του, άρα

$$\mathcal{R}_p(\Psi) \subseteq \mathcal{R}_\mu(\Psi)\cdot$$

η αντίστροφη συμπερίληψη δεν ισχύει, όπως θα δούμε, αλλά αυτό δεν είναι προφανές τώρα. Μπορούμε όμως να δείξουμε αμέσως την κλειστότητα του $\mathcal{R}_\mu(\Psi)$ για τον τελεστή της «διακλάδωσης», που είναι ιδιαίτερα σημαντικός στις εφαρμογές του σε μερικές συναρτήσεις:

1C.5. Ορισμος. Η **διακλάδωση** τριών, δοσμένων μερικών συναρτήσεων $c(\vec{x})$, $g(\vec{x})$, $h(\vec{x})$, είναι η μερική συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = \text{αν } (c(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } g(\vec{x}) \text{ αλλιώς } h(\vec{x}) \tag{35}$$
$$= \begin{cases} g(\vec{x}), & \text{αν } c(\vec{x}) = 0, \\ h(\vec{x}), & \text{αν } c(\vec{x})\!\downarrow \;\&\; c(\vec{x}) \neq 0, \\ \bot, & \text{αν } c(\vec{x}) = \bot, \end{cases}$$

με τη συνθήκη σύγκλισης

$$f(\vec{x})\!\downarrow \iff [c(\vec{x}) = 0 \;\&\; g(\vec{x})\!\downarrow] \vee [c(\vec{x})\!\downarrow \;\&\; c(\vec{x}) > 0 \;\&\; h(\vec{x})\!\downarrow].$$

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της διακλάδωσης απαιτεί τη σύγκλιση του *τεστ* $c(\vec{x})$ αλλά δεν απαιτεί τη σύγκλιση και των δύο τιμών $g(\vec{x})$ και $h(\vec{x})$: για παράδειγμα,

$$\text{αν } (0 = 0) \text{ τότε } x \text{ αλλιώς } \bot = x.$$

1C.6. Προταση. *Για κάθε σύνολο μερικών συναρτήσεων Ψ, τα $\mathcal{R}_p(\Psi)$ και $\mathcal{R}_\mu(\Psi)$ είναι κλειστά για διακλάδωση.*

Αποδειξη. Για το δοσμένο ορισμό

$$f(\vec{x}) = \text{αν } (c(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } g(\vec{x}) \text{ αλλιώς } h(\vec{x}),$$

ο πρώτος πειρασμός είναι να θέσουμε, με πρωτογενή αναδρομή,

$$f_1(0, \vec{x}) = g(\vec{x}),$$
$$f_1(i+1, \vec{x}) = h(\vec{x}),$$

και να προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι

$$f(\vec{x}) = f_1(c(\vec{x}), \vec{x}), \tag{36}$$

έτσι που αν $c, g, h \in \mathcal{R}_p(\Psi)$, τότε $f \in \mathcal{R}_p(\Psi) \subseteq \mathcal{R}_\mu(\Psi)$. Αυτό δε δουλεύει, Άσκηση x1C.5, και αντ' αυτού θέτουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}\varphi_0(0, u, v) &= v,\\ \varphi_0(i+1, u, v) &= u,\\ \varphi_g(0, \vec{x}) &= 0,\\ \varphi_g(i+1, \vec{x}) &= g(\vec{x}),\\ \varphi_h(0, \vec{x}) &= 0,\\ \varphi_h(i+1, \vec{x}) &= h(\vec{x}),\\ f_1(i, \vec{x}) &= \varphi_0(1 \dot{-} i, \varphi_g(1 \dot{-} i, \vec{x}), \varphi_h(1 \dot{-} (1 \dot{-} i), \vec{x})),\end{aligned}$$

και τώρα η (36) έπεται εύκολα, Άσκηση x1C.5. ⊣

1C.7. **Αναδρομικές εξισώσεις**. Η συνάρτηση του Ackermann (1A.6) δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική, και δεν είναι προφανές (τώρα) αν είναι ελαχιστικά αναδρομική· και η Άσκηση x1B.18* προσφέρει ένα ακόμη παράδειγμα συνάρτησης για την οποία δεν είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι πρωτογενώς (ή ελαχιστικά) αναδρομική. Οι συναρτήσεις αυτές, όμως, είναι «υπολογίσιμες», επειδή οι αναδρομικές εξισώσεις που τις καθορίζουν αποδίδουν αλγορίθμους για τον υπολογισμό των τιμών τους, π.χ., στις Ασκήσεις x1A.6 και x1A.8. Η επόμενη Πρόταση δίνει ακόμη ένα —κάπως ιδιότυπο— τέτοιο παράδειγμα.

1C.8. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η ελαχιστοποίηση*

$$f(y, \vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i, \vec{x}) = 0]$$

τυχαίας μερικής συνάρτησης g είναι η $\sqsubseteq$-ελάχιστη λύση της αναδρομικής εξίσωσης

(37) $$p(y, \vec{x}) = \text{αν } (g(y, \vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } p(y+1, \vec{x}),$$

δηλαδή:

(a) *Η (37) ισχύει για όλα τα $y, \vec{x}$ αν θέσουμε $p := f$.*

(b) *Αν η (37) ισχύει για όλα τα $y, \vec{x}$ με κάποια p, τότε $f \sqsubseteq p$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Πρέπει να δείξουμε ότι για όλα τα $y, \vec{x}$,

(38) $$f(y, \vec{x}) = \text{αν } (g(y, \vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } f(y+1, \vec{x}),$$

και θεωρούμε τις τρεις περιπτώσεις,

$$g(y, \vec{x})\uparrow, \ g(y, \vec{x}) = 0, \ g(y, \vec{x}) > 0$$

Η αλήθεια της (38) είναι προφανής στις δύο πρώτες απ' αυτές. Στην τρίτη περίπτωση, αν

$$(\forall i \geq y)[g(i, \vec{x})\uparrow \vee g(i, \vec{x}) > 0],$$

τότε, προφανώς,

$$f(y,\vec{x}) = \bot = f(y+1,\vec{x}),$$

έτσι που πάλι έχουμε ισότητα. Τελικά, αν, για κάποιο $w > y$,

$$g(w,\vec{x}) = 0 \;\&\; (\forall i \geq y)[i < w \Longrightarrow g(i,\vec{x}) > 0],$$

τότε $f(y,\vec{x}) = f(y+1,\vec{x}) = w$, και έχουμε πάλι ισότητα.

(b) Πρέπει να δείξουμε ότι αν για όλα τα $\vec{x}, y$,

$$p(y,\vec{x}) = \text{αν } (g(y,\vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } p(y+1,\vec{x}), \tag{39}$$

τότε, για κάθε $\vec{x}$ και όλα τα y και $w \geq y$,

$$f(y,\vec{x}) = w \Longrightarrow p(y,\vec{x}) = w\cdot$$

χρησιμοποιούμε επαγωγή στη διαφορά $w - y$.

Στη Βαση, $w = y$, και αμέσως, από τον ορισμό της f και την (39),

$$f(y,\vec{x}) = y = p(y,\vec{x}).$$

Στο Επαγωγικο Βημα, $w > y$ και $g(y,\vec{x}) > 0$, έτσι που

$$\begin{aligned} w = f(y,\vec{x}) &= f(y+1,\vec{x}) && (\text{από την } (38)) \\ &= p(y+1,\vec{x}) && (\text{επ. υποθ.,} \\ & && \text{αφού } w-(y+1) = (w-y)-1), \\ &= p(y,\vec{x}) && (\text{από την } (39)). \end{aligned} \qquad \dashv$$

Αυτό το παράδειγμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, αφού δείχνει ότι η εξίσωση (37) που μοιάζει να ορίζει την τιμή $p(y,\vec{x})$ από την επόμενη $p(y+1,\vec{x})$ (!) στην πραγματικότητα εκφράζει τον βασικό αλγόριθμο της «βλακώδους αναζήτησης»: για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε την τιμή $p(2,\vec{x})$, εφαρμόζουμε την εξίσωση επανειλημμένα,

$$p(2,\vec{x}) = p(3,\vec{x}) = \cdots = p(m,\vec{x}) = m,$$

μέχρις ότου (ίσως) βρούμε κάποιο m τέτοιο που $g(m,\vec{x}) = 0$, οπότε ξέρουμε ότι $p(2,\vec{x}) = m$. Το παράδειγμα δείχνει ότι η σχέση ανάμεσα στην «αναδρομή» και τον «υπολογισμό» που υποδείξαμε στο (II) του 1A.3, εφαρμόζεται πολύ ευρύτερα από την κλασική περίπτωση της πρωτογενούς αναδρομής, και είναι το κλειδί για τον ορισμό της θεμελιακής κλάσης των (γενικών, μερικών) *αναδρομικών συναρτήσεων* που θα δώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1C. Ασκήσεις

x1C.1. Δείξτε ότι για όλες τις μερικές συναρτήσεις $f, g : A \rightharpoonup B$,

(a) $$f = g \Longrightarrow (\forall x \in A)[f(x)\!\downarrow \iff g(x)\!\downarrow]$$

και

(b) $$f = g \iff (\forall x \in A, w \in B)[f(x) = w \iff g(x) = w].$$

x1C.2. Δείξτε ότι για όλες τις μερικές συναρτήσεις $f, g, h : A \rightharpoonup B$,

$$f \sqsubseteq f, \quad [f \sqsubseteq g \;\&\; g \sqsubseteq h] \Longrightarrow f \sqsubseteq h, \quad [f \sqsubseteq g \;\&\; g \sqsubseteq f] \Longrightarrow f = g.$$

x1C.3. Θεωρούμε τους ορισμούς

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \text{αν } (x = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } z, \\ f_1(t) &= g(t, h(t), t), \\ f_2(t) &= \text{αν } (t = 0) \text{ τότε } h(t) \text{ αλλιώς } t \end{aligned}$$

όπου η $h(t)$ είναι κάποια μερική συνάρτηση. Αληθεύει η εξίσωση

$$f_1(t) = f_2(t)$$

για κάθε t; (Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.)

x1C.4. Δείξτε ότι αν η σχέση $R(i, \vec{x})$ είναι ελαχιστικά αναδρομική, τότε και η μερική συνάρτηση

$$f(y, \vec{x}) = (\mu i \geq y) R(i, \vec{x})$$

είναι επίσης ελαχιστικά αναδρομική.

x1C.5. Εξηγήστε γιατί η πρώτη ιδέα για την απόδειξη της 1C.6 δε δουλεύει, και δώστε τις λεπτομέρειες της σωστής απόδειξης.

x1C.6. Δείξτε ότι οι κλάσεις $\mathcal{R}_p(\Psi)$ και $\mathcal{R}_\mu(\Psi)$ είναι κλειστές για ορισμούς με $k+1$ περιπτώσεις, της μορφής

$$f(\vec{x} = \begin{cases} g_1(\vec{x}), & \text{αν } c_1(\vec{x}) = 0, \\ g_2(\vec{x}), & \text{αν } c_1(\vec{x}) > 0 \;\&\; c_2(\vec{x}) = 0, \\ \cdots & \\ g_k(\vec{x}), & \text{αν } c_1(\vec{x}) > 0, \dots, c_{k-1}(\vec{x}) > 0, c_k(\vec{x}) = 0, \\ g_{k+1}(\vec{x}) & \text{αν } c_1(\vec{x}) > 0, \dots, c_{k-1}(\vec{x}) > 0, c_k(\vec{x}) > 0. \end{cases}$$

x1C.7*. (a) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μια μερική συνάρτηση $p(x, y)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} p(0, y) &= y, \\ p(x+1, 0) &= 2x + 1, \\ p(x+1, y+1) &= 3p(x, y) + p(y, x) + 2, \end{aligned}$$

και υπολογίστε την τιμή $p(3,2)$ γι' αυτή την p.

(b) Δείξτε ότι η μοναδική λύση αυτού του συστήματος είναι πρωτογενώς αναδρομική (ή ελαχιστικά αναδρομική, αν αυτό είναι ευκολότερο).

x1C.8. Για τυχαίες μερικές συναρτήσεις $g(\vec{x})$, $h(w,y,\vec{x})$, δείξτε ότι η αναδρομική εξίσωση

$$p(y,\vec{x}) = \text{αν } (y=0) \text{ τότε } g(\vec{x}) \text{ αλλιώς } h(p(y \dot{-} 1,\vec{x}), y \dot{-} 1, \vec{x}) \tag{40}$$

έχει ακριβώς μια λύση, συγκεκριμένα τη μερική συνάρτηση f που ορίζεται με την πρωτογενή αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= g(\vec{x}), \\ f(y+1,\vec{x}) &= h(f(y,\vec{x}),y,\vec{x})). \end{aligned}$$

x1C.9 (**Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη**). Δείξτε ότι η εξής αναδρομική εξίσωση έχει μοναδική λύση, τη συνάρτηση $\overline{p}(x,y) = \gcd(x,y)$:

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x=0 \text{ ή } y=0, \\ p(y,x), & \text{αλλιώς, αν } x<y, \\ y, & \text{αλλιώς, αν } y \mid x, \\ p(y,\mathrm{rm}(x,y)), & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{41}$$

x1C.10. Δώστε παραδείγματα μερικών συναρτήσεων $g(y,\vec{x})$ τέτοιων που η εξίσωση (37) να επιδέχεται:

(1) Τη κενή μερική συνάρτηση ε ως μόνη λύση.
(2) Μόνο μία λύση, που να είναι ολική συνάρτηση.
(3) Άπειρες το πλήθος λύσεις.

x1C.11*. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μερική συνάρτηση $g(y,\vec{x})$ τέτοια που η εξίσωση (37) να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

x1C.12*. (a) Δείξτε ότι η αναδρομική εξίσωση

$$p(x,y) = \text{αν } (x=0) \text{ τότε } 1 \text{ αλλιώς } p(x \dot{-} 1, p(x,y)) \tag{$*$}$$

έχει ελάχιστη λύση $\overline{p}$, και δώστε έναν τύπο γι' αυτή τη λύση.

(b) Δείξτε ότι υπάρχει μόνο μια ολική συνάρτηση f που ικανοποιεί την $(*)$, και αυτή η συνάρτηση δεν είναι η ελάχιστη λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΕΝΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο πρώτος αυστηρός ορισμός των (γενικά) **αναδρομικών συναρτήσεων** στους φυσικούς αριθμούς δόθηκε από τον Gödel το 1934, με βάση μια ιδέα του Herbrand, και τα θεμελιακά αποτελέσματα για τις αναδρομικές συναρτήσεις αποδείχτηκαν από τον Kleene στη δεκαετία του 30. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εκθέσουμε μια γενίκευση σε «μερικές άλγεβρες» μιας πολύ απλής και κομψής εκδοχής του ορισμού του Gödel που οφείλεται στον John McCarthy (1963), και που φανερώνει πιο καθαρά τη σχέση ανάμεσα στην αναδρομή και τον υπολογισμό. Αυτή η πρόσβαση στη θεωρία αναδρομής βασίζεται σε ιδέες από τη λογική και τον προγραμματισμό, και στο πρώτο εδάφιο του κεφαλαίου θα προετοιμάσουμε το έδαφος, εκθέτοντας (περιληπτικά) τα απαραίτητα προαπαιτούμενα.

2A. Μερικές άλγεβρες

Χαρακτηριστικό —και για μας, κύριο— παράδειγμα μερικής άλγεβρας είναι η *βασική δομή της αριθμητικής*

$$\mathbf{N}_0 = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd), \tag{42}$$

όπου S και Pd είναι οι συναρτήσεις του επόμενου και του προηγούμενου στους φυσικούς αριθμούς, και όπου έχουμε προβάλλει το 0 και το 1 επειδή τα χρησιμοποιούμε και ως αληθοτιμές, όπως ήδη κάναμε στο πρώτο κεφάλαιο. Γενικότερα:

2A.1. Ορισμος. **Μερική άλγεβρα** είναι η τυχαία δομή

$$\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \dots, f_K),$$

όπου το M είναι σύνολο· $0, 1 \in M$ και $0 \neq 1$· και για $i = 1, \dots, K$, η

$$f_i : M^{n_i} \rightharpoonup M$$

είναι μερική συνάρτηση πλειομέλειας n_i. Εδώ επιτρέπουμε $n_i = 0$, οπότε η f_i είναι 0-μελής μερική συνάρτηση στο M, δηλαδή *σταθερά*, κάποιο μέλος του M ή ο πάτος $\perp$.

Οι μοναδικές μερικές άλγεβρες που θα χρειαστούμε σ' αυτές τις Σημειώσεις είναι η $\mathbf{N}_0$, που είναι **ολική** (επειδή τα δοσμένα S, Pd είναι ολικές συναρτήσεις), και **επεκτάσεις** της $\mathbf{N}_0$, δηλαδή μερικές άλγεβρες της μορφής

$$(\mathbf{N}_0, f_1, \dots , f_m) = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd, f_1, \dots , f_m),$$

όπου οι $f_1, \dots , f_m$ είναι πλειομελείς μερικές συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς. Μερικές άλγεβρες είναι και οι

$$(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot), \ (\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot, \div),$$

όπου $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots \}$ είναι οι (θετικοί και αρνητικοί) ακέραιοι αριθμοί, και

$$\mathbb{Q} = \Big\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\Big\}$$

είναι το σύνολο των ρητών. Η διαίρεση $r \div s$ σ' αυτή την άλγεβρα είναι μερική συνάρτηση, αφού δεν συγκλίνει όταν $s = 0$.[4]

2A.2. **Η τυπική γλώσσα $\mathsf{R}(\mathbf{M})$: σύνταξη.** Με κάθε μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ συσχετίζουμε την τυπική γλώσσα $\mathsf{R} = \mathsf{R}(\mathbf{M})$, της οποίας το **αλφάβητο** αποτελείται από τα εξής **σύμβολα**:

οι *ατομικές μεταβλητές*:	$\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, \dots ,$
οι *ατομικές σταθερές* (τα μέλη του M):	$x \quad (x \in M)$
οι συναρτησιακές σταθερές:	$\mathsf{f}_1, \dots , \mathsf{f}_K \quad (\text{arity}(\mathsf{f}_i) = n_i)$
τα *σύμβολα για τη διακλάδωση*:	αν τότε αλλιώς
τα *σημεία στίξεως*:	, ( )
και το σύμβολο της ισότητας:	=

Απ' αυτά τα σύμβολα ξεχωρίζουμε το **λεξιλόγιο** (vocabulary)

$$(\mathsf{f}_1, \dots , \mathsf{f}_K) \qquad (\text{arity}(\mathsf{f}_i) = n_i) \tag{43}$$

που παρέχει συμβολισμό για τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις της $\mathbf{M}$, ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα είναι κοινά για όλες τις μερικές άλγεβρες στο σύνολο M. Για τη γλώσσα της $\mathbf{N}_0$, βέβαια, χρησιμοποιούμε το λεξιλόγιο $(\mathsf{S}, \mathsf{Pd})$.

---

[4] Στη λογική θεωρούμε δομές

$$\mathbf{M} = (M, c_1, \dots , c_N, R_1, \dots , R_L, f_1, \dots , f_K),$$

όπου τα «δοσμένα» είναι διακεκριμένα στοιχεία του M, σχέσεις, και (ολικές) συναρτήσεις στο M. Οι *μερικές άλγεβρες* που χρησιμοποιούμε εδώ είναι φαινομενικά ειδικότερες, επειδή δεν επιτρέπουμε διακεκριμένα στοιχεία ή σχέσεις· αλλά τα στοιχεία μπορούν να απεικονιστούν από 0-μελείς συναρτήσεις, και οι σχέσεις απεικονίζονται από τις χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις. Έτσι οι μερικές άλγεβρες είναι στην πραγματικότητα γενικότερες από τις δομές της πρωτοβάθμιας λογικής, επειδή επιτρέπουμε *μερικές* (όχι απαραίτητα ολικές) συναρτήσεις $f_1, \dots , f_K$. Παρατηρούμε επίσης ότι στον ορισμό των *όρων* πιο κάτω, επιτρέπουμε *διακλαδώσεις*.

Λέξεις στο τυχαίο σύνολο Σ είναι οι πεπερασμένες ακολουθίες από στοιχεία (ή *σύμβολα*) του Σ, για παράδειγμα οι

$$0{=}(0\mathsf{v}_3\mathsf{f}_2 \qquad\qquad \mathsf{Pd}01x_1x_3\mathsf{\text{αν}}{=}\mathsf{\text{αλλιώς}}$$

στο αλφάβητο της R. Όπως στα παραδείγματα, θα γράφουμε λέξεις απλά αραδιάζοντας τα σύμβολα στη σειρά, χωρίς κόμματα. Η *παράθεση* δύο λέξεων συμβολίζεται (κυριολεκτικά) με την παράθεση των συμβόλων τους, έτσι που για τις δυο λέξεις στα παραδείγματα, η παράθεσή τους είναι η λέξη

$$0{=}(0\mathsf{v}_3\mathsf{f}_2\mathsf{Pd}01x_1x_3\mathsf{\text{αν}}{=}\mathsf{\text{αλλιώς}}$$

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο '$\equiv$' για τη σχέση της ισότητας λέξεων, έτσι που

$$\mathsf{f}_2{=}(0\mathsf{f}_1 \equiv \mathsf{f}_2{=}(0\mathsf{f}_1 \ \text{αλλά}\ \mathsf{f}_2{=}(0\mathsf{f}_2 \not\equiv \mathsf{f}_2{=}(1\mathsf{f}_2$$

Ο προφανής λόγος γι' αυτό είναι ότι το '$=$' είναι σύμβολο (του αλφάβητου της R), και αν το χρησιμοποιούσαμε για την ισότητα ανάμεσα σε λέξεις θα προκαλούσε σύγχυση. Συχνά θα χρησιμοποιούμε γράμματα από το ελληνικό αλφάβητο για να ονομάζουμε σύμβολα και λέξεις,

$$\alpha \equiv \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_m$$

Η **κενή λέξη** συμβολίζεται με 'Λ', έτσι που για κάθε λέξη α,

$$\Lambda\alpha \equiv \alpha\Lambda \equiv \alpha$$

Οι «συντακτικά σωστές» εκφράσεις της R είναι λέξεις από το αλφάβητο και διαχωρίζονται στους *όρους* και τις **εξισώσεις όρων**, δηλαδή λέξεις της μορφής

$$A = B$$

όπου οι A και B είναι όροι.

Οι **όροι** (terms) της R αποτελούν το ελάχιστο σύνολο λέξεων Όροι με τις εξής ιδιότητες:

(T1) Κάθε $x \in M$ (και ιδιαίτερα τα 0 και 1) και κάθε ατομική μεταβλητή v_i είναι όροι.

(T2) Αν οι λέξεις $A_1, \ldots, A_{n_i}$ είναι όροι, τότε όρος είναι και η λέξη

$$\mathsf{f}_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$$

(T3) Αν οι λέξεις A_1, A_2, A_3 είναι όροι, τότε όρος είναι και η λέξη

$$(\mathsf{\text{αν}}\ (A_1 = 0)\ \mathsf{\text{τότε}}\ A_2\ \mathsf{\text{αλλιώς}}\ A_3)$$

Ο ορισμός αυτός εκφράζεται συνοπτικά και με την «ισοδυναμία»

$$A :\equiv x \mid \mathsf{v}_i \mid \mathsf{f}_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) \mid (\mathsf{\text{αν}}\ (A_1 = 0)\ \mathsf{\text{τότε}}\ A_2\ \mathsf{\text{αλλιώς}}\ A_3) \tag{44}$$

που διαβάζεται

η λέξη A είναι όρος αν είναι μέλος του M, ή ατομική μεταβλητή, ή αν είναι της μορφής $\mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})$ όπου οι $A_1, \dots, A_{n_i}$ είναι όροι, ή αν είναι της μορφής (**αν** $(A_1 = 0)$ **τότε** A_2 **αλλιώς** A_3), όπου οι A_1, A_2, A_3 είναι όροι.

Παρατηρούμε ότι η κενή λέξη Λ δεν είναι όρος.

Ο όρος A είναι **κλειστός** αν καμία ατομική μεταβλητή δεν εμφανίζεται στον A, και **αγνός** αν οι μόνες ατομικές σταθερές που (ίσως) εμφανίζονται στον A είναι το 0 ή το 1. Παραδείγματα στην $\mathsf{R}(\mathbf{N}_0)$:

$$\mathsf{S}(0) : \text{κλειστός, αγνός}, \quad \mathsf{S}(13) : \text{κλειστός, όχι αγνός},$$
$$\mathsf{Pd}(\mathsf{v}_1) : \text{αγνός, όχι κλειστός},$$
$$(\textbf{αν}\ (\mathsf{v}_1 = 0)\ \textbf{τότε}\ 3\ \textbf{αλλιώς}\ 1) : \text{ούτε κλειστός ούτε αγνός}$$

Ο αναδρομικός ορισμός των όρων δικαιολογεί επαγωγικές αποδείξεις ιδιοτήτων των όρων:

2A.3. ΛΗΜΜΑ (Επαγωγή στους όρους). *Έστω Σ σύνολο λέξεων από το αλφάβητο της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ τέτοιο που*

$$A_1, \dots, A_{n_i} \in \Sigma \implies \mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i}) \in \Sigma,$$
$$A, B, C \in \Sigma \implies (\textbf{αν}\ (A = 0)\ \textbf{τότε}\ B\ \textbf{αλλιώς}\ C) \in \Sigma.$$

(a) *Αν το Σ περιέχει όλες τις ατομικές σταθερές και μεταβλητές, τότε το Σ περιέχει όλους τους όρους.*

(b) *Αν το Σ περιέχει όλες τις ατομικές σταθερές, τότε το Σ περιέχει όλους τους κλειστούς όρους.*

(b) *Αν το Σ περιέχει το 0, το 1 και όλες τις ατομικές μεταβλητές, τότε το Σ περιέχει όλους τους αγνούς όρους.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (a) Το Σ ικανοποιεί τις συνθήκες (T1) – (T3) από την υπόθεση, και επομένως περιέχει το ελάχιστο σύνολο ΟΡΟΙ που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.

Αφήνουμε τα (b) και (c) για την Άσκηση x2A.1. ⊣

Πως μπορούμε να δείξουμε ότι η λέξη $(\mathsf{S}(1)$ δεν είναι όρος; Η αυστηρή απόδειξη βασίζεται στο επόμενο τεχνικό αλλά σημαντικό Λήμμα, όπου η λέξη α είναι *γνήσιο αρχικό τμήμα* της λέξης β αν

$$\beta \equiv \alpha\gamma \text{ με } \beta \not\equiv \Lambda, \ \gamma \not\equiv \Lambda$$

2A.4. ΛΗΜΜΑ (Μοναδική αναγνωσιμότητα όρων). (a) *Για κάθε όρο A, ο αριθμός εμφανίσεων της αριστερής παρένθεσης ‘(’ στον A είναι ίσος με τον αριθμό εμφανίσεων της δεξιάς παρένθεσης ‘)’ στον A.*

(b) *Κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα όρου δεν είναι όρος.*

(c) *Αν η λέξη $A \equiv \alpha_1 \cdots \alpha_m$ είναι όρος, τότε ισχύει ακριβώς μια από τις περιπτώσεις* (T1), (T2) *ή* (T3) *στον ορισμό των όρων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην *Άσκηση* x2A.2. ⊣

Προφανώς τώρα, η λέξη (S(1) δεν είναι όρος, εφόσον έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις.

Το Λήμμα 2A.4 επίσης δικαιολογεί *αναδρομικούς ορισμούς* συναρτήσεων στους όρους.

2A.5. ΛΗΜΜΑ (Αναδρομή στους όρους). *Για κάθε σύνολο W και δοσμένες συναρτήσεις Φ_1, Φ_2^i $(i = 1, \dots, K)$, Φ_3, υπάρχει μοναδική συνάρτηση*

$$\Phi : \text{ΟΡΟΙ} \to W$$

τέτοια που

$$\begin{gathered}\text{για } x \in M, \Phi(x) = \Phi_1(x), \quad \Phi(\mathsf{v}_i) = \Phi_1(\mathsf{v}_i),\\ \Phi(\mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})) = \Phi_2^i(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_{n_i})),\\ \Phi(\textbf{αν } (A = 0) \textbf{ τότε } B \textbf{ αλλιώς } C) = \Phi_3(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)).\end{gathered}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην *Άσκηση* x2A.4. ⊣

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν που δικαιολογούν αναδρομικούς ορισμούς στα σύνολα των κλειστών και των αγνών όρων, *Άσκηση* x2A.5.

Παρατηρούμε ότι η *σύνταξη* της R(**M**) προσδιορίζεται πλήρως από το σύνολο M και το λεξιλόγιο $(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$, δηλαδή δεν εξαρτάται από τις ερμηνείες $f_1, \dots, f_K$ αυτών των σταθερών στην **M**. Οι ερμηνείες των $\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K$ υπεισέρχονται στη *σημασιολογία* της R(**M**), ως εξής.

2A.6. **Η τυπική γλώσσα** R(**M**)**: δηλωτική σημασιολογία (1).** Η **τιμή** (value) $\mathbf{val}_M(A)$ του τυχαίου **κλειστού όρου** A στη μερική άλγεβρα **M** ορίζεται αναδρομικά από τις εξής συνθήκες, με επίκληση του Λήμματος 2A.5 για κλειστούς όρους:

(DT1) $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(x) = x$, για $x \in M$.
(DT2) Αν $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A_j) = w_j$ για $j = 1, \dots, n_i$, τότε
$\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})) = f_i(w_1, \dots, w_{n_i})$.
(DT3) Αν $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A) = a, \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B) = b$ και $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(C) = c$, τότε
$\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\textbf{αν } (A = 0) \textbf{ τότε } B \textbf{ αλλιώς } C) = \textbf{αν } (a = 0) \textbf{ τότε } b \textbf{ αλλιώς } c$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός μπορεί να αποδώσει $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A)\uparrow$, εφόσον τα «δοσμένα» της άλγεβρας **M** επιτρέπεται να είναι μερικές συναρτήσεις: αν $f_1(1)\uparrow$, τότε $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\mathsf{f}_1(1)) = f_1(1) = \bot$, δηλαδή $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\mathsf{f}_1(1))\uparrow$.

Για το επόμενο Λήμμα χρειαζόμαστε την έννοια της *τυπικής αντικατάστασης*.

2A.7. **Αντικατάσταση όρων.** Για κάθε όρο A, κάθε ατομική μεταβλητή x, και κάθε όρο B, θέτουμε

$$A\{\mathsf{x} :\equiv B\} \equiv \text{το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της } \mathsf{x} \text{ με } B \text{ στον όρο } A,$$

και γενικότερα, για $\vec{\mathsf{x}} = \mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_m$, $\vec{B} = B_1, \dots, B_m$,

$$A\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{B}\} \equiv A\{\mathsf{x}_1 :\equiv B_1\} \cdots \{\mathsf{x}_m :\equiv B_m\}. \tag{45}$$

Για παράδειγμα,

$$\mathsf{f}_1(\mathsf{v}_5, \mathsf{v}_1)\{\mathsf{v}_1 :\equiv B\} \equiv \mathsf{f}_1(\mathsf{v}_5, B), \quad \mathsf{f}_2(\mathsf{v}_5, \mathsf{v}_1)\{\mathsf{v}_1 :\equiv B, \mathsf{v}_5 :\equiv C\} \equiv \mathsf{f}_2(C, B)$$

2A.8. ΛΗΜΜΑ. (a) *Αν η* x *είναι η μόνη ατομική μεταβλητή που εμφανίζεται στον όρο* A *και ο* B *είναι κλειστός όρος τέτοιος που* $\mathbf{val}_M(B) = w \in M$, *τότε*

$$\mathbf{val}_\mathbf{M}(A\{\mathsf{x} :\equiv B\}) = \mathbf{val}_\mathbf{M}(A\{\mathsf{x} :\equiv w\}).$$

(b) *Γενικότερα, αν όλες οι ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο* A *είναι στη λίστα* $\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$ *και οι* $B_1, \dots, B_n$ *είναι κλειστοί όροι τέτοιοι που*

$$\mathbf{val}_\mathbf{M}(B_1) = w_1 \in M, \dots, \mathbf{val}_\mathbf{M}(B_n) = w_n,$$

τότε

$$\mathbf{val}_\mathbf{M}(A\{\mathsf{x}_1 :\equiv B_1, \dots, \mathsf{x}_n :\equiv B_n\}) = \mathbf{val}_\mathbf{M}(A\{\mathsf{x}_1 :\equiv w_1, \dots, \mathsf{x}_n :\equiv w_n\})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολη, με επαγωγή στον όρο A, Άσκηση x2A.6. ⊣

2A.9. **Η τυπική γλώσσα R(M): δηλωτική σημασιολογία (2).** **Αποτίμηση** (valuation, assignment) στο M είναι η τυχαία συνάρτηση

$$\pi : \{\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, \dots, \} \to M$$

που αναθέτει σε κάθε ατομική μεταβλητή μια τιμή $\pi(\mathsf{v}_i)$ στο M· και αν όλες οι ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο A είναι στη λίστα $\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$, θέτουμε

$$\mathbf{val}_M(A, \pi) = \mathbf{val}_\mathbf{M}(A\{\mathsf{x}_1 :\equiv \pi(\mathsf{x}_1), \dots, \mathsf{x}_n :\equiv \pi(\mathsf{x}_n)\}). \tag{46}$$

Με τον κλασικό συμβολισμό και την ορολογία της λογικής,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}, \pi \models A = B &\iff \mathbf{val}_\mathbf{M}(A, \pi) = \mathbf{val}_\mathbf{M}(B, \pi) \\ &\iff \text{η } M \textbf{ ικανοποιεί} \text{ την εξίσωση } A = B \text{ για την } \pi, \end{aligned}$$

έτσι που, πιο αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}, \pi \models A = B \iff & \Big[\mathbf{val}_\mathbf{M}(A, \pi)\uparrow \text{ και } \mathbf{val}_\mathbf{M}(B, \pi)\uparrow\Big] \\ & \text{ή } \Big[\mathbf{val}_\mathbf{M}(A, \pi) = w \in M \text{ και } \mathbf{val}_\mathbf{M}(B, \pi) = w\Big]. \end{aligned}$$

Επίσης θέτουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models A = B &\iff (\text{για κάθε } \pi)\ \mathbf{M}, \pi \models A = B \\ &\iff \text{η εξίσωση } A = B \text{ είναι } \textbf{έγκυρη} \text{ στην } M. \end{aligned}$$

(Αν $\mathbf{M} \models A = B$, λέμε επίσης ότι η $\mathbf{M}$ ικανοποιεί την **ταυτότητα** $A = B$.)

2A.10. **Απλουστευμένοι συμβολισμοί.** Όπως συνηθίζεται στη λογική, σπάνια γράφουμε «γραμματικά σωστούς» όρους και εξισώσεις. Στην πράξη χρησιμοποιούμε τα συνηθισμένα μαθηματικά σύμβολα αντί για τα τυπικά τους ισοδύναμα, π.χ., $x, y, \ldots$ για ατομικές μεταβλητές αντί για $\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots,$ $f, g, +, \cdot, p, \ldots$ για συναρτησιακές σταθερές αντί για $\mathsf{f}_1, \ldots,$ κ.λπ. Επίσης παραλείπουμε ή εισάγουμε περισσότερες παρενθέσεις και «κενούς χώρους» αν αυτό διευκολύνει την ανάγνωση, και γράφουμε (για παράδειγμα)

$$(x+y)\cdot z \text{ αντί για } \cdot(+(x,y),z)$$

Η «γραμματικά σωστή» έκφραση της (37) (με το κατάλληλο λεξιλόγιο) είναι

$$\begin{aligned}&\mathsf{p}(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_{n+1})\\ &\quad = (\textbf{αν } (\mathsf{f}_1(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_{n+1}) = 0) \textbf{ τότε } \mathsf{v}_1 \textbf{ αλλιώς } \mathsf{p}(\mathsf{S}(\mathsf{v}_1), \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_{n+1}))\end{aligned}$$

ενώ η απλουστευμένη τυποποίησή της στην $\mathsf{R}(\mathbf{N}_0, g, p)$ είναι

$$p(y, \vec{x}) = \text{αν } (g(y, \vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } p(S(y), \vec{x}), \tag{47}$$

που οπωσδήποτε είναι πιο ευανάγνωστη.

2A. Ασκήσεις

x2A.1. Δείξτε τα μέρη (b) και (c) του Λήμματος 2A.3.

x2A.2. Δείξτε το Λήμμα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας Όρων 2A.4.

x2A.3 (Μοναδική αναγνωσιμότητα για εξισώσεις). Δείξτε ότι αν οι $A_1, B_1,$ A_2, B_2 είναι όροι της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ και

$$A_1 = B_1 \equiv A_2 = B_2$$

τότε $A_1 \equiv A_2$ και $B_1 \equiv B_2$.

x2A.4. Δείξτε το Λήμμα 2A.5.

x2A.5. Διατυπώστε και δείξτε Λήμματα ανάλογα του 2A.5 που δικαιολογούν ορισμούς στους κλειστούς και τους αγνούς όρους.

x2A.6. Δείξτε το Λήμμα 2A.8.

x2A.7. Δείξτε ότι για κάθε όρο A, αν η λίστα $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ περιέχει όλες τις ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον A, τότε

$$\pi(\mathsf{x}_1) = \rho(\mathsf{x}_1), \ldots, \pi(\mathsf{x}_n) = \rho(\mathsf{x}_n) \Longrightarrow \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A, \pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A, \rho).$$

x2A.8. Δείξτε ότι για όλους τους όρους A, B, C, κάθε μεταβλητή x, και κάθε αποτίμηση π,

$$\begin{aligned}&\text{αν } \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B, \pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(C, \pi),\\ &\qquad\qquad \text{τότε } \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A\{\mathsf{x} :\equiv B\}, \pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A\{\mathsf{x} :\equiv C\}, \pi).\end{aligned}$$

x2A.9*. Έστω B και C όροι τέτοιοι που για κάθε αποτίμηση π στη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B,\pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(C,\pi).$$

Δείξτε ότι για κάθε όρο A, κάθε μεταβλητή x και κάθε αποτίμηση π,

$$\text{αν } \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A,\pi)\!\downarrow, \text{ τότε } \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B\{\mathsf{x} :\equiv A\},\pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(C\{\mathsf{x} :\equiv A\},\pi).$$

Δείξτε επίσης (με αντιπαράδειγμα) ότι αυτό δεν ισχύει πάντα αν $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A,\pi)\!\uparrow$.

x2A.10. Αν όλες οι ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο A είναι στη λίστα $\mathsf{x}_1,\dots,\mathsf{x}_n$, η π είναι αποτίμηση στην $\mathbf{M}$ και οι $B_1,\dots,B_n$ είναι όροι, τέτοιοι που

$$\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B_1,\pi) = w_1 \in M, \dots, \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(B_n,\pi) = w_n \in B,$$

τότε

$$\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A\{\mathsf{x}_1 :\equiv B_1,\dots,\mathsf{x}_n :\equiv B_n\},\pi) \\ = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A\{\mathsf{x}_1 :\equiv w_1,\dots,\mathsf{x}_n :\equiv w_n\},\pi).$$

2B. Αναδρομή και υπολογισμός

Σ' αυτό το εδάφιο θα εισαγάγουμε την **υπολογιστική σημασιολογία** της γλώσσας $\mathsf{R}(\mathbf{M})$, που συσχετίζει «κανονικές» (ελάχιστες) λύσεις με κάθε *σύστημα αναδρομικών εξισώσεων*, στη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και αποδίδει *αλγορίθμους* για τον υπολογισμό αυτών των λύσεων. Βασικός μας στόχος είναι να ορίσουμε τη θεμελιακή κλάση των (γενικά) **αναδρομικών μερικών συναρτήσεων** στην τυχαία μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$, και ιδιαίτερα, βέβαια, την $\mathbf{N}_0$, και να αποδείξουμε τις βασικές της ιδιότητες.

2B.1. **Η προγραμματική γλώσσα $\mathsf{R}(\mathbf{M})$: σύνταξη.** Για να χρησιμοποιήσουμε την $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ ως προγραμματική γλώσσα, καταρχήν την εμπλουτίζουμε με **συναρτησιακές μεταβλητές**

$$\zeta_0^n, \zeta_1^n, \dots \quad (n = 0, 1, \dots, \mathrm{arity}(\zeta_i^n) = n),$$

άπειρες το πλήθος για κάθε δυνατή πλειομέλεια n. Από τη συντακτική άποψη, οι συναρτησιακές μεταβλητές δεν ξεχωρίζουν από τις συναρτησιακές σταθερές $\mathsf{f}_1,\dots,\mathsf{f}_K$ που ονομάζουν τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις $f_1,\dots,f_K$ της $\mathbf{M}$: οι όροι ορίζονται με την αναδρομή

$$A :\equiv x \mid \mathsf{v}_i \mid \mathsf{f}_i(A_1,\dots,A_{n_i}) \mid \zeta_i^n(A_1,\dots,A_n) \\ \mid (\textbf{αν } (A_1 = 0) \textbf{ τότε } A_2 \textbf{ αλλιώς } A_3)$$

και έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει—μοναδική αναγνωσιμότητα, κ.λπ. Όπως και πριν, ο όρος A είναι **αγνός** αν οι μόνες ατομικές σταθερές που (ίσως) εμφανίζονται στον A είναι το 0 ή το 1.

Τυπική αναδρομική εξίσωση είναι η τυχαία εξίσωση όρων

$$\zeta(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n) = A,$$

στο λεξιλόγιο $(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K, \zeta_0^n, \zeta_1^n, \dots)$ όπου η ζ είναι συναρτησιακή μεταβλητή· οι $\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους ατομικές μεταβλητές· και ο A είναι αγνός όρος της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ στον οποίο δεν εμφανίζονται ατομικές μεταβλητές άλλες από τις $\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$. Η εξίσωση καλείται *ρητή* αν καμία συναρτησιακή μεταβλητή δεν εμφανίζεται στον όρο A.

Για παράδειγμα (και με απλοποιημένο συμβολισμό) η

$$\zeta(x) = \textbf{αν } (x = 0) \textbf{ τότε } 1 \textbf{ αλλιώς } 0$$

είναι ρητή εξίσωση σε κάθε μερική άλγεβρα· η

$$\zeta(x) = \textbf{αν } (x = 0) \textbf{ τότε } 0 \textbf{ αλλιώς } S(\zeta(Pd(x)))$$

είναι αναδρομική (αλλά όχι ρητή) εξίσωση της $\mathbf{N}_0$· και η

$$\zeta(x) = S(y)$$

δεν είναι αναδρομική εξίσωση, επειδή η μεταβλητή y εμφανίζεται στα δεξιά και όχι στα αριστερά.

Τελικά, **αναδρομικό πρόγραμμα** της μερικής άλγεβρας $\mathbf{M}$ είναι το τυχαίο σύστημα αναδρομικών εξισώσεων

$$(E) \qquad \begin{array}{lrcl} (e_0) & \zeta_0(\vec{x}_0) & = & E_0 \\ & & \vdots & \\ (e_k) & \zeta_k(\vec{x}_k) & = & E_k \end{array}$$

όπου οι συναρτησιακές μεταβλητές $\zeta_0, \dots, \zeta_k$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και είναι οι μόνες συναρτησιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στους όρους $E_0, \dots, E_k$. Οι εξισώσεις του E καλούνται (αναδρομικοί) **ορισμοί** των συναρτησιακών μεταβλητών $\zeta_0, \dots, \zeta_k$.

Η βασική ιδέα της υπολογιστικής σημασιολογίας της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ είναι ότι κάθε πρόγραμμα E αντιστοιχίζει (και υπολογίζει) μια μερική συνάρτηση

$$\overline{\zeta}_i : M^{k_i} \rightharpoonup M \quad (\text{αν } \mathrm{arity}(\zeta_i) = k_i)$$

σε κάθε σύμβολο ζ_i που ορίζεται απ' αυτό, έτσι που οι $\overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k$ το *ικανοποιούν*, δηλαδή

$$(\mathbf{M}, \overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k) \models \zeta_i(\vec{x}_i) = E_i \quad (i = 0, \dots, k).$$

Πριν ορίσουμε αυστηρά την αντιστοιχία

$$E \mapsto (\overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k)$$

θεωρούμε μερικά παραδείγματα.

Ο ορισμός

$$(E_1) \qquad \zeta(x, y) = S(y)$$

είναι από μόνος του πρόγραμμα της $\mathbf{N}_0$, που ορίζει (ρητά) τη διμελή συναρτησιακή μεταβλητή ζ. Η σημασιολογία, προφανώς θα πρέπει να μας δώσει

$$\overline{\zeta}(x,y) = \mathbf{val}_{\mathbf{N}_0}(S(y)) = y+1.$$

Η εξίσωση

$$(E_2) \qquad \zeta(y,\vec{x}) = \text{αν } (g(y,\vec{x})=0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } \zeta(S(y),x)$$

είναι πρόγραμμα της $(\mathbf{N}_0, g)$ όπου $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$, και υπάρχουν παραδείγματα g για τις οποίες η εξίσωση (E_2) μπορεί να έχει πολλές λύσεις, Άσκηση x1C.10· όμως για κάθε g, υπάρχει ελάχιστη λύση της (E_2) από την Πρόταση 1C.8, η

$$\overline{\zeta}(y,\vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i,\vec{x})=0],$$

και αυτή είναι η λύση $\overline{\zeta}$ που θα αντιστοιχίσει στο σύμβολο ζ η υπολογιστική σημασιολογία της $\mathsf{R}(\mathbf{N}_0, g)$.

Τελικά, θεωρούμε και το εξής τετριμμένο παράδειγμα προγράμματος, με το μοναδικό ορισμό

$$(E_3) \qquad \zeta(x) = \zeta(x).$$

Η εξίσωση (E_3) ικανοποιείται από όλες τις μερικές συναρτήσεις· η υπολογιστική σημασιολογία θα αποδώσει την κενή μερική συνάρτηση

$$\overline{\zeta}(x) = \varepsilon(x) = \bot,$$

δηλαδή πάλι την ελάχιστη λύση της (E_3), όπως και στο παράδειγμα (E_2).

Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά, προχωρούμε στον αυστηρό ορισμό της υπολογιστικής σημασιολογίας της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$. Η βασική ιδέα είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε αναδρομικό πρόγραμμα E και κάθε μεταβλητή ζ_i του E μια **μηχανή**, που να υπολογίζει κάποια μερική συνάρτηση $\overline{\zeta}_i$, και πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι εννοούμε με «μηχανή». Θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό σε δύο στάδια.

2B.2. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Σύστημα μεταβάσεων** (transition system) είναι η τυχαία τριάδα

$$\mathcal{T} = (S, \to, T),$$

όπου:

(a) Το S είναι μη-κενό σύνολο, οι *καταστάσεις* (states) του $\mathcal{T}$.
(b) Το $\to$ είναι μια διμελής *σχέση μετάβασης* (transition relation) στο S.
(c) Το $T \subseteq S$ είναι το σύνολο των *τερματικών* (terminal) καταστάσεων, και για κάθε τερματική κατάσταση,

$$(48) \qquad s \in T \Longrightarrow (\forall s')[s \not\to s'].$$

Μια κατάσταση που ικανοποιεί την (48) αλλά δεν είναι τερματική καλείται *άγονη*. Έπεται ότι οι καταστάσεις ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες: τις τερματικές, τις άγονες, και τις *γόνιμες*, δηλαδή αυτές που έχουν τουλάχιστον μία "επόμενη" κατάσταση. Το $\mathcal{T}$ είναι **αιτιοκρατικό** (ντετερμινιστικό, deterministic), αν κάθε κατάσταση s έχει το πολύ μία επόμενη, δηλαδή

$$[s \to s' \ \& \ s \to s''] \Longrightarrow s' = s''. \tag{49}$$

Για παράδειγμα, έστω

$$m \to_1 n \iff m > n, \qquad m \to_2 n \iff m = n + 1 \cdot \tag{50}$$

το σύστημα $(\mathbb{N}, \to_1, \{0\})$ είναι αναιτιοκρατικό, ενώ το σύστημα $(\mathbb{N}, \to_2, \{0\})$ είναι αιτιοκρατικό.

2B.3. **Υπολογισμοί.** *Μερικός υπολογισμός* του συστήματος μεταβάσεων $\mathcal{T}$ είναι κάθε πεπερασμένο *μονοπάτι* (ακολουθία)

$$Y = (s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_n) \tag{51}$$

στο *γράφημα* $(S, \to)$· ο Y είναι *τερματικός* αν η τελευταία κατάσταση s_n είναι τερματική, και *άγονος* αν η s_n είναι άγονη. *Άπειρος* (αποκλίνων, divergent) υπολογισμός είναι κάθε άπειρο μονοπάτι

$$Y = (s_0 \to s_1 \to \cdots).$$

Το *μήκος* ενός πεπερασμένου, μερικού υπολογισμού όπως στην (51) είναι $n + 1$.

Το σύστημα μετάβασης $\mathcal{T}$ *υπολογίζει* τη μερική συνάρτηση $\pi : S \rightharpoonup T$ αν, για όλα τα $s \in S$, $t \in T$,

$$\pi(s) = t \iff (\exists (s_0, \dots, s_n) \in C(\mathcal{T}))[s_0 = s \ \& \ s_n = t], \tag{52}$$

όπου

$$C(\mathcal{T}) = \text{το σύνολο των τερματικών υπολογισμών του } \mathcal{T}. \tag{53}$$

Έπεται ότι

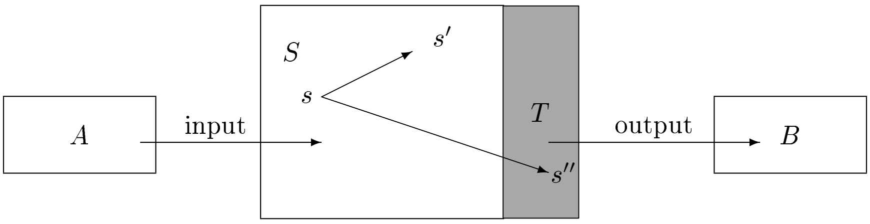
$$\pi(s)\downarrow \iff (\exists (s_0, \dots, s_n) \in C(\mathcal{T}))[s_0 = s].$$

Κάθε αιτιοκρατικό σύστημα μεταβάσεων υπολογίζει ακριβώς μια μερική συνάρτηση $\pi : S \rightharpoonup T$ που ορίζεται από την (52). Επιπλέον, αν το $\mathcal{T}$ είναι αιτιοκρατικό, τότε για κάθε κατάσταση s υπάρχει ακριβώς ένας τερματικός, άγονος ή άπειρος (*πλήρης*) υπολογισμός

$$\mathrm{comp}(s) = \mathrm{comp}_{\mathcal{T}}(s) = (s \to s_1 \to s_2 \to \cdots) \tag{54}$$

που δεν μπορεί να επεκταθεί, και που ορίζεται με την αναδρομή

$$s_0 = s,$$
$$s_{n+1} = \begin{cases} \text{η μοναδική } s' \text{ τέτοια που } s_n \to s', & \text{αν υπάρχει,} \\ \bot, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 2. Αφηρημένη μηχανή.

Για να υπολογίσουμε μια μερική συνάρτηση $f : A \rightharpoonup B$ με κάποιο σύστημα μεταβάσεων $\mathcal{T}$, πρέπει να εμπλουτίσουμε το $\mathcal{T}$ με κάποιο τρόπο εισαγωγής στοιχείων από το A και εξαγωγής τιμών στο B.

2B.4. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Αφηρημένη μηχανή** (sequential machine) με *πεδίο εισόδου* το σύνολο A και *πεδίο τιμών ή εξόδου* το σύνολο B είναι η τυχαία πεντάδα

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}(\text{input}, \text{output}) = (S, \to, T, \text{input}, \text{output}),$$

όπου το $\mathcal{T} = (S, \to, T)$ είναι σύστημα μεταβάσεων, και επιπλέον:

(d) input : $A \to S$, είναι *συνάρτηση εισόδου* (input function).

(e) output : $T \to B$, είναι *συνάρτηση εξόδου* (output function).

Η $\mathcal{T}(\text{input}, \text{output})$ υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $f : A \rightharpoonup B$ αν, για όλα τα $x \in A$, $w \in B$,

$$(55) \quad f(x) = w$$
$$\iff (\exists (s_0, \dots , s_n) \in C(S, \to, T))[s_0 = \text{input}(x) \ \& \ \text{output}(s_n) = w].$$

Η μηχανή καλείται *αιτιοκρατική* αν το $\mathcal{T}$ είναι αιτιοκρατικό, και σ' αυτή την περίπτωση υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $f : A \rightharpoonup B$ που ορίζεται από την (55) — ενώ μια αναιτιοκρατική μηχανή μπορεί να μην υπολογίζει καμία μερική συνάρτηση.

2B.5. **Αναδρομικές μηχανές**. Για κάθε πρόγραμμα E της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$, ορίζουμε ένα σύστημα μεταβάσεων $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ ως εξής:

(a) Οι καταστάσεις του $\mathcal{T}(E)$ είναι όλες οι λέξεις s της μορφής

$$\alpha_0 \ \dots \ \alpha_{m-1} : \beta_0 \ \dots \ \beta_{n-1}$$

όπου τα *στοιχεία* $\alpha_0, \dots , \alpha_{m_1}, \beta_0, \dots , \beta_{n-1}$ της s ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

- κάθε α_i είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερό ή μεταβλητή), ή κλειστός όρος, ή το ειδικό σύμβολο ?, και
- κάθε β_j είναι ατομική σταθερά (δηλαδή $\beta_j \in M$).

(pass)	$\alpha\ \underline{x :}\ \beta \ \to\ \alpha\ \underline{: x}\ \beta$	$(x \in M)$
(e-call), γενικά	$\alpha\ \underline{f_i : \vec{x}}\ \beta \ \to\ \alpha\ \underline{: f_i(\vec{x})}\ \beta$	
(e-call), για την $\mathbf{N}_0$	$\alpha\ \underline{S : x}\ \beta \to \alpha\ \underline{: x + 1}\ \beta$	
	$\alpha\ \underline{Pd : x}\ \beta \to \alpha\ \underline{: x \dot{-} 1}\ \beta$	
(i-call)	$\alpha\ \underline{\zeta_i : \vec{x}}\ \beta \ \to\ \alpha\ \underline{E_i\{\vec{\mathsf{x}}_i :\equiv \vec{x}\} :}\ \beta$	
(comp)	$\alpha\ \underline{h(A_1, \dots, A_n) :}\ \beta \ \to \alpha\ \underline{h\ A_1\ \cdots\ A_n :}\ \beta$	
(br)	$\alpha\ \underline{\text{αν } (A = 0) \text{ τότε } B \text{ αλλιώς } C :}\ \beta \ \to \alpha\ \underline{B\ C\ ?\ A :}\ \beta$	
(br0)	$\alpha\ \underline{B\ C\ ? : 0}\ \beta \ \to \alpha\ \underline{B :}\ \beta$	
(br1)	$\alpha\ \underline{B\ C\ ? : y}\ \beta \ \to \alpha\ \underline{C :}\ \beta$	$(y \neq 0)$

- Οι υπογεγραμμένες λέξεις είναι αυτές που αλλάζουν σε κάθε μετάβαση.
- $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ είναι n-άδα ατομικών σταθερών.
- Στην *εξωτερική κλήση* (e-call), $f = f_i$ είναι δοσμένη μερική συνάρτηση της $\mathbf{M}$ με $\text{arity}(f_i) = n_i = n$.
- Στην *εσωτερική κλήση* (i-call), η ζ_i είναι n-μελής συναρτησιακή μεταβλητή του προγράμματος E που ορίζεται από την εξίσωση $\zeta_i(\vec{\mathsf{x}}) = E_i$.
- Στη *μετάβαση σύνθεσης* (comp) η h είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερά ή μεταβλητή) με $\text{arity}(h) = n$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1. Μεταβάσεις του συστήματος $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας όρος A είναι κλειστός αν δεν περιέχει ατομικές μεταβλητές, και παρατηρούμε σε κάθε κατάσταση το ειδικό σύμβολο ':' έχει ακριβώς μια εμφάνιση. Οι καταστάσεις των $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ είναι οι ίδιες για όλα τα προγράμματα της μερικής άλγεβρας $\mathbf{M}$, γι' αυτό και τις καλούμε και *καταστάσεις της* $\mathbf{M}$.

Για παράδειγμα, η λέξη

$$\zeta_1^2\ 3\ \mathsf{S}(3)\ 1\ \mathsf{αν}\ \ ? : 3\ 0\ 1$$

είναι κατάσταση της $\mathbf{N}_0$, όπως καταστάσεις της $\mathbf{N}_0$ είναι και οι

$$\mathsf{Pd}\ 1\ 3\ \zeta_1^2(\mathsf{S}(2)) : \qquad : 0\ 23$$

ή ακόμη και η απλούστατη

$$:$$

(b) Οι τερματικές καταστάσεις του $\mathcal{T}(E)$ είναι οι λέξεις της μορφής

$$: w$$

δηλαδή αυτές που δεν έχουν σύμβολα στα αριστερά του ':' και μόνο μία σταθερά στα δεξιά. Όλες οι μηχανές που θα στηρίζονται στο $\mathcal{T}(E)$ θα έχουν την κοινή συνάρτηση εξόδου που απλά αποδίδει αυτό τον αριθμό,

$$\text{output}(: w) = w.$$

(c) Η σχέση μετάβασης του $\mathcal{T}(E)$ ορίζεται σε επτά περιπτώσεις από τον Πίνακα Μεταβάσεων 1, δηλαδή η $s \to s'$ ισχύει αν είναι ειδική περίπτωση κάποιας γραμμής του Πίνακα. Παρατηρούμε ότι οι μεταβάσεις (e-call) είναι οι μόνες που «καλούν» τα δοσμένα της $\mathbf{M}$, και έτσι εξαρτώνται από την $\mathbf{M}$, ενώ οι μεταβάσεις (i-call) είναι οι μόνες που εξαρτώνται από το συγκεκριμένο πρόγραμμα E.

Το σύστημα $\mathcal{T}(E)$ είναι προφανώς αιτιοκρατικό.

Για κάθε n-μελή συναρτησιακή μεταβλητή του E, η **αναδρομική μηχανή** $\mathcal{T}(E, \zeta)$ παράγεται από το σύστημα μεταβάσεων $\mathcal{T}(E)$ με την προσθήκη της συνάρτησης εισόδου

$$\text{input}(\vec{x}) \equiv \zeta : \vec{x}$$

και υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $\overline{\zeta} = \overline{\zeta}_E : M^n \rightharpoonup M$, όπου

$$\overline{\zeta}_E(\vec{x}) = w \iff \zeta : \vec{x} \to s_1 \to \cdots \to\ : w. \tag{56}$$

Επίσης χρήσιμος είναι και ο συμβολισμός

$$\mathbf{M}, E \vdash \zeta(\vec{x}) = w \iff \overline{\zeta}_E(\vec{x}) = w \tag{57}$$

που φανερώνει την εξάρτηση της $\overline{\zeta}$ από τη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$. Στην πράξη αναφερόμαστε απλά στη μερική συνάρτηση $\overline{\zeta}$, όταν το συγκεκριμένο πρόγραμμα E και η $\mathbf{M}$ είναι προφανή από τα συμφραζόμενα.

Το **κύριο σύμβολο** του προγράμματος E είναι η συναρτησιακή μεταβλητή ζ_0 που ορίζεται στην πρώτη εξίσωση του E, και το E **υπολογίζει** την $\overline{\zeta}_0$ στην $\mathbf{M}$.

Για παράδειγμα, αν μια από τις εξισώσεις του E στην $\mathbf{N}_0$ είναι η ρητή

$$\zeta(x) = S(S(x)),$$

τότε ο υπολογισμός του $\mathcal{T}(E)$

$$\begin{aligned}\zeta : x \;\to\; S(S(x)) : \;\to\; S\;S(x) : \;\to\; S\;S\;x : \\ \to S\;S\;:\;x \to S\;:\;x+1 \to\;:\;x+2\end{aligned}$$

δείχνει ότι για κάθε x, $\overline{\zeta}(x) = x + 2$.

Για ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα, παρατηρούμε ότι η πρόσθεση ορίζεται αναδρομικά στην $\mathbf{N}_0$ από το πρόγραμμα με τη μοναδική εξίσωση

$$\zeta(i, x) = \text{αν } (i = 0) \text{ τότε } x \text{ αλλιώς } S(\zeta(\mathit{Pd}(i), x)).$$

Στο Σχήμα 3 δείχνουμε τον υπολογισμό της τιμής $\overline{\zeta}(2, 3) = 5$.

2B.6. Ορισμός. **$\mathbf{M}$-αναδρομικές μερικές συναρτήσεις, σχέσεις και σύνολα.** Η n-μελής μερική συνάρτηση $f : M^n \rightharpoonup M$ είναι **αναδρομική** (recursive) στη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ (ή **$\mathbf{M}$-αναδρομική**) αν $f = \overline{\zeta}$ για κάποιο πρόγραμμα E της $\mathbf{M}$ και κάποια συναρτησιακή μεταβλητή ζ του E, δηλαδή αν

$$f(\vec{x}) = w \iff \mathbf{M}, E \vdash \zeta(\vec{x}) = w$$

με το συμβολισμό της (57). Εφόσον η σειρά με την οποία απαριθμούμε τις εξισώσεις ενός προγράμματος δεν αλλάζει τον ορισμό των μερικών συναρτήσεων $\overline{\zeta}$, *η τυχαία μερική συνάρτηση $f : M^n \rightharpoonup M$ είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική αν και μόνον αν υπολογίζεται από κάποιο αναδρομικό πρόγραμμα της $\mathbf{M}$*, δηλαδή αν $f(\vec{x}) = \overline{\zeta}_0(\vec{x})$ με ζ_0 το κύριο σύμβολο του E, Άσκηση x2B.2. Θέτουμε

$$\mathcal{R}(\mathbf{M}) = \{f : M^n \rightharpoonup M \mid \text{η } f \text{ είναι } \mathbf{M}\text{-αναδρομική}\}.$$

Η τυχαία σχέση $P(\vec{x})$ στο M είναι **$\mathbf{M}$-αναδρομική** αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση (19) είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική, και το τυχαίο σύνολο $A \subseteq M$ είναι $\mathbf{M}$-αναδρομικό αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση (20) είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική.

Για την άλγεβρα $\mathbf{N}_0$ και τις επεκτάσεις της που μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα, θα γράφουμε

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{N}, 0, 1, S, \mathit{Pd}) = \{f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N} \mid \text{η } f \text{ είναι } \mathbf{N}_0\text{-αναδρομική}\},$$

και για κάθε σύνολο πλειομελών μερικών συναρτήσεων στο $\mathbb{N}$,

$$\text{(58)}\quad \begin{aligned}\mathcal{R}(\Psi) = \{f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N} \mid \text{η } f \text{ είναι } (\mathbf{N}_0, f_1, \dots, f_K)\text{-αναδρομική} \\ \text{για κάποιες } f_1, \dots, f_K \in \Psi\},\end{aligned}$$

έτσι που $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\emptyset)$.

Για μερικές συναρτήσεις, σχέσεις και σύνολα στους φυσικούς αριθμούς δεν αναφέρουμε ρητά την άλγεβρα $\mathbf{N}_0$, δηλαδή με «αναδρομή» εννοούμε «$\mathbf{N}_0$-αναδρομή».

$$\begin{array}{rcll}
\zeta & : & 2\ 3 & \text{(i-call)} \\
\text{αν } (2=0) \text{ τότε } 3 \text{ αλλιώς } S(\zeta(\mathit{Pd}(2),3)) & : & & \text{(br)} \\
3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(2),3))\ ?\ 2 & : & & \text{(pass)} \\
3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(2),3))\ ? & : & 2 & \text{(br1)} \\
S(\zeta(\mathit{Pd}(2),3)) & : & & \text{(comp)} \\
S\ \zeta(\mathit{Pd}(2),3) & : & & \text{(comp)} \\
S\ \zeta\ \mathit{Pd}(2)\ 3 & : & & \text{(pass)} \\
S\ \zeta\ \mathit{Pd}(2) & : & 3 & \text{(comp)} \\
S\ \zeta\ \mathit{Pd}\ 2 & : & 3 & \text{(pass)} \\
S\ \zeta\ \mathit{Pd} & : & 2\ 3 & \text{(Pd1)} \\
S\ \zeta & : & 1\ 3 & \text{(i-call)} \\
S \text{ αν } (1=0) \text{ τότε } 3 \text{ αλλιώς } S(\zeta(\mathit{Pd}(1),3)) & : & & \text{(br)} \\
S\ 3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(1),3))\ ?\ 1 & : & & \text{(pass)} \\
S\ 3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(1),3))\ ? & : & 1 & \text{(br1)} \\
S\ S(\zeta(\mathit{Pd}(1),3)) & : & & \text{(comp)} \\
S\ S\ \zeta(\mathit{Pd}(1),3) & : & & \text{(comp)} \\
S\ S\ \zeta\ \mathit{Pd}(1)\ 3 & : & & \text{(pass)} \\
S\ S\ \zeta\ \mathit{Pd}(1) & : & 3 & \text{(comp)} \\
S\ S\ \zeta\ \mathit{Pd}\ 1 & : & 3 & \text{(pass)} \\
S\ S\ \zeta\ \mathit{Pd} & : & 1\ 3 & \text{(Pd1)} \\
S\ S\ \zeta & : & 0\ 3 & \text{(i-call)} \\
S\ S \text{ αν } (0=0) \text{ τότε } 3 \text{ αλλιώς } S(\zeta(\mathit{Pd}(0),3)) & : & & \text{(br)} \\
S\ S\ 3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(0),3))\ ?\ 0 & : & & \text{(pass)} \\
S\ S\ 3\ S(\zeta(\mathit{Pd}(0),3))\ ? & : & 0 & \text{(br0)} \\
S\ S\ 3 & : & & \text{(pass)} \\
S\ S & : & 3 & \text{(S)} \\
S & : & 4 & \text{(S)} \\
 & : & 5 &
\end{array}$$

ΣΧΗΜΑ 3. Ο υπολογισμός του $2+3$ από το πρόγραμμα $\zeta(i,x) = \text{αν } (i=0) \text{ τότε } x \text{ αλλιώς } S(\zeta(\mathit{Pd}(i),x))$.

2B. Ασκήσεις

x2B.1. Τι μερικούς υπολογισμούς έχουν τα συστήματα μεταβάσεων (50), και ποιες μερικές συναρτήσεις υπολογίζουν;

x2B.2. Δείξτε ότι η τυχαία μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική αν και μόνον αν υπολογίζεται από κάποιο αναδρομικό πρόγραμμα της $\mathbf{M}$.

x2B.3. Για τα τρία αναδρομικά προγράμματα στην $\mathbf{N}_0$:

$$(E_1) \qquad \zeta(x) = S(\zeta(x))$$

$$(E_2) \qquad \begin{aligned} \zeta(x) &= \zeta(\eta(x)) \\ \eta(x) &= x, \end{aligned}$$

$$(E_3) \qquad \begin{aligned} \zeta(x,y) &= \zeta_1(\zeta(x,y),y). \\ \zeta_1(x,y) &= x, \end{aligned}$$

(1) Ποιες μερικές συναρτήσεις τα ικανοποιούν;

(2) Ποιες μερικές συναρτήσεις υπολογίζουν, και σε τι διαφέρουν οι υπολογισμοί τους;

x2B.4*. (1) Δείξτε ότι για κάθε πρόγραμμα E σε μια *ολική* άλγεβρα $\mathbf{M}$, και κάθε n-μελή συναρτησιακή μεταβλητή ζ που εμφανίζεται στο E, δεν υπάρχει άγονος υπολογισμός (2B.3) της μορφής

$$(*) \qquad \zeta : x_1, \dots, x_n \to s_1 \to \cdots \to s_m.$$

(2) Δείξτε ότι αν η $\mathbf{M}$ είναι μερική άλγεβρα, η ζ είναι n-μελής, συναρτησιακή μεταβλητή κάποιου προγράμματος E στην $\mathbf{M}$ και ο πεπερασμένος υπολογισμός (*) είναι άγονος, τότε η τελευταία κατάστασή του είναι της μορφής

$$\alpha \ f_i : y_1, \dots, y_{n_i} \ \beta$$

όπου η f_i είναι μια από τις δοσμένες, μερικές συναρτήσεις της $\mathbf{M}$, και $f_i(y_1, \dots, y_{n_i})\uparrow$.

x2B.5. Ορίστε ένα αναδρομικό πρόγραμμα που να υπολογίζει τη συνάρτηση του Ackermann 1A.6.

x2B.6. Ορίστε ένα αναδρομικό πρόγραμμα που να υπολογίζει τη συνάρτηση $p(x,y)$ στην Άσκηση x1C.7*.

x2B.7. Ορίστε ένα αναδρομικό πρόγραμμα E στην επέκταση $(\mathbf{N}_0, g, h, \tau)$ της $\mathbf{N}_0$ που να υπολογίζει τη μερική συνάρτηση f που ορίζεται από τις g, h, τ με φωλιασμένη αναδρομή, x1B.18*.

x2B.8*. Δείξτε ότι η «εξίσωση»

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } g(x)\uparrow, \\ g(x)+1, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

δεν μπορεί να τυποποιηθεί στην R, αφού πρώτα εξηγήσετε τι πρέπει να αποδειχτεί.

x2B.9. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαραδείγματα για τις εξής δύο προτάσεις:

(a) Για κάθε μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και κάθε $x_0 \in M$, η σταθερή, μονομελής συνάρτηση $f(x) = x_0$ είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική.

(b) Για κάθε αριθμό $x_0 \in \mathbb{N}$, η η σταθερή, μονομελής συνάρτηση $f(x) = x_0$ στους φυσικούς είναι αναδρομική.

2B.7. Ορισμος. (a) Το τυχαίο σύνολο $X \subseteq M$ είναι *κλειστό για τα δοσμένα* της μερικής άλγεβρας $\mathbf{M}$ ή **$\mathbf{M}$-κλειστό** αν $0, 1 \in X$, και

$$[x_1, \dots, x_{n_i} \in X \text{ και } f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = w] \Longrightarrow w \in X, \qquad (i = 1, \dots, K).$$

(b) Ορίζουμε αναδρομικά

$$\overline{A}^{(0)} = A \cup \{0, 1\},$$

$$\overline{A}^{(k+1)} = \overline{A}^{(k)} \cup \{f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \mid x_1, \dots, x_{n_i} \in \overline{A}^{(k)}, i = 1, \dots, K\}.$$

Η ένωση $\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{A}^{(k)}$ είναι το σύνολο που **παράγεται** από το A στην $\mathbf{M}$.

x2B.10. Δείξτε ότι για κάθε μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και $A \subseteq M$, το $\overline{A}$ είναι το ελάχιστο $\mathbf{M}$-κλειστό υποσύνολο του M που περιέχει το A, δηλαδή: $A \subseteq \overline{A}$, το $\overline{A}$ είναι $\mathbf{M}$-κλειστό, και για κάθε $X \subseteq M$, αν $A \subseteq X$ και το X είναι $\mathbf{M}$-κλειστό, τότε $\overline{A} \subseteq X$.

x2B.11*. Δείξτε ότι αν $A \subseteq M$ και η μερική συνάρτηση $f : M^n \rightharpoonup M$ είναι $\mathbf{M}$-αναδρομική, τότε το σύνολο $\overline{A}$ που παράγεται από το A είναι κλειστό για την f, δηλαδή

$$[x_1, \dots, x_n \in \overline{A}, f(x_1, \dots, x_n) = w] \Longrightarrow w \in \overline{A}.$$

2C. Εγκυρότητα και ελάχιστες λύσεις

Στα επόμενα δύο, θεμελιακά θεωρήματα δίνουμε ένα «δομικό» χαρακτηρισμό των μερικών συναρτήσεων που υπολογίζονται από τα συστήματα μεταβάσεων $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$, που θα μας δώσουν τις βασικές ιδιότητες των $\mathbf{M}$-αναδρομικών μερικών συναρτήσεων. Στο τέλος του εδαφίου θα συλλέξουμε αυτές τις ιδιότητες για τα σχετικά σύνολα $\mathcal{R}$ και $\mathcal{R}(\Psi)$ στους φυσικούς αριθμούς.

Κλειδί για τις αποδείξεις είναι το εξής, απλό

2C.1. Λημμα. *Για κάθε μερικό υπολογισμό*

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots \to \alpha_m : \beta_m$$

στο σύστημα $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ *και λέξεις* α^*, β^* *τέτοιες που η*

$$\alpha^* \ \alpha_0 : \beta_0 \ \beta^*$$

να είναι κατάσταση, ο

$$\alpha^* \ \alpha_0 : \beta_0 \ \beta^* \to \alpha^* \ \alpha_1 : \beta_1 \ \beta^*, \to \cdots \to \alpha^* \ \alpha_m : \beta_m \ \beta^*$$

είναι επίσης μερικός υπολογισμός του $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$.

Έπεται ότι αν ο

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots$$

είναι αποκλίνων υπολογισμός και η $\alpha^*\ \alpha_0 : \beta_0\ \beta^*$ *είναι κατάσταση, τότε αποκλίνων υπολογισμός είναι και ο*

$$\alpha^*\ \alpha_0 :\ \beta_0\ \beta^* \to \alpha^*\ \alpha_1 : \beta_1\ \beta^* \to \cdots$$

Αποδειξη. Με επαγωγή στο $m \geq 0$, το Λήμμα είναι τετριμμένο στη βάση $m = 0$, από την υπόθεση. Στο επαγωγικό βήμα, δεχόμαστε ότι η ακολουθία

$$\alpha^*\ \alpha_0 : \beta_0\ \beta^*\ \to \alpha^*\ \alpha_1 : \beta_1\ \beta^*\ \to \cdots \to \alpha^*\ \alpha_m : \beta_m\ \beta^*$$

είναι μερικός υπολογισμός, εξετάζουμε ξεχωριστά τις επτά περιπτώσεις που δικαιολογούν τη μετάβαση

$$\alpha_m : \beta_m \to \alpha_{m+1} : \beta_{m+1}$$

και είναι προφανές ότι η ίδια γραμμή από τον Πίνακα 1 επίσης δικαιολογεί τη μετάβαση

$$\alpha^*\ \alpha_m : \beta_m\ \beta^* \to \alpha^*\ \alpha_{m+1} : \beta_{m+1}\ \beta^*$$

Το δεύτερο συμπέρασμα συνάγεται με εφαρμογή του πρώτου στους μερικούς υπολογισμούς

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots \to \alpha_m : \beta_m \quad (m \in \mathbb{N}) \qquad \dashv$$

2C.2. Θεωρημα (**Υπολογιστική Εγκυρότητα της** $\mathsf{R}(\mathbf{M})$). *Για τυχαίο αναδρομικό πρόγραμμα* E *στην* $\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_K)$ *με συναρτησιακές μεταβλητές* $\zeta_0, \ldots, \zeta_k$, *θέτουμε*

$$\overline{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}, \overline{\zeta}_0, \ldots, \overline{\zeta}_k) = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_K, \overline{\zeta}_0, \ldots, \overline{\zeta}_k).$$

Έπεται ότι για κάθε κλειστό όρο A *στο λεξιλόγιο* $\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_K$, $\zeta_0, \ldots, \zeta_k$*:*

(a) *Αν* $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A)\uparrow$, *τότε ο υπολογισμός* $\mathrm{comp}_{\mathcal{T}}(A\ :\ )$ *του* $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ *με αρχική κατάσταση* $A :$ *είναι άπειρος ή άγονος* (άρα και αποκλίνει), *και*

(b) *αν* $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A) = w$, *τότε ο υπολογισμός* $\mathrm{comp}_{\mathcal{T}}(A :\ )$ *του* $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ *με αρχική κατάσταση* $A :$ *συγκλίνει με τερματική κατάσταση* $: w$.

Επομένως:

(c) *Οι μερικές συναρτήσεις* $\overline{\zeta}_0, \ldots, \overline{\zeta}_k$ *ικανοποιούν το σύστημα* E *στη μερική άλγεβρα* $\mathbf{M}$, *και* (ειδικότερα) *το* E *έχει λύσεις στην* $\mathbf{M}$.

Αποδειξη. Για τα (a) και (b) χρησιμοποιούμε επαγωγή στον δοσμένο, κλειστό όρο A. Θεωρούμε περιπτώσεις:

(1) Αν $A \equiv x \in M$, τότε $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A) = x$, και ο υπολογισμός

$$\begin{array}{ll} x\ : & \text{(pass)} \\ \ : x & \end{array}$$

αποδίδει τη σωστή τιμή.

(2) Αν $A \equiv f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ για κάποια δοσμένη μερική συνάρτηση f_i της $\mathbf{M}$. τότε ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ αρχίζει με τη μετάβαση

$$\begin{array}{rl}
f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) : & \quad (\mathrm{comp}) \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_{n_i} : &
\end{array}$$

Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις:

(2a) Για κάποιο j, $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j)\uparrow$, οπότε και $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A)\uparrow$. Αν το j είναι το *μέγιστο* $\leq n_i$ με αυτή την ιδιότητα, τότε (με επίκληση της επαγωγικής υπόθεσης) ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{rll}
f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) & : & \qquad\qquad (\mathrm{comp}) \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_{n_i} & : & \qquad\qquad (\text{επαγ. υπ.}) \\
& \vdots & \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_{n_i-1} & : w_{n_i} & \qquad\qquad (\text{επαγ. υπ.}) \\
& \vdots & \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_j & : w_{j+1}\ \cdots\ w_{n_i} &
\end{array}$$

Από την επαγωγική υπόθεση πάλι, ο υπολογισμός

$$\mathrm{comp}(A_j :) = A_j : \ \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots$$

είναι άπειρος, εφόσον $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j)\uparrow$, και από το Λήμμα 2C.1, άπειρος είναι και ο υπολογισμός

$$f_i\ A_1\ \ldots\ A_{j-1}\ A_j : w_{j+1}\ \cdots\ w_{n_i} \to f_i\ A_1\ \ldots\ A_{j-1}\ \alpha_1 : \beta_1\ w_{j+1}\ \cdots\ w_{n_i} \to \cdots$$

που συνεπάγεται ότι ο $\mathrm{comp}(A :)$ είναι άπειρος.

(2b) Υπάρχουν στοιχεία $w_1, \ldots, w_{n_i}$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j) = w_j$ για $j = 1, \ldots, n_i$, αλλά $f_i(w_1, \ldots, w_{n_i})\uparrow$. Σ' αυτή την περίπτωση, από την επαγωγική υπόθεση και με επίκληση πάλι του Λήμματος 2C.1 ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{rll}
f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) & : & \qquad\qquad (\mathrm{comp}) \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_{n_i} & : & \qquad\qquad (\text{επαγ. υπ.}) \\
& \vdots & \\
f_i\ A_1\ \ldots\ A_{n_i-1} & : w_{n_i} & \qquad\qquad (\text{επαγ. υπ.}) \\
& \vdots & \\
f_i & : w_1\ w_2\ \cdots\ w_{n_i} &
\end{array}$$

και εδώ ο υπολογισμός σταματά (άγονα) εφόσον $f_i(w_1, \ldots, w_{n_i})\uparrow$.

(2c) $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(f_i(A_1, \dots, A_{n_i})) = w$, έτσι που υπάρχουν στοιχεία $w_1, \dots, w_{n_i}$ στο M με $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j) = w_j$ για $j = 1, \dots, n_i$ και $f_i(w_1, \dots, w_{n_i}) = w$. Από την επαγωγική υπόθεση και με επίκληση του Λήμματος 2C.1, ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ τώρα είναι ο εξής:

$$\begin{array}{rll}
f_i(A_1, \dots, A_{n_i}) \ : & & \text{(comp)} \\
f_i \ A_1 \ \dots \ A_{n_i} \ : & & \text{(επαγ. υπ.)} \\
\vdots & & \\
f_i \ A_1 \ \dots \ A_{n_i - 1} \ : & w_{n_i} & \text{(επαγ. υπ.)} \\
\vdots & & \\
f_i \ : & w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_{n_i} & \\
: & f_i(w_1, \dots, w_{n_i}) &
\end{array}$$

που είναι το ζητούμενο.

(3) Αν $A \equiv \zeta_i(A_1, \dots, A_{n_i})$ για κάποια n-μελή συναρτησιακή μεταβλητή ζ_i του E, τότε ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ αρχίζει με τη μετάβαση

$$\begin{array}{rl}
\zeta_i(A_1, \dots, A_{n_i}) \ : & \text{(comp)} \\
\zeta_i \ A_1 \ \dots \ A_{n_i} \ : &
\end{array}$$

Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις όπως και στην (2):

(3a) Για κάποιο j, $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j)\uparrow$, οπότε και $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A)\uparrow$.

(3b) Υπάρχουν στοιχεία $w_1, \dots, w_n$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j) = w_j$ για $j = 1, \dots, n$, αλλά $\overline{\zeta}_i(w_1, \dots, w_n)\uparrow$.

(3c) $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(\zeta_i(A_1, \dots, A_n)) = w$, που σημαίνει ότι υπάρχουν $w_1, \dots, w_n$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A_j) = w_j$ για $j = 1, \dots, n$ και $\overline{\zeta}_i(w_1, \dots, w_n) = w$.

Για την (3a) η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν της (2a). Για τις (3b) και (3c), οι αποδείξεις είναι μικρές παραλλαγές αυτών των (2b) και (2c) που στηρίζονται στον ορισμό της $\overline{\zeta}_i$. Συγκεκριμένα για την (3c), από την επαγωγική υπόθεση και με επίκληση του Λήμματος 2C.1, ο υπολογισμός

$\mathrm{comp}(A :)$ είναι ο εξής:

$$\begin{array}{rll}
\zeta_i(A_1,\dots,A_n) & : & \qquad\qquad\qquad \text{(comp)}\\
\zeta_i\ A_1\ \dots\ A_n & : & \qquad\qquad\qquad \text{(επαγ. υπ.)}\\
& \vdots & \\
\zeta_i\ A_1\ \dots\ A_{n-1} & : w_n & \qquad\qquad \text{(επαγ. υπ.)}\\
& \vdots & \\
\zeta_i & : w_1\ w_2\ \cdots\ w_n & \text{(ορισμός της } \overline{\zeta}_i\text{)}\\
& \vdots & \\
& : \overline{\zeta}_i(w_1,\dots,w_n) &
\end{array}$$

που είναι το ζητούμενο.

(c) Από τον ορισμό της αναδρομικής μηχανής,

$$\begin{aligned}
\overline{\zeta}_i(\vec{x}) = w \iff & \text{ υπάρχει τερματικός υπολογισμός}\\
& E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{x}\} : \ \to s_1 \to \cdots \to \ : w,
\end{aligned}$$

επειδή ο υπολογισμός της $\overline{\zeta}_i(\vec{x})$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{rl}
\zeta_i & : \vec{x} \quad \text{(i-call)}\\
E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{x}\} & :
\end{array}$$

Τα (a) και (b) τώρα συνεπάγονται ότι

$$E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{x}\} : \ \to s_1 \to \cdots \to \ : w \iff \mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{x}\}) = w,$$

έτσι που

$$\overline{\zeta}_i(\vec{x}) = w \iff \mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{x}\}) = w$$

που είναι το ζητούμενο. ⊣

2C.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το σύνολο των* $\mathbf{M}$*-αναδρομικών μερικών συναρτήσεων περιλαμβάνει τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις* $f_1,\dots,f_K$ *της* $\mathbf{M}$*, τις προβολές*

$$P_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i \quad (i = 1,\dots,n)$$

και τις σταθερές $C_0(\vec{x}) = 0$ *και* $C_1(\vec{x}) = 1$*, και είναι κλειστό για σύνθεση και διακλάδωση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις, παρατηρούμε ότι για το πρόγραμμα

$$(E_{f_i}) \qquad\qquad \zeta(x_1,\dots,x_{n_i}) = f_i(x_1,\dots,x_{n_i})$$

προφανώς, $\overline{\zeta}(\vec{x}_i) = f(\vec{x}_i)$, εφόσον η $\overline{\zeta}$ ικανοποιεί το E_{f_i}. Για τις προβολές και τις σταθερές συναρτήσεις 0 και 1 χρησιμοποιούμε τα προφανή προγράμματα με μία μόνο εξίσωση,

$$\zeta(\vec{x}) = x_i, \qquad \zeta(\vec{x}) = 0, \qquad \zeta(\vec{x}) = 1.$$

Για τη διακλάδωση, η υπόθεση μας δίνει προγράμματα E_c, E_g και E_h της $\mathbf{M}$ και συγκεκριμένες συναρτησιακές μεταβλητές c, g και h σ' αυτά τα προγράμματα, και πρέπει να κατασκευάσουμε ένα νέο πρόγραμμα E που να ορίζει κάποια «φρέσκια» μεταβλητή ζ, έτσι που

$$\overline{\zeta}_E(\vec{x}) = \text{αν } (\overline{c}_{E_c}(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } \overline{g}_{E_g}(\vec{x}) \text{ αλλιώς } \overline{h}_{E_h}(\vec{x}),$$

όπου οι δείκτες φανερώνουν τα προγράμματα που υπολογίζουν τις $\overline{c}_{E_c}$ $\overline{g}_{E_g}$ και $\overline{h}_{E_h}$. Κάνοντας μερικές αλφαβητικές αλλαγές στις συναρτησιακές μεταβλητές των E_c, E_g, E_h, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτά τα προγράμματα δεν έχουν κοινές συναρτησιακές μεταβλητές, και θέτουμε

$$E = E_c + E_g + E_h + \{\zeta(\vec{x}) = \text{αν } (c(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } g(\vec{x}) \text{ αλλιώς } h(\vec{x})\},$$

όπου με "+" εννοούμε τη συλλογή όλων των ορισμών στα δοσμένα προγράμματα. Το E είναι πρόγραμμα, εφόσον κάθε συναρτησιακή μεταβλητή ορίζεται ακριβώς μια φορά. Παρατηρούμε ότι

$$\overline{c}_E(\vec{x}) = \overline{c}_{E_c}(\vec{x}),$$

απλά επειδή κάθε υπολογισμός

$$\operatorname{comp}_{E_c}(c : \vec{x}) = c : \vec{x} \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots$$

του E_c είναι και υπολογισμός του E, και επομένως (από την αιτιοκρατία των προγραμμάτων) είναι ο μόνος υπολογισμός στο E που αρχίζει με την κατάσταση $c : \vec{x}$, δηλαδή

$$\operatorname{comp}_{E_c}(c : \vec{x}) = \operatorname{comp}_E(c : \vec{x})\cdot$$

άρα $\overline{c}_E = \overline{c}_{E_c}$, και το ίδιο, βέβαια, ισχύει και για τα σύμβολα g και h. Τελικά, από το Θεώρημα 2C.2, η $\overline{\zeta}_E$ ικανοποιεί την εξίσωση που την ορίζει στο E, και έτσι

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}(\vec{x}) &= \text{αν } (\overline{c}_E(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } \overline{g}_E(\vec{x}) \text{ αλλιώς } \overline{h}_E(\vec{x})\\ &= \text{αν } (\overline{c}_{E_c}(\vec{x}) = 0) \text{ τότε } \overline{g}_{E_g}(\vec{x}) \text{ αλλιώς } \overline{h}_{E_h}(\vec{x}).\end{aligned}$$

Η απόδειξη για τη σύνθεση είναι παρόμοια, Άσκηση x2C.1. ⊣

2C.4. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε μερική άλγεβρα* $\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \dots, f_K)$ *και τυχαίες* $g : M^n \rightharpoonup M$, $f : M^m \rightharpoonup M$,

$$[g \in \mathcal{R}(\mathbf{M}) \ \&\ f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}, g)] \Longrightarrow f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}),$$

όπου $(\mathbf{M}, g) = (M, 0, 1, f_1, \dots, f_K, g)$ *είναι η επέκταση της* $\mathbf{M}$ *με την* g.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άσκηση x2C.2. ⊣

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τις «κανονικές» λύσεις ενός προγράμματος E που υπολογίζονται από την αναδρομική μηχανή:

2C.5. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Ελαχίστων Σταθερών Σημείων**). *Για κάθε πρόγραμμα E στη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ με συναρτησιακές μεταβλητές $\zeta_0, \dots, \zeta_k$, οι μερικές συναρτήσεις $\overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k$ που υπολογίζονται από το $\mathcal{T}(E)$ είναι οι $\sqsubseteq$-ελάχιστες μερικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις του E.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι $\overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k$ ικανοποιούν το σύστημα E από το Θεώρημα 2C.2, άρα αρκεί να δείξουμε ότι *αν οι τυχαίες $\zeta'_0, \dots, \zeta'_k$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του E, τότε*

$$\overline{\zeta}_i(\vec{x}) = w \Longrightarrow \zeta'_i(\vec{x}) = w \quad (i = 0, \dots, k).$$

Υποθέτουμε ότι οι $\zeta'_0, \dots, \zeta'_k$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του E, και θεωρούμε τις δομές

$$\overline{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}, \overline{\zeta}_0, \dots, \overline{\zeta}_k), \qquad \mathbf{M}' = (\mathbf{M}, \zeta'_0, \dots, \zeta'_k).$$

Από το Θεώρημα 2C.2, ξέρουμε ότι για κάθε κλειστό όρο A στο λεξιλόγιο $(f_1, \dots, f_K, \zeta_0, \dots, \zeta_k)$, αν $\mathbf{val}_{\overline{\mathbf{M}}}(A) = w$, τότε ο υπολογισμός $\mathrm{comp}(A :)$ της $\mathcal{T}(E)$ είναι τερματικός με τελευταία κατάσταση την $: w$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο m, ότι για κάθε A και για κάθε w,

(59) αν $A : \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots \alpha_{m-1} : \beta_{m-1} \to \ : w$, τότε $\mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(A) = w$.

Στην ειδική περίπτωση $A \equiv \zeta_i(x_1, \dots, x_n)$, αυτό αποδίδει

$$\overline{\zeta}_i(\vec{x}) = w \Longrightarrow \mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(\zeta_i(\vec{x})) = w \Longrightarrow \zeta'_i(\vec{x}) = w,$$

που είναι το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της (59) εξετάζουμε τη μορφή του A, και το επιχείρημα είναι τετριμμένο (όπως στην απόδειξη του 2C.2) σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την

$$\zeta_i(A_1, \dots, A_n),$$

για την οποία ο υπολογισμός έχει τη μορφή

$$\begin{array}{rl}
\zeta_i(A_1, \dots, A_n) & : \\
\zeta_i \ A_1 \ \cdots \ A_n & : \\
 & \vdots \\
\zeta_i \ A_1 \ \cdots \ A_{n-1} & : \ w_n \\
 & \vdots \\
\zeta_i & : \ w_1 \ \cdots \ w_n \\
E_i\{\vec{\mathtt{x}} :\equiv \vec{w}\} & : \\
 & \vdots \\
 & : \ w
\end{array}$$

Η επαγωγική υπόθεση τώρα συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(A_1) = w_1, \ldots, \mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(A_n) = w_n, \mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{w}\}) = w$$

επειδή οι υπολογισμοί που αντιστοιχούν σ' αυτές τις τιμές έχουν μικρότερο μήκος. Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(\zeta_i(A_1, \ldots, A_n)) &= \zeta_i'(\mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(A_1), \ldots, \mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(A_n)) \\ &= \zeta_i'(w_1, \ldots, w_n) \\ &= \mathbf{val}_{\mathbf{M}'}(E_i\{\vec{\mathsf{x}} :\equiv \vec{w}\}) = w,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία εξίσωση εκφράζει ακριβώς την υπόθεση

$$\mathbf{M}' \models \zeta_i(\vec{\mathsf{x}}) = E_i. \qquad \dashv$$

2C. Ασκήσεις

x2C.1. Δείξτε ότι η σύνθεση (10) **M**-αναδρομικών μερικών συναρτήσεων είναι **M**-αναδρομική.

x2C.2. Για κάθε μερική άλγεβρα $\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_K)$ και τυχαίες $g : M^n \rightharpoonup M$, $f : M^m \rightharpoonup M$,

$$[g \in \mathcal{R}(\mathbf{M}) \ \& \ f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}, g)] \Longrightarrow f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}),$$

όπου $(\mathbf{M}, g) = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_K, g)$ είναι η επέκταση της **M** με την g.

x2C.3. Δείξτε ότι αν οι $P(\vec{x})$ και $Q(\vec{x})$ είναι αναδρομικές σχέσεις στη μερική άλγεβρα **M**, τότε **M**-αναδρομικές είναι και οι σχέσεις

$$\begin{aligned}R_1(\vec{x}) &\iff \neg P(\vec{x}) \\ R_2(\vec{x}) &\iff P(\vec{x}) \ \& \ Q(\vec{x}), \\ R_3(\vec{x}) &\iff P(\vec{x}) \vee Q(\vec{x}).\end{aligned}$$

x2C.4. Δείξτε ότι η ένωση $A \cup B$, η τομή $A \cap B$, και η διαφορά

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

δύο **M**-αναδρομικών συνόλων είναι αναδρομικά σύνολα.

Δείξτε επίσης ότι το μονοσύνολο $\{0\}$ είναι **M**-αναδρομικό σε κάθε μερική άλγεβρα **M**, ενώ σε κάποια μερική άλγεβρα, το μονοσύνολο $\{1\}$ δεν είναι αναδρομικό.

2C.6. Ορισμος. Για κάθε $f : M \rightharpoonup M$, η **επανάληψη** $f : \mathbb{N} \times M \rightharpoonup M$ της f ορίζεται με την αναδρομή

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)).$$

x2C.5*. Δείξτε ότι αν οι $g, h : M \rightharpoonup M$ είναι **M**-αναδρομικές μερικές συναρτήσεις, τότε **M**-αναδρομική είναι και η

$$f(x) = g^m(x) \text{ όπου } m = (\mu n \geq 1)[h^n(x) = 0].$$

2D. Αναδρομικές μερικές συναρτήσεις στους φυσικούς

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό (58)

$$\mathcal{R}(\Psi) = \{f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N} \mid \text{η } f \text{ είναι } (\mathbf{N}_0, f_1, \dots, f_K)\text{-αναδρομική} \\ \text{για κάποιες } f_1, \dots, f_K \in \Psi\}$$

των μερικών συναρτήσεων που είναι αναδρομικές στο τυχαίο σύνολο Ψ πλειομελών, μερικών συναρτήσεων στους φυσικούς, και συλλέγουμε σε ένα θεώρημα τις βασικές ιδιότητες του $\mathcal{R}(\Psi)$ που συνάγονται από τα γενικά θεωρήματα στα δύο προηγούμενα εδάφια. Αυτές ισχύουν, βέβαια, και για το σύνολο

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\emptyset) = \mathcal{R}(\mathbf{N}_0)$$

των (απόλυτα) αναδρομικών, μερικών συναρτήσεων στο $\mathbb{N}$.

2D.1. Θεωρημα. *Το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ είναι πρωτογενώς κλειστό και κλειστό για ελαχιστοποίηση, έτσι που*

$$\mathcal{R}_\mu(\Psi) \subseteq \mathcal{R}(\Psi),$$

και, ιδιαίτερα, κάθε ελαχιστικά αναδρομική μερική συνάρτηση είναι αναδρομική.

Αποδειξη. Το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ περιέχει τις προβολές, τις σταθερές 0 και 1 και τις δοσμένες $S(x)$ και $Pd(x)$ επειδή κάθε $\mathcal{R}(\mathbf{N}_0, 0, 1, f_1, \dots, f_k)$ με $f_1, \dots, f_k \in \Psi$ έχει αυτές τις ιδιότητες από το Πόρισμα 2C.3.

Την πρωτογενή κλειστότητα του $\mathcal{R}(\Psi)$ την αφήνουμε για άσκηση, x2D.1.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ των αναδρομικών στο Ψ μερικών συναρτήσεων είναι κλειστό για ελαχιστοποίηση, δηλαδή αν $g \in \mathcal{R}(\Psi)$ και

$$f(y, \vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i, \vec{x}) = 0],$$

τότε $f \in \mathcal{R}(\Psi)$. Από την Πρόταση 1C.8, η f είναι η ελάχιστη λύση της αναδρομικής εξίσωσης

$$f(y, \vec{x}) = \text{αν } (g(y, \vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } f(y+1, \vec{x}),$$

που (από μόνη της) είναι πρόγραμμα, άρα (από το Θεώρημα 2C.5), η f υπολογίζεται απ' αυτό το πρόγραμμα και $f \in \mathcal{R}(\Psi \cup \{g\})$· αλλά αν $g \in \mathcal{R}(\Psi)$, τότε $\mathcal{R}(\Psi \cup \{g\}) = \mathcal{R}(\Psi)$ από το 2C.4. ⊣

2D. Ασκήσεις

x2D.1. Δείξτε ότι αν οι $g(\vec{x})$ και $h(w, y, \vec{x})$ είναι αναδρομικές στο Ψ και η $f(y, \vec{x})$ ορίζεται απ' αυτές με την πρωτογενή αναδρομή (11), τότε και η $f(y, \vec{x})$ είναι αναδρομική στο Ψ.

Η ταύτιση των αναδρομικών συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς με τις $\mathbf{N}_0$-αναδρομικές συναρτήσεις υπαινίσσεται (με κάποιο τρόπο) ότι οι θεμελιακές συναρτήσεις στου φυσικούς είναι οι S και Pd. Αυτό δεν αληθεύει όταν (όπως συνηθίζεται) χρησιμοποιούμε τη **δυαδική ανάπτυξη** των φυσικών,

$$x = x_0 + x_1 2 + x_2 2^2 + \cdots + x_k 2^k \quad (x_i \leq 1),$$

οπότε η φυσική μερική άλγεβρα έχει διαφορετικά δοσμένα. Θέτουμε

$$\mathbf{N}_b = (\mathbb{N}, 0, 1, \mathrm{Parity}, \mathrm{iq}_2, \mathrm{em}_2, \mathrm{om}_2), \tag{60}$$

όπου $\mathrm{Parity}(x)$ είναι 0 ή 1 ανάλογα, αν ο x είναι άρτιος ή περιττός, και

$$\mathrm{iq}_2(x) = \mathrm{quot}(x, 2), \quad \mathrm{em}_2(x) = 2x, \quad \mathrm{om}_2(x) = 2x + 1.$$

x2D.2. Δείξτε ότι $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{N}_b)$, δηλαδή οι αναδρομικές, μερικές συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς είναι ακριβώς οι μερικές συναρτήσεις που υπολογίζονται από προγράμματα της $\mathsf{R}(\mathbf{N}_b)$.

x2D.3*. Δείξτε ότι η μοναδική ολική λύση της εξίσωσης $(*)$ στην άσκηση x1C.12* είναι αναδρομική, αλλά η $(*)$ έχει και λύσεις που δεν είναι αναδρομικές μερικές συναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΠΟΚΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Από τα κεντρικά αποτελέσματα σ' αυτό το Κεφάλαιο πηγάζουν οι σημαντικότερες εφαρμογές της θεωρίας αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς που θα εκθέσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο. Εδώ θα θέσουμε τις απαραίτητες μαθηματικές βάσεις γι' αυτές τις εφαρμογές, και θα θεμελιώσουμε τη σχέση ανάμεσα στην «αναδρομή» και την «υπολογισιμότητα» — το περίφημο *Αίτημα Church-Turing.*

3A. Κανονική μορφή και απαρίθμηση

Σ' αυτό το εδάφιο θα δείξουμε το εξής βασικό θεώρημα, που είναι θεμελιακό για το θέμα μας.

3A.1. **Θεώρημα Κανονικής Μορφής και Απαρίθμησης** [Kleene]. *Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $U(y)$, και πρωτογενώς αναδρομικές σχέσεις $T_n(e, x_1, \dots, x_n, y)$ $(n \geq 1)$ και συναρτήσεις $S^m_n(e, z_1, \dots, z_m)$ $(n, m \geq 1)$, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:*

(a) *Η τυχαία, n-μελής μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ στους φυσικούς είναι αναδρομική αν και μόνον αν υπάρχει κάποιος αριθμός e τέτοιος που*

$$f(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)) \quad (\vec{x} = x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}). \tag{61}$$

(b) *Για όλα τα e, y, $\vec{z} = z_1, \dots, z_m$ και $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$,*

$$U(\mu y T_{m+n}(e, \vec{z}, \vec{x}, y)) = U(\mu y T_n(S^m_n(e, \vec{z}), \vec{x}, y)). \tag{62}$$

Επιπλέον, οι συναρτήσεις $S^m_n(e, \vec{z})$ είναι ένα-προς-ένα.

Από την *κανονική μορφή* (61) συνάγεται ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση «παράγεται» από πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις με (μόνο) μία βλακώδη αναζήτηση, και ειδικότερα, ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική. Επίσης, αν θέσουμε

$$\varphi^n_e(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)), \tag{63}$$

τότε η εξίσωση (61) συνεπάγεται ότι, για κάθε n, η ακολουθία

$$\varphi_0^n, \varphi_1^n, \dots ,$$

απαριθμεί όλες τις n-μελείς αναδρομικές μερικές συναρτήσεις, με τέτοιο τρόπο που η $(n+1)$-μελής μερική συνάρτηση

$$\varphi^n(e, \vec{x}) = \varphi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$$

να είναι αναδρομική. Ο αριθμός e καλείται *κωδικός* της μερικής συνάρτησης φ_e^n, και είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση έχει πολλούς κωδικούς, Άσκηση x3A.2.

Η βασική ιδέα για την απόδειξη είναι να κωδικοποιήσουμε με αριθμούς (όπως στο 1B.11) τα αναδρομικά προγράμματα της $\mathbf{N}_0$ και τους τερματικούς υπολογισμούς των αναδρομικών μηχανών, έτσι που η σχέση

$$T_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \iff \begin{array}{l} \text{ο } e \text{ είναι κωδικός κάποιου} \\ \text{αναδρομικού προγράμματος } E, \\ \text{και ο } y \text{ είναι κωδικός} \\ \text{τερματικού υπολογισμού του } E \\ \text{στην είσοδο } \zeta_0 : x_1, \dots, x_n \end{array} \tag{64}$$

να είναι πρωτογενώς αναδρομική, και να υπάρχει μια πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $U(y)$, τέτοια που αν ο y είναι κωδικός τερματικού υπολογισμού, τότε

$$U(y) = \text{η τιμή εξόδου από τον (τερματικό) υπολογισμό } y. \tag{65}$$

Απ' αυτούς τους ορισμούς συνάγεται αμέσως το (a) και διευκρινίζεται το νόημά του. Η σημασία του κάπως τεχνικότερου (b) θα εξηγηθεί στη πορεία.

Στους υπολογισμούς που πρέπει να κάνουμε θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα κωδικούς ακολουθιών (1B.11). Για την απλούστευση ορισμένων τύπων, θέτουμε

$$(u)_{i,j} = ((u)_i)_j, \quad (u)_{i,j,k} = ((u)_i)_j)_k, \text{ κ.λπ.,}$$
$$\text{first}(u) = (u)_0, \quad \text{last}(u) = (u)_{\text{lh}(u) \dot{-} 1},$$

έτσι που

$$\text{first}(\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle) = u_0 = \text{το πρώτο στοιχείο της } u_0, \dots, u_{n-1},$$
$$\text{last}(\langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle) = u_{n-1} = \text{το τελευταίο στοιχείο της } u_0, \dots, u_{n-1},$$

και

$$(\langle\langle 0,2 \rangle, \langle 1,0 \rangle\rangle)_{0,1} = 2, \ (\langle\langle 0,2 \rangle, \langle 1,0 \rangle\rangle)_{1,0} = 1.$$

Επίσης θα χρειαστούμε μερικές τεχνικές ιδιότητες των κωδικών ακολουθιών:

3A.2. ΛΗΜΜΑ. *Για την κλασική κωδικοποίηση* (1B.12), *οι εξής συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές:*

$$\text{maxseq}(n) = \max\{\langle u_0, \dots, u_{m-1}\rangle \mid m, u_0, \dots, u_{m-1} \leq n\} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} &\text{seg}(u, i, j) \\ &\quad = \begin{cases} \langle (u)_i, (u)_{i+1}, \dots, (u)_{j \mathbin{\dot{-}} 1}\rangle, & \text{αν } \text{Seq}(u) \ \& \ 0 \leq i < j \leq \text{lh}(u), \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \end{aligned} \tag{67}$$

Επιπλέον, για όλα τα u, i, j*,*

$$\text{seg}(u, i, j) \leq u,$$

και αν $i > 0$ *ή* $j < \text{lh}(u)$*, τότε* $\text{seg}(u, i, j) < u$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ στην Άσκηση x3A.1. ⊣

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 3A.1. Η σειρά ορισμών που ακολουθεί κωδικοποιεί τα βασικά σύνολα αντικειμένων που ανακύπτουν στη θεωρία της προγραμματικής γλώσσας R. Χρησιμοποιούμε την κλασική κωδικοποίηση ακολουθιών, και το συμβολισμό $[X]_A$ για τον κωδικό του αντικειμένου X· δηλαδή οι ορισμοί μας δίνουν διαδοχικά ένα-προς-ένα συναρτήσεις

$$[\ ]_A : A \rightarrowtail \mathbb{N}$$

για κάθε βασικό σύνολο A που θα κωδικοποιήσουμε. Αντί για $[\ ]_A$ θα γράφουμε $[\ ]_i$, όπου η κωδικοποίηση του συνόλου A ορίζεται στο ορισμό i, για $i = 1, \dots 6$.

1. **Σύμβολα**. Σύμφωνα με τους ορισμούς της $\mathsf{R}(\mathbf{N}_0)$ στο 2A.2, θέτουμε πρώτα

$$[\mathsf{v}_i]_1 = \langle 0, 0, i\rangle, \quad [n]_1 = \langle 0, 1, n\rangle, \quad [\mathsf{S}]_1 = \langle 1, 1, 0\rangle,$$
$$[Pd]_1 = \langle 1, 1, 1\rangle, \quad [\zeta_i^n]_1 = \langle 1, n, 2 + i\rangle,$$

και για τα υπόλοιπα οχτώ σύμβολα

$$\mathsf{αν} \quad \mathsf{τότε} \quad \mathsf{αλλιώς} \quad , \quad (\quad) \quad = \quad ?$$

χρησιμοποιούμε τους αριθμούς

$$\langle 2, 0\rangle, \dots, \langle 2, 7\rangle,$$

δηλαδή $[\mathsf{αν}\ ]_1 = \langle 2, 0\rangle$, $[\mathsf{τότε}\ ]_1 = \langle 2, 1\rangle, \dots, [?]_1 = \langle 2, 7\rangle$.

Παρατηρούμε ότι ο κωδικός του τυχαίου αριθμού n είναι μεγαλύτερος από τον n, π.χ.,

$$[1]_1 = \langle 0, 1, 1\rangle = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450\cdot$$

προφανώς δεν μας ενδιαφέρει εδώ η αποτελεσματικότητα της κωδικοποίησης.

2. Λέξεις. Για κάθε λέξη (ακολουθία)

$$\alpha \equiv \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_n$$

από σύμβολα (συμπεριλαμβανομένου και του '?'), θέτουμε

$$[\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_n]_2 = \langle [\alpha_0]_1, [\alpha_1]_1, \dots , [\alpha_n]_1 \rangle.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} [\mathsf{S}(\mathsf{v}_1)]_2 &= \langle [\mathsf{S}]_1, [(]_1, [\mathsf{v}_1]_1, [)]_1 \rangle = \langle \langle 1, 1, 0\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 0, 0, 1\rangle, \langle 2, 5\rangle\rangle, \\ [\zeta_1^2(\mathsf{v}_1, 0)]_2 &= \langle [\zeta_1^2]_1, [(]_1, [\mathsf{v}_1]_1, [,], [0]_1, [)]_1 \rangle = \cdots . \end{aligned}$$

Ειδικότερα, ο ορισμός αυτός αναθέτει κωδικούς στους *όρους* της R, που είναι λέξεις απ' αυτά τα σύμβολα.

Παρατήρηση. Οι αριθμητικές μεταβλητές v_i και οι αριθμητικές σταθερές n είναι σύμβολα, αλλά είναι και όροι μήκους 1. Έτσι έχουν δύο διαφορετικές κωδικοποιήσεις, ως σύμβολα και ως όροι, και πρέπει να προσέχουμε να μην τις συγχέουμε:

$$\begin{aligned} [\mathsf{v}_i]_1 &= \langle 0, 0, i\rangle, \quad [\mathsf{v}_i]_2 = \langle\langle 0, 0, i\rangle\rangle \\ [n]_1 &= \langle 0, 1, n\rangle, \quad [n]_2 = \langle\langle 0, 1, n\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, $[0]_1 = \langle 0, 1, 0\rangle = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, ενώ $[0]_2 = \langle 90\rangle = 2^{91}$.

3. Αναδρομικές εξισώσεις. Η τυχαία (τυπική) εξίσωση καθορίζεται από το αριστερό και το δεξιό της σκέλος, που είναι όροι· θέτουμε

$$[\zeta(\vec{\mathsf{v}}) = E]_3 = \langle [\zeta(\vec{\mathsf{v}})]_2, [E]_2\rangle.$$

4. Αναδρομικά προγράμματα. Αν $E = (e_0, \dots , e_k)$, τότε κάθε e_i είναι εξίσωση, και θέτουμε

$$[E]_4 = \langle [e_0]_3, \dots , [e_k]_3\rangle.$$

5. Καταστάσεις. Τα στοιχεία στο αριστερό σκέλος μιας κατάστασης είναι ή κλειστοί όροι ή συναρτησιακά σύμβολα ή το '?', ενώ τα στοιχεία στο δεξιό της σκέλος είναι αριθμητικές σταθερές (δηλαδή αριθμοί). Θέτουμε:

$$[\alpha_0, \dots , \alpha_{m-1} : \beta_0, \dots , \beta_{n-1}]_5 = \langle\langle [\alpha_0]', \dots , [\alpha_{m-1}]'\rangle, \langle [\beta_0]_1, \dots , [\beta_{n-1}]_1\rangle\rangle,$$

όπου

$$[\alpha_i]' = \begin{cases} [\alpha_i]_1, & \text{αν το } \alpha_i \text{ είναι συναρτησιακό σύμβολο ή το '?',} \\ [\alpha_i]_2, & \text{αλλιώς, δηλαδή αν ο } \alpha_i \text{ είναι κλειστός όρος.} \end{cases}$$

Εδώ πρέπει να προσέξουμε, επειδή οι αριθμητικές σταθερές κωδικοποιούνται ως σύμβολα στο δεξιό σκέλος και ως όροι στο αριστερό· για παράδειγμα,

$$[2 : 2]_5 = \langle\langle\langle\langle 0, 1, 2\rangle\rangle\rangle, \langle\langle 0, 1, 2\rangle\rangle\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι όταν ο u είναι κωδικός μιας κατάστασης $\alpha : \beta$, τότε ο $\mathrm{first}(u)$ είναι κωδικός του αριστερού σκέλους α, και ο $\mathrm{last}(u)$ είναι κωδικός του δεξιού σκέλους β.

Για να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση $\alpha \mapsto [\alpha]_5$ είναι ένα-προς-ένα στο σύνολο καταστάσεων, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κανένας αριθμός δεν είναι ταυτόχρονα κωδικός συναρτησιακού συμβόλου ή του '?' και επίσης κωδικός κλειστού όρου· αυτό ισχύει επειδή το πρώτο σύμβολο κάθε κλειστού όρου E είναι ένα από τα

$$\mathsf{S},\ Pd,\ n,\ \zeta_i^n,\ ($$

με κωδικό > 2, έτσι που για κάθε όρο E, $\mathrm{first}([E]_2) > 2$· ενώ αν ο u είναι κωδικός συμβόλου, τότε $\mathrm{first}(u) \leq 2$.

6. Υπολογισμοί. Για κάθε ακολουθία καταστάσεων $s = (s_0, \dots, s_k)$, θέτουμε

$$[s_0, \dots, s_k]_6 = \langle [s_0]_5, \dots, [s_k]_5 \rangle.$$

Αυτό κωδικοποιεί όλες τις ακολουθίες καταστάσεων, και ιδιαίτερα τους τερματικούς υπολογισμούς της μηχανής για οποιοδήποτε αναδρομικό πρόγραμμα.

Σ' αυτό το σημείο οι ορισμοί (64) και (65) είναι αυστηροί, και για το μέρος (a) του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση $T_n(e, \vec{x}, y)$ και η συνάρτηση $U(y)$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Το δεύτερο είναι απλό: γιατί, με προσεκτική «αποκωδικοποίηση» των ορισμών, αρκεί να θέσουμε

$$U(y) = \mathrm{last}(y)_{1,0,2} \tag{68}$$

(Άσκηση x3A.3).

Για το πρώτο, δίνουμε μια σειρά από βοηθητικούς ορισμούς πρωτογενώς αναδρομικών «συναρτήσεων και σχέσεων αποκωδικοποίησης» που καταλήγουν με το ζητούμενο. Οι περισσότερες από τις απαιτούμενες αποδείξεις πρωτογενούς αναδρομικότητας είναι απλές, και γι' αυτές που δεν είναι θα παραθέσουμε μερικά σχόλια μετά τον κατάλογο.

$$\begin{aligned}
\text{ΑρΜετ}(v) &\iff \text{ο } v \text{ είναι κωδικός κάποιας } \mathsf{v}_i \\
&\iff v = \langle 0, 0, (v)_2 \rangle \\
\text{ΑρΣταθ}(c) &\iff \text{ο } c \text{ είναι κωδικός αριθμού} \\
&\iff c = \langle 0, 1, (c)_2 \rangle \\
\text{ΣυνΜετ}(f) &\iff \text{ο } f \text{ είναι κωδικός κάποιας } \zeta_i^n \\
&\iff f = \langle 1, (f)_1, (f)_2 \rangle \ \&\ (f)_1 \geq 1 \ \&\ (f)_2 \geq 2 \\
\text{ΣυνΣταθ}(f) &\iff \text{ο } f \text{ είναι κωδικός του } \mathsf{S} \text{ ή του } Pd \\
&\iff f = [\mathsf{S}]_1 \vee f = [Pd]_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{ΣυνΣυμβ}(f) &\iff \text{ΣυνΜετ}(f) \vee \text{ΣυνΣταθ}(f)\\
\text{arity}(f) &= \text{η πλειομέλεια του συναρτησιακού συμβόλου } f\\
&\qquad \text{(αν ο } f \text{ είναι κωδικός συμβόλου)}\\
&= (f)_1\\
\text{Ορος}(u) &\iff \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου}\\
\text{ΚλΟρος}(u) &\iff \text{ο } u \text{ είναι κωδικός κλειστού όρου}\\
&\iff \text{Ορος}(u) \mathbin{\&} (\forall i < \text{lh}(u))\neg\text{ΑρΜετ}((u)_i)\\
\text{ΣυνθΟρος}(u) &\iff \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου } \zeta_i^n(A_1,\dots,A_n)\\
&\iff \text{Ορος}(u) \mathbin{\&} \text{ΣυνΜετ}(\text{first}(u))\\
\text{ΥποΟρος}(u,v) &\iff \text{ο } v \text{ είναι κωδικός υποόρου του όρου με κωδικό } u\\
&\iff \text{Ορος}(u) \mathbin{\&} \text{Ορος}(v) \mathbin{\&} (\exists i,j \le \text{lh}(u)[i<j \mathbin{\&} v = \text{seg}(u,i,j)]\\
\text{ΑπλΟρος}(u) &\iff \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου } \zeta_i^n(\mathsf{v}^1,\dots,\mathsf{v}^n)\\
&\iff \text{ΣυνθΟρος}(u) \mathbin{\&} (\forall v<u)[\text{ΥποΟρος}(u,v) \Longrightarrow \text{ΑρΜετ}(v)]\\
\text{Εξίσωση}(e) &\iff \text{ο } e \text{ είναι κωδικός αναδρομικής εξίσωσης}\\
&\iff e = \langle \text{first}(e), \text{last}(e)\rangle\\
&\qquad \mathbin{\&} \text{ΑπλΟρος}(\text{first}(e)) \mathbin{\&} \text{Ορος}(\text{last}(e))\\
&\qquad \mathbin{\&} (\forall i < \text{lh}(\text{last}(e)))[\text{ΑρΜετ}((\text{last}(e))_i)\\
&\qquad\qquad \Longrightarrow (\exists j < \text{lh}(\text{first}(e)))[(\text{last}(e))_i = (\text{first}(e))_j]]\\
\text{Προγρ}(e) &\iff \text{ο } e \text{ είναι κωδικός προγράμματος}\\
&\iff \text{Seq}(e) \mathbin{\&} \text{lh}(e) > 0 \mathbin{\&} (\forall i < \text{lh}(e))[\text{Εξίσωση}((e)_i)]\\
&\qquad \mathbin{\&} (\forall i < \text{lh}(e))(\forall j < \text{lh}((e)_{i,1})\\
&\qquad\quad [\text{ΣυνΜετ}((e)_{i,1,j}) \Longrightarrow (\exists k < \text{lh}(e))[(e)_{i,1,j} = (e)_{k,0,0}]]\\
\text{Κατ}(s) &\iff \text{ο } s \text{ είναι κωδικός κατάστασης}\\
&\iff s = \langle (s)_0, (s)_1\rangle\\
&\qquad \mathbin{\&} (\forall i < \text{lh}((s)_0)\\
&\qquad\qquad [\text{ΣυνΣυμβ}((s)_{0,i}) \vee (s)_{0,i} = [?]_1 \vee \text{ΚλΟρος}((s)_{0,i})]\\
&\qquad \mathbin{\&} (\forall j < \text{lh}((s)_1)\text{ΑρΣταθ}((s)_{1,j})\\
\text{ΤερμΚατ}(s) &\iff \text{ο } s \text{ είναι κωδικός τερματικής κατάστασης}\\
&\iff \text{Κατ}(s) \mathbin{\&} \text{lh}((s)_0) = 0 \mathbin{\&} \text{lh}((s)_1) = 1\\
\text{Αντ}(u,j,x) &=_{\text{df}} \text{το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της μεταβλητής}\\
&\qquad \text{με κωδικό } j = [\mathsf{v}_i] \text{ με τη σταθερά } x \text{ στον όρο με κωδικό } u\\
\text{ΠλΑντ}(u,v,w) &=_{\text{df}} \text{το αποτέλεσμα της αντικατάστασης}\\
&\qquad \text{των μεταβλητών με κωδικούς } (v)_0,\dots,\text{last}(v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{με τις σταθερές } (w)_0, \dots, \mathrm{last}(w) \\
& \text{στον όρο με κωδικό } u \\
\text{ΜετΑπλΟρου}(u) &=_{\mathrm{df}} \langle [\mathsf{v}_{i_1}]_1, \dots, [\mathsf{v}_{i_n}]_1 \rangle \quad (\text{αν } u = [\zeta^n(\mathsf{v}_{i_1}, \dots, \mathsf{v}_{i_n})]_2) \\
\text{Μετάβαση}(e, s, s') &\iff \text{Προγρ}(e) \ \&\ \text{Κατ}(s) \ \&\ \text{Κατ}(s') \\
& \quad \&\ s \to s' \text{ στο } \mathcal{T}(E) \text{ για } e = [E]_4 \\
\text{Υπολ}(e, y) &\iff \text{ο } y \text{ είναι κωδικός τερματικού υπολογισμού} \\
& \quad \text{στο } \mathcal{T}(E) \text{ για } e = [E]_4 \\
&\iff \text{Προγρ}(e) \ \&\ \mathrm{Seq}(y) \ \&\ \mathrm{lh}(y) > 1 \\
& \quad \&\ (\forall i < \mathrm{lh}(y) \dot{-} 1)\text{Μετάβαση}(e, (y)_i, (y)_{i+1}) \\
& \quad \&\ \text{ΤερμΚατ}(\mathrm{last}(y)) \\
T_n(e, \vec{x}, y) &\iff \text{Προγρ}(e) \ \&\ \text{Υπολ}(e, y) \\
& \quad \&\ \mathrm{first}(\mathrm{first}(y)) = \langle \mathrm{first}(\mathrm{first}(\mathrm{first}(e))) \rangle \\
& \quad \&\ \mathrm{last}(\mathrm{first}(y)) = [x_1 x_2 \cdots x_n]_2
\end{aligned}
$$

Η πρώτη μη-προφανής απόδειξη σ' αυτό τον κατάλογο είναι η πρωτογενής αναδρομικότητα της σχέσης Ορος(u), που είναι και η πιο δύσκολη.

Λήμμα. *Η σχέση*

$$
\text{Ορος}(u) \iff \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου} \tag{69}
$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Από τον ορισμό τους, οι όροι είναι τεσσάρων μορφών, δηλαδή

$$
\text{Ορος}(u) \iff \text{Ορος}_1(u) \vee \text{Ορος}_2(u) \vee \text{Ορος}_3(u) \vee \text{Ορος}_4(u) \tag{70}
$$

σε αντιστοιχία με αυτές τις περιπτώσεις, όπου

$$
\begin{aligned}
\text{Ορος}_1(u) &\iff u = [\mathsf{v}_i]_2 \text{ για κάποια μεταβλητή } \mathsf{v}_i \\
&\iff u = \langle \langle 0, 0, (u)_{0,2} \rangle \rangle, \\
\text{Ορος}_2(u) &\iff u = [n]_2 \text{ για κάποιον αριθμό } n \\
&\iff u = \langle \langle 0, 1, (u)_{0,2} \rangle \rangle.
\end{aligned}
$$

Στις πιο δύσκολες τελευταίες δύο περιπτώσεις, το αν μια λέξη είναι όρος εξαρτάται από το αν μερικά (γνήσια) τμήματά της είναι όροι, και αυτό μας δίνει δύο ισοδυναμίες που πρέπει να ικανοποιούνται από τους κωδικούς. Για την περίπτωση της διακλάδωσης, υπολογίζουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{Ορος}_4(u) &\iff u = [(\text{αν } (A = 0) \text{ τότε } B \text{ αλλιώς } C)]_2 \text{ για όρους } A, B, C \\
&\iff (\exists\, a, b, c < u)[\text{Ορος}(a) \ \&\ \text{Ορος}(b) \ \&\ \text{Ορος}(c) \\
& \qquad \&\ u = [(\textsf{αν } (]_2 * a * [= 0)\textsf{τότε }]_2 * b * [\textsf{αλλιώς }]_2 * c * [)]_2].
\end{aligned}
$$

Οι ανισότητες $a, b, c < u$ δικαιολογούνται επειδή αν ο u είναι κωδικός ενός όρου

$$E \equiv (\text{αν } (A = 0) \text{ τότε } B \text{ αλλιώς } C),$$

τότε οι όροι A, B, C είναι γνήσια τμήματα του E, και έτσι οι κωδικοί τους είναι μικρότεροι του u από τη βασική ιδιότητα της συνάρτησης $\mathrm{seg}(u, i, j)$ στο Λήμμα 3A.2.

Τελικά θεωρούμε την τελευταία περίπτωση, που είναι δυσκολότερη επειδή ο «σύνθετος» όρος με κωδικό u παράγεται από n υποόρους, για διάφορα n:

$$\begin{aligned}\text{Ορος}_3(u) \iff{} & u = [f(A_0, \dots, A_{n-1})]_2 \\ & \qquad\qquad \text{για όρους } A_0, \dots, A_{n-1} \text{ και } n\text{-μελές σύμβολο } f,\end{aligned}$$

όπου με «σύμβολο» εννοούμε κάποια συναρτησιακή μεταβλητή ή μία από τις σταθερές S, Pd. Αν ο u ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον κωδικό του συμβόλου f, $[f]_1 = (u)_0$ και την πλειομέλειά του $n = (u)_{0,1}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι κωδικοί των όρων $A_0, \dots, A_{n-1}$ είναι μικρότεροι του u, εφόσον αυτοί οι όροι είναι γνήσια τμήματα του $f(A_0, \dots, A_{n-1})$. Έτσι η ισοδυναμία που ικανοποιεί η συνθήκη $\text{Ορος}_3(u)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\text{Ορος}_3(u) \iff{} & \mathrm{Seq}(u) \ \&\ \text{ΣυνΣυμβ}((u)_0) \\ & \qquad \&\ (\exists a_0, \dots, a_{(u)_{0,1} \dot{-} 1})[(\forall i < (u)_{0,1})\text{Ορος}(a_i) \\ & \qquad\qquad \&\ u = \langle (u)_0 \rangle * [(]_2 * a_0 * [,]_2 * \cdots * a_{(u)_{0,1} \dot{-} 1} * [)]_2].\end{aligned}$$

Αυτό θυμίζει πολύ την ισοδυναμία που ικανοποιεί η συνθήκη $\text{Ορος}_4(u)$, εκτός από τις τελίτσες « ... » που πρέπει βέβαια να τις αποφύγουμε, και γι' αυτό το σκοπό ορίζουμε τις εξής, βοηθητικές (πρωτογενώς αναδρομικές) συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}h(0, u, a) &= \langle (u)_0 \rangle * [(]_2 * (a)_0 \\ h(t+1, u, a) &= h(t, u, a) * [,]_2 * \langle (a)_t \rangle \\ g(u, v) &= h((u)_{0,1}, u, a) * [)]_2.\end{aligned}$$

Αν ο $(u)_0$ είναι κωδικός κάποιου n-μελούς συναρτησιακού συμβόλου, $(u)_0 = [f]_1$, και για $i < n$ ο $(a)_i = [A_i]_2$ είναι κωδικός κάποιας λέξης, τότε

$$h(0, u, a) = [f(A_0]_2, \quad h(1, u, a) = [f(A_0, A_1]_2, \dots,$$

και τελικά,

$$g(u, v) = [f(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})]_2.$$

Έπεται ότι η συνθήκη για την $\text{Ορος}_3(u)$ τελικά παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\text{Ορος}_3(u) \iff{} & \mathrm{Seq}(u) \ \&\ \text{ΣυνΣυμβ}((u)_0) \\ & \&\ (\exists a \leq \mathrm{maxseq}(u))[(\forall i < (u)_{0,1})\text{Ορος}((a)_i) \\ & \&\ u = g(u, a)].\end{aligned}$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε αυτές τις ισοδυναμίες για τις τέσσερις περιπτώσεις στην (70), παράγουμε μια ισοδυναμία που ικανοποιείται από τη σχέση Ορος(u) και που συνεπάγεται εύκολα με πλήρη πρωτογενή αναδρομή για σχέσεις (Άσκηση x1B.17) ότι η Ορος(u) είναι πρωτογενώς αναδρομική. Για να καταγράψουμε κι' αυτή τη λεπτομέρεια (μια και φτάσαμε ως εδώ), θέτουμε

$$\begin{aligned} H(w,u) \iff\ & \text{Ορος}_1(u) \vee \text{Ορος}_2(u) \\ & \vee \Big[\text{Seq}(u)\ \&\ \text{ΣυνΣυμβ}((u)_0) \\ & \quad \&\ (\exists a \leq \text{maxseq}(u))[(\forall i < (u)_{0,1})[(w)_{(a)_i} = 1] \\ & \qquad\qquad\qquad \&\ u = g(u,a)\Big] \\ & \vee(\exists\ a,b,c < u)[(w)_a = 1\ \&\ (w)_b = 1\ \&\ (w)_c = 1) \\ & \qquad \&\ u = [(\textbf{αν}\ \ (]_2 * a * [=0)]_2 * b * [\textbf{αλλιώς}\ ]_2 * c * [)]_2], \end{aligned}$$

και επαληθεύουμε (με την ανάλυση που έχουμε ήδη κάνει) ότι για κάθε u,

$$\text{Ορος}(u) \iff H(\langle \chi_{\text{Ορος}}(0), \dots, \chi_{\text{Ορος}}(u \dot{-} 1)\rangle, u),$$

που συνεπάγεται (όπως στην Άσκηση x1B.17) ότι η Ορος(u) είναι πρωτογενώς αναδρομική. (Λήμμα) ⊣

Η πρωτογενής αναδρομικότητα των περισσοτέρων από τις άλλες σχέσεις και συναρτήσεις του καταλόγου είναι προφανής, ή τουλάχιστον εύκολη, εκτός από την Μετάβαση(e, s, s') που χρειάζεται κάποια σκέψη και την αφήνουμε για άσκηση, x3A.4*· αξίζει να κατεργαστεί ο αναγνώστης τις λεπτομέρειες τουλάχιστον ενός απ' αυτούς τους υπολογισμούς, για να καταλάβει περί τίνος πρόκειται.

Για το μέρος (b) του θεωρήματος, πρέπει να υπολογίσουμε από τον κωδικό e κάποιου συστήματος E που υπολογίζει τη μερική συνάρτηση

$$g(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = \varphi_e(\vec{y}, \vec{x})$$

και δοσμένους αριθμούς $\vec{z} = z_1, \dots, z_m$, τον κωδικό $S^m_n(e, \vec{z})$ κάποιου άλλου συστήματος $E_{\vec{z}}$ που υπολογίζει τη μερική συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = g(\vec{z}, \vec{x})\cdot \tag{71}$$

και είναι προφανές ότι αν το πρώτο συναρτησιακό σύμβολο του E είναι το g και το f είναι καινούργια συναρτησιακή μεταβλητή (που δεν ορίζεται στο E), τότε αρκεί να προσθέσουμε στην αρχή του E τον ορισμό (71). Έστω

$$\zeta_i^{m+n}(\mathsf{v}_0, \dots, \mathsf{v}_{m-1}, \mathsf{v}_m, \dots, \mathsf{v}_{m+n-1}) = E_0$$

η πρώτη εξίσωση του συστήματος E με κωδικό e. Έπεται (από την κωδικοποίηση), ότι ο κωδικός της συναρτησιακής μεταβλητής που ορίζεται στην εξίσωση με κωδικό $(e)_i$ του E είναι

$$[\zeta_{j_i}^{k_i}] = g_1(e) = (e)_{i,0,0},$$

και ειδικότερα, ο κωδικός της συναρτησιακής μεταβλητής που ορίζεται στην πρώτη εξίσωση του E είναι

$$[\zeta_i^{m+n}] = g_1(e) = (e)_{0,0,0}\cdot$$

και οι κωδικοί των αριθμητικών μεταβλητών στην πρώτη εξίσωση υπολογίζονται από την πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση

$$[\mathsf{v}^i] = g_2(e,i) = (e)_{0,0,2+2i} \quad (i = 0,\dots,m+n-1).$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός

$$f^*(e) = \langle 1, n, \max\{(e)_{i,0,0,2} + 1 \mid i < \mathrm{lh}(e)\}\rangle$$

είναι κωδικός συναρτησιακής μεταβλητής που είναι μεγαλύτερος από τους κωδικούς όλων των συναρτησιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στο E, και επομένως δεν εμφανίζεται στο E. Έπεται ότι (αν ο e είναι κωδικός προγράμματος), τότε ο ζητούμενος κωδικός υπολογίζεται με την

$$\begin{aligned} S^m_n(e,\vec{z}) = \langle\langle f^*(e), [(], g_2(e,m), [,], \dots, g_2(e,m+n-1), [)]\rangle,& \\ \langle g_1(e), [z_1]_1, [,]_1, \dots, [,]_1, [z_m]_1, [)]_1\rangle\rangle * e.& \end{aligned}$$

Στην αντίθετη περίπτωση (όταν $\neg\text{Προγρ}(e)$) αρκεί να θέσουμε

$$S^m_n(e,\vec{z}) = \langle 0, e, \vec{z}\rangle,$$

εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι καμία ακολουθία της μορφής $\langle 0, e, \vec{z}\rangle$ δεν είναι κωδικός προγράμματος.

Τελικά, οι συναρτήσεις $S^m_n(e,\vec{z})$ είναι προφανώς ένα-προς-ένα, από τον ορισμό τους. ⊣

3A.3. Πόρισμα. *Η μερική συνάρτηση* $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ *είναι αναδρομική τότε και μόνο αν είναι ελαχιστικά αναδρομική.*

Απόδειξη. Οι ελαχιστικά αναδρομικές μερικές συναρτήσεις είναι αναδρομικές από το Πόρισμα 2D.1, και το Θεώρημα Κανονικής Μορφής προφανώς συνεπάγεται ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική. ⊣

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η κανονική μορφή (61) σπάνια δίνει τον αποτελεσματικότερο αλγόριθμο για τον υπολογισμό μιας συνάρτησης, που σε πολλές περιπτώσεις ορίζεται εύκολα (και πιο φυσικά) με «γενική» αναδρομή· αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που δεν ήταν προφανές από τον ορισμό της ότι η συνάρτηση του Ackermann είναι ελαχιστικά αναδρομική.

Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 3A.1 είναι βασικό για τη μελέτη των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων, και ιδιαίτερα για αποδείξεις *μη-αναδρομικότητας*, που είναι και οι σημαντικότερες εφαρμογές της θεωρίας αναδρομικών συναρτήσεων, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ περιοριζόμαστε σε δύο πορίσματα που είναι παραδειγματικά της χρήσης του.

3A.4. ΘΕΩΡΗΜΑ (Turing). *Η σχέση* **τερματισμού**

$$H(e,x) \iff \varphi_e(x)\downarrow \tag{72}$$

δεν είναι αναδρομική.

Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό της

$$\begin{aligned} H(e,x) &\iff (\exists y)T_1(e,x,y) \\ &\iff \text{Προγρ}(e)\ \&\ \text{η αναδρομική μηχανή με κωδικό } e \\ &\qquad \text{τερματίζει στην είσοδο } x \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η $H(e,x)$ ήταν αναδρομική, τότε η ολική συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1, & \text{αν } H(x,x) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

θα ήταν αναδρομική· άρα, για κάποιο e και όλα τα x

$$f(x) = \varphi_e(x) = \varphi_x(x)+1,$$

που είναι άτοπο για $x = e$. ⊣

Το μέρος (b) του 3A.1 βεβαιώνει απλά ότι μια συγκεκριμένη κατασκευή αναδρομικών προγραμμάτων είναι *πρωτογενώς αναδρομική στους κωδικούς*: συγκεκριμένα, αν ο e είναι κωδικός της $f(\vec{z},\vec{x})$, τότε, για κάθε $\vec{z}$, ο $S^m_n(e,\vec{z})$ είναι κωδικός της μερικής συνάρτησης

$$f_{\vec{z}}(\vec{x}) = f(\vec{z},\vec{x}).$$

Το αποτέλεσμα (που συχνά καλείται *το Θεώρημα* S^m_n) είναι σημαντικό επειδή συνεπάγεται ότι πολλές άλλες, πολυπλοκότερες κατασκευές προγραμμάτων είναι επίσης πρωτογενώς αναδρομικές στους κωδικούς.

3A.5. ΠΡΟΤΑΣΗ (Παράδειγμα). *Η πρωτογενής αναδρομή είναι πρωτογενώς αναδρομική στους κωδικούς, δηλαδή: για κάθε n, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $u(e,m)$ τέτοια που αν*

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= \varphi^n_e(\vec{x}) \\ f(y+1,\vec{x}) &= \varphi^{n+2}_m(f(y,\vec{x}),y,\vec{x}), \end{aligned}$$

τότε

$$f(y,\vec{x}) = \varphi^{n+1}_{u(e,m)}(y,\vec{x}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η μερική συνάρτηση

$$\begin{aligned} g(0,e,m,\vec{x}) &= \varphi^n(e,\vec{x}) \\ g(y+1,e,m,\vec{x}) &= \varphi^{n+2}(m,g(y,e,m,\vec{x}),y,\vec{x}) \end{aligned}$$

είναι αναδρομική, επειδή το $\mathcal{R}$ είναι κλειστό για πρωτογενή αναδρομή, άρα αναδρομική είναι και η

$$h(e,m,y,\vec{x}) = g(y,e,m,\vec{x}),$$

και επομένως έχει κάποιο κωδικό $\widehat{h}$· έπεται ότι

$$\begin{aligned} g(y, e, m, \vec{x}) &= h(e, m, y, \vec{x}) \\ &= \varphi^{n+3}_{\widehat{h}}(e, m, y, \vec{x}) \\ &= \varphi^{n+1}_{S^2_{n+1}(\widehat{h}, e, m)}(y, \vec{x}), \end{aligned}$$

και το ζητούμενο ισχύει με τη συνάρτηση

$$u(e, m) = S^2_{n+1}(\widehat{h}, e, m). \qquad \dashv$$

3Α. Ασκήσεις

x3A.1. Δείξτε το Λήμμα 3Α.2, και επίσης ότι το «επιπλέον» δεν ισχύει για κάποια πρωτογενώς αναδρομική κωδικοποίηση του $\mathbb{N}^*$.

x3A.2. Δείξτε ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ έχει άπειρους το πλήθος κωδικούς, δηλαδή υπάρχουν άπειροι το πλήθος αριθμοί e τέτοιοι που $f = \varphi^n_e$.

x3A.3. Δείξτε την (68).

x3A.4*. Δείξτε ότι η σχέση Μετάβαση(e, s, s') είναι πρωτογενώς αναδρομική. (Οι λεπτομέρειες αυτού του υπολογισμού είναι τόσο πολλές που δεν είναι εφικτό να καταγραφούν όλες. Το ζητούμενο είναι μια εύγλωττη εξήγηση της αρχιτεκτονικής της απόδειξης, και η κατεργασία μερικών από τις περιπτώσεις που έχουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.)

x3A.5. Δείξτε ότι κάποια πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $u(n)$ δίνει για κάθε n έναν κωδικό της τομής του Ackermann $A_n(x)$.

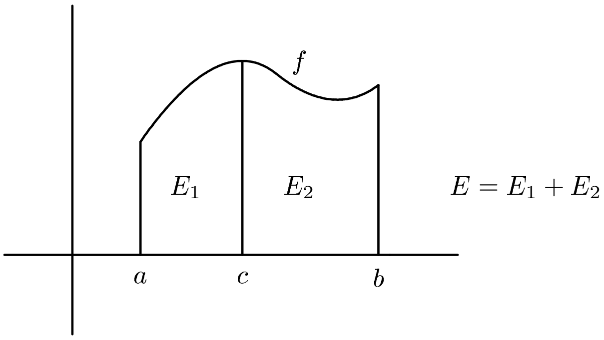
x3A.6. Δείξτε ότι η σύνθεση αναδρομικών μερικών συναρτήσεων είναι πρωτογενώς αναδρομική στους κωδικούς, με την εξής (για παράδειγμα) έννοια: για κάποια πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $u(z, e, m)$,

$$\varphi^n_{u(z,e,m)}(\vec{x}) = \varphi^2_z(\varphi^n_e(\vec{x}), \varphi^n_m(\vec{x})).$$

x3A.7. Δείξτε ότι υπάρχει αναδρομική μερική συνάρτηση $f(x)$ που δεν έχει ολική αναδρομική επέκταση, δηλαδή $f \sqsubseteq g$ δεν ισχύει για καμία ολική αναδρομική συνάρτηση.

3Β. Το Αίτημα Church-Turing

Ο βασικός στόχος μας σ' αυτό το εδάφιο είναι να επεξηγήσουμε και (τουλάχιστον μερικά) να δικαιολογήσουμε το περίφημο



Σχημα 4. Το εμβαδόν ως ολοκλήρωμα.

3B.1. **Αίτημα Church-Turing (CT).** *Η τυχαία μερική συνάρτηση* $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ *είναι υπολογίσιμη αν και μόνον αν είναι αναδρομική.*

Το Αίτημα CT (Church-Turing Thesis) διατυπώθηκε από τον Αμερικανό Alonzo Church και το Βρετανό Alan Turing το 1936, ανεξάρτητα, και σε διαφορετικές μορφές.

Η συνεπαγωγή

$$f \text{ αναδρομική} \Longrightarrow f \text{ υπολογίσιμη}$$

για την τυχαία μερική συνάρτηση f είναι η *τετριμμένη κατεύθυνση* του Αιτήματος, και, γενικά, θεωρείται προφανής, κατευθείαν από τον ορισμό της αναδρομικότητας· τουλάχιστον σήμερα (αν όχι το 1936) είναι εύκολο να εκλάβουμε τις αναδρομικές μηχανές του ορισμού 2B.5 ως «ιδεατές εκδοχές» ηλεκτρονικών υπολογιστών, ή και ως πραγματικούς υπολογιστές με πρόσβαση σε «απεριόριστη μνήμη». Η σημασία του αιτήματος βρίσκεται στην *ουσιαστική* της *κατεύθυνση*,

$$f \text{ υπολογίσιμη} \Longrightarrow f \text{ αναδρομική}.$$

Το Αίτημα Church-Turing δεν επιδέχεται αυστηρή απόδειξη, επειδή ταυτίζει τη διαισθητική έννοια της *υπολογισιμότητας* με την αυστηρή (μαθηματική) έννοια της *αναδρομικότητας*. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να είναι *θεώρημα*, έτσι που από την καθαρά μαθηματική σκοπιά έχει την υπόσταση *ορισμού.* Για να καταλάβουμε το νόημά της πρέπει να εξετάσουμε το ρόλο που παίζουν οι ορισμοί στα μαθηματικά — πως *δικαιολογούνται* και *σε τι χρησιμεύουν.*

Για ένα κλασικό παράδειγμα, το *εμβαδόν* μιας (ας την πούμε) *απλής περιοχής* E κάτω από το γράφημα μιας θετικής, συνεχούς συνάρτησης f ορίζεται ως ολοκλήρωμα,

$$\text{Εμβ}(E) = \int_a^b f(x)dx. \tag{73}$$

Ο ορισμός, βέβαια, δεν είναι αυθαίρετος — αν είχε επιλογή, ο κάθε πρωτοετής φοιτητής των μαθηματικών θα έθετε

$$\text{Εμβ}(E) = 2$$

για κάθε περιοχή E, δίνοντας εύκολη (και λανθασμένη) λύση στα μισά προβλήματα του ολοκληρωτικού λογισμού! Η αξία του σωστού ορισμού (73) είναι ότι δίνει τη σωστή τιμή για τα σημαντικά παραδείγματα, π.χ., απ' αυτόν υπολογίζουμε ότι το εμβαδόν κύκλου με ακτίνα r είναι πr^2, κάτι που επαληθεύεται με μετρήσεις.

Με άλλα λόγια, η πρώτη απαίτηση από ένα μαθηματικό ορισμό κάποιας διαισθητικής έννοιας είναι ότι πρέπει να *συμφωνεί με τα οικεία παραδείγματα*, αυτά που αποδίδουν ενδιαφέρον στην έννοια. Για το Αίτημα CT, αυτό εκφράζεται ως

(74) *κάθε κλασική, υπολογίσιμη συνάρτηση είναι αναδρομική,*

και, στην εποχή μας πια, δεν αμφισβητείται: πέρα από τη μεγάλη λίστα (πρωτογενώς) αναδρομικών συναρτήσεων στο εδάφιο 1B και τις ισχυρές ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων που έχουμε δείξει, υπάρχει και η εμπειρία σχεδόν εβδομήντα χρόνων έρευνας που δεν απέδωσαν κανένα «αντιπαράδειγμα» — κάποια συνάρτηση που να θεωρείται (γενικά από τη μαθηματική κοινότητα) υπολογίσιμη και που να μην είναι αναδρομική.

Πως μπορούμε όμως να είμαστε βέβαιοι ότι δεν θα βρεθεί αντιπαράδειγμα του Αιτήματος CT στο μέλλον; Ας εξετάσουμε την κλασική λύση του αντίστοιχου προβλήματος για την έννοια του εμβαδού, που βασίζεται στις εξής τρεις βασικές «διαισθήσεις» για απλές περιοχές όπως στο Σχήμα 4:

(a) Το εμβαδόν ορθού παραλληλόγραμμου με πλευρές α και β είναι το γινόμενο $\alpha\beta$.
(b) Αν $E_1 \subseteq E$, δηλαδή η απλή περιοχή E_1 είναι μέρος μιας άλλης E, τότε $\text{Εμβ}(E_1) \leq \text{Εμβ}(E)$.
(c) Αν η απλή περιοχή E είναι η «ένωση» δύο απλών περιοχών E_1 και E_2 (όπως στο Διάγραμμα 4), τότε $\text{Εμβ}(E) = \text{Εμβ}(E_1) + \text{Εμβ}(E_2)$.

Απ' αυτά τα τρία «αξιώματα» για την έννοια του εμβαδού απλών περιοχών, ο τύπος (73) μπορεί να αποδειχτεί αυστηρά: δείχνουμε, δηλαδή, ότι ο (73) *είναι ο μόνος τρόπος ανάθεσης πραγματικού αριθμού* $\text{Εμβ}(E)$ *σε κάθε απλή περιοχή* E *που ικανοποιεί τις συνθήκες* (a) – (c).[5]

---

[5] Αυτή είναι η ουσία του κλασικού θεωρήματος *ύπαρξης ολοκληρώματος κατά Riemman* για συνεχείς συναρτήσεις.

Η θεμελιακή ανάλυση της έννοιας της *υπολογισιμότητας* που οδηγεί στην ανάλογη δικαιολόγηση του Αιτήματος CT δόθηκε από τον Turing, που ξεκίνησε με την απλή και προφανή διαίσθηση[6] ότι

(75) υπολογισιμότητα = μηχανική υπολογισιμότητα.

Στη συνέχεια, ο Turing όρισε αυστηρά μια συγκεκριμένη κλάση αφηρημένων (και πολύ απλών) μηχανών που σήμερα φέρουν το όνομά του, *μηχανές Turing*· έδωσε ισχυρά επιχειρήματα ότι *οι υπολογισμοί οποιασδήποτε «κατασκευάσιμης» μηχανής «προσομοιώνονται» από κάποια μηχανή Turing*· και, τελικά, διατύπωσε την εικασία ότι για κάθε συνάρτηση f ισχύει η ισοδυναμία

$$\text{η } f \text{ είναι υπολογίσιμη} \iff \text{η } f \text{ είναι υπολογίσιμη από μηχανή Turing.}$$

Για να συμπληρώσουμε την ιστορία, ο Church είχε ήδη προτείνει λίγο πρωτύτερα το «αίτημα» (Thesis) ότι, για κάθε f,

$$\text{η } f \text{ είναι υπολογίσιμη} \iff \text{η } f \text{ είναι } \lambda\text{-ορίσιμη},$$

όπου «λ-ορίσιμη» σημαίνει «υπολογίσιμη από κάποιον όρο (πρόγραμμα)» της τυπικής γλώσσας του λ-λογισμού που είχε εισαγάγει. Οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}&\text{η } f \text{ είναι Turing υπολογίσιμη}\\ &\qquad\qquad\qquad \iff \text{η } f \text{ είναι } \lambda\text{-ορίσιμη}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \text{η } f \text{ είναι αναδρομική}\end{aligned}$$

αποδείχτηκαν σχεδόν αμέσως μετά (από τους Turing και Kleene), και έκλεισαν τον κύκλο που οδήγησε στη διατύπωση του Αιτήματος Church-Turing στη μορφή 3B.1.

Το αν η ανάλυση της «μηχανικής υπολογισιμότητας» που έδωσε ο Turing ανέρχεται στο ύψος πλήρους δικαιολόγησης του Αιτήματος CT (όπως η ανάλυση που σκιαγραφήσαμε δικαιολογεί την ορθότητα του ορισμού του εμβαδού για απλές περιοχές) είναι αμφιλεγόμενο. Οπωσδήποτε, δεν θα την επαναλάβουμε εδώ, αν και είναι αξιοθαύμαστο το πόσο πειστική ηχεί ακόμη σήμερα, ύστερα από τόσα χρόνια και ό,τι έχει επιτευχθεί στο μεταξύ στην πληροφορική. Αντ' αυτού, θα δείξουμε ότι η μηχανική υπολογισιμότητα μιας μερικής συνάρτησης f συνεπάγεται την αναδρομικότητα της f, εφόσον η δοσμένη μηχανή ικανοποιεί ασθενέστατες «συνθήκες κατασκευασιμότητας»,

---

[6] «Απλή» και «προφανής διαίσθηση» στην εποχή μας, όταν παιδιά του Γυμνασίου χρησιμοποιούν καθημερινά «υπολογιστές» (κομπιούτερ!), και οι λέξεις «υπολογισμός» και «μηχανικός υπολογισμός» (μάλλον με την «τρέξιμο» κάποιου «προγράμματος» σε κάποιο «PC», κ.λπ.) θεωρούνται συνώνυμες στη καθημερινή γλώσσα. Όμως το 1936 δεν υπήρχαν ηλεκτρονικοί υπολογιστές, προγράμματα, Windows, και η μαθηματική παράδοση συνέδεε την έννοια της «υπολογίσιμης συνάρτησης» με διαισθητικούς *αλγορίθμους* που εκφράζονταν κατά κύριο λόγο από αναδρομικούς ορισμούς. Τα αρχέτυπα παραδείγματα υπολογίσιμων συναρτήσεων ήταν οι αριθμητικές πράξεις που υπολογίζονται από τους λεγόμενους «σχολικούς αλγορίθμους» (για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση στο δεκαδικό σύστημα), και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης, που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη x1C.9.

που ικανοποιούνται από όλα τα «μοντέλα υπολογισμού» που έχουν εισαχθεί, και (όπως θα υποστηρίξουμε) από ό,τι «μηχανές» θα κατασκευαστούν στο μέλλον.

3B.2. **Αναδρομική κωδικοποίηση** μιας αφηρημένης μηχανής (2B.4)

$$\mathcal{M} = (S, T, \to, \mathrm{input}, \mathrm{output})$$

με σύνολα εισόδου $\mathbb{N}^n$ και εξόδου $\mathbb{N}$ είναι οποιαδήποτε κωδικοποίηση (ένα-προς-ένα συνάρτηση)

$$c : S \rightarrowtail \mathbb{N}$$

των καταστάσεων της $\mathcal{M}$ στους αριθμούς, τέτοια που οι εξής συναρτήσεις, σχέσεις και σύνολα να είναι αναδρομικά:

$$\begin{aligned}
S_c &= c[S] = \{x \mid (\exists s \in S)[c(s) = x]\}\\
T_c &= c[T] = \{x \mid (\exists s \in T)[c(s) = x]\}\\
x \to_c x' &\iff x, x' \in S_c \;\&\; c^{-1}(x) \to c^{-1}(x')\\
&\iff (\exists s, s' \in S)[c(s) = x \;\&\; c(s') = x' \;\&\; s \to s']\\
\mathrm{input}_c(\vec{x}) &= c(\mathrm{input}(\vec{x}))\\
\mathrm{output}_c(x) &= \begin{cases} \mathrm{output}(c^{-1}(x)), & \text{αν } x \in T_c,\\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}
\end{aligned}$$

3B.3. Θεωρημα. *Κάθε μερική συνάρτηση που υπολογίζεται από αφηρημένη μηχανή που επιδέχεται αναδρομική κωδικοποίηση είναι αναδρομική.*

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι ένα μικρό μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος Κανονικής Μορφής 3A.1. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
C(\vec{x}, y) &\iff \text{ο } y \text{ είναι κωδικός υπολογισμού στην είσοδο } \vec{x}\\
&\iff \mathrm{Seq}(y) \;\&\; (y)_0 = \mathrm{input}_c(\vec{x})\\
&\qquad \& \; (\forall i < \mathrm{lh}(y))[i + 1 < \mathrm{lh}(y) \Longrightarrow (y)_i \to_c (y)_{i+1}]\\
&\qquad \& \; (y)_{\mathrm{lh}(y) \,\dot{-}\, 1} \in T_c.
\end{aligned}$$

Η σχέση $C(\vec{x}, y)$ είναι αναδρομική από την υπόθεση, και αν η δοσμένη μηχανή υπολογίζει τη μερική συνάρτηση f, τότε

$$f(\vec{x}) = \mathrm{output}_c\Big(\big(\mu y C(\vec{x}, y)\big)_{\mathrm{lh}(y) \,\dot{-}\, 1}\Big),$$

έτσι που η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική. ⊣

Η ιδέα τώρα είναι ότι αν η μηχανή $\mathcal{M}$ (με σύνολα εισόδου και εξόδου τα $\mathbb{N}^n$ και $\mathbb{N}$) είναι «κατασκευάσιμη», τότε οι καταστάσεις της $\mathcal{M}$ πρέπει να είναι «πεπερασμένα» αντικείμενα, που μπορούν να κωδικοποιηθούν απλά στους φυσικούς αριθμούς (όπως στην απόδειξη του 3A.1), έτσι που οι βασικές σχέσεις να είναι αναδρομικές, με άλλα λόγια το αίτημα

κάθε κατασκευάσιμη μηχανή επιδέχεται αναδρομική κωδικοποίηση·

και η βασική παρατήρηση είναι ότι το Αίτημα CT συνάγεται αυστηρά απ' αυτό το αίτημα και τη βασική διαίσθηση του Turing (75).

3C. Συμβολικός υπολογισμός και αναποκρισιμότητα

Το Αίτημα CT επικαλούμαστε συχνά αλλά όχι ουσιαστικά για την αποφυγή αυστηρών αποδείξεων, δηλαδή υποστηρίζουμε ότι κάποια μερική συνάρτηση είναι αναδρομική χωρίς να το αποδείξουμε, μόνο με τη διαισθητική περιγραφή κάποιου αλγορίθμου που την υπολογίζει. Οι «αμαρτωλές» (τεμπέλικες) επικλήσεις αυτού του είδους μπορούν βέβαια να αποφευχθούν με κάποια επιπρόσθετη εργασία.

Οι σημαντικές εφαρμογές του Αιτήματος CT είναι στην απόδειξη *αρνητικών αποτελεσμάτων*, *ανυπολογισιμότητας* (non-computability) συναρτήσεων ή *αναποκρισιμότητας* (undecidability) σχέσεων, συνήθως στις λέξεις από κάποιο πεπερασμένο αλφάβητο. Για την εύκολη διατύπωση τέτοιων αποτελεσμάτων εισάγουμε την εξής ορολογία:

3C.1. **Αναποκρισιμότητα.** Έστω $\Sigma = \{a_0, \dots, a_r\}$ πεπερασμένο (μηκενό) αλφάβητο, και Σ^* το σύνολο όλων των λέξεων (πεπερασμένων ακολουθιών) από το Σ. Θέτουμε

$$[u_0 \dots u_{k-1}] = \langle [u_0], \dots, [u_{k-1}] \rangle \quad (u_0 \dots u_{k-1} \in \Sigma^*),$$

όπου $[a_i] = i$, και καλούμε τον αριθμό $[u_0 \dots u_{k-1}]$ κωδικό της $u_0 \dots u_{k-1}$. Η τυχαία n-μελής σχέση (ή «πρόβλημα») P στο Σ^* είναι *αποκρίσιμη* (decidable) ή *επιλύσιμη* (solvable) αν υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $\chi(x_1, \dots, x_n)$ τέτοια που

$$P(u_1, \dots, u_n) \iff \chi([u_1], \dots, [u_n]) = 1,$$

αλλιώς η P είναι *αναποκρίσιμη* (undecidable) ή *ανεπίλυτη* (unsolvable).

Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη αναποκρισιμότητας σημαντικών προβλημάτων είναι ο χαρακτηρισμός των αποκρίσιμων σχέσεων στο Σ^* με κάποιο «πρότυπο συμβολικού υπολογισμού» (model of symbolic computation), άμεσα, δηλαδή χωρίς αναφορά σε κωδικοποιήσεις. Στο επόμενο εδάφιο θα επισκοπήσουμε περιληπτικά το κλασικό (και ιστορικά πρώτο) πρότυπο συμβολικού υπολογισμού, τις περίφημες *μηχανές* Turing. Εδώ θα εισάγουμε ένα δεύτερο κλασικό παράδειγμα που οφείλεται στον Post, ο οποίος απέδειξε και το πρώτο αποτέλεσμα αναποκρισιμότητας στα καθαρά μαθηματικά, έξω από τη μαθηματική λογική και τη θεωρία υπολογισιμότητας.

3C.2. **Σύστημα αναγραφής** (rewriting ή semi-Thue system) είναι η τυχαία δομή

$$R = (\Sigma, \sigma_0 \to \tau_0, \dots, \sigma_k \to \tau_k) = (\{a_0, \dots, a_n\}, \sigma_0 \to \tau_0, \dots, \sigma_k \to \tau_k),$$

όπου το *αλφάβητο* Σ είναι πεπερασμένο σύνολο, και στους *κανόνες μετάβασης* $\sigma_i \to \tau_i$ οι σ_i, τ_i είναι λέξεις από το Σ, δηλαδή μέλη του Σ^* (που περιλαμβάνει και την κενή λέξη Λ). Το σύστημα R ορίζει την εξής *βασική σχέση μετάβασης* στο Σ^*:

$$\alpha \to_R \beta \iff (\exists \alpha_1, \alpha_2, \sigma, \tau \in \Sigma^*)[\sigma \to \tau \mathbin{\&} \alpha = \alpha_1 \sigma \alpha_2 \mathbin{\&} \beta = \alpha_1 \tau \alpha_2],$$

δηλαδή $\alpha \to_R \beta$ αν η β παράγεται από την α με την αντικατάσταση κάποιου μέρους της σ με κάποια λέξη τ, έτσι που το $\sigma \to \tau$ να είναι κανόνας. Για παράδειγμα, στο σύστημα μεταγραφής

$$R = (\{a, b\}, a \to aa, a \to bb),$$

έχουμε τις μεταγραφές

$$a \to_R aa \to_R aaa \to_R abba.$$

Η (πλήρης) *σχέση μετάβασης* του R είναι η «μεταβατική κλειστότητα» της $\to_R$,

$$\begin{aligned} \alpha \to_R^* \beta &\iff \alpha \to_R \alpha_1 \to_R \cdots \to_R \alpha_{n-1} \to_R \beta \\ &\iff (\exists \alpha_0, \dots, \alpha_n)[\alpha_0 = \alpha \\ &\qquad\qquad \mathbin{\&} (\forall i < n)[\alpha_i \to_R \alpha_{i+1} \mathbin{\&} \alpha_n = \beta], \end{aligned}$$

έτσι που στο παράδειγμα $a \to_R^* abba$, αλλά $a \not\to_R^* bbb$ (Άσκηση x3C.1). Η λέξη α είναι **τερματική** στο R αν δεν υπάρχει β τέτοια που $\alpha \to_R \beta$,

$$T_R = \{\alpha \mid (\forall \beta)[\alpha \not\to_R \beta],$$

(όπως η b στο παράδειγμα). Παρατηρούμε ότι σ' αυτά τα γενικά συστήματα αναγραφής, δεν διαχωρίζουμε «τερματικές» και «άγονες» λέξεις, δηλαδή καλούμε όλες τις άγονες λέξεις τερματικές.

Τελικά, για $S \subseteq \Sigma^*$, το σύστημα R είναι **αιτιοκρατικό στο S**, αν

$$[\alpha \in S \mathbin{\&} \alpha \to_R \beta \mathbin{\&} \alpha \to_R \beta'] \Longrightarrow \beta = \beta' \in S,$$

έτσι που το παράδειγμα δεν είναι αιτιοκρατικό στο πλήρες $\{a, b\}^*$, αλλά είναι αιτιοκρατικό στο $\{b\}^*$.

Τα αναδρομικά συστήματα μεταβάσεων $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ είναι, βασικά, συστήματα αναγραφής, μόνο που διαχωρίζουμε τις τερματικές καταστάσεις σε «άγονες» και «τερματικές που αποδίδουν τιμή», και (το σημαντικότερο) οι καταστάσεις είναι λέξεις από ένα άπειρο αλφάβητο — επειδή πρέπει να συμπεριλάβουμε στο Σ όλες τις σταθερές, δηλαδή όλους τους φυσικούς αριθμούς στην περίπτωση $\mathbf{M} = \mathbf{N}_0$ που μας ενδιαφέρει. Το επόμενο, τεχνικό αλλά βασικό αποτέλεσμα παρακάμπτει αυτό το εμπόδιο με την κωδικοποίηση

$$\mathbf{x} = \$\underbrace{11\cdots1}_{x}\$ \quad (x \in \mathbb{N}). \tag{76}$$

3C.3. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε αναδρομική, μερική συνάρτηση* $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ *υπολογίζεται από κάποιο σύστημα αναγραφής* R, *σε κάποιο* (πεπερασμένο) *σύνολο συμβόλων* Σ *που περιλαμβάνει τα ειδικά σύμβολα* $\mathsf{f}, 1, \$, \ :\ $, *με την είσοδο*

$$\vec{x} \mapsto \mathsf{f} : \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n,$$

δηλαδή

$$f(x_1, \ldots, x_n) = w \iff \mathsf{f} : \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n \to_R^* \ : \mathbf{w}.$$

Επιπλέον, το R *είναι αιτιοκρατικό στο σύνολο «καταστάσεων»*

(77) $$S = \{\alpha : \beta \mid \text{το ‘:’ δεν εμφανίζεται στις λέξεις } \alpha, \beta\}.$$

Θα παραλείψουμε την απόδειξη, που απαιτεί την (όχι τετριμμένη) κατασκευή συστημάτων αναγραφής με ειδικές ιδιότητες, ένα για κάθε αναδρομικό πρόγραμμα.

3C.4. **Το πρόβλημα ισότητας λέξεων για ημιομάδες.** Για κάθε σύστημα αναγραφής

(78) $$R = (\Sigma, u_0 \to v_0, \ldots, u_k \to v_k)$$

στο σύνολο λέξεων Σ^* από το πεπερασμένο αλφάβητο Σ, έστω $\sim_R$ η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας στο Σ^* τέτοια που

1. $u_i \sim_R v_i$, για $i \leq k$,
2. $u \sim_R v \Longrightarrow \alpha u \beta \sim_R \alpha v \beta$, για όλα τα $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

και για κάθε $u \in \Sigma^*$, έστω

$$[\![u]\!] = \{v \in \Sigma^* \mid v \sim_R u\}$$

η *κλάση ισοδυναμίας* του u. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$[\![R]\!] = \{[\![u]\!] \mid u \in \Sigma^*\}$$

είναι η *ημιομάδα* (semigroup) που παράγεται από το R, και η $\sim_R$ καλείται η *σχέση* ή το *πρόβλημα ισότητας λέξεων* (word problem) γι' αυτή την ημιομάδα.

Οι όροι είναι, προφανώς, από την άλγεβρα και μπορούν να δικαιολογηθούν, αλλά δεν θα το κάνουμε αυτό εδώ.

3C.5. ΘΕΩΡΗΜΑ (Emil Post). *Υπάρχει σύστημα αναγραφής* R *τέτοιο που η σχέση* $u \to_R^* v$ *δεν είναι αποκρίσιμη, και το πρόβλημα ισότητας λέξεων* $u \sim_R v$ *για την ημιομάδα* $[\![R]\!]$ *είναι ανεπίλυτο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $R_f = (\Sigma, u_0 \to v_0, \ldots, u_k \to v_k)$ ένα σύστημα αναγραφής που υπολογίζει την αναδρομική, μερική συνάρτηση

$$f(x) = 0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$$

από το Θεώρημα 3C.3, έτσι που

$$f(x)\downarrow \iff \mathsf{f} : \mathbf{x} \to^*_R \ : \mathbf{0}\cdot$$

έπεται ότι η σχέση $u \to^*_R v$ δεν είναι αποκρίσιμη, γιατί αν ήταν, τότε (εύκολα) και το πεδίο ορισμού $\{x \mid f(x)\downarrow\}$ θα ήταν αναδρομικό, που δεν είναι, 3A.4.

Για να συμπεράνουμε ότι η σχέση $\sim_R$ επίσης δεν είναι αποκρίσιμη, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} u \sim_R v \iff & (\exists w_0, \dots, w_n)[u = w_0 \mathbin{\&} w_n = v \\ & \mathbin{\&} (\forall i < n)[w_i = w_{i+1} \vee w_i \to_R w_{i+1} \vee w_{i+1} \to_R w_i]], \end{aligned}$$

εύκολα, στην κατεύθυνση $\Rightarrow$ από τον ορισμό της $\sim_R$ (επειδή η σχέση στα δεξιά είναι σχέση ισοδυναμίας), και στην κατεύθυνση $\Leftarrow$ με επαγωγή στο n. Έπεται ότι αρκεί να δείξουμε ότι (με S όπως στην (77))

$$\begin{aligned} (79)\quad & (\forall i < n)[w_i = w_{i+1} \vee w_i \to_R w_{i+1} \vee w_{i+1} \to_R w_i] \\ & \qquad \mathbin{\&} w_0 \in S \mathbin{\&} w_n = \ : \mathbf{0} \\ & \qquad\qquad \Longrightarrow w_0 = \ : \mathbf{0} \vee w_0 \to^*_R \ : \mathbf{0}, \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι για $u \in S$,

$$u \sim_R \ : \mathbf{0} \iff u = \ : \mathbf{0} \vee u \to^*_R \ : \mathbf{0}$$

και αποκλείει την αποκρισιμότητα της $\sim_R$ όπως και πριν. Τελικά, δείχνουμε την (79) με επαγωγή στο n, και με τετριμμένη βάση, αφού για $n = 0$ η (79) δηλώνει ότι $w_0 = \ : \mathbf{0} \Longrightarrow w_0 = \ : \mathbf{0}$. Το επαγωγικό βήμα είναι επίσης τετριμμένο αν για κάποιο i, $w_i = w_{i+1}$, ή αν, για κάθε $i < n$, $w_i \to_R w_{i+1}$. Από την άλλη μεριά, η κατάσταση $: \mathbf{0}$ είναι τερματική, άρα δεν μπορεί να ισχύει η $w_{i+1} \to_R w_i$ για κάθε i, και έτσι απομένει η περίπτωση που για κάποιο *μέγιστο* i,

$$w_{i+1} \to_R w_i,$$

και επομένως, επίσης,

$$w_{i+1} \to_R w_{i+2},$$

και απ' αυτά τα δύο και την αιτιοκρατία του R στο S έπεται ότι $w_i = w_{i+2}$, που με την επαγωγική υπόθεση συμπληρώνουν την απόδειξη, γιατί μπορούμε να αφαιρέσουμε το w_{i+1} από τη δοσμένη ακολουθία. ⊣

Από τα πολλά μαθηματικά προβλήματα που έχουν αποδειχτεί ανεπίλυτα αναφέρουμε εδώ μόνο δύο.

3C.6. **Το πρόβλημα ισότητας λέξεων για ομάδες** (the word problem for groups). Για κάθε πεπερασμένο αλφάβητο $\Sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, έστω

$$\Sigma_g = \Sigma \cup \{a_0^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$$

όπου τα $a_0^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ καινούργια σύμβολα· και για κάθε σύστημα αναγραφής

$$R = (\Sigma_g, (u_0, v_0), \dots, (u_k, v_k))$$

στο Σ_g^*, έστω $\simeq_R$ η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας στο Σ_g^* τέτοια που

1. $u_i \simeq_R v_i$, για $i \leq k$,
2. $a_i a^{-1} \simeq_R \Lambda$, όπου Λ η κενή λέξη,
3. $u \simeq_R v \Longrightarrow \alpha u \beta \sim_R \alpha v \beta$, για όλα τα $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

και για κάθε $u \in \Sigma_g^*$, έστω

$$\llbracket u \rrbracket_g = \{v \in \Sigma_g^* \mid v \simeq_R u\}$$

η *κλάση ισοδυναμίας* του u. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\llbracket R \rrbracket_g = \{\llbracket u \rrbracket_g \mid u \in \Sigma_g^*\}$$

είναι η *ομάδα* (group) που παράγεται από το R, και η σχέση ισοδυναμίας $\simeq_R$ καλείται το πρόβλημα *ισότητας λέξεων* γι' αυτή την ομάδα.

Όπως και για τις ημιομάδες, οι όροι προφανώς προέρχονται από την άλγεβρα και μπορούν να δικαιολογηθούν, αλλά δεν θα το κάνουμε αυτό εδώ.

3C.7. ΘΕΩΡΗΜΑ (S. Novikov, W. Boone). *Υπάρχει σύστημα αναγραφής R τέτοιο που το πρόβλημα ισότητας λέξεων για την ομάδα $\llbracket R \rrbracket_g$ είναι ανεπίλυτο.*

Αυτό το θεώρημα έχει σημαντικά πορίσματα για τη θεωρία ομάδων και την αλγεβρική τοπολογία, ιδιαίτερα το «πρόβλημα ταξινόμησης» τοπολογικών πολλαπλοτήτων πεπερασμένης διάστασης.

3C.8. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Το 10ο Πρόβλημα του Hilbert**). *Το πρόβλημα αν δοσμένο Διοφαντικό πολυώνυμο*

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n \leq d} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

σε n μεταβλητές με συντελεστές στο $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ έχει ακέραιες ρίζες είναι ανεπίλυτο.

Το θεώρημα αυτό αποδείχτηκε από τον Y. V. Matijasevich, μετά από εργασία των Hilary Putnam, Julia Robinson και Martin Davis, και ίσως περισσότερο από κάθε άλλο, εμπέδωσε τη θεωρία αναδρομής ως βασική μέθοδο με σημαντικές εφαρμογές στα καθαρά μαθηματικά.

3C. Ασκήσεις

x3C.1. Για ποιες λέξεις $x_1 x_2 \cdots x_n$ ισχύει η σχέση $a \to_R^* x_1 x_2 \cdots x_n$ για το σύστημα αναγραφής $R = (\{a, b\}, \{a \to aa, a \to bb\}$;

	$\cdots\ t\ \ x\ \ y\ \cdots$ $\uparrow$ Q	α, β λέξεις $x \neq \sqcup, y \neq \sqcup$
$Q \xrightarrow{x\ x'\ +1} Q'$	$\cdots\ t\ \ x'\ \ y\ \cdots$ $\uparrow$ Q'	$\alpha Q x \beta \to \alpha x' Q' \beta$ $\alpha Q \to \alpha x' Q'$
$Q \xrightarrow{x\ x'\ 0} Q'$	$\cdots\ t\ \ x'\ \ y\ \cdots$ $\uparrow$ Q'	$\alpha Q x \beta \to \alpha Q' x' \beta$ $\alpha Q \to \alpha Q' x'$
$Q \xrightarrow{x\ x'\ -1} Q'$	$\cdots\ t\ \ x'\ \ y\ \cdots$ $\uparrow$ Q'	$\alpha y Q x \beta \to \alpha Q' y x' \beta$ $\alpha y Q \to \alpha Q' y x'$ $Q x \beta \to Q' \sqcup x' \beta$ $Q \to Q'$

Πινακας 2. Οι μεταβάσεις της αναιτιοκρατικής μηχανής Turing.

3D. Μηχανές Turing

Οι «μηχανές» που εισήγαγε ο Turing μπορούν να οριστούν ως συστήματα αναγραφής (x3D.1*), αλλά από σεβασμό για την ιστορία τους και επειδή εμφανίζονται σε πολλά βιβλία, τις εισάγουμε εδώ με τον κλασικό τους ορισμό.

3D.1. Ορισμος. **Μηχανή Turing** είναι μια δομή (Σ, S, T) όπου:

(1) Το Σ είναι πεπερασμένο σύνολο *συμβόλων*, που περιέχει το ειδικό *κενό σύμβολο* $\sqcup$ («λευκός χώρος»).
(2) Το S είναι μη-κενό, πεπερασμένο σύνολο (εσωτερικών) *καταστάσεων*, με $\Sigma \cap S = \emptyset$.
(3) Το T είναι ο *πίνακας βασικών μεταβάσεων*, ένα (πεπερασμένο) σύνολο από πεντάδες της μορφής

$$Q \xrightarrow{x\ x'\ m} Q' \tag{80}$$

όπου οι Q και Q' είναι καταστάσεις, τα x και x' είναι σύμβολα, και η *κίνηση* m είναι 0, 1 ή -1.

Στην εικόνα που ζωγραφίζει ο Turing, σε κάθε βήμα του υπολογισμού της η μηχανή είναι σε μια συγκεκριμένη κατάσταση Q και αντιμετωπίζει μια άπειρη (προς τις δύο κατευθύνσεις) «ταινία» με πεπερασμένα το πλήθος μη-κενά σύμβολα γραμμένα πάνω της, δηλαδή μια συνάρτηση

$$\pi : \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} \to \Sigma$$

όπου $\pi(x) = \sqcup$ για «σχεδόν όλα» τα $x \in \mathbb{Z}$. *Πλήρης κατάσταση* είναι η τυχαία τριάδα

$$(Q, \pi, i),$$

όπου η μηχανή βρίσκεται στη θέση $i \in \mathbb{Z}$. Η μηχανή όμως «δεν ξέρει» που βρίσκεται στην ταινία, βλέπει μόνο το «ορατό σύμβολο» $x = \pi(i)$, και έτσι μπορούμε να περιγράψουμε την πλήρη κατάσταση με οποιαδήποτε λέξη

$$a_{i-m+1} \cdots a_{i-2} a_{i-1} Q a_i a_{i+1} \cdots a_{i+n-1} \tag{81}$$

στο αλφάβητο $\Sigma \cup S$, όπου το ορατό σύμβολο είναι το a_i και $a_j = \pi(j)$ για $i - m < j < i + n$ αρκεί τα m και n να είναι αρκετά μεγάλα έτσι που $\pi(j) = \sqcup$ για $j \leq i - m$ ή $j \geq i + n$ και η λέξη να περιλαμβάνει όλα τα μη-κενά σύμβολα στην ταινία· παραδείγματα της (81) είναι τα

$$bcQa \quad b\sqcup Q \quad \sqcup Qab\sqcup c \quad Q \quad \sqcup Q$$

όπου τα δύο τελευταία προσδιορίζουν την ίδια πλήρη κατάσταση.

Η δράση της μηχανής καθορίζεται από τη μια ή περισσότερες βασικές μεταβάσεις της μορφής (80) που μπορεί να υπάρχουν στον πίνακα και που αρχίζουν με αυτά τα Q και x, και ορίζεται συνοπτικά στον Πίνακα 2 — στη δεύτερη στήλη με το συμβολισμό του Turing, και στην τρίτη ως σύστημα μεταβάσεων στο σύνολο καταστάσεων

$$\{\alpha, Q, \beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*, Q \in S\}.$$

Αναλυτικότερα, η δράση μιας μηχανής Turing έχει ως εξής:

(1) Αν δεν υπάρχει βασική μετάβαση που να αρχίζει με τα Q και x, τότε η κατάσταση είναι τερματική και ο υπολογισμός σταματά.

(2) Αν υπάρχει μετάβαση

$$Q \xrightarrow{x\ x'\ 0} Q'$$

με κίνηση $m = 0$, τότε η μηχανή «επιλέγει» μια τέτοια μετάβαση, αλλάζει το x στο x' και αλλάζει κατάσταση από την Q στην Q'.

(3) Αν υπάρχει μετάβαση

$$Q \xrightarrow{x\ x'\ 1} Q'$$

με κίνηση $m = 1$, τότε η μηχανή «επιλέγει» μια τέτοια μετάβαση, αλλάζει το x στο x', αλλάζει κατάσταση από την Q στην Q' και κινείται μια θέση δεξιά.

(4) Αν υπάρχει μετάβαση

$$Q \xrightarrow{x\ x'\ -1} Q'$$

με κίνηση $m = -1$, τότε η μηχανή «επιλέγει» μια τέτοια μετάβαση, αλλάζει το x στο x', αλλάζει κατάσταση από την Q στην Q' και κινείται μια θέση αριστερά.

Υπολογισμός της μηχανής είναι η τυχαία (άπειρη ή πεπερασμένη) ακολουθία

$$s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$$

όπου κάθε s_i είναι πλήρης κατάσταση, και η s_{i+1} είναι το αποτέλεσμα της δράσης της μηχανής στην s_i. Όπως πάντα, θέτουμε

$$s \rightarrow^* t \iff (\exists \text{ υπολογισμός})[s, s_1, \ldots, s_{n-1}, t].$$

Η μηχανή είναι *αιτιοκρατική* αν για κάθε κατάσταση Q και σύμβολο x υπάρχει το πολύ μια εντολή $Q \xrightarrow{x\ x'\ m} Q'$ στο πίνακα της (Σ, S, T) που αρχίζει με τα Q, x.

Για τον υπολογισμό (μερικών) συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς χρειαζόμαστε συναρτήσεις εισόδου και εξόδου, και η πιο συνηθισμένη επιλογή γι' αυτές είναι οι

$$\begin{aligned} \text{input}(\vec{x}) &= \text{START}\ \underbrace{11\cdots}_{x_1+1}\sqcup\underbrace{11\cdots}_{x_2+1}\sqcup\cdots\sqcup\underbrace{11\cdots}_{x_n+1}\sqcup \\ \text{output}(\text{END}\ \underbrace{11\cdots\sqcup}_{w+1}) &= w, \end{aligned} \tag{82}$$

όπου START και END είναι συγκεκριμένες εσωτερικές καταστάσεις.

3D.2. **Θεώρημα.** *Η τυχαία μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ είναι* (αιτιοκρατικά ή αναιτιοκρατικά) *Turing-υπολογίσιμη τότε και μόνον αν είναι αναδρομική.*

Θα παραλείψουμε και αυτή την απόδειξη, αλλά παρατηρούμε ότι η μια κατεύθυνση της ισοδυναμίας που διατυπώνεται στο θεώρημα είναι τετριμμένη: επειδή η απλούστερη κωδικοποίηση των καταστάσεων μιας μηχανής Turing (ως λέξεις από ένα πεπερασμένο αλφάβητο) είναι (προφανώς) αναδρομική, και επίσης αναδρομικές είναι οι κλασικές συναρτήσεις εισόδου και εξόδου (82) γι' αυτή την κωδικοποίηση, άρα κάθε Turing-υπολογίσιμη μερική συνάρτηση είναι αναδρομική από την Πρόταση 3B.3. Η απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης απαιτεί την κατασκευή μηχανών Turing με ειδικές ιδιότητες και είναι επίπονη.

3D. Ασκήσεις

x3D.1*. Δείξτε ότι για κάθε μηχανή Turing $M = (\Sigma, S, T)$ υπάρχει σύστημα αναγραφής

$$R = (\Sigma \cup S \cup \{l, r\}, \rightarrow)$$

με τα επιπρόσθετα (φρέσκα) σύμβολα l και r, τέτοιο που για όλες τις λέξεις α, α', β, β' στο αλφάβητο S και όλες τις (εσωτερικές) καταστάσεις Q, Q'

$$\alpha Q \beta \rightarrow^*_M \alpha' Q' \beta' \iff (\exists m, n)[l \alpha Q \beta r \rightarrow^*_R l \sqcup^m \alpha Q' \beta \sqcup^m r].$$

Επιπλέον, αν η M είναι αιτιοκρατική, τότε το R είναι αιτιοκρατικό στο σύνολο λέξεων $\alpha Q\beta$ από το $\Sigma \cup S \cup \{l, r\}$ στις οποίες εμφανίζεται ακριβώς μια κατάσταση. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε την παραλλαγή της παράστασης (81) για πλήρεις καταστάσεις που αρχίζει με l και τελειώνει με r, και προσθέστε στις βασικές μεταβάσεις της M τη σωστή δράση στα «άκρα» l και r, π.χ., $Qr \to Q\sqcup r$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Η τυχαία σχέση $R(\vec{x})$ (στους φυσικούς αριθμούς) είναι **αναδρομική** αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι αναδρομική, και ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι **αναδρομικό** αν η (ολική) χαρακτηριστική συνάρτησή του

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

είναι αναδρομική. Σ' αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές μαθηματικές ιδιότητες των αναδρομικών (μερικών) συναρτήσεων, σχέσεων και συνόλων, αλλά και τις *ημιαναδρομικές σχέσεις* όπως και τα *αναδρομικά απαριθμητά σύνολα*, τα απλούστερα μη-υπολογίσιμα μαθηματικά αντικείμενα. Τα βασικά εργαλεία είναι η στιβαρή κλειστότητα του συνόλου $\mathcal{R}$ (2C.3, 2C.4,2D.1) και το Θεώρημα 3A.1 Κανονικής Μορφής και Απαρίθμησης του Kleene.

Στις επικλήσεις του Θεωρήματος 3A.1 θα απλοποιήσουμε το συμβολισμό, παραλείποντας τον άνω δείκτη

$$\varphi_e(\vec{x}) = \varphi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$$

(που, συνήθως, είναι άνευ σημασίας αλλά και δηλώνεται από την είσοδο $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$), και χρησιμοποιώντας σε μερικές περιπτώσεις τον εναλλακτικό συμβολισμό του Kleene,

$$\{e\}(\vec{x}) = \varphi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)). \tag{83}$$

Αυτό βολεύει «τυπογραφικά» (λιγότεροι άνω και κάτω δείκτες), αλλά και βοηθά στη κατανόηση μερικών από τις αποδείξεις, γιατί τοποθετεί «στο ίδιο επίπεδο» το *πρόγραμμα* e και τα *δεδομένα* $\vec{x}$. Τελικά, θα χρησιποποιήσουμε επίσης το συμβολισμό

$$W_e = \{x \mid \varphi_e(x)\downarrow\} \tag{84}$$

για το πεδίο σύγκλισης της αναδρομικής μερικής συνάρτησης με κωδικό e.

4A. Ημιαναδρομικές σχέσεις

Για να διευκολύνουμε τη διατύπωση ορισμών και αποτελεσμάτων στη συνέχεια, απαριθμούμε εδώ και ονομάζουμε τους βασικότερους τελεστές ορισμών σχέσεων:

$(\neg)$ $P(\vec{x}) \iff \neg Q(\vec{x})$
$(\&)$ $P(\vec{x}) \iff Q(\vec{x}) \mathbin{\&} R(\vec{x})$
$(\vee)$ $P(\vec{x}) \iff Q(\vec{x}) \vee R(\vec{x})$
$(\Rightarrow)$ $P(\vec{x}) \iff Q(\vec{x}) \Longrightarrow R(\vec{x})$
$(\exists)$ $P(\vec{x}) \iff (\exists y)Q(\vec{x}, y)$
$(\exists_{\leq})$ $P(z, \vec{x}) \iff (\exists i \leq z)Q(\vec{x}, i)$
$(\forall)$ $P(\vec{x}) \iff (\forall y)Q(\vec{x}, y)$
$(\forall_{\leq})$ $P(z, \vec{x}) \iff (\forall i \leq z)Q(\vec{x}, i)$
(αντικατάσταση) $P(\vec{x}) \iff Q(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

Ως παράδειγμα, έχουμε ήδη δείξει ότι το σύνολο των πρωτογενώς αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για όλους αυτούς τους τελεστές (με πρωτογενώς αναδρομικές $f_i(\vec{x})$) εκτός από τους (μη-φραγμένους) ποσοδείχτες $\exists, \forall$, για τους οποίους δεν είναι κλειστό από το Θεώρημα 3A.4. Επίσης έχουμε δείξει (κυρίως σε ασκήσεις) και τις ιδιότητες κλειστότητας των αναδρομικών σχέσεων:

4A.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το σύνολο των αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για τους τελεστές του προτασιακού λογισμού* $\neg, \&, \vee, \Rightarrow$, *τους φραγμένους ποσοδείχτες* $\exists_{\leq}, \forall_{\leq}$ *και αντικατάσταση* (ολικών) *αναδρομικών συναρτήσεων, αλλά δεν είναι κλειστό για τους ποσοδείχτες* $\exists, \forall$.

4A.2. ΟΡΙΣΜΟΣ. (a) Η σχέση $P(\vec{x})$ είναι **ημιαναδρομική** αν για κάποια μερική, αναδρομική συνάρτηση $f(\vec{x})$,

$$P(\vec{x}) \iff f(\vec{x})\downarrow.$$

(b) Η σχέση $P(\vec{x})$ είναι Σ^0_1 αν για κάποια αναδρομική σχέση $Q(\vec{x}, y)$

$$P(\vec{x}) \iff (\exists y)Q(\vec{x}, y).$$

4A.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Τα εξής είναι ισοδύναμα, για την τυχαία σχέση* $P(\vec{x})$:
(1) *Η* $P(\vec{x})$ *είναι ημιαναδρομική.*
(2) *Η* $P(\vec{x})$ *είναι* Σ^0_1.
(3) *Η* $P(\vec{x})$ *ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$P(\vec{x}) \iff (\exists y)Q(\vec{x}, y)$$

με κάποια πρωτογενώς αναδρομική $Q(\vec{x}, y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Longrightarrow$ (3) από το θεώρημα κανονικής μορφής· (3) $\Longrightarrow$ (2) τετριμμένα· και (2) $\Longrightarrow$ (1) θέτοντας

$$f(\vec{x}) = \mu y Q(\vec{x}, y),$$

έτσι που

$$(\exists y)Q(\vec{x}, y) \iff f(\vec{x})\!\downarrow. \qquad \dashv$$

Έχουμε ήδη συναντήσει το κλασικό παράδειγμα σχέσης που είναι ημιαναδρομική αλλά όχι αναδρομική, τη σχέση τερματισμού $H(e, x)$ (3A.4).

4A.4. ΠΡΟΤΑΣΗ (**Θεώρημα Kleene**). *Η τυχαία σχέση $P(\vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνον αν η $P(\vec{x})$ και η άρνησή της $\neg P(\vec{x})$ είναι και οι δύο ημιαναδρομικές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η $P(\vec{x})$ είναι αναδρομική, τότε και οι

$$Q(\vec{x}, y) \iff P(\vec{x}), \qquad R(\vec{x}, y) \iff \neg P(\vec{x})$$

είναι αναδρομικές, και έχουμε (τετριμμένα)

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\iff (\exists y)Q(\vec{x}, y) \\ \neg P(\vec{x}) &\iff (\exists y)R(\vec{x}, y). \end{aligned}$$

Για την άλλη κατεύθυνση, αν

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\iff (\exists y)Q(\vec{x}, y) \\ \neg P(\vec{x}) &\iff (\exists y)R(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

με αναδρομικές σχέσεις Q και R, τότε η συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = \mu y[R(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)]$$

είναι ολική αναδρομική, και

$$P(\vec{x}) \iff Q(\vec{x}, f(\vec{x})). \qquad \dashv$$

4A.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το σύνολο των ημιαναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για αναδρομικές αντικαταστάσεις, για τους «θετικούς» προτασιακούς τελεστές $\&, \vee$, για τους φραγμένους ποσοδείχτες $\exists_\leq, \forall_\leq$, και για τον υπαρξιακό ποσοδείχτη $\exists$· δεν είναι κλειστό για την άρνηση $\neg$ και για τον καθολικό ποσοδείχτη $\forall$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η κλειστότητα για αναδρομικές αντικαταστάσεις είναι προφανής, και οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί δείχνουν τους υπόλοιπους, θετικούς ισχυρισμούς της πρότασης:

$$\begin{aligned}
(\exists y)Q(\vec{x},y) \vee (\exists y)R(\vec{x},y) &\iff (\exists u)[Q(\vec{x},u) \vee R(\vec{x},u)]\\
(\exists y)Q(\vec{x},y) \,\&\, (\exists y)R(\vec{x},y) &\iff (\exists u)[Q(\vec{x},(u)_0) \,\&\, R(\vec{x},(u)_1)]\\
(\exists z)(\exists y)Q(\vec{x},y,z) &\iff (\exists u)R(\vec{x},(u)_0,(u)_1)\\
(\exists i \le z)(\exists y)Q(\vec{x},y,i) &\iff (\exists u)[(u)_0 \le z \,\&\, Q(\vec{x},(u)_1,(u)_0)\\
(\forall i \le z)(\exists y)Q(\vec{x},y,i) &\iff (\exists u)(\forall i \le z)Q(\vec{x},(u)_i,i).
\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, το σύνολο των ημιαναδρομικών σχέσεων δεν είναι κλειστό για την άρνηση ή τον καθολικό ποσοδείχτη, γιατί αλλιώς η βασική σχέση τερματισμού

$$H(e,x) \iff (\exists y)T_1(e,x,y)$$

θα είχε ημιαναδρομική άρνηση και θα ήταν αναδρομική από το 4Α.4, ενώ δεν είναι. ⊣

Το **γράφημα** μιας μερικής συνάρτησης $f(\vec{x})$ είναι η σχέση στους φυσικούς

$$G_f(\vec{x},w) \iff f(\vec{x}) = w, \tag{85}$$

και η επόμενη, απλή πρόταση δίνει σε πολλές περιπτώσεις τετριμμένες αποδείξεις αναδρομικότητας για μερικές συναρτήσεις.

4Α.6. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η τυχαία μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνον αν το γράφημά της $G_f(\vec{x},w)$ είναι ημιαναδρομική σχέση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική με κωδικό $\widehat{f}$, τότε

$$G_f(\vec{x},w) \iff (\exists y)[T_n(\widehat{f},\vec{x},y) \,\&\, U(y) = w],$$

έτσι που η $G_f(\vec{x},w)$ είναι ημιαναδρομική· και αν

$$f(\vec{x}) = w \iff (\exists u)R(\vec{x},w,u)$$

με κάποια αναδρομική $R(\vec{x},w,u)$, τότε

$$f(\vec{x}) = \Big(\mu u R(\vec{x},(u)_0,(u)_1)\Big)_0,$$

έτσι που η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική. ⊣

Το τελευταίο αποτέλεσμα σ' αυτό το εδάφιο απλοποιεί σημαντικά πολλές κατασκευές.

4Α.7. ΠΡΟΤΑΣΗ (**Λήμμα Σ^0_1-επιλογής**). *Για κάθε ημιαναδρομική σχέση $R(\vec{x},w)$, υπάρχει αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ τέτοια που για κάθε $\vec{x}$,*

$$\begin{aligned}
(\exists w)R(\vec{x},w) &\iff f(\vec{x})\downarrow\\
(\exists w)R(\vec{x},w) &\implies R(\vec{x},f(\vec{x})).
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχει αναδρομική σχέση $P(\vec{x}, w, y)$ τέτοια που

$$R(\vec{x}, w) \iff (\exists y)P(\vec{x}, w, y),$$

και το συμπέρασμα του Λήμματος δείχνεται εύκολα αν θέσουμε

$$f(\vec{x}) = \Big(\mu u P(\vec{x}, (u)_0, (u)_1)\Big)_0. \qquad \dashv$$

4A. Ασκήσεις

x4A.1. Δείξτε ότι η μερική συνάρτηση

$$f(e, u) = \langle \varphi_e((u)_0), \dots, \varphi_e((u)_{\mathrm{lh}(u) \dot{-} 1})\rangle$$

είναι αναδρομική.

x4A.2. Έστω $R(\vec{x}, w)$ ημιαναδρομική σχέση τέτοια που για κάθε $\vec{x}$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο αριθμοί $w_1 \neq w_2$ τέτοιοι που $R(\vec{x}, w_1)$ και $R(\vec{x}, w_2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο, ολικές αναδρομικές συναρτήσεις $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ τέτοιες που για όλα τα $\vec{x}$,

$$R(\vec{x}, f(\vec{x})) \;\&\; R(\vec{x}, g(\vec{x})) \;\&\; f(\vec{x}) \neq g(\vec{x}).$$

x4A.3*. Έστω $R(\vec{x}, w)$ ημιαναδρομική σχέση τέτοια που για κάθε $\vec{x}$, υπάρχει τουλάχιστον ένας w τέτοιος που $R(\vec{x}, w)$.

(a) Δείξτε ότι υπάρχει ολική αναδρομική συνάρτηση $f(n, \vec{x})$, τέτοια που

$$R(\vec{x}, w) \iff (\exists n)[w = f(n, \vec{x})]. \tag{86}$$

(b) Δείξτε ότι αν (επιπλέον) για κάθε $\vec{x}$, υπάρχουν άπειροι το πλήθος w τέτοιοι που $R(\vec{x}, w)$, τότε υπάρχει ολική, αναδρομική $f(n, \vec{x})$ που ικανοποιεί την (86) και είναι «1–1 στο n», δηλαδή, για όλα τα $\vec{x}, m, n$,

$$m \neq n \Longrightarrow f(m, \vec{x}) \neq f(n, \vec{x}).$$

4B. Αναδρομικά απαριθμητά σύνολα

4B.1. Ορισμος. Το τυχαίο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι **αναδρομικά απαριθμητό** (ή *αναδρομικά αριθμήσιμο*, α.α., recursively enumerable, r.e.), αν $A = \emptyset$, ή κάποια ολική, αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ απαριθμεί το A,

$$A = f[\mathbb{N}] = \{f(0), f(1), \dots\}. \tag{87}$$

4B.2. Προταση. (1) *Τα εξής είναι ισοδύναμα για το τυχαίο $A \subseteq \mathbb{N}$:*

(a) *Το A είναι α.α.*

(b) *Η σχέση $x \in A$ είναι ημιαναδρομική, έτσι που*

$$A = \text{Domain}(g) = \{x \mid g(x)\!\downarrow\}$$

για κάποια αναδρομική μερική συνάρτηση g.

(c) *Το A είναι πεπερασμένο, ή υπάρχει ένα-προς-ένα αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ που απαριθμεί το A, $A = f[\mathbb{N}]$.*

(2) *Η ακολουθία*

$$W_0, W_1, \dots$$

απαριθμεί τα α.α. σύνολα έτσι που η σχέση $x \in W_e$ να είναι ημιαναδρομική.

(3) *Το τυχαίο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι αναδρομικό αν και μόνον αν είναι πεπερασμένο ή υπάρχει* (αυστηρά) *αύξουσα, αναδρομική συνάρτηση που απαριθμεί το A,*

$$A = \{f(0) < f(1) < f(2) < \cdots\}.$$

Αποδειξη. Για το (3), πρώτα, υπενθυμίζουμε (x1A.12) ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι *αύξουσα* αν

$$f(n) < f(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

που συνεπάγεται αμέσως (με επαγωγή) ότι

$$n \le f(n)\cdot$$

έπεται ότι αν το A απαριθμείται από μια αύξουσα, αναδρομική f, τότε

$$x \in A \iff (\exists n \le x)[x = f(n)],$$

και το A είναι αναδρομικό. Για την άλλη κατεύθυνση, αν το A είναι αναδρομικό και άπειρο, τότε η

$$\begin{aligned} f(0) &= (\mu x)[x \in A] \\ f(n+1) &= (\mu x)[x > f(n) \ \&\ x \in A] \end{aligned}$$

είναι αναδρομική, αύξουσα και απαριθμεί το A.

(1) Η συνεπαγωγή (a) $\Longrightarrow$ (b) είναι τετριμμένη για το $A = \emptyset$, και αν $A = f[\mathbb{N}]$, τότε

$$x \in A \iff (\exists i)[x = f(i)].$$

Το αντίστροφο (b) $\Longrightarrow$ (a) είναι επίσης τετριμμένο για το $A = \emptyset$, και αν $x_0 \in A$ και

$$x \in A \iff (\exists y)R(x, y),$$

τότε το A απαριθμείται από την αναδρομική, ολική συνάρτηση

$$f(u) = \begin{cases} x_0, & \text{αν } \neg R((u)_0, (u)_1), \\ (u)_0, & \text{αν } R((u)_0, (u)_1). \end{cases}$$

Τελικά, η συνεπαγωγή (c) $\Longrightarrow$ (a) είναι τετριμμένη, η (a) $\Longrightarrow$ (c) είναι επίσης τετριμμένη για πεπερασμένα A, και απομένει να δείξουμε ότι αν το A είναι άπειρο και

$$A = \{f(0), f(1), \dots\}$$

$$5 \quad 8 \quad \cancel{5} \quad 1 \quad 3 \quad \cancel{8} \quad \cancel{5} \quad 23 \qquad \cdots$$

Σχημα 5. Διαγραφή επαναλήψεων.

για κάποια αναδρομική συνάρτηση f, τότε το A απαριθμείται επίσης από κάποια ένα-προς-ένα αναδρομική συνάρτηση. Η βασική ιδέα είναι να «διαγράψουμε τις επαναλήψεις» από την απαρίθμηση με το f, κάτι που *προφανώς* οδηγεί σε μια ολική, ένα-προς-ένα *αναδρομική* απαρίθμηση του A.

Για την αυστηρή απόδειξη αυτής της «προφανούς» πρότασης, έστω

$$B = \{n \mid (\forall i < n)[f(i) \neq f(n)]\}$$

το αναδρομικό σύνολο των θέσεων όπου καινούργια μέλη του A απαριθμούνται από την f· $B = g[\mathbb{N}]$ για κάποια αύξουσα $g(n)$ από το μέρος (3), και το A απαριθμείται από την ένα-προς-ένα σύνθεση $h(n) = f(g(n))$.

Το (2) συνάγεται από το χαρακτηρισμό (b) του (1). ⊣

4B.3. Πορισμα. *Κάθε αναδρομικό σύνολο είναι α.α., αλλά υπάρχουν α.α. σύνολα που δεν είναι αναδρομικά, π.χ., το*

$$H' = \{x \mid H((x)_0, (x)_1)\}. \tag{88}$$

Αποδειξη. Αν το H' ήταν αναδρομικό, τότε αναδρομική θα ήταν και η σχέση τερματισμού (72), εφόσον

$$H(e, x) \iff \langle e, x \rangle \in H'. \qquad ⊣$$

Η κλάση των α.α. συνόλων έχει πολύ πλούσια δομή και έχει μελετηθεί εντατικά. Εδώ θα περιοριστούμε σε (ελάχιστα) βασικά αποτελέσματα, που δίνουν κάποια γεύση των ιδιοτήτων της.

4B.4. Ορισμος. **Αναγωγή** του συνόλου A στο B, είναι η τυχαία (ολική) αναδρομική συνάρτηση f που ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$x \in A \iff f(x) \in B. \tag{89}$$

Για δύο $A, B \subseteq \mathbb{N}$, θέτουμε:

$$\begin{aligned} A \leq_m B &\iff \text{υπάρχει αναγωγή του } A \text{ στο } B, \\ A \leq_1 B &\iff \text{υπάρχει ένα-προς-ένα αναγωγή του } A \text{ στο } B, \\ A \equiv B &\iff \text{υπάρχει αναγωγή του } A \text{ στο } B \text{ που είναι μετάθεση,} \end{aligned}$$

όπου η $f : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ είναι *μετάθεση* αν είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (ένα-προς-ένα και επί του $\mathbb{N}$). Προφανώς,

$$A \equiv B \Longrightarrow A \leq_1 B \Longrightarrow A \leq_m B.$$

4B.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για όλα τα σύνολα* A, B, C,

$$A \le_m A \text{ και } [A \le_m B \,\&\, B \le_m C] \Longrightarrow A \le_m C,$$

και το ίδιο ισχύει για τις ισχυρότερες αναγωγές $\le_1$ *και* $\equiv$· *επιπλέον, η σχέση αναδρομικού ισομορφισμού* $\equiv$ *είναι συμμετρική,*

$$A \equiv B \iff B \equiv A.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τη μεταβατικότητα αυτών των σχέσεων, παρατηρούμε ότι αν, από την υπόθεση

$$x \in A \iff g(x) \in B \text{ και } y \in B \iff h(y) \in C,$$

για δοσμένες αναδρομικές συναρτήσεις, τότε

$$x \in A \iff h(g(x)) \in C,$$

έτσι που η σύνθεση $f(x) = h(g(x))$ ανάγει το A στο C. ⊣

4B.6. ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σύνολο B είναι **α.α. πλήρες** αν είναι α.α. και κάθε α.α. A ανάγεται στο B με ένα-προς-ένα αναγωγή, $A \le_1 B$.

Για παράδειγμα, το H' που ορίσαμε στην (88) είναι πλήρες, επειδή κάθε α.α. σύνολο είναι της μορφής W_e για κάποιο e, και

$$x \in W_e \iff \varphi_e(x)\!\downarrow \iff \langle e, x\rangle \in H'.$$

Κάπως απλούστερο είναι το «διαγώνιο» σύνολο

$$K = \{x \mid (\exists y)T_1(x, x, y)\} = \{x \mid \varphi_x(x)\!\downarrow\}, \tag{90}$$

του οποίου η πληρότητα δεν είναι τελείως τετριμμένη.

4B.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το* K *είναι α.α. πλήρες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για το τυχαίο α.α. σύνολο

$$A = \{x \mid g(x)\!\downarrow\}$$

(με αναδρομική $g(x)$), θέτουμε

$$h(x, y) = g(x)$$

και επιλέγουμε κάποιο κωδικό $\widehat{h}$ της h, έτσι που για οποιοδήποτε y,

$$\begin{aligned} x \in A &\iff h(x, y)\!\downarrow \\ &\iff \{\widehat{h}\}(x, y)\!\downarrow \\ &\iff \{S^1_1(\widehat{h}, x)\}(y)\!\downarrow \cdot \end{aligned}$$

και αφού αυτή η ισοδυναμία ισχύει για όλα τα y, ιδιαίτερα ισχύει για το $y = S^1_1(\widehat{h}, x)$, και μας δίνει σ' αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \{S^1_1(\widehat{h}, x)\}(S^1_1(\widehat{h}, x))\!\downarrow \\ &\iff S^1_1(\widehat{h}, x) \in K, \end{aligned}$$

που αναγάγει το A στο K με τη συνάρτηση $f(x) = S^1_1(\widehat{h}, x)$. $\dashv$

Το επόμενο, βασικό θεώρημα δείχνει (εν μέρει) ότι μέχρις αναδρομικού ισομορφισμού υπάρχει μόνο ένα α.α. πλήρες σύνολο, αλλά είναι πολύ γενικότερο: ισχύει για όλα τα σύνολα A, B, όχι μόνο τα αναδρομικά απαριθμητά – και αυτό είναι που κάνει την απόδειξη τόσο δύσκολη.

4B.8. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Θεώρημα του Myhill**). *Για δύο σύνολα* A, B,

$$A \leq_1 B \;\&\; B \leq_1 A \Longrightarrow A \equiv B.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη είναι κατασκευαστική εκδοχή της απόδειξης του κλασικού Θεωρήματος Schröder-Bernstein στη συνολοθεωρία, και βασίζεται στο επόμενο Λήμμα, όπου η τυχαία πεπερασμένη ακολουθία ζευγών

$$W = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \tag{91}$$

καλείται **καλή** (προσέγγιση ισομορφισμού) για τα σύνολα A και B, αν

$$i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j, y_i \neq y_j, \text{ και } x_i \in A \iff y_i \in B \qquad (i, j \leq n).$$

Για κάθε ακολουθία W όπως στην (91), θέτουμε

$$X = X(W) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad Y = Y(W) = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}.$$

ΛΗΜΜΑ Χ. *Αν υπάρχει ένα-προς-ένα αναδρομική συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ *τέτοια που*

$$x \in A \iff f(x) \in B,$$

τότε για όλα τα

$$X = \{x_0, \dots, x_n\},\ Y = \{y_0, \dots, y_n\} \text{ και } x \notin X,$$

μπορούμε να βρούμε κάποιο $y \notin Y$, *έτσι που αν η ακολουθία*

$$W = (x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$$

είναι καλή, επίσης καλή είναι και η επέκταση

$$W' = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x, y), \tag{92}$$

δηλαδή $y \notin Y$ *και*

$$x \in A \iff y \in B.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ Χ. Θέτουμε

$$z_0 = f(x)$$
$$z_{i+1} = \begin{cases} z_i, & \text{αν } z_i \notin Y, \\ f(x_j), & \text{αλλιώς, αν } z_i = y_j, \end{cases}$$

και επαληθεύουμε δύο βασικές ιδιότητες της ακολουθίας $z_0, z_1, \dots$.

(1) Για κάθε i, $x \in A \iff z_i \in B$.

Απόδειξη. Για $i = 0$, $x \in A \iff f(x) = z_0 \in B$, από την υπόθεση για την f. Επαγωγικά, αν $z_i \notin Y$, τότε

$$x \in A \iff z_{i+1} = z_i \in B$$

από την επαγωγική υπόθεση, και αν $z_i \in Y$, τότε

$$\begin{aligned} x \in A &\iff z_i = y_j \in B \quad &&\text{(από την επαγωγική υπόθεση)}\\ &\iff x_j \in A \quad &&\text{(επειδή η δοσμένη ακολουθία είναι καλή)}\\ &\iff f(x_j) = z_{i+1} \in B. \end{aligned}$$

(2) Για κάθε i, $z_i \in Y \Longrightarrow (\forall k < i)[z_i \neq z_k]$.

Απόδειξη. Η πρόταση αληθεύει τετριμμένα αν $z_0 = f(x) \notin Y$, γιατί σ' αυτή την περίπτωση $z_i = f(x) \notin Y$ για κάθε i, από τον ορισμό. Επίσης η πρόταση αληθεύει τετριμμένα για $i = 0$, και, επαγωγικά, δεχόμαστε ότι η πρόταση αληθεύει για το i και $z_{i+1} \in Y$. Παρατηρούμε ότι $z_i \in Y$, αλλιώς (από τον ορισμό) $z_{i+1} = z_i \notin Y$· άρα, από τον ορισμό, για κάποιο j,

$$z_i = y_j, \quad z_{i+1} = f(x_j). \tag{93}$$

Προς άτοπο, έστω k το ελάχιστο αντιπαράδειγμα για το z_{i+1}, δηλαδή $k < i + 1$ και

$$z_{i+1} = z_k \ \& \ (\forall l < k)[z_{i+1} \neq z_l].$$

Παρατηρούμε ότι $k \neq 0$, επειδή $z_0 = f(x)$, $z_{i+1} = f(x_j)$ και επομένως

$$z_{i+1} = z_0 \Longrightarrow f(x_j) = f(x) \Longrightarrow x_j = x,$$

που είναι άτοπο, αφού $x \notin X$ ενώ $x_j \in X$· άρα $k = t + 1$ για κάποιο $t < i$, και από την επιλογή του k, $z_t \in Y$ (αλλιώς $z_{t+1} = z_t$ και το $t + 1$ δε θα ήταν το ελάχιστο αντιπαράδειγμα) και επομένως, για κάποιο s,

$$z_t = y_s, \quad z_{t+1} = f(x_s). \tag{94}$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} z_{i+1} = z_{t+1} &\Longrightarrow f(x_j) = f(x_s) \text{(από τις (93) και (94))}\\ &\Longrightarrow x_j = x_s \quad &&\text{(η } f \text{ είναι μονομορφισμός)}\\ &\Longrightarrow y_j = y_s \quad &&\text{(η ακολουθία είναι καλή)}\\ &\Longrightarrow z_i = z_t \quad &&\text{(από τις (93) και (94)).} \end{aligned}$$

Έπεται από την επαγωγική υπόθεση ότι $t \geq i$, άρα $t+1 \geq i+1$ που αντιτίθεται στην υπόθεση $t + 1 < i + 1$.

Η πρόταση (2) τώρα συνεπάγεται ότι για κάποιο $j < n + 2$, $z_j \notin Y$ (αφού το Y έχει $n + 1$ μέλη), και το Λήμμα αληθεύει με την επιλογή $y = z_j$, $W' = W, (x, y)$. ⊣ (Λήμμα X)

Το συμμετρικό Λήμμα Y αποδίδει για κάθε ακολουθία W και κάθε $y \notin Y$ ένα $x \notin X$ τέτοιο που αν η W είναι καλή, τότε καλή είναι και η επέκταση

$W' = W, (x, y)$. Μ' αυτά τα Λήμματα, η μετάθεση που χρειαζόμαστε κατασκευάζεται με διαδοχική εφαρμογή των εξής δύο βημάτων, ξεκινώντας από την καλή ακολουθία

$$W_0 = (0, f(0)), \quad X_0 = \{0\}, Y_0 = \{f(0)\}.$$

Περιττό βήμα $2n + 1$. Θέτουμε $y = \min(\mathbb{N} \setminus Y_{2n})$ και επεκτείνουμε την W_{2n} με εφαρμογή του Λήμματος Y έτσι που $y \in Y_{2n+1}$.

Άρτιο βήμα $2n + 2$. Θέτουμε $x = \min(\mathbb{N} \setminus X_{2n+1})$ και επεκτείνουμε την W_{2n+1} με εφαρμογή του Λήμματος X έτσι που $x \in X_{2n+2}$.

Στο τέλος, η ένωση $\bigcup_n W_n$ είναι γράφημα μετάθεσης $h : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ που ανάγει το A στο B,

$$x \in A \iff h(x) \in B.$$

Η αναδρομικότητα της h συνάγεται από τη κατασκευή και συμπληρώνει την απόδειξη ότι $A \equiv B$. $\dashv$

4B.9. **Παρατήρηση**. Αν $A \leq_m B$, και το B είναι αναδρομικό, τότε και το A είναι αναδρομικό· έπεται ότι αν $A \leq_m B$ και το A δεν είναι αναδρομικό, τότε και το B δεν είναι αναδρομικό.

Μαζί με την πληρότητα του K, η απλή αυτή πρόταση είναι το πρώτο, βασικό εργαλείο για την απόδειξη μη-αναδρομικότητας συνόλων και σχέσεων: γιατί αν δείξουμε ότι $A \leq_m B$ με κάποιο A που δεν είναι αναδρομικό (π.χ., το K), τότε έπεται ότι και το B δεν είναι αναδρομικό.

4B.10. ΠΡΟΤΑΣΗ (Παράδειγμα). *Το σύνολο*

$$A = \{e \mid W_e \neq \emptyset\}$$

είναι α.α. αλλά όχι αναδρομικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το A είναι α.α. επειδή η σχέση

$$e \in A \iff (\exists x)[x \in W_e]$$

είναι Σ^0_1. Για να δείξουμε ότι $K \leq_m A$, θέτουμε

$$g(e, x) = \mu y T_1(e, e, y)$$

έτσι που η τιμή $g(e, x)$ είναι ανεξάρτητη του x,

$$g(e, x) = \begin{cases} \mu y T_1(e, e, y), & \text{αν } (\exists y) T_1(e, e, y), \\ \bot, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και, για κάθε x,

$$e \in K \iff g(e, x)\downarrow,$$

έτσι που

$$e \in K \iff (\exists x) g(e, x)\downarrow \cdot$$

έπεται ότι αν ο $\widehat{g}$ είναι κωδικός της $g(x,y)$, τότε

$$\begin{aligned} e \in K &\iff (\exists x)[\{\widehat{g}\}(e,x)\!\downarrow] \\ &\iff (\exists x)[\{S^1_1(\widehat{g},e)\}(x)\!\downarrow] \\ &\iff W_{S^1_1(\widehat{g},e)} \neq \emptyset \\ &\iff S^1_1(\widehat{g},e) \in A, \end{aligned}$$

άρα $K \leq_1 A$ και το A δεν είναι αναδρομικό. ⊣

Παρατηρούμε ότι μ' αυτή τη κατασκευή,

$$\begin{aligned} e \in K &\iff W_{S^1_1(\widehat{g},e)} = \mathbb{N} \\ &\iff \text{το } W_{S^1_1(\widehat{g},e)} \text{ έχει τουλάχιστον 2 μέλη} \end{aligned}$$

έτσι που τα σύνολα

$$B = \{e \mid W_e = \mathbb{N}\}, \quad C = \{e \mid \text{ το } W_e \text{ έχει τουλάχιστον 2 μέλη}\}$$

επίσης δεν είναι αναδρομικά.

4B.11. **Αναδρομικός διαχωρισμός** δύο συνόλων A και B είναι το τυχαίο αναδρομικό σύνολο C τέτοιο που $A \subseteq C$ και $B \cap C = \emptyset$.

Αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε, προφανώς, δεν υπάρχει διαχωρισμός του A από το B, και αν το A είναι αναδρομικό και $A \cap B = \emptyset$, τότε, πάλι προφανώς, το A διαχωρίζει τον εαυτό του από το B.

4B.12. ΠΡΟΤΑΣΗ (Kleene). *Υπάρχουν α.α. σύνολα K_0 και K_1 τέτοια που $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ και δεν υπάρχει αναδρομικός διαχωρισμός του K_0 από το K_1.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$\begin{aligned} K_0 &= \{e \mid (\exists y)[T_1((e)_0,e,y) \ \& \ (\forall z \leq y)\neg T_1((e)_1,e,z)]\}, \\ K_1 &= \{e \mid (\exists z)[T_1((e)_1,e,z) \ \& \ (\forall y < z)\neg T_1((e)_0,e,y)]\}, \end{aligned}$$

και δείχνουμε πρώτα ότι $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ με απαγωγή στο άτοπο· γιατί αν $e \in K_0 \cap K_1$ και

$$\begin{aligned} y^* &= \mu y[T_1((e)_0,e,y) \ \& \ (\forall z \leq y)\neg T_1((e)_1,e,z)] \\ z^* &= \mu z[T_1((e)_1,e,z) \ \& \ (\forall y < z)\neg T_1((e)_0,e,y)], \end{aligned}$$

τότε, από τους ορισμούς,

$$\begin{aligned} y^* < z^* &\implies T_1((e)_0,e,y^*) \ \& \ (\forall y < z^*)\neg T_1((e)_0,e,y) \\ &\implies T_1((e)_0,e,y^*) \ \& \ \neg T_1((e)_0,e,y^*), \end{aligned}$$

και το ανάλογο άτοπο συνάγεται από την αντίθετη υπόθεση, ότι $z^* \leq y^*$.

Πάλι προς άτοπο, ας είναι τα W_e, W_m α.α. τέτοια που

$$K_0 \subseteq W_e, \quad K_1 \subseteq W_m, \quad W_e \cap W_m = \emptyset, \quad W_e \cup W_m = \mathbb{N},$$

και έστω $t = \langle m, e\rangle$· υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} t \in W_e &\Longrightarrow (\exists z)T_1(e, \langle m, e\rangle, z) \ \& \ (\forall y)\neg T_1(m, \langle m, e\rangle, y) \\ &\qquad \text{επειδή } W_e \cap W_m = \emptyset \\ &\Longrightarrow (\exists z)[T_1(e, \langle m, e\rangle, z) \ \& \ (\forall y < z)\neg T_1(m, \langle m, e\rangle, y)] \\ &\Longrightarrow \langle m, e\rangle \in K_1 \qquad \text{από τον ορισμό} \\ &\Longrightarrow \langle m, e\rangle \in W_m \qquad \text{επειδή } K_1 \subseteq W_m, \end{aligned}$$

άρα $t \in W_e \cap W_m$ που είναι άτοπο. Έπεται ότι $t \in W_m$, αφού $W_e \cup W_m = \mathbb{N}$, αλλά ο συμμετρικός υπολογισμός συνάγει πάλι απ' αυτό ότι $t \in W_m \cap W_e$, που είναι άτοπο. ⊣

4B. Ασκήσεις

x4B.1. Δείξτε ότι υπάρχει αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(e)$, τέτοια που

$$W_e \neq \emptyset \Longrightarrow [f(e)\downarrow \ \& \ f(e) \in W_e].$$

x4B.2. Για κάθε μια από τις εξής προτάσεις αποφασίστε αν για τυχαία, αναδρομικά απαριθμητά σύνολα A και B η πρόταση αληθεύει ή όχι· δείξτε τις θετικές αποφάσεις σας και δώστε αντιπαραδείγματα για τις αρνητικές:
(a). Το $A \cap B$ είναι α.α.
(b). Το $A \cup B$ είναι α.α.
(c). Το $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ είναι α.α.

x4B.3. Δείξτε ότι κάθε άπειρο, α.α. σύνολο έχει άπειρο, αναδρομικό υποσύνολο.

x4B.4. Αληθεύουν ή όχι; Δώστε αποδείξεις ή αντιπαραδείγματα.

(1) Υπάρχει (ολική) αναδρομική συνάρτηση $u_1(e, m)$ τέτοια που για όλα τα e, m,

$$W_{u(e,m)} = W_e \cup W_m.$$

(2) Υπάρχει (ολική) αναδρομική συνάρτηση $u_2(e, m)$ τέτοια που για όλα τα e, m,

$$W_{u(e,m)} = W_e \cap W_m.$$

(3) Υπάρχει (ολική) αναδρομική συνάρτηση $u_3(e, m)$ τέτοια που για όλα τα e, m,

$$W_{u(e,m)} = W_e \setminus W_m.$$

x4B.5. Υπάρχει ολική, αναδρομική συνάρτηση $f(e, m)$ τέτοια που για όλα τα e, m,

$$W_{f(e,m)} = \{x + y \mid x \in W_e \text{ και } y \in W_m\};$$

(Αποδείξτε την απάντηση σας.)

x4B.6. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (ολική) αναδρομική συνάρτηση, $A \subseteq \mathbb{N}$, και

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$
$$f^{-1}[A] = \{x \mid f(x) \in A\}$$

η *εικόνα* και η *αντίστροφη εικόνα* του A από την f. Για κάθε μια από τις εξής προτάσεις αποφασίστε αν αληθεύει ή όχι, αποδείξτε τις θετικές σας αποφάσεις και δώστε αντιπαραδείγματα για τις αρνητικές.

(a) Αν το A είναι α.α., είναι και το $f[A]$ α.α.;
(b) Αν το A είναι α.α., είναι και το $f^{-1}[A]$ α.α.;
(c) Αν το A είναι αναδρομικό, είναι και το $f[A]$ αναδρομικό;
(d) Αν το A είναι αναδρομικό, είναι και το $f^{-1}[A]$ αναδρομικό;

x4B.7. Η *κλειστότητα* (closure) $\overline{A}$ ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}$ για μια μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$, είναι το ελάχιστο σύνολο B τέτοιο που $B \supseteq A$ και το B είναι κλειστό για την f, δηλαδή

$$[x \in B \ \&\ f(x)\downarrow] \Longrightarrow f(x) \in B.$$

(a) Δείξτε ότι αν το A είναι α.α. και η $f(x)$ είναι αναδρομική (μερική), τότε και η κλειστότητα $\overline{A}$ του A για την f είναι α.α.

(b) Δείξτε ότι υπάρχει πρωτογενής αναδρομική συνάρτηση $u(e, m)$, τέτοια που για όλα τα e και m, το $W_{u(e,m)}$ είναι η κλειστότητα $\overline{W_e}$ του W_e για την αναδρομική μερική συνάρτηση φ_m με κωδικό m.

x4B.8. Δείξτε ότι το σύνολο

$$K_0 = \{e \mid (\exists y)[T_1((e)_0, e, y) \ \&\ (\forall z \leq y)\neg T_1((e)_1, e, z)]\}$$

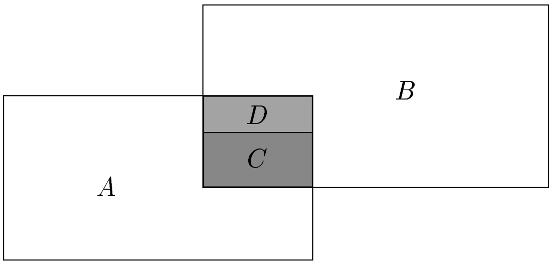
είναι α.α.-πλήρες.

x4B.9. (Η ιδιότητα της *αναγωγής* (reduction) για την κλάση των α.α. συνόλων). Δείξτε ότι αν τα σύνολα A και B είναι α.α., τότε υπάρχουν α.α. σύνολα A_1, B_1, τέτοια που

$$A_1 \subseteq A, \quad B_1 \subseteq B, \quad A_1 \cup B_1 = A \cup B, \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset.$$

x4B.10. [Η ιδιότητα του *διαχωρισμού* (separation) για την κλάση των α.α.συμπληρωμάτων.] Δείξτε ότι αν τα A και B είναι συμπληρώματα α.α. συνόλων A^c και B^c και $A \cap B = \emptyset$, τότε υπάρχει αναδρομικό C που διαχωρίζει το A από το B, δηλαδή,

$$A \subseteq C, \quad C \cap B = \emptyset.$$



$$A_1 = (A \setminus B) \cup C, B_1 = (B \setminus A) \cup D$$

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στα συμπληρώματα A^c και B^c.

x4B.11. Μία από τις δύο επόμενες προτάσεις αληθεύει, ενώ η άλλη δεν αληθεύει. Δώστε απόδειξη αυτής που αληθεύει και αντιπαράδειγμα αυτής που δεν αληθεύει.

(a) Αν $A \subseteq B$ και τα A, B^c είναι α.α., τότε υπάρχει αναδρομικό σύνολο C τέτοιο που $A \subseteq C \subseteq B$.

(b) Αν $A \subseteq B$ και τα A^c, B είναι α.α., τότε υπάρχει αναδρομικό σύνολο C τέτοιο που $A \subseteq C \subseteq B$.

4C. Παραγωγικά, δημιουργικά και απλά σύνολα

Μέχρι τώρα, τα μόνα α.α., μη-αναδρομικά σύνολα που έχουμε συναντήσει είναι α.α. πλήρη, και δημιουργείται η ερώτηση αν κάθε α.α. σύνολο είναι ή αναδρομικό ή α.α. πλήρες. Η επόμενη σειρά ορισμών και προτάσεων (του Emil Post) δείχνει ότι η απλή αυτή εικόνα είναι πολύ μακριά από την πραγματικότητα.

4C.1. Ορισμος. Η συνάρτηση $p : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ είναι **παραγωγική συνάρτηση** για το σύνολο B αν είναι αναδρομική, ένα-προς-ένα και

$$W_e \subseteq B \Longrightarrow p(e) \in B \setminus W_e\cdot$$

και το σύνολο B είναι **παραγωγικό** αν έχει παραγωγική συνάρτηση.

Το σύνολο A είναι **δημιουργικό** αν είναι α.α. και το συμπλήρωμά του

$$A^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\}$$

είναι παραγωγικό.

4C.2. Προταση. *Το K είναι δημιουργικό, με παραγωγική συνάρτηση για το K^c την ταυτοτική $p(e) = e$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$W_e \subseteq K^c \Longrightarrow e \in K^c \setminus W_e,$$

δηλαδή

$$(\forall t)[t \in W_e \Longrightarrow t \notin K] \Longrightarrow [e \notin W_e \ \& \ e \notin K].$$

Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι

$$(\forall t)[\{e\}(t)\downarrow \Longrightarrow \{t\}(t)\uparrow]$$

και το συμπέρασμα απλά

$$\{e\}(e)\uparrow,$$

επειδή

$$e \notin W_e \iff e \notin K \iff \{e\}(e)\uparrow\cdot$$

και η υπόθεση συνεπάγεται το συμπέρασμα, γιατί αν $\{e\}(e)\downarrow$, τότε θέτοντας $t = e$ στην υπόθεση έχουμε $\{e\}(e)\uparrow$, που είναι άτοπο. ⊣

4C.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε α.α. πλήρες σύνολο είναι δημιουργικό.*

Αφήνουμε την απόδειξη για άσκηση, x4C.1.

Το αντίστροφο αυτού του πορίσματος επίσης ισχύει και δίνει ένα «δομικό» χαρακτηρισμό της α.α. πληρότητας, αλλά η απόδειξή του δεν είναι τόσο απλή και θα την αναβάλουμε για το επόμενο εδάφιο. Στο υπόλοιπο αυτού του εδαφίου κατασκευάζουμε α.α. σύνολα που δεν είναι δημιουργικά, άρα και όχι πλήρη.

4C.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε παραγωγικό σύνολο B έχει άπειρο, α.α. υποσύνολο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ιδέα είναι να ορίσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με την αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0) &= e_0, \text{ όπου } W_{e_0} = \emptyset \\ f(x+1) &= \text{κάποιος κωδικός του } W_{f(x)} \cup \{p(f(x))\} \end{aligned}$$

όπου η $p(e)$ είναι η δοσμένη παραγωγική συνάρτηση για το B. Αν το καταφέρουμε αυτό, τότε με μια εύκολη επαγωγή δείχνουμε ότι για κάθε x,

$$W_{f(x)} \subsetneq W_{f(x+1)} \subseteq B,$$

έτσι που το σύνολο

$$A = W_{f(0)} \cup W_{f(1)} \cup \ldots = \{y \mid (\exists x)[y \in W_{f(x)}\}$$

είναι α.α., άπειρο υποσύνολο του B. Για τον υπολογισμό της απαιτούμενης $h(w, x)$ τέτοιας που

$$f(x+1) = h(f(x), x),$$

θέτουμε πρώτα

$$R(e, y, x) \iff x \in W_e \vee x = y$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ημιαναδρομική σχέση, έτσι που για κάποιο $\widehat{g}$,

$$\begin{aligned} x \in W_e \cup \{y\} &\iff \{\widehat{g}\}(e, y, x)\downarrow \\ &\iff \{S^2_1(\widehat{g}, e, y)\}(x)\downarrow, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι αν θέσουμε

$$\mathcal{U}(e, y) = S^2_1(\widehat{g}, e, y),$$

τότε

$$W_{\mathcal{U}(e,y)} = W_e \cup \{y\}.$$

Τελικά ορίζουμε

$$h(w, x) = \mathcal{U}(w, p(w)),$$

και στον ορισμό της f,

$$f(x + 1) = h(f(x), x) = \mathcal{U}(f(x), p(f(x)))$$

έτσι που

$$W_{f(x+1)} = W_{f(x)} \cup \{p(f(x))\}$$

όπως απαιτούσε η απόδειξη. ⊣

4C.5. Ορισμος. Το σύνολο A είναι **απλό**, αν είναι α.α. και το συμπλήρωμά του A^c είναι άπειρο και δεν έχει άπειρο, α.α. υποσύνολο, δηλαδή

$$W_e \cap A = \emptyset \Longrightarrow \text{το } W_e \text{ είναι πεπερασμένο.}$$

4C.6. Θεωρημα (Emil Post). *Υπάρχει απλό σύνολο.*

Αποδειξη. Η σχέση

$$R(x, y) \iff y \in W_x \;\&\; y > 2x$$

είναι ημιαναδρομική, άρα από το Λήμμα Σ^0_1-Επιλογής 4A.7 υπάρχει αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(x)$ τέτοια που

$$\begin{aligned} (\exists y)[y \in W_x \;\&\; y > 2x] &\iff f(x)\downarrow \\ &\iff f(x)\downarrow \;\&\; f(x) \in W_x \;\&\; f(x) > 2x. \end{aligned}$$

Το απαιτούμενο σύνολο είναι η εικόνα της f,

$$\begin{aligned} A &= \{f(x) \mid f(x)\downarrow\} \\ &= \{y \mid (\exists x)[f(x) = y]\} \\ &= \{y \mid (\exists x)[f(x) = y \;\&\; 2x < y]\}, \end{aligned} \tag{95}$$

όπου η τελευταία, βασική ισότητα συνάγεται από τον ορισμό της σχέσης $R(x, y)$.

(1) Το A είναι ημιαναδρομικό, από τον ορισμό του (επειδή το γράφημα της $f(x)$ είναι Σ^0_1).

(2) Το συμπλήρωμα A^c είναι άπειρο, επειδή

$$\begin{aligned} y \in A \,\&\, y \leq 2z &\implies (\exists x)[y = f(x) \,\&\, 2x < y \leq 2z] \\ &\implies (\exists x)[y = f(x) \,\&\, x < z], \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι *το πολύ* z *από τους* $2z + 1$ *αριθμούς* $\leq 2z$ *ανήκουν στο* A· έπεται ότι κάποιος $y \geq z$ ανήκει στο συμπλήρωμα A^c, και αφού αυτό ισχύει για κάθε z, το A^c είναι άπειρο.

(3) Για κάθε άπειρο W_e, $W_e \cap A \neq \emptyset$, επειδή

$$\begin{aligned} W_e \text{ άπειρο} &\implies (\exists y)[y \in W_e \,\&\, y > 2e] \\ &\implies f(e)\downarrow \,\&\, f(e) \in W_e \\ &\implies f(e) \in W_e \cap A. \end{aligned} \qquad \dashv$$

4C.7. ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τα απλά σύνολα δεν είναι α.α. πλήρη, άρα υπάρχει α.α., μη-αναδρομικό σύνολο που δεν είναι α.α. πλήρες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ένα απλό A δεν μπορεί να είναι αναδρομικό, γιατί τότε το άπειρο συμπλήρωμά του θα ήταν α.α. χωρίς να τέμνει το A· και δεν μπορεί να είναι α.α. πλήρες, γιατί δεν είναι δημιουργικό από τη Πρόταση 4C.4. ⊣

4C. Ασκήσεις

x4C.1. Δείξτε ότι αν το A είναι δημιουργικό, το B είναι α.α. και $A \leq_1 B$, τότε και το B είναι δημιουργικό.

x4C.2. Δείξτε ότι αν το A είναι απλό και το B είναι α.α., άπειρο, τότε η τομή $A \cap B$ είναι άπειρη.

x4C.3*. Δείξτε ότι αν τα A και B είναι απλά σύνολα, τότε και η τομή τους $A \cap B$ είναι απλό σύνολο.

x4C.4. Για τις επόμενες δύο προτάσεις, αποφασίστε αν αληθεύουν ή όχι, και δικαιολογήστε την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(a) Για κάθε άπειρο α.α. σύνολο A, υπάρχει πλήρης, αναδρομική συνάρτηση f, τέτοια που για κάθε x,

$$f(x) > x \text{ και } f(x) \in A.$$

(b) Για κάθε α.α. σύνολο B με άπειρο συμπλήρωμα, υπάρχει πλήρης αναδρομική συνάρτηση g, τέτοια που για κάθε x,

$$g(x) > x \text{ και } g(x) \notin B.$$

x4C.5*. (a) Δείξτε ότι αν το A είναι απλό, η $f(x)$ είναι ολική, αναδρομική και ένα-προς-ένα, και η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[A]$ έχει άπειρο συμπλήρωμα, τότε το $f^{-1}[A]$ είναι απλό σύνολο.

(b) Δείξτε ότι αν παραλείψουμε μια από τις υποθέσεις *ολική*, *ένα-προς-ένα*, *άπειρο συμπλήρωμα του* $f^{-1}[A]$, τότε το συμπέρασμα του (5c) δεν ισχύει απαραίτητα.

4D. Το 2ο Θεώρημα Αναδρομής

Σ' αυτό το εδάφιο θα αποδείξουμε ένα απατηλά απλό θεώρημα του Kleene, που όμως έχει εκπληκτικά ισχυρές και απρόοπτες συνέπειες στη θεωρία ορισιμότητας (γενικά) και ακόμη και στη συνολοθεωρία. Εδώ θα το χρησιμοποιήσουμε μόνο για μια, σημαντική εφαρμογή του που οφείλεται στον Myhill και ταυτίζει τα α.α., πλήρη και τα δημιουργικά σύνολα, αλλά θα το βρούμε πολύ χρήσιμο και αργότερα, στο Κεφάλαιο 6.

4D.1. Θεωρημα (**Το 2ο Θεώρημα Αναδρομής**, Kleene). *Για κάθε αναδρομική, μερική συνάρτηση* $f(z, \vec{x})$, *υπάρχει ένας αριθμός* z^* *τέτοιος που για κάθε* $\vec{x}$,

$$\varphi_{z^*}(\vec{x}) = \{z^*\}(\vec{x}) = f(z^*, \vec{x}). \tag{96}$$

Ειδικότερα, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $h(e)$ (που εξαρτάται μόνο από το μήκος n της λίστας $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$) *τέτοια που αν* $f = \varphi_e$, *τότε η* (96) *ισχύει με* $z^* = h(e)$, *δηλαδή για όλα τα* $e, \vec{x}$),

$$\varphi_{h(e)}(\vec{x}) = \varphi_e(h(e), \vec{x}). \tag{97}$$

Το θεώρημα αποδίδει αμέσως μερικές απλές προτάσεις που δείχνουν ότι η κωδικοποίηση των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων έχει πολλές απροσδόκητες (και κάπως περίεργες) ιδιότητες.

4D.2. Προταση (Παραδείγματα). *Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί* z_1 – z_4 *τέτοιοι που*

$$\begin{aligned} \varphi_{z_1}(x) &= z_1 \\ \varphi_{z_2}(x) &= z_2 + x \\ W_{z_3} &= \{z_3\} \\ W_{z_4} &= \{0, \dots, z_4\}. \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για το z_1, εφαρμόζουμε το 2ο Θεώρημα Αναδρομής στη συνάρτηση

$$f(z, x) = z$$

και θέτουμε $z_1 = z^*$· έπεται ότι

$$\varphi_{z_1}(x) = f(z_1, x) = z_1.$$

Οι υπόλοιπες αποδείξεις είναι παρόμοιες και εξίσου απλές. ⊣

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ 2ΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ. Η μερική συνάρτηση $f(S^1_n(z,z),\vec{x})$ είναι αναδρομική, και επομένως υπάρχει φυσικός c τέτοιος που

$$\{S^1_n(c,z)\}(\vec{x}) = \{c\}(z,\vec{x}) = f(S^1_n(z,z),\vec{x})\cdot$$

το θεώρημα συνάγεται απ' αυτή την εξίσωση αν θέσουμε

$$z^* = S^1_n(c,c).$$

Για την ισχυρότερη εκδοχή (97), έστω d κωδικός τέτοιος που

$$\varphi_d(e,z,\vec{x}) = \varphi_e(S^1_n(z,z),\vec{x})$$

έτσι που ο

$$c = S^1_{n+1}(d,e)$$

είναι κωδικός της $\varphi_e(S^1_n(z,z),\vec{x})$, και η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$h(e) = S^1_n(c,c) = S^1_n(S^1_{n+1}(d,e), S^1_{n+1}(d,e)). \qquad \dashv$$

Ως (πολύ σημαντικότερο) παράδειγμα της δύναμης του 2ου Θεωρήματος Αναδρομής, δείχνουμε το αντίστροφο του 4C.3, ότι, δηλαδή, κάθε δημιουργικό σύνολο είναι α.α. πλήρες (και κάτι περισσότερο).

4D.3. ΘΕΩΡΗΜΑ (Myhill). *Τα εξής είναι ισοδύναμα για το τυχαίο α.α. σύνολο A.*

(1) *Υπάρχει αναδρομική μερική συνάρτηση $p(e)$ τέτοια που*

$$W_e \cap A = \emptyset \Longrightarrow [p(e)\downarrow \ \&\ p(e) \in A^c \setminus W_e].$$

(2) *Υπάρχει ολική αναδρομική συνάρτηση $q(e)$ τέτοια που*

$$W_e \cap A = \emptyset \Longrightarrow q(e) \in A^c \setminus W_e. \tag{98}$$

(3) *Το A είναι δημιουργικό, δηλαδή η* (98) *ισχύει με μια ένα-προς-ένα αναδρομική $q(e)$.*

(4) *Το A είναι α.α. πλήρες.*

Ειδικότερα, το τυχαίο α.α. σύνολο A είναι πλήρες αν και μόνον αν είναι δημιουργικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) ⇒ (2). Για τη δοσμένη, αναδρομική μερική συνάρτηση $p(e)$, υπάρχει (από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής) φυσικός z τέτοιος που

$$\{S^1_1(z,e)\}(t) = \varphi_z(e,t) = \begin{cases} \varphi_e(t), & \text{αν } p(S^1_1(z,e))\downarrow, \\ \bot, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θέτουμε $q(e) = p(S^1_1(z,e))$ γι' αυτό το z και παρατηρούμε ότι η $q(e)$ είναι ολική συνάρτηση, επειδή

$$\begin{aligned} q(e) = p(S^1_1(z,e))\uparrow &\Longrightarrow W_{S^1_1(z,e)} = \emptyset \quad (\text{από τον ορισμό}) \\ &\Longrightarrow p(S^1_1(z,e))\downarrow. \end{aligned}$$

Επιπλέον, εφόσον $q(e)\downarrow$, $W_{S^1_1(z,e)} = W_e$, άρα

$$W_e \cap A = \emptyset \Longrightarrow q(e) = p(S^1_1(z,e)) \in A^c \setminus W_{S^1_1(z,e)} = A^c \setminus W_e$$

που είναι το ζητούμενο.

(2) $\Rightarrow$ (3) (Αυτή η συνεπαγωγή δεν επικαλείται το 2ο Θεώρημα Αναδρομής, και θα μπορούσε να είχε δοθεί στο εδάφιο 3C.)

Για τη δοσμένη συνάρτηση $q(e)$ που ικανοποιεί την (98), παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει αναδρομική μερική συνάρτηση $h(e)$ τέτοια που

$$W_{h(e)} = W_e \cup \{q(e)\}\cdot$$

και μετά θέτουμε, αναδρομικά,

$$\begin{aligned} g(0,e) &= e \\ g(i+1,e) &= h(g(i,e)), \end{aligned}$$

έτσι που (εύκολα, με επαγωγή στο i)

$$W_{g(i+1,e)} = W_e \cup \{q(g(0,e)), q(g(1,e)), \dots, q(g(i,e))\}.$$

Έπεται ότι για $i > 0$,

$$\begin{aligned} &(99)\quad W_e \cap A = \emptyset \\ &\quad \Longrightarrow q(g(i,e)) \in A^c \setminus (W_e \cup \{q(g(0,e)), q(g(1,e)), \dots, q(g(i-1,e))\}), \end{aligned}$$

και, ειδικότερα,

$$(100)\qquad W_e \cap A = \emptyset \Longrightarrow (\forall j < i)[q(g(i,e)) \neq q(g(j,e))].$$

Τελικά, θέτουμε

$$f(0) = q(0),$$

και για τον (αναδρομικό) ορισμό της $f(e+1)$, υπολογίζουμε πρώτα διαδοχικά τις τιμές $q(g(0,e+1)), \dots, q(g(e+1,e+1))$ και θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Αν οι τιμές αυτές είναι όλες διαφορετικές, τότε μια απ' αυτές είναι διαφορετική από τις $f(0), \dots, f(e)$, και θέτουμε

$$\begin{aligned} j &= (\mu i \le (e+1))(\forall y \le e)[q(g(i,e+1)) \neq f(y)] \\ f(e+1) &= q(g(j,e+1)). \end{aligned}$$

Περίπτωση 2. Υπάρχουν $i, j \le e+1$, $i \neq j$, τέτοια που $q(g(i,e+1)) = q(g(j,e+1))$. Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε

$$f(e+1) = \max\{f(0), \dots, f(e)\} + 1.$$

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι η $f(e)$ είναι αναδρομική και ένα-προς-ένα, και το πως είναι παραγωγική συνάρτηση για το A^c έπεται αμέσως από τις (100) και (99).

(3) $\Rightarrow$ (4). Αν η $q(e)$ είναι παραγωγική συνάρτηση για το A^c και το B είναι τυχαίο α.α. σύνολο, τότε (από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής) υπάρχει φυσικός z τέτοιος που

$$\varphi_z(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \;\&\; t = q(S^1_1(z,x)), \\ \bot, & \text{αλλιώς}\cdot \end{cases}$$

η συνάρτηση

$$f(x) = q(S^1_1(z,x))$$

είναι ένα-προς-ένα (ως σύνθεση μονομορφισμών), και ανάγει το B στο A, ως εξής.

Αν $x \in B$, τότε $W_{S^1_1(z,x)} = \{q(S^1_1(z,x)\} = \{f(x)\}$, και

$$\begin{aligned} f(x) \notin A &\implies W_{S^1_1(z,x)} \cap A = \emptyset \\ &\implies q(S^1_1(z,x)) \in A^c \setminus W_{S^1_1(z,x)} \\ &\implies f(x) \in A^c \setminus \{f(x)\}, \end{aligned}$$

που είναι αντιφατικό· άρα $f(x) \in A$. Από την άλλη μεριά, αν $x \notin B$, τότε $W_{S^1_1(z,x)} = \emptyset \subseteq A^c$, άρα $f(x) = q(S^1_1(z,x)) \in A^c$. $\dashv$

4D. Ασκήσεις

x4D.1. Δείξτε ότι για κάποιο z, $W_z = \{z, z+1, \dots\} = \{x \mid x \geq z\}$.

x4D.2. Δείξτε ότι για κάποιο z, $\varphi_z(t) = t \cdot z$.

x4D.3*. Αληθεύουν ή όχι (με απόδειξη των απαντήσεων σας):

(a) Υπάρχει αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(e)$, τέτοια που για κάθε e,

(*) αν το W_e είναι άπειρο, τότε $f(e)\downarrow$ & $f(e) \in W_e$ & $f(e) > e$.

(b) Υπάρχει *ολική* αναδρομική συνάρτηση $f(e)$ που να ικανοποιεί την (*).

x4D.4. Δείξτε ότι για κάθε ολική, αναδρομική συνάρτηση $f(z)$, ή υπάρχει κάποιος z τέτοιος που ο $f(z)$ να είναι περιττός, και για όλα τα x,

$$\varphi_z(x) = f(z+x),$$

ή υπάρχει κάποιος w τέτοιος που ο $f(w)$ να είναι άρτιος, και για όλα τα x,

$$\varphi_w(x) = f(2w+x+1).$$

x4D.5. Αληθεύει ή όχι: για κάθε αναδρομική, ολική συνάρτηση $f(z)$ υπάρχει κάποιος z τέτοιος που

$$W_{f(z)} = W_z\cdot$$

αποδείξτε την απάντησή σας.

x4D.6. Αληθεύει ή όχι: για κάθε αναδρομική, ολική συνάρτηση $f(z)$ υπάρχει κάποιος z τέτοιος που

$$\varphi_{f(z)}(t) = \varphi_z(t) \quad (t \in \mathbb{N})\cdot$$

αποδείξτε την απάντησή σας.

x4D.7. (a) Δείξτε ότι για κάθε ολική, αναδρομική συνάρτηση $f(x)$, υπάρχει κάποιος αριθμός z τέτοιος που

$$W_z = \{f(z)\}.$$

(b) Δείξτε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός z τέτοιος που

$$\varphi_z(z)\downarrow \text{ και } W_z = \{\varphi_z(z)\}.$$

x4D.8*. Έστω αναδρομική, μερική συνάρτηση $g(e)$ τέτοια που για όλα τα e,

$$\text{αν } W_e = \mathbb{N}, \text{ τότε } g(e)\downarrow\cdot$$

δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί m και k, τέτοιοι

$$W_m = \{0, 1, \dots, k\} \text{ και } g(m)\downarrow.$$

Υποδειξη: Εφαρμόστε το 2ο Θεώρημα Αναδρομής στη μερική συνάρτηση

$$f(m, x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (\forall y \le x)\neg T_1(\widehat{g}, m, y), \\ \bot, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $g(e) = \{\widehat{g}\}(e)$.

x4D.9*. Έστω αναδρομική, μερική συνάρτηση $g(e)$ τέτοια που για όλα τα e,

$$\text{αν } W_e = \emptyset, \text{ τότε } g(e)\downarrow\cdot$$

δείξτε ότι υπάρχει κάποιος m τέτοιος που $W_m = \{m\}$ και $g(m)\downarrow$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις σχέσεις στους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να «κατασκευαστούν» ξεκινώντας με τις αναδρομικές σχέσεις και εφαρμόζοντας επανειλημμένα τους τελεστές της πρωτοβάθμιας λογικής. Βασικά πορίσματα αυτής της μελέτης είναι τα κλασικά θεωρήματα των Tarski, Gödel και Church στα εδάφια 5B, 5C

5A. Η αριθμητική ιεραρχία

Οι ημιαναδρομικές (Σ^0_1) σχέσεις είναι της μορφής

$$(\exists y)Q(\vec{x}, y)$$

με κάποια αναδρομική $Q(\vec{x}, y)$, και έτσι «απέχουν» (σε πολυπλοκότητα) μόλις *ένα υπαρξιακό ποσοδείχτη* από τις αποκρίσιμες (αναδρομικές) σχέσεις. Ο επόμενος ορισμός είναι χρήσιμο εργαλείο για τη ταξινόμηση πολύπλοκων, αναποκρίσιμων σχέσεων.

5A.1. Ορισμος (**Η αριθμητική ιεραρχία**). Οι κλάσεις (σύνολα) σχέσεων Σ^0_k, Π^0_k, Δ^0_k ορίζονται με τη εξής αναδρομή:

$$\begin{aligned} \Sigma^0_1 &: \text{οι ημιαναδρομικές σχέσεις} \\ \Pi^0_k = \neg\Sigma^0_k &: \text{οι αρνήσεις (συμπληρώματα) των σχέσεων στο } \Sigma^0_k \\ \Sigma^0_{k+1} = \exists\Pi^0_k &: \text{οι σχέσεις που ικανοποιούν μια ισοδυναμία} \\ & P(\vec{x}) \iff (\exists y)Q(\vec{x}, y), \text{όπου η } Q(\vec{x}, y) \text{ είναι } \Pi^0_k \\ \Delta^0_k = \Sigma^0_k \cap \Pi^0_k &: \text{ οι σχέσεις που είναι } \Sigma^0_k \text{ και } \Pi^0_k. \end{aligned}$$

Το τυχαίο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι σε μια απ' αυτές τις κλάσεις Γ αν η σχέση $x \in A$ ανήκει στην Γ.

5A.2. **Κανονικές μορφές**. Οι κλάσεις αυτές της *αριθμητικής ιεραρχίας* (προφανώς) χαρακτηρίζονται από τις εξής «κανονικές μορφές», με την έννοια ότι μια σχέση $P(\vec{x})$ ανήκει στην κλάση Γ αν είναι ισοδύναμη με τη κανονική μορφή για την Γ, για κάποια αναδρομική σχέση Q:

$$\begin{array}{lcr}
\Sigma^0_1 & : & (\exists y)Q(\vec{x}, y) \\
\Pi^0_1 & : & (\forall y)Q(\vec{x}, y) \\
\Sigma^0_2 & : & (\exists y_1)(\forall y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) \\
\Pi^0_2 & : & (\forall y_1)(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) \\
\Sigma^0_3 & : & (\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3)Q(\vec{x}, y_1, y_2, y_3) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Για παράδειγμα, αν η σχέση $P(\vec{x})$ είναι Π^0_2, τότε, από τους ορισμούς,

$$\begin{array}{rcll}
P(\vec{x}) & \iff & \neg P_1(\vec{x}) & \text{με } P_1 \in \Sigma^0_2, \\
 & \iff & \neg(\exists y_1)P_3(\vec{x}, y_1) & \text{με } P_3 \in \Pi^0_1, \\
 & \iff & \neg(\exists y_1)\neg P_4(\vec{x}, y_1) & \text{με } P_4 \in \Sigma^0_1, \\
 & \iff & \neg(\exists y_1)\neg(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) & \text{με } Q \text{ αναδρομική}, \\
 & \iff & (\forall y_1)(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) &
\end{array}$$

5Α.3. Θεωρημα. (1) *Για κάθε* $k \geq 1$, *οι κλάσεις* Σ^0_k, Π^0_k *και* Δ^0_k *είναι κλειστές για αναδρομικές αντικαταστάσεις και για τους τελεστές* &, $\vee$, $\exists_\leq$ *και* $\forall_\leq$. *Επιπλέον*:

- *Η κλάση* Δ^0_k *είναι κλειστή για την άρνηση* $\neg$.
- *Η κλάση* Σ^0_k *είναι κλειστή για τον υπαρξιακό ποσοδείχτη* $\exists$.
- *Η κλάση* Π^0_k *είναι κλειστή για τον καθολικό ποσοδείχτη* $\forall$.

(2) *Για κάθε* $k \geq 1$,

$$\Sigma^0_k \subseteq \Delta^0_{k+1}, \tag{101}$$

και επομένως οι αριθμητικές κλάσεις ικανοποιούν το εξής διάγραμμα συμπεριλήψεων:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \Sigma^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \cdots \\
 & \Pi^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] &
\end{tikzcd}$$

Αποδειξη. Πρώτα δείχνουμε την κλειστότητα όλων των αριθμητικών κλάσεων για αναδρομικές αντικαταστάσεις, με επαγωγή στο k· η πρόταση είναι γνωστή για $k = 1$ από την Πρόταση 4Α.5, και επαγωγικά (για την περίπτωση Σ^0_{k+1}) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\iff R(f_1(\vec{x}), \dots , f_n(\vec{x})) \\ &\iff (\exists y)Q(f_1(\vec{x}), \dots , f_n(\vec{x}), y) \\ &\qquad \text{όπου } Q \in \Pi^0_k, \text{ από τον ορισμό} \\ &\iff (\exists y)Q'(\vec{x}, y) \\ &\qquad \text{όπου } Q' \in \Pi^0_k \text{ από την επαγωγική υπόθεση.} \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα του (1) δείχνονται εύκολα, με επαγωγή στο k και εφαρμογές των μετασχηματισμών της απόδειξης της Πρότασης 4A.5.

Το (2) δείχνεται με επαγωγή στο k, όπου στη βάση, αν

$$P(\vec{x}) \iff (\exists y)Q(\vec{x}, y)$$

με την Q αναδρομική, τότε η P είναι σίγουρα Σ^0_2, αφού κάθε αναδρομική σχέση είναι Π^0_1, αλλά είναι και Π^0_2, αφού, προφανώς,

$$P(\vec{x}) \iff (\forall z)(\exists y)Q(\vec{x}, y)$$

και η σχέση

$$Q_1(\vec{x}, z, y) \iff Q(\vec{x}, y)$$

είναι αναδρομική. Η απόδειξη στο επαγωγικό βήμα είναι ακριβώς ίδια, και οι συμπεριλήψεις του διαγράμματος συνάγονται εύκολα από την (101) και τετριμμένους συλλογισμούς. ⊣

Πιο ενδιαφέρον είναι το επόμενο θεώρημα που δικαιώνει την επονομασία «ιεραρχία» για τις κλάσεις Σ^0_k, Π^0_k:

5A.4. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Θεώρημα Αριθμητικής Ιεραρχίας**, Kleene). (1) (Απαρίθμηση του Σ^0_k) *Για κάθε* $k \geq 1$ *και κάθε* $n \geq 1$, *υπάρχει* $(n+1)$*-μελής σχέση* $S_{k,n}(e, \vec{x})$ *στην κλάση* Σ^0_k *που απαριθμεί τις* n*-μελείς,* Σ^0_k *σχέσεις, δηλαδή: η τυχαία* $P(\vec{x})$ *είναι* Σ^0_k *αν και μόνον αν για κάποιο* e,

$$P(\vec{x}) \iff S_{k,n}(e, \vec{x}).$$

(2) (Απαρίθμηση του Π^0_k) *Για κάθε* $k \geq 1$ *και κάθε* $n \geq 1$, *υπάρχει* $(n+1)$*-μελής σχέση* $P_{k,n}(e, \vec{x})$ *στην κλάση* Π^0_k *που απαριθμεί τις* n*-μελείς,* Π^0_k *σχέσεις, δηλαδή: η τυχαία* $P(\vec{x})$ *είναι* Π^0_k *αν και μόνον αν για κάποιο* e,

$$P(\vec{x}) \iff P_{k,n}(e, \vec{x}).$$

(3) (Ιεραρχία) *Οι συμπεριλήψεις του διαγράμματος στην Πρόταση* 5A.3 *είναι όλες αυστηρές, δηλαδή:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \Sigma^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Sigma^0_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & \\
\Delta^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Delta^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \cdots \\
& \Pi^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \Pi^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] &
\end{tikzcd}$$

Αποδειξη. Για τα (1) και (2) θέτουμε αναδρομικά

$$\begin{aligned} S_{1,n}(e,\vec{x}) &\iff (\exists y)T_n(e,\vec{x},y)\\ P_{k,n}(e,\vec{x}) &\iff \neg S_{k,n}(e,\vec{x})\\ S_{k+1,n}(e,\vec{x}) &\iff (\exists y)P_{k,n+1}(e,\vec{x},y), \end{aligned}$$

και οι αποδείξεις είναι εύκολες, με επαγωγή στο k. Για το (3), παρατηρούμε ότι η «διαγώνια» σχέση

$$D_k(x) \iff S_{k,1}(x,x$$

είναι Σ^0_k και δεν μπορεί να είναι Π^0_k, γιατί, αν ήτανε, τότε για κάποιο e θα είχαμε,

$$\neg S_{k,1}(x,x) \iff S_{k,1}(e,x)$$

που είναι άτοπο για το $x = e$. Έπεται ότι για κάθε k, υπάρχουν σχέσεις που είναι Σ^0_k αλλά δεν είναι Π^0_k, και απ' αυτό συνάγεται εύκολα η αυστηρότητα όλων των συμπεριλήψεων του διαγράμματος. ⊣

5A.5. (Πλήρης) **ταξινόμηση** μιας σχέσης $P(\vec{x})$ στην αριθμητική ιεραρχία είναι ο καθορισμός της «ελάχιστης» αριθμητικής κλάσης στην οποία ανήκει η $P(\vec{x})$, δηλαδή η απόδειξη πρότασης της μορφής

$$P \in \Sigma^0_k \setminus \Pi^0_k \quad \text{ή} \quad P \in \Pi^0_k \setminus \Sigma^0_k \quad \text{ή} \quad P \in \Delta^0_{k+1} \setminus (\Sigma^0_k \cup \Pi^0_k)$$

για κάποιο k. Για παράδειγμα, στο 4B.10 δείξαμε ότι

$$\{e \mid W_e \neq \emptyset\} \in \Sigma^0_1 \setminus \Pi^0_1.$$

Η πλήρης ταξινόμηση μιας σχέσης είναι σε μερικές περιπτώσεις πολύ δύσκολη, και συχνά αρκούμαστε στον υπολογισμό κάποιου «άνω φράγματος», δηλαδή κάποιου k τέτοιου που $P \in \Sigma^0_k$ ή $P \in \Pi^0_k$. Η βασική μέθοδος για τον υπολογισμό «κάτω φράγματος», όταν αυτό είναι εφικτό, είναι η απόδειξη ότι η δοσμένη σχέση είναι *πλήρης* σε κάποια κλάση Σ^0_k ή Π^0_k όπως στο επόμενο αποτέλεσμα.

5A.6. Προταση. (1) *Το σύνολο* $F = \{e \mid$ *η* φ_e *είναι ολική*$\}$ *είναι* Π^0_2 *αλλά δεν είναι* Σ^0_2.

(2) *Το σύνολο* $\mathrm{Fin} = \{e \mid$ *το* W_e *είναι πεπερασμένο*$\}$ *είναι* $\Sigma^0_2 \setminus \Pi^0_2$.

Αποδειξη. (1) Το άνω φράγμα είναι προφανές, αφού

$$e \in F \iff (\forall x)(\exists y)T_1(e,x,y).$$

Για να δείξουμε (με απαγωγή σε άτοπο) ότι το F δεν είναι Σ^0_2, θεωρούμε μια τυχαία Π^0_2 σχέση, που ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$P(x) \iff (\forall u)(\exists v)Q(x,u,v)$$

με κάποια αναδρομική $Q(x,u,v)$, και θέτουμε

$$f(x,u) = \mu v Q(x,u,v).$$

Αν $\widehat{f}$ είναι κωδικός της (αναδρομικής) $f(x,u,v)$, τότε

$$\begin{aligned} P(x) &\iff (\forall u)[f(x,u)\downarrow] \\ &\iff (\forall u)[\{S^1_1(\widehat{f},x)\}(u)\downarrow] \\ &\iff S^1_1(\widehat{f},x) \in F\cdot \end{aligned}$$

έπεται ότι αν το F ήταν Σ^0_2, τότε κάθε Π^0_2 σχέση θα ήταν Σ^0_2, που αντιτίθεται στο Θεώρημα Ιεραρχίας 5A.4 (3).

(2) Το άνω φράγμα είναι πάλι προφανές,

$$e \in \mathrm{Fin} \iff (\exists k)(\forall x)[x \in W_e \Longrightarrow x \leq k].$$

Για το κάτω φράγμα, έστω $P(x)$ τυχαία Σ^0_2 σχέση, έτσι που

$$P(x) \iff (\exists u)(\forall v)Q(x,u,v)$$

με κάποια αναδρομική Q. Θέτουμε

$$g(x,u) = \mu y(\forall i \leq u)\neg Q(x,i,(y)_i),$$

έτσι που αν ο $\widehat{g}$ είναι κωδικός της g, τότε

$$\begin{aligned} (\exists u)(\forall v)Q(x,u,v) &\iff \{u \mid g(x,u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο} \\ &\iff \{u \mid \{\widehat{g}\}(x,u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο} \\ &\iff \{u \mid \{S^1_1(\widehat{g},x)\}(u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο,} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$P(x) \iff S^1_1(\widehat{g},x) \in \mathrm{Fin}\cdot$$

αλλά αυτό συνεπάγεται ότι το Fin δεν είναι Π^0_2, γιατί αν ήταν, τότε κάθε Σ^0_2 σχέση θα ήταν Π^0_2, που είναι άτοπο. ⊣

5A. Ασκήσεις

x5A.1. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$A = \{e \mid W_e \subseteq \{0,1\}\}.$$

x5A.2. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$C = \{e \mid \text{το } W_e \text{ είναι πεπερασμένο και μη-κενό}\}.$$

x5A.3. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$B = \{x \mid \text{υπάρχουν άπειροι το πλήθος δίδυμοι πρώτοι } \geq x\},$$

όπου ο y είναι δίδυμος πρώτος αριθμός αν ο y και ο $y+2$ είναι και οι δύο πρώτοι.

x5A.4. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία τη σχέση

$$\begin{aligned} Q(e,m) &\iff \varphi_e \sqsubseteq \varphi_m \\ &\iff (\forall x)[\varphi_e(x)\downarrow \implies [\varphi_m(x)\downarrow \;\&\; \varphi_e(x) = \varphi_m(x)]]. \end{aligned}$$

x5A.5. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$A = \{e \mid \text{το } W_e \text{ έχει τουλάχιστον } e \text{ μέλη}\}.$$

x5A.6. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο δεικτών «άνω φραγμένων» αναδρομικών, μερικών συναρτήσεων,

$$B = \{e \mid \text{για κάποιο } w \text{ και όλα τα } x, \varphi_e(x)\downarrow \implies \varphi_e(x) \le w\}.$$

x5A.7. Έστω A τυχαίο, αναδρομικό σύνολο τέτοιο που $A \subsetneq \mathbb{N}$· ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$B = \{e \mid W_e \subseteq A\}.$$

x5A.8. (a) Δείξτε ότι η σχέση

$$C(e) \iff \text{το } W_e \text{ είναι α.α. πλήρες}$$

είναι αριθμητική, και τοποθετήστε αυτή τη σχέση σε κάποιο συγκεκριμένο σύνολο Σ^0_k ή Π^0_k, όσο πιο χαμηλά στην αριθμητική ιεραρχία μπορείτε. (Μην προσπαθήστε να δείξετε ότι η ταξινόμησή σας είναι πλήρης.)

(b) Κάντε το ίδιο για τη σχέση

$$D(e) \iff \text{το } W_e \text{ είναι δημιουργικό.}$$

x5A.9. Δείξτε ότι το γράφημα

$$G_f(\vec{x}, w) \iff f(\vec{x}) = w$$

τυχαίας *ολικής* συνάρτησης $f(\vec{x})$ είναι Σ^0_k αν και μόνον αν είναι Δ^0_k.

x5A.10*. Η ολική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι *οριακά αναδρομική* (limit recursive) αν υπάρχει αναδρομική, ολική συνάρτηση $g(m,\vec{x})$ τέτοια που

$$f(\vec{x}) = \lim_{m\to\infty} g(m,\vec{x}),$$

όπου το όριο ακολουθίας φυσικών ορίζεται ως συνήθως,

$$\lim_{m\to\infty} a_m = w \iff (\exists k)(\forall m \ge k)[a_m = w].$$

Δείξτε ότι η τυχαία ολική $f(\vec{x})$ είναι οριακά αναδρομική αν και μόνον αν το γράφημα G_f της $f(\vec{x})$ είναι Δ^0_2.

5B. Αριθμητικές σχέσεις και το Θεώρημα του Tarski

Βασικός στόχος μας σ' αυτό και το επόμενο το εδάφιο είναι να δείξουμε τα κλασικά θεωρήματα αναποκρισιμότητας των Tarski, Gödel και Church για τις έννοιες της αλήθειας και της απόδειξης στην (ολική) άλγεβρα

(102) $$\mathbf{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot),$$

δηλαδή την κλασική *πρωτοβάθμια δομή* των φυσικών αριθμών με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Θα ξεκινήσουμε με μια σύντομη επισκόπηση των σχετικών ορισμών από την πρωτοβάθμια λογική για ολικές άλγεβρες

$$\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \dots, f_K)$$

που είναι γενικεύσεις (και μικρές παραλλαγές) των ορισμών στο εδάφιο 2A.

5B.1. **Η πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathsf{L} = \mathsf{L}(0, 1, \mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$: σύνταξη.** Η L είναι μικρή παραλλαγή της $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ που ορίσαμε στο εδάφιο 2A, αλλά θα επαναλάβουμε (συνοπτικά) τους σχετικούς ορισμούς για να διευκρινίσουμε πλήρως τις διαφορές. Η L έχει

ατομικές μεταβλητές:	$\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, \dots,$
ατομικές σταθερές:	$0, 1$
συναρτησιακές σταθερές:	$\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K \quad (\mathrm{arity}(\mathsf{f}_i) = n_i)$
τα *σημεία στίξεως*:	, ( )
το σύμβολο της ισότητας:	$=$
και τα *σύμβολα της πρωτοβάθμιας λογικής*:	$\neg \quad \& \quad \vee \quad \rightarrow \quad \exists \quad \forall$

Παρατηρούμε ότι η $\mathsf{L}(0, 1, \mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$ διαφέρει από την $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ ως εξής: δεν έχει ατομικές σταθερές, έτσι που δεν κάνει καμία συγκεκριμένη αναφορά στο σύνολο M· δεν παρέχει σύμβολισμό γα τη διακλάδωση· και, το κυριότερο, παρέχει συμβολισμό για τελεστές της προτασιακής και πρωτοβάθμιας λογικής.

Οι σταθερές 0 και 1 και οι ατομικές μεταβλητές (ως ακολουθίες μήκους 1) είναι **αρχικοί όροι**, και οι (αγνοί, ρητοί) **όροι** ορίζονται αναδρομικά, ξεκινώντας με τους αρχικούς όρους και χρησιμοποιώντας τα συναρτησιακά σύμβολα, έτσι που κάθε όρος που δεν είναι αρχικός είναι της μορφής $\mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})$ όπου οι $A_1, \dots, A_{n_i}$ είναι όροι μικρότερου μήκους. Με το συνοπτικό τρόπο που δώσαμε τον ανάλογο ορισμό όρων για μερικές άλγεβρες στην (44),

(103) $$A :\equiv \mathsf{v}_i \mid 0 \mid 1 \mid \mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i})$$

Αρχικοί τύποι είναι οι λέξεις της μορφής

$$A_1 = A_2$$

όπου οι A_1, A_2 είναι όροι, και οι **τύποι** της L ορίζονται αναδρομικά, ξεκινώντας με τους αρχικούς τύπους και χρησιμοποιώντας τους τελεστές της λογικής, έτσι που κάθε τύπος που δεν είναι αρχικός είναι σε μια από της μορφές

$$\neg(\alpha_1) \quad (\alpha_1)\ \&\ (\alpha_2) \quad (\alpha_1) \vee (\alpha_2) \quad (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2) \quad \exists \mathsf{v}_i(\alpha_1) \quad \forall \mathsf{v}_i(\alpha_1)$$

όπου οι α_1, α_2 είναι τύποι μικρότερου μήκους. Συνοπτικά:

$$\begin{aligned}(104)\quad \alpha :\equiv A_1 = A_2 \mid \neg(\alpha_1) \mid (\alpha_1)\ \&\ (\alpha_2) \mid (\alpha_1) \vee (\alpha_2) \mid (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2)\\ \mid \exists \mathsf{v}_i(\alpha_1) \mid \forall \mathsf{v}_i(\alpha_1)\end{aligned}$$

Οι **ποσοδείκτες** $\exists$ και $\forall$ δημιουργούν μερικά καινούργια φαινόμενα στη γλώσσα που δεν υπάρχουν στην (γενικά) απλούστερη γλώσσα $\mathsf{R}(\mathbf{M})$ που έχει μόνο όρους. Η **εμφάνιση** (εγγραφή) μιας μεταβλητής v_j στον τύπο α είναι **ελεύθερη** αν ο α είναι αρχικός, ή (αναδρομικά) αν ο α είναι ένας από τους τύπους στην (104) και η εμφάνιση της v_j είναι ελεύθερη στον α_1 ή στον α_2, αλλά, στην τελευταίες δύο περιπτώσεις $j \neq i$· εμφανίσεις της v_j που δεν είναι ελεύθερες είναι **δεσμευμένες**, και **προτάσεις** είναι οι τύποι που δεν έχουν καμία ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής.

5B.2. **Η πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathsf{L} = \mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$: σημασιολογία.** Όπως στο εδάφιο 2A, *αποτίμηση* στην άλγεβρα $\mathbf{M}$ είναι η τυχαία συνάρτηση

$$\pi : \{\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$$

που αναθέτει στη κάθε μεταβλητή v_i ένα στοιχείο $\pi(\mathsf{v}_i) \in M$, και η *τιμή* $\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(t, \pi)$ του όρου A στην $\mathbf{M}$ για την αποτίμηση π ορίζεται αναδρομικά με τον προφανή τρόπο:

$$\begin{gathered}\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(0, \pi) = 0 \quad \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(1, \pi) = 1 \quad \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\mathsf{v}_i, \pi) = \pi(\mathsf{v}_i)\\ \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(\mathsf{f}_i(A_1, \dots, A_{n_i}), \pi) = f_i(\mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A_1, \pi), \dots, \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(A_{n_i}, \pi))\end{gathered}$$

Η ερμηνεία των τύπων καθορίζεται από τη κλασική σχέση **ικανοποίησης** (satisfaction) του Tarski ανάμεσα σε τύπους, και αποτιμήσεις που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}, \pi \models t_1 = t_2 &\iff \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(t_1, \pi) = \mathbf{val}_{\mathbf{M}}(t_2, \pi)\\ \mathbf{M}, \pi \models \neg(\alpha_1) &\iff \mathbf{M}, \pi \not\models \alpha_1\\ \mathbf{M}, \pi \models (\alpha_1)\ \&\ (\alpha_2) &\iff \mathbf{M}, \pi \models \alpha_1 \text{ και } \mathbf{M}, \pi \models \alpha_2\\ \mathbf{M}, \pi \models (\alpha_1) \vee (\alpha_2) &\iff \mathbf{M}, \pi \models \alpha_1 \text{ ή } \mathbf{M}, \pi \models \alpha_2\\ \mathbf{M}, \pi \models (\alpha_1) \rightarrow (\alpha_2) &\iff \mathbf{M}, \pi \not\models \alpha_1 \text{ ή } \mathbf{M}, \pi \models \alpha_2\\ \mathbf{M}, \pi \models \exists \mathsf{v}_i(\alpha_1) &\iff \text{υπάρχει } x \in M \text{ τέτοιος που } \mathbf{M}, \pi\{\mathsf{v}_i := x\} \models \alpha_1\\ \mathbf{M}, \pi \models \forall \mathsf{v}_i(\alpha_1) &\iff \text{για κάθε } x \in M, \mathbf{M}, \pi\{\mathsf{v}_i := x\} \models \alpha_1,\end{aligned}$$

όπου

$$\pi\{\mathsf{v}_i := x\}(\mathsf{v}_j) = \begin{cases} x, & \text{αν } j = i, \\ \pi(\mathsf{v}_j), & \text{αλλιώς, αν } i \neq j \end{cases}$$

είναι η **ενημέρωση** της αποτίμησης π με την «ανάθεση» $\mathsf{v}_i := x$.

Βασική ιδιότητα του ορισμού του Tarski είναι ότι η αλήθεια της σχέσης $\mathbf{M}, \pi \models \alpha$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της π στις ελεύθερες μεταβλητές του α, δηλαδή

$$(\forall i)[\text{η } \mathsf{v}_i \text{ είναι ελεύθερη στον } \alpha \Longrightarrow \pi_1(\mathsf{v}_i) = \pi_2(\mathsf{v}_i)]$$
$$\Longrightarrow [\mathbf{M}, \pi_1 \models \alpha \iff \mathbf{M}, \pi_2 \models \alpha].$$

Αυτό δείχνεται εύκολα με επαγωγή στον τύπο α, και συνεπάγεται ότι αν ο α είναι πρόταση (χωρίς ελεύθερες μεταβλητές), τότε η σχέση $\mathbf{M}, \pi \models \alpha$ είναι ανεξάρτητη από την αποτίμηση π, και μπορούμε να την παραλείψουμε από το συμβολισμό,

$$(\text{πρόταση } \alpha) \qquad \begin{aligned} \mathbf{M} \models \alpha &\iff \text{για κάποια } \pi, \mathbf{M}, \pi \models \alpha \\ &\iff \text{για κάθε } \pi, \mathbf{M}, \pi \models \alpha. \end{aligned}$$

5B.3. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ο τύπος α **ορίζει τη n-μελή σχέση $R(\vec{x})$ με τις μεταβλητές** $v^1, \dots, v^n$ στην άλγεβρα $\mathbf{M}$, αν η ακολουθία $v^1, \dots, v^n$ περιέχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του α και για όλα τα $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$(105) \qquad R(x_1, \dots, x_n) \iff \mathbf{M}, \{v^1 := x_1, \dots, v^n := x_n\} \models \alpha\cdot$$

τελικά, μια σχέση $R(\vec{x})$ είναι **απλή** (elementary) ή *πρωτοβάθμια* (first-order definable) στην άλγεβρα $\mathbf{M}$ αν ορίζεται από κάποιο τύπο με κάποια ακολουθία μεταβλητών, και μια συνάρτηση $f : M^n \to M$ είναι **απλή** αν το γράφημά της (85) είναι αριθμητική σχέση.

5B.4. **Αριθμητικές σχέσεις και συναρτήσεις.** Εδώ ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα στην ερμηνεία της πρωτοβάθμιας γλώσσας $\mathsf{L}(+, \cdot)$ στην άλγεβρα $\mathbf{N}$ της αριθμητικής (102), στην οποία ο ορισμός των όρων παίρνει την εξής, απλή μορφή:

$$A :\equiv \mathsf{v}_i \mid 0 \mid 1 \mid (A_1) + (A_2) \mid (A_1) \cdot (A_2)$$

Οι πρωτοβάθμιες σχέσεις και συναρτήσεις της $\mathbf{N}$ καλούνται **αριθμητικές**, και γι' αυτές θα χρειαστούμε (σχεδόν) μόνο τον εξής χαρακτηρισμό, που δείχνεται εύκολα από τους ορισμούς:

5B.5. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το σύνολο των αριθμητικών σχέσεων είναι το ελάχιστο σύνολο σχέσεων $\mathcal{A}$ στους φυσικούς αριθμούς με τις εξής ιδιότητες:*

(1) *Οι σχέσεις*

$$x = y, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x + y = z, \quad x \cdot y = z$$

είναι στο $\mathcal{A}$.

(2) Το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό για αντικαταστάσεις με τις προβολές $P_i^n(\vec{x})$ και τους τελεστές της λογικής, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\exists$, $\forall$.

Έπεται ότι η σχέση της ανισότητας

$$x \leq y \iff (\exists z)[x + z = y]$$

είναι αριθμητική, και ότι το σύνολο των αριθμητικών σχέσεων είναι κλειστό για αριθμητικές αντικαταστάσεις, αφού

$$\begin{aligned}&P(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))\\ &\iff (\exists w_1)\cdots(\exists w_m)[f_1(\vec{x}) = w_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} f_m(\vec{x}) = w_m \mathbin{\&} P(w_1, \dots, w_m)].\end{aligned}$$

Πέραν αυτού, θα επικαλεστούμε επίσης μερικές (κατά το πλείστον προφανείς) ιδιότητες της σχέσης της ικανοποίησης στην $\mathbf{N}$ που απορρέουν εύκολα από τον ορισμό της.

Για το επόμενο, βασικό Θεώρημα (που δικαιολογεί την ονομασία «αριθμητική ιεραρχία» για τις κλάσεις συνόλων Σ_k^0, Π_k^0), χρειαζόμαστε το εξής, απλό Λήμμα από την αριθμοθεωρία, που μας δίνει μια (ακόμη!) κωδικοποίηση ακολουθιών, αυτή τη φορά αριθμητική:

5B.6. ΛΗΜΜΑ (Η συνάρτηση β του Gödel). *Η συνάρτηση*

$$\beta(a, b, i) = \mathrm{rm}(a, 1 + (i + 1)b)$$

είναι αριθμητική, και για κάθε ακολουθία αριθμών $w_0, \dots, w_y$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί a και b, τέτοιοι που

$$w_i = \beta(a, b, i) \qquad (i = 0, \dots, y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση $\beta(a, b, i)$ είναι αριθμητική, επειδή

$$\beta(a, b, i) = w \iff (\exists c)[a = (1 + (i + 1)b)c + w \mathbin{\&} w < 1 + (i + 1)b].$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό του Λήμματος, έστω

$$\begin{aligned}d &= \max(w_0, \dots, w_y, y) + 1\\ b &= d!\\ z_i &= 1 + (i + 1)b = 1 + (i + 1)d! \quad (i = 0, \dots, y).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $z_0, z_1, \dots, z_y$ είναι *σχετικώς πρώτοι*, δηλαδή δεν υπάρχει πρώτος αριθμός που να διαιρεί δύο απ' αυτούς· γιατί αν ο p είναι πρώτος και κοινός διαιρέτης των z_i και z_j με $i < j \leq y$, τότε:

1. $p > d$, αλλιώς $p | d!$, και αυτό είναι άτοπο, αφού $p | 1 + (i + 1)d!$, και
2. ο p διαιρεί τη διαφορά $(j - i)d!$, άρα $p | (j - i)$ ή $p | d!$,

και αυτό είναι άτοπο, αφού $j - i \leq y < d < p$ και ο p δεν διαιρεί το $d!$, όπως στο 1. Τελικά, το λεγόμενο *Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων* βεβαιώνει ότι αφού $w_0 < z_0, \dots, w_y < z_y$, υπάρχει κάποιος a τέτοιος που

$$w_0 = \mathrm{rm}(a, z_0) = \beta(a, b, 0), \dots, w_y = \mathrm{rm}(a, z_y) = \beta(a, b, y). \qquad \dashv$$

5B.7. Θεωρημα. (1) *Κάθε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση είναι αριθμητική.*

(2) *Η τυχαία σχέση είναι αριθμητική αν και μόνον αν είναι* Σ^0_k, *για κάποιο* k, *δηλαδή*

$$\mathcal{A} = \bigcup_k \Sigma^0_k = \bigcup_k \Pi^0_k.$$

Αποδειξη. (1) Αρκεί να δείξουμε ότι οι S, C^n_q και P^n_i είναι αριθμητικές, και ότι το σύνολο των αριθμητικών συναρτήσεων είναι κλειστό για σύνθεση και πρωτογενή αναδρομή, και απ' αυτά μόνο το τελευταίο δεν είναι τετριμμένο.

Παρατηρούμε ότι αν η $f(y,\vec{x})$ ορίζεται με την πρωτογενή αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(y+1,\vec{x}) &= h(f(y,\vec{x}),y,\vec{x}), \end{aligned}$$

τότε, από τη λεγόμενη «Dedekind ανάλυση της αναδρομής»,

$$\begin{aligned} f(y,\vec{x}) = w \iff (\exists w_0,\dots,w_y)[g(\vec{x}) = w_0 \ \&\ w = w_y \\ \&\ (\forall i < y)[h(w_i,i,\vec{x}) = w_{i+1}]]\cdot \end{aligned}$$

αυτό είναι προφανές, με $w_i = f(i,\vec{x})$ για τη κατεύθυνση $(\Rightarrow)$, και με επαγωγή στο $i \leq y$ για τη κατεύθυνση $(\Leftarrow)$. Έπεται, από το Λήμμα, ότι

$$\begin{aligned} f(y,\vec{x}) = w \iff (\exists a)(\exists b)[g(\vec{x}) = \beta(a,b,0) \ \&\ w = \beta(a,b,y) \\ (\forall i < y)[h(\beta(a,b,i),i,\vec{x}) = \beta(a,b,i+1)]] \end{aligned}$$

που συνεπάγεται αμέσως, από τις ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{A}$ ότι η $f(y,\vec{x})$ είναι αριθμητική.

(2) Η συμπερίληψη $\Sigma^0_k \subseteq \mathcal{A}$ είναι απλή, με επαγωγή στο k, και η αντίστροφη συμπερίληψη $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_k \Sigma^0_k$ συνάγεται από το χαρακτηρισμό 5B.5. ⊣

5B.8. **Αριθμητικοποίηση**. Με κάθε σύμβολο c της πρωτοβάθμιας γλώσσας της αριθμητικής $\mathsf{L} = \mathsf{L}(+,\cdot)$ συσχετίζουμε ένα φυσικό αριθμό $[c]$ με την απλή απαρίθμηση,

0	1	+	·	=	¬	&	∨	→	∃	∀	(	)	,	v_0	v_1	…
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…

έτσι που $[\exists] = 9$, $[\mathsf{v}_0] = 14$, κ.λπ.· και κωδικοποιούμε τους τύπους ως πεπερασμένες ακολουθίες από σύμβολα, χρησιμοποιώντας κάποια, σταθερή, πρωτογενώς αναδρομική κωδικοποίηση ακολουθιών,

$$[s_0 s_1 \cdots s_n] = \langle [s_0], [s_1], \dots, [s_n] \rangle,$$

π.χ.,

$$[\exists \mathsf{v}_2(0 = \mathsf{v}_2)] = \langle [\exists], [\mathsf{v}_2], [(], [0], [=], [\mathsf{v}_2], [)] \rangle.$$

Με τις μεθόδους του Κεφαλαίου 3, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι οι βασικές *μεταμαθηματικές*, συντακτικές σχέσεις της γλώσσας είναι πρωτογενώς αναδρομικές, π.χ., οι

$$\begin{aligned}\text{Τύπος}(a) &\iff \text{ο } a \text{ είναι κωδικός τύπου}\\ \text{Ελεύθερη}(a,i) &\iff \text{ο } a \text{ είναι κωδικός τύπου } \alpha\\ &\ \text{ και η } \mathsf{v}_i \text{ εμφανίζεται ελεύθερη στον } \alpha\\ \text{Πρόταση}(f) &\iff \text{ο } a \text{ είναι κωδικός πρότασης,}\end{aligned}$$

κ.λπ. Τελικά θέτουμε

$$\begin{aligned}(106)\quad \text{Truth} &= \text{Truth}(\mathbf{N})\\ &= \{a \mid \text{ο } a \text{ είναι κωδικός πρότασης που αληθεύει στην } \mathbf{N}\}.\end{aligned}$$

Αυτό είναι το σύνολο φυσικών αριθμών που κωδικοποιεί όλες τις (πρωτοβάθμιες) «αριθμητικές αλήθειες» – κάθε σημαντική πρόταση της θεωρίας αριθμών που αληθεύει έχει τον κωδικό της στο Truth.

5B.9. ΛΗΜΜΑ. *Κάθε αριθμητική σχέση* $R(\vec{x})$ *ανάγεται στο σύνολο* Truth, *δηλαδή υπάρχει* (ένα-προς-ένα) *αναδρομική συνάρτηση* $f(\vec{x})$ *τέτοια που*

$$(107)\qquad R(\vec{x}) \iff f(\vec{x}) \in \text{Truth}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε φυσικό x ορίζουμε τον όρο $\Delta(x)$ με την αναδρομή,

$$\Delta(0) = 0, \quad \Delta(x+1) = (\Delta(x)) + (1),$$

έτσι που ο $\Delta(x)$ είναι κλειστός (χωρίς μεταβλητές) και έχει την ίδια τιμή για κάθε αποτίμηση π,

$$\mathbf{val}(\Delta(x), \pi) = x.$$

Έπεται (εύκολα, από τις συνθήκες του Tarski) ότι για κάθε τύπο α με ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $v^1, \dots, v^n$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}, \{v^1 := x_1, \dots, v^n := x_n\} \models \alpha\\ &\qquad\iff \mathbf{N} \models (\exists v^1)\cdots(\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1)\ \&\ \cdots\ \&\ v^n = \Delta(x_n)\ \&\ \alpha]\\ &\qquad\iff [(\exists v^1)\cdots(\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1)\ \&\ \cdots\ \&\ v^n = \Delta(x_n)\ \&\ \alpha]] \in \text{Truth}\cdot\end{aligned}$$

και επομένως, αν ο τύπος α ορίζει τη σχέση $R(\vec{x})$ σύμφωνα με την (105), τότε η (107) ισχύει με τη συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = [(\exists v^1)\cdots(\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1)\ \&\ \cdots\ \&\ v^n = \Delta(x_n)\ \&\ \alpha]]$$

που είναι, εύκολα, αναδρομική και ένα-προς-ένα. ⊣

5B.10. **Θεώρημα του Tarski**. *Το σύνολο* Truth *δεν είναι αριθμητικό, και επομένως ούτε αναδρομικό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν το Truth ήταν αριθμητικό, τότε θα ήταν Σ^0_k, για κάποιο k, και επομένως, από το Λήμμα, κάθε αριθμητική σχέση θα ήταν Σ^0_k, που αντιτίθεται στο Θεώρημα Ιεραρχίας 5A.4 (3). ⊣

Για την ιστορική ακρίβεια, πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι ο Tarski απέδειξε μόνο το πρώτο μέρος του θεωρήματος, ότι το σύνολο Truth δεν είναι αριθμητικό, και δεν ήταν καν σε θέση να δείξει το δεύτερο μέρος, επειδή δεν ήξερε ότι τα αναδρομικά σύνολα είναι αριθμητικά – όπως επίσης δεν ήξερε και τη σχέση ανάμεσα σε αναδρομικότητα και υπολογισιμότητα, δηλαδή το Αίτημα Church-Turing.

5C. Τα θεωρήματα των Gödel και Church

Τα δύο αυτά θεμελιακά αποτελέσματα έχουν να κάνουν με τη βασική έννοια της *τυπικής απόδειξης* της λογικής, που δεν είναι στο θέμα μας, αλλά απλές «παραφράσεις» τους είναι εύκολα πορίσματα της θεωρίας αναδρομικών συναρτήσεων και αξίζει να τις εκθέσουμε εδώ.

5C.1. **Αποδεικτικά συστήματα.** Γενικά, *τυπική απόδειξη* (στην αριθμητική) είναι μια ακολουθία από τύπους

$$\alpha_0, \dots, \alpha_n,$$

τέτοια που κάθε α_i είναι *αξίωμα* (της λογικής ή της αριθμητικής) ή συνάγεται με κάποιο *κανόνα* της λογικής ή της αριθμητικής από κάποια $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_l}$ με $j_1, \dots, j_l < i$, και ο τελευταίος τύπος α_n είναι πρόταση, το «συμπέρασμα» της απόδειξης. *Αποδεικτικό σύστημα* (proof system) $\mathcal{P}$ είναι μια αυστηρή διατύπωση των απαραίτητων «αξιωμάτων» και «κανόνων» που μας καθορίζουν ποιες ακολουθίες τύπων είναι «αποδείξεις», και τα *θεωρήματα* του $\mathcal{P}$ είναι τα συμπεράσματα των αποδείξεών του,

$$\vdash_{\mathcal{P}} \alpha \iff \text{υπάρχει απόδειξη } \alpha_0, \dots, \alpha_n \text{ στο } \mathcal{P} \text{ με } \alpha_n \equiv \alpha.$$

Υπάρχουν, βέβαια τετριμμένα αποδεικτικά συστήματα, π.χ., αυτό όπου κάθε ακολουθία τύπων (που τελειώνει με πρόταση) είναι απόδειξη, ή το άλλο όπου οι αποδείξεις είναι όλες οι ακολουθίες μήκους 1, με μία, αληθή πρόταση α! Άξια μελέτης όμως είναι τα αποδεικτικά συστήματα που ικανοποιούν τις εξής δύο, βασικές ιδιότητες:

(1) **Ορθότητα** (αριθμητική εγκυρότητα): *Για κάθε πρόταση* α, *αν* $\vdash_{\mathcal{P}} \alpha$, *τότε* $\mathbf{N} \models \alpha$, έτσι που τα θεωρήματα του $\mathcal{P}$ να είναι όλα αληθή.

(2) **Αποκρισιμότητα για αποδείξεις**: *Η σχέση*

$$\mathrm{Proof}_{\mathcal{P}}(y) \iff (\exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathcal{P})[y = \langle [\alpha_0], \dots, [\alpha_n] \rangle]$$

είναι αναδρομική.

Η δεύτερη συνθήκη εκφράζει (με το Αίτημα Church-Turing) τη βασική πρακτική των μαθηματικών, ότι ο ισχυρισμός του Τάδε ότι έχει αποδείξει κάποιο θεώρημα (την ύπαρξη απείρων το πλήθος διδύμων πρώτων, για παράδειγμα), μπορεί να «ελεγχθεί» — υπάρχει γενική μέθοδος που αποφασίζει αν αυτά που λέει ο Τάδε αποτελούν αυστηρή απόδειξη του ισχυρισμού του ή όχι, σύμφωνα με τα αξιώματα και τους κανόνες της λογικής που έχουμε αποδεχτεί.

Υπάρχει και μια τρίτη ιδιότητα που θα θέλαμε να έχει το ιδανικό αποδεικτικό σύστημα:

(3) **Πληρότητα**: *Για κάθε πρόταση* α,

$$\vdash_{\mathcal{P}} \alpha \text{ ή } \vdash_{\mathcal{P}} \neg\alpha.$$

Στο πρώτο τρίτο του 20ου αιώνα έγιναν πολλές προσπάθειες να βρεθεί ένα αποδεικτικό σύστημα για την αριθμητική που να είναι ορθό, αποκρίσιμο για αποδείξεις και πλήρες, που θα κωδικοποιούσε ό,τι χρειάζεται από τη λογική για να λύσουμε όλα τα προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Οι προσπάθειες αυτές απέτυχαν, και δεν μπορούσαν να πετύχουν:

5C.2. **Θεώρημα Απληρότητας** (μη-πληρότητας) **του Gödel**. *Δεν υπάρχει αποδεικτικό σύστημα για την αριθμητική που να είναι ορθό, αποκρίσιμο για αποδείξεις και πλήρες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν το $\mathcal{P}$ έχει και τις τρεις αυτές ιδιότητες, τότε για κάθε πρόταση α

$$\vdash_{\mathcal{P}} \alpha \Longrightarrow \mathbf{N} \models \alpha$$

επειδή το σύστημα είναι αριθμητικά έγκυρο, και

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \models \alpha &\Longrightarrow \mathbf{N} \not\models \neg\alpha \\ &\Longrightarrow \not\vdash_{\mathcal{P}} \neg\alpha && \text{(ορθότητα)} \\ &\Longrightarrow \vdash_{\mathcal{P}} \alpha && \text{(πληρότητα).} \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \text{Truth} &= \{[\alpha] \mid \vdash_{\mathcal{P}} \alpha\} \\ &= \{e \mid \text{Πρόταση}(e) \ \& \ (\exists y)[\text{Proof}_{\mathcal{P}}(y) \ \& \ e = \text{last}(y)]\}, \end{aligned}$$

και έτσι το σύνολο Truth είναι Σ^0_1, από την υπόθεση της αποκρισιμότητας για αποδείξεις του $\mathcal{P}$, που αντιτίθεται στο Θεώρημα του Tarski 5B.10. ⊣

Η αλήθεια ή όχι του Αιτήματος Church-Turing δεν παίζει ρόλο στις συγκεκριμένες εφαρμογές του Θεωρήματος Απληρότητας, επειδή στη πράξη, τα συγκεκριμένα συστήματα που χρησιμοποιούνται από μαθηματικούς και έχουν μελετηθεί είναι όλα αποκρίσιμα για αποδείξεις — ακριβώς επειδή η συνθήκη (2) είναι φυσική.

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα του Church, επιστρέφουμε στη πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$ σε αυθαίρετο λεξιλόγιο $(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$, και για την τυχαία πρόταση α της $\mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$ θέτουμε

$$\models \alpha \iff \text{για κάθε άλγεβρα } \mathbf{M}, \ \mathbf{M} \models \alpha$$

και καλούμε την α **έγκυρη** (valid) αν $\models \alpha$. Το κλασικό *Θεώρημα Πληρότητας* του Gödel δηλώνει ότι

$$\models \alpha \iff \text{η } \alpha \text{ είναι θεώρημα της κλασικής, πρωτοβάθμιας λογικής,}$$

και έχει ως πόρισμα ότι *για κάθε λεξιλόγιο* $\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K$*, το σύνολο των* (κωδικών των) *έγκυρων προτάσεων της* $\mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$ *είναι ημιαναδρομικό* (με την προφανή κωδικοποίηση). Από την άλλη μεριά:

5C.3. **Θεώρημα του Church**. *Για κάποια* $\mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$*, το πρόβλημα αν η τυχαία πρόταση* α *είναι έγκυρη είναι ανεπίλυτο.*

Υποδειξη. Έστω

$$E = (f_0, f_1, \dots, f_K)$$

τυχαίο, πρωτογενές αναδρομικό πρόγραμμα σύμφωνα με τον ορισμό 1B.16. Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε μια πρόταση

$$\alpha_E = \alpha_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \alpha_n$$

στην $\mathsf{L}(\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K)$ που «εκφράζει τυπικά» τους ορισμούς στο E· αν, π.χ., το σύμβολο προβολής P^3_2 εμφανίζεται στο E, τότε κάποια από τις α_i είναι η

$$(\forall \mathsf{v}_1)(\forall \mathsf{v}_2)(\forall \mathsf{v}_3)[\mathsf{P}^3_2(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2.\mathsf{v}_3) = \mathsf{v}_2],$$

και αν η f ορίζεται στο E με τη πρωτογενή αναδρομή

$$f(0) = 5$$
$$f(y+1) = h(f(y), y),$$

τότε κάποια από τις α_i είναι η

$$\mathsf{f}(0) = \Delta(5) \mathbin{\&} (\forall \mathsf{v}_1)[\mathsf{f}(\mathsf{S}(\mathsf{v}_1)) = \mathsf{h}(\mathsf{f}(\mathsf{v}_1), \mathsf{v}_1)].$$

Με αυτό τον ορισμό, έπεται χωρίς μεγάλη δυσκολία ότι για κάθε συνάρτηση f_i που ορίζεται στο E και όλους τους $\vec{x} = x_1, \dots, x_n, w \in \mathbb{N}$,

$$\overline{f}_i(\vec{x}) = w \iff \vdash \alpha_E \to \mathsf{f}_i(\Delta(x_1), \dots, \Delta(x_n)) = \Delta(w).$$

Τελικά, εφαρμόζουμε αυτό το Λήμμα στην περίπτωση που η $\overline{f}_K$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της σχέσης $T_1(x, x, y)$ και δείχνουμε (εύκολα πια) ότι η αποκρισιμότητα της σχέσης εγκυρότητας οδηγεί σε άτοπο. ⊣

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε γενικευμένα προγράμματα, «αναιτιοκρατικά» και με «εξωτερικές» (ελεύθερες) συναρτησιακές μεταβλητές, και θα διερευνήσουμε τις εφαρμογές τους (κυρίως) στη θεωρία «υπολογίσιμων συναρτησιακών». Τα περισσότερα αποτελέσματα που θα δείξουμε ισχύουν για όλες τις μερικές άλγεβρες, αλλά τα φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν εμφανίζονται πλήρως στην κλασική άλγεβρα $\mathbf{N}_0 = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd)$ και στις επεκτάσεις της, με τις οποίες και θα ασχοληθούμε.

6A. Αναδρομικά συναρτησιακά

6A.1. Ορισμος. **Γενικευμένο αναδρομικό πρόγραμμα** της $\mathbf{N}_0$ είναι το τυχαίο σύστημα αναδρομικών εξισώσεων

$$(E)\qquad \begin{array}{ll} (e_0) & \zeta_0(\vec{x}_0) = E_0\ (= E_0[\zeta_0, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_l]) \\ & \vdots \\ (e_k) & \zeta_k(\vec{x}_k) = E_k\ (= E_k[\zeta_0, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_l]) \end{array}$$

όπου οι συναρτησιακές μεταβλητές $\zeta_0, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_l$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους (όπως στο βασικό ορισμό στο εδάφιο 2B), αλλά το E παρέχει ορισμούς μόνο για τις **εσωτερικές** (δεσμευμένες) μεταβλητές $\zeta_0, \dots, \zeta_k$, ενώ επιτρέπει και την εμφάνιση των **εξωτερικών** (ελεύθερων) μεταβλητών $\xi_1, \dots, \xi_l$ στους αγνούς όρους $E_1, \dots, E_k$, όπως υποδείξαμε με τον (προσωρινό) συμβολισμό $E_i[\zeta_0, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_l]$. Ένα τέτοιο πρόγραμμα ερμηνεύεται φυσικά σε τυχαίες επεκτάσεις

$$(\mathbf{N}_0, p_1, \dots, p_l) = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd, p_1, \dots, p_l)$$

της $\mathbf{N}_0$, αν θεωρήσουμε δηλαδή τις μεταβλητές $\xi_1, \dots, \xi_l$ ως σταθερές που ονομάζουν τις μερικές συναρτήσεις $p_1, \dots, p_l$, όπως οι $\mathsf{f}_1, \dots, \mathsf{f}_K$ ονομάζουν τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_K$ μιας μερικής άλγεβρας. Με το συμβολισμό της (57) και μια προφανή παραλλαγή του, θέτουμε

$$\begin{aligned}(108)\quad & \alpha_E(\vec{x}, p_1, \dots, p_l) = w \\ & \iff (\mathbf{N}_0, p_1, \dots, p_l), E \vdash \zeta_0(\vec{x}) = w \text{ με } \xi_1 := p_1, \dots, \xi_l := p_l \\ & \qquad\qquad \iff E, \vec{\xi} := \vec{p} \vdash \zeta_0(\vec{x}) = w,\end{aligned}$$

όπου, γενικότερα, για κάθε εσωτερική μεταβλητή ζ του E,

$$\begin{aligned}(109)\quad & E, \vec{\xi} := \vec{p} \vdash \zeta(\vec{x}) = w \\ & \iff (\mathbf{N}_0, p_1, \dots, p_l), E \vdash \zeta(\vec{x}) = w \text{ με } \xi_1 := p_1, \dots, \xi_l := p_l.\end{aligned}$$

Εδώ ο συμβολισμός παραλείπει την αναφορά στην άλγεβρα $\mathbf{N}_0$ εφόσον αυτή είναι η μόνη άλγεβρα που θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο, αλλά δείχνει την **αποτίμηση** $\xi_1 := p_1, \dots, \xi_l := p_l$ των εξωτερικών μεταβλητών: αυτή είναι χρήσιμη, επειδή πολλές φορές θα ερμηνεύσουμε το το ίδιο πρόγραμμα με διαφορετικές —όλες τις δυνατές— αποτιμήσεις των εξωτερικών μεταβλητών του.

Τα μη-γενικευμένα προγράμματα (χωρίς εξωτερικές συναρτησιακές μεταβλητές) καλούνται **αυτόνομα**.

6Α.2. **Συναρτησιακά.** Η μερική συνάρτηση $\alpha(\vec{x}, \vec{p})$ στην (108) είναι παράδειγμα **συναρτησιακού** (στο $\mathbb{N}$), δηλαδή μερικής συνάρτησης που δέχεται ως τιμές εισόδου φυσικούς αριθμούς και πλειομελείς μερικές συναρτήσεις, και (όταν συγκλίνει) αποδίδει τιμή στο $\mathbb{N}$. Επιπρόσθετα παραδείγματα:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\vec{x}) &= f(\vec{x}) && (\text{όπου } f : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}), \\ \alpha_2(p, r) &= p(0) && (p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}, q : \mathbb{N}^2 \rightharpoonup \mathbb{N}), \\ \text{eval}^n(\vec{x}, p) &= p(\vec{x}).\end{aligned}$$

Το α_1 διευκρινίζει ότι δεν είναι απαραίτητη η εξάρτηση ενός συναρτησιακού από μερικές συναρτήσεις, έτσι που *κάθε μερική συνάρτηση είναι συναρτησιακό*· και το α_2 είναι παράδειγμα συναρτησιακού με είσοδο χωρίς φυσικούς αριθμούς – μόνο μερικές συναρτήσεις. Παρατηρούμε ότι για κάθε διμελή μερική συνάρτηση r, με $S(x) = x + 1$ και ε την «κενή» μερική συνάρτηση,

$$\alpha_2(S, r) = S(0) = 1, \quad \alpha_2(\varepsilon, r) = \varepsilon(0) = \bot.$$

Το eval^n είναι ίσως το απλούστερο μη-τετριμμένο συναρτησιακό της (n-μελούς) **κλήσης**, π.χ.,

$$\text{eval}^1(x, S) = S(x) = x + 1, \quad \text{eval}^3(x, y, z, P_2^3) = P_2^3(x, y, z) = y.$$

6Α.3. ΟΡΙΣΜΟΣ. Το τυχαίο συναρτησιακό $\alpha(\vec{x}, \vec{p})$ είναι **αναδρομικό**, αν υπολογίζεται από κάποιο αναδρομικό πρόγραμμα E με εξωτερικές μεταβλητές $\xi_1, \dots, \xi_l$, δηλαδή $\alpha = \alpha_E$ στην (108), ή, ισοδύναμα,

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff E, \vec{\xi} := \vec{p} \vdash \zeta(\vec{x}) = w$$

για κάποια εσωτερική μεταβλητή ζ του E. Θέτουμε

$$\mathcal{R} = \text{το σύνολο των αναδρομικών συναρτησιακών},$$

προφανώς χωρίς αντίφαση με τον προηγούμενο ορισμό του συμβολισμού.

6A.4. ΛΗΜΜΑ. (a) *Η κλάση $\mathcal{R}$ των αναδρομικών συναρτησιακών περιλαμβάνει όλες τις αναδρομικές μερικές συναρτήσεις και τα συναρτησιακά κλήσης* eval^n*, και είναι κλειστή για σύνθεση*

$$\alpha(\vec{x},\vec{p}) = \beta(\gamma_1(\vec{x},\vec{p}),\dots,\gamma_m(\vec{x},\vec{p}),\vec{p}),$$

διακλάδωση

$$\alpha(\vec{x},\vec{p}) = \text{αν } (\beta_1(\vec{x},\vec{p}) = 0) \text{ τότε } \beta_2(\vec{x},\vec{p}) \text{ αλλιώς } \beta_3(\vec{x},\vec{p}),$$

και ελαχιστοποίηση

$$\alpha(y,\vec{x},\vec{p}) = (\mu i \geq y)[\beta(i,\vec{x},\vec{p}) = 0].$$

(b) *Η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή για «ρητούς» ορισμούς της μορφής*

$$\alpha(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m) = \beta(x_{a_1},\dots,x_{a_k},p_{b_1},\dots,p_{b_l}), \tag{110}$$

όπου $a_1,\dots,a_k$, $b_1,\dots,b_l$ είναι ακολουθίες από τους δείκτες $1,\dots,n$ και $1,\dots,m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το $\mathrm{eval}^n(\vec{x},p)$ υπολογίζεται από το πρόγραμμα

$$f(\vec{x}) = \xi(\vec{x})$$

με την εξωτερική μεταβλητή ξ και την αποτίμηση $\xi := p$, και για τα άλλα μέρη του (a), τα επιχειρήματα είναι ακριβώς αυτά των 2C.3 και 2D.1.

Το (b) δικαιολογεί την πρόσθεση νέων μεταβλητών και την «ταυτοποίηση» άλλων, π.χ., ορισμούς της μορφής

$$\alpha(x,z,y,p,q,r) = \beta(y,x,y,y,p,r,r,p)$$

και η απόδειξή του είναι εύκολη, Άσκηση x6A.1. ⊣

Με αυτό το Λήμμα και τις μεθόδους του Κεφαλαίου 2, μπορούμε να δείξουμε εύκολα —συνήθως με απλή επισκόπηση— την αναδρομικότητα πολλών συναρτησιακών. Για παράδειγμα, αν το $\beta(y,x,q)$ είναι αναδρομικό, τότε αναδρομικό είναι και το

$$\alpha(x,y,p,q) = \text{αν } (\beta(y,y,q) = 0) \text{ τότε } y+1 \text{ αλλιώς } p(2y,x) \tag{111}$$

όπου η p είναι διμελής, με την εξής λεπτομερή απόδειξη: θέτουμε πρώτα

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x,y,p,q) &= \beta(y,y,q) && \text{(ρητά)}\\
\alpha_2(x,y,p,q) &= = S(y) = y+1 && \text{(ρητά)}\\
\beta_1(x,y,p) &= 2y && \text{(ρητά)}\\
\beta_2(x,y,p) &= P^1_1(x) = x && \text{(ρητά)}\\
\beta_3(x,y,p) &= \mathrm{eval}^2(\beta_1(x,y,p),\beta_2(x,y,p),p) = p(2y,x) && \text{(σύνθεση)}\\
\alpha_3(x,y,p,q) &= \beta_3(x,y,p) = p(2y,x) && \text{(ρητά)},
\end{aligned}$$

και μετά με διακλάδωση,

$$\alpha(x,y,p,q) = \text{αν } (\alpha_1(x,y,p,q)=0) \text{ τότε } \alpha_2(x,y,p,q) \text{ αλλιώς } \alpha_3(x,y,p,q).$$

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, ο ευκολότερος τρόπος να δείξουμε ότι κάποιο συναρτησιακό είναι αναδρομικό είναι από τον ορισμό — να γράψουμε κάποιο πρόγραμμα που το υπολογίζει.

6A. Ασκήσεις

x6A.1. Δείξτε το μέρος (b) του Λήμματος 6A.4.

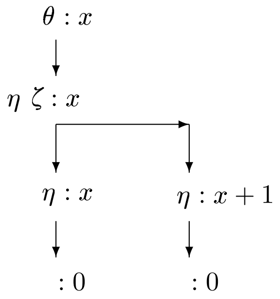
6B. Αναιτιοκρατική αναδρομή

Στον ορισμό 2B.4 αφηρημένων μηχανών επιτρέψαμε αναιτιοκρατικές σχέσεις μεταβάσεων, έτσι που τα επιχειρήματα υπέρ του Αιτήματος Church-Turing στο εδάφιο 3B να είναι όσο το δυνατόν ισχυρότερα, αλλά μέχρι τώρα δεν έχουμε μελετήσει αναιτιοκρατικά αναδρομικά προγράμματα· έχουν και αυτά τις εφαρμογές τους.

6B.1. Ορισμος. **Αναιτιοκρατικό αναδρομικό πρόγραμμα** είναι το τυχαίο σύστημα ορισμών

$$(E)\qquad \begin{array}{rl} (e_0) & \zeta_0(\vec{x}_0) = E_0\\ & \vdots\\ (e_k) & \zeta_k(\vec{x}_k) = E_k \end{array}$$

όπως στον Ορισμό 6A.1, όπου τώρα επιτρέπουμε περισσότερους από έναν ορισμό για τις εσωτερικές συναρτησιακές μεταβλητές. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τέτοια, γενικευμένα προγράμματα, οι *εσωτερικές* και *εξωτερικές* μεταβλητές τους ορίζονται όπως πριν, και οι *καταστάσεις*, οι *υπολογισμοί* και οι *τερματικοί υπολογισμοί* αναιτιοκρατικών προγραμμάτων ορίζονται ακριβώς όπως και για τα αιτιοκρατικά προγράμματα στο εδάφιο 2B μόνο που τώρα επιτρέπουμε την ύπαρξη πολλών υπολογισμών με την ίδια είσοδο. Χαρακτηριστικό αυτών των προγραμμάτων είναι ότι δεν καθορίζουν απαραίτητα μια μερική συνάρτηση $\overline{\zeta}$ για κάθε εσωτερική μεταβλητή ζ.



Σχημα 6. Οι υπολογισμοί του E_2.

Παρατηρούμε ότι κάθε πρόγραμμα μπορεί να θεωρηθεί και ως αναιτιοκρατικό, εφόσον ο ορισμός δεν απαιτεί την ύπαρξη πολλών ορισμών για κάποια μεταβλητή – απλά τους επιτρέπει.

Μερικά παραδείγματα, πριν ορίσουμε αυστηρά τη σημασιολογία για τα αναιτιοκρατικά προγράμματα:

6B.2. Το πρόγραμμα

$$(E_1) \qquad \begin{aligned} \zeta(x) &= 0 \\ \zeta(x) &= 1 \end{aligned}$$

προφανώς δεν υπολογίζει μερική συνάρτηση — γιατί αν υπολόγιζε κάποια $\overline{\zeta}$, ποια θα ήταν η τιμή $\overline{\zeta}(0)$;

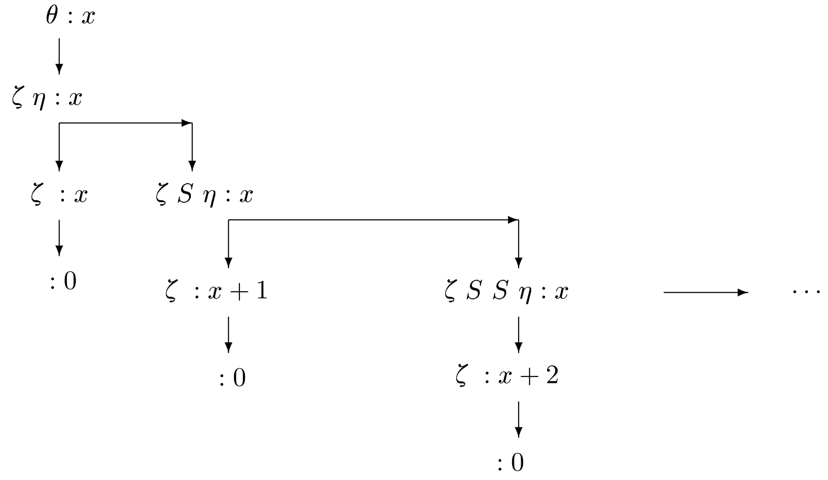
Από την άλλη μεριά, το πρόγραμμα

$$(E_2) \qquad \begin{aligned} \zeta(x) &= x \\ \zeta(x) &= x+1 \\ \eta(y) &= 0 \\ \theta(x) &= \eta(\zeta(x)) \end{aligned}$$

προφανώς υπολογίζει την $\overline{\theta}(x) = 0$, αν και, πάλι, δεν αντιστοιχεί καμιά μερική συνάρτηση $\overline{\zeta}$ στη μεταβλητή ζ. Για κάθε x, το E_2 έχει δύο υπολογισμούς της τιμής $\overline{\theta}(x)$, με τους υπολογισμούς που δείχνονται σχηματικά στο Σχήμα 6.

Ακόμη πιο ενδιαφέρον είναι το πρόγραμμα

$$(E_3) \qquad \begin{aligned} \eta(x) &= x \\ \eta(x) &= S(\eta(x)) \\ \zeta(x) &= 0 \\ \theta(x) &= \zeta(\eta(x)) \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 7. Οι υπολογισμοί του E_3.

για το οποίο πάλι $\overline{\theta}(x) = 0$ αλλά τώρα έχει άπειρους το πλήθος υπολογισμούς για κάθε είσοδο, που δείχνονται σχηματικά στο Σχήμα 7.

Το τελευταίο παράδειγμα είναι αναιτιοκρατικού προγράμματος με μια εξωτερική μεταβλητή (ξ) που υπολογίζει συναρτησιακό:

$$(E_4) \qquad \begin{aligned} \zeta_0(x) &= \theta(q(x)) \\ \eta(x) &= \xi(0) \\ \eta(x) &= \xi(1) \\ \theta(x) &= 0 \end{aligned}$$

Με τον ορισμό (108) του συναρτησιακού που υπολογίζεται από ένα πρόγραμμα (αν δεχτούμε ότι αυτός ισχύει και για αναιτιοκρατικά προγράμματα), το E_4 με την αποτίμηση $\xi := p$ υπολογίζει το συναρτησιακό

$$(112) \qquad \alpha(x, p) = \begin{cases} 0, & \text{αν } p(0)\downarrow \ \vee \ p(1)\downarrow, \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά, ορίζουμε τι σημαίνει για ένα συναρτησιακό να «υπολογίζεται» από κάποιο αναιτιοκρατικό, αναδρομικό πρόγραμμα:

6B.3. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Αναιτιοκρατικά αναδρομικές μερικές συναρτήσεις και συναρτησιακά.** Η τυχαία μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι *αναιτιοκρατικά αναδρομική* αν υπάρχει αναιτιοκρατικό πρόγραμμα E χωρίς εξωτερικές μεταβλητές και κάποια μεταβλητή ζ στο E, τέτοιο που για όλα τα $\vec{x}$,

$$\begin{aligned}(113)\quad f(\vec{x}) = w &\iff \mathbf{N}_0, E \vdash \zeta(\vec{x}) = w\\ &\iff \text{υπάρχει τερματικός υπολογισμός του } E\\ &\qquad \text{με είσοδο } \zeta : \vec{x} \text{ και τερματική κατάσταση } : w.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, το E υπολογίζει την $f(\vec{x})$ αν, για κάθε $\vec{x}$:

(1) Υπάρχει τουλάχιστον ένας τερματικός υπολογισμός με είσοδο $\zeta : \vec{x}$ και τερματική κατάσταση $: f(\vec{x})$·

(2) κάθε τερματικός υπολογισμός του E στην είσοδο $\zeta : \vec{x}$ έχει τερματική κατάσταση $: f(\vec{x})$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός επιτρέπει την ύπαρξη υπολογισμών που αποκλίνουν (με «άπειρο μήκος»), όπως στο E_3 πιο πάνω.

Ο ορισμός επεκτείνεται εύκολα σε συναρτησιακά: στην απλή περίπτωση με μια μόνο εξωτερική μεταβλητή για μερικές συναρτήσεις, το τυχαίο συναρτησιακό $\alpha(\vec{x}, p)$ είναι *αναιτιοκρατικά αναδρομικό* αν υπάρχει αναιτιοκρατικό πρόγραμμα E με μια εξωτερική μεταβλητή ξ και κάποια εσωτερική μεταβλητή ζ, έτσι που για όλα τα $\vec{x}, p, w$,

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff E, \xi := p \vdash \zeta(\vec{x}) = w.$$

Θέτουμε

$$\mathcal{R}_{nd} = \text{το σύνολο των αναιτιοκρατικά αναδρομικών συναρτησιακών.}$$

6B.4. ΛΗΜΜΑ. *Η τυχαία μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνον αν είναι αναιτιοκρατικά αναδρομική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η κωδικοποίηση συμβόλων, προγραμμάτων, καταστάσεων, υπολογισμών, και γενικά όλης της θεωρίας αναδρομικών προγραμμάτων στο εδάφιο 3Α επεκτείνεται τετριμμένα για τα αναιτιοκρατικά προγράμματα, και μάλιστα με μόνο μια διαφορά στις λεπτομέρειες: στον ορισμό της σχέσης Προγρ(e) απλά παραλείπουμε την τελευταία συνθήκη που απαγορεύει πολλαπλούς ορισμούς της ίδιας συναρτησιακής μεταβλητής. Αυτό επιτρέπει την ύπαρξη πολλών υπολογισμών για την ίδια είσοδο, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν y_1, y_2 τέτοια που

$$y_1 \neq y_2 \ \&\ T_n(e, \vec{x}, y_1) \ \&\ T_n(e, \vec{x}, y_2),$$

αλλά δεν αλλάζει το βασικό συμπέρασμα: αν ισχύει η (113) για κάποια f και κάποιο πρόγραμμα E χωρίς εξωτερικές μεταβλητές και με κωδικό e, τότε

$$f(\vec{x}) = w \iff (\exists y)[T_n(e, \vec{x}, y) \ \&\ U(y) = w],$$

έτσι που το γράφημα της $f(\vec{x})$ είναι Σ^0_1 και η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική. ⊣

Για συναρτησιακά, όμως, η αναιτιοκρατική αναδρομή είναι γνήσια επέκταση της αιτιοκρατικής αναδρομής, και μάλιστα το παράδειγμα (112) δεν είναι (αιτιοκρατικά) αναδρομικό. Η απόδειξη στηρίζεται στην τελευταία από τις εξής τρεις βασικές ιδιότητες συναρτησιακών.

6B.5. ΟΡΙΣΜΟΣ. Το συναρτησιακό $\alpha(\vec{x}, p)$ είναι:

- **μονοτονικό** (monotonic ή monotone) αν για όλες τις μερικές συναρτήσεις p, q, και όλα τα $\vec{x}$, w,

  $$[\alpha(\vec{x}, p) = w \;\&\; p \sqsubseteq q] \Longrightarrow \alpha(\vec{x}, q) = w\cdot$$

- **συνεχές** (continuous) αν για κάθε p και όλα τα $\vec{x}$, w,

  $$\alpha(\vec{x}, p) = w \Longrightarrow (\exists r)[r \sqsubseteq p \;\&\; \alpha(\vec{x}, r) = w \;\&\; \text{η } r \text{ είναι πεπερασμένη}],$$

  όπου μια μερική συνάρτηση είναι *πεπερασμένη* αν έχει πεπερασμένο πεδίο σύγκλισης· και

- **αιτιοκρατικό** (deterministic) αν για κάθε p και όλα τα $\vec{x}$, w,

  $$\alpha(\vec{x}, p) = w \Longrightarrow (\exists! r \sqsubseteq p)[\alpha(\vec{x}, r) = w \;\&\; (\forall r' \sqsubseteq r)[\alpha(\vec{x}, r')\downarrow \Longrightarrow r' = r]].$$

Οι ορισμοί είναι παρόμοιοι για συναρτησιακά $\alpha(\vec{x}, \vec{p})$ με περισσότερες μεταβλητές, μόνο λίγο πιο δύσκολοι να διατυπωθούν πλήρως.

Για παράδειγμα, το

$$\alpha(p) = \begin{cases} 0, & \text{αν } p(0)\downarrow, \\ 1, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

δεν είναι μονοτονικό· το

$$\beta(p) = \begin{cases} 0, & \text{αν η } p \text{ είναι ολική} \\ \bot, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχές· και το συναρτησιακό (112) δεν είναι αιτιοκρατικό, Άσκηση x6B.2.

6B.6. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε αναιτιοκρατικά αναδρομικό συναρτησιακό α είναι μονοτονικό και συνεχές, και επιπλέον, κάθε* (αιτιοκρατικά) *αναδρομικό συναρτησιακό είναι αιτιοκρατικό.*

Έπεται ότι υπάρχουν αναιτιοκρατικά αναδρομικά συναρτησιακά που δεν είναι αναδρομικά, π.χ., αυτό που ορίζεται από την (112).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τη μονοτονικότητα, υποθέτουμε ότι για κάποιο (ίσως αναιτιοκρατικό) πρόγραμμα E με κύριο σύμβολο ζ_0 και εξωτερική μεταβλητή ξ

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff E, \xi := p \vdash \zeta_0(\vec{x}) = w,$$

ότι κάποιος υπολογισμός

$$\zeta_0 : \vec{x} \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots \to \alpha_n : \beta_n \to : w \tag{114}$$

του E με την αποτίμηση $\xi := p$ αποδίδει την τιμή $\alpha(\vec{x}, p) = w$, και ότι $p \sqsubseteq q$· και παρατηρούμε ότι η ίδια ακολουθία καταστάσεων είναι υπολογισμός του E για την αποτίμηση $\xi := q$, επειδή οι μεταβάσεις

$$\alpha^* \; \xi : \vec{y} \; \beta^* \to \alpha^* : p(\vec{y}) \; \beta^*$$

που καλούν την ξ δεν είναι άγονες (αλλιώς ο υπολογισμός θα σταματούσε), άρα $p(\vec{y})\!\downarrow$, και επομένως $q(\vec{y}) = p(\vec{y})$ η ίδια μετάβαση ισχύει και για τον υπολογισμό με την αποτίμηση $\xi := q$.

Με τον ίδιο τρόπο, ο υπολογισμός (114) για την αποτίμηση $\xi := p$ είναι επίσης υπολογισμός για την αποτίμηση $\xi := r$, όπου η $r(\vec{y})$ συγκλίνει μόνο για τις (πεπερασμένες το πλήθος) τιμές της p που καλούνται στον (114), και έτσι το $\alpha(\vec{x}, p)$ είναι συνεχές.

Τελικά, αν το πρόγραμμα E είναι αιτιοκρατικό, τότε μόνο ένας υπολογισμός (114) υπολογίζει τη τιμή $\zeta_0(\vec{x}) = w$ για την αποτίμηση $\xi := p$, και η (πεπερασμένη) μερική συνάρτηση r στην απόδειξη της συνέχειας είναι η ελάχιστη $r \sqsubseteq p$ μερική συνάρτηση τέτοια που $\alpha(\vec{x}, r)\!\downarrow$, αλλιώς ο (114) θα τερμάτιζε «πιο γρήγορα». ⊣

Για τα συναρτησιακά στην κλάση $\mathcal{R}_{nd}$ υπάρχει μια απλή και χρήσιμη «κανονική μορφή», που χρησιμοποιεί την εξής κωδικοποίηση.

6B.7. **Κωδικοποίηση πεπερασμένων συναρτήσεων και συνόλων**. Για κάθε $z \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\begin{aligned} d(z,i) &= \begin{cases} (z)_i \dot{-} 1, & \text{αν } i < \mathrm{lh}(z) \ \&\ (z)_i > 0, \\ \bot, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ d_z(i) &= d(z,i), \\ D_z &= \{i \mid d_z(i)\!\downarrow\}. \end{aligned}$$

Η μερική συνάρτηση $d(z,i)$ είναι (πρωτογενώς) αναδρομική· η ακολουθία

$$d_0, d_1, \ldots$$

απαριθμεί όλες τις πεπερασμένες, μερικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής· και η ακολουθία

$$D_0, D_1, \ldots$$

απαριθμεί όλα τα πεπερασμένα σύνολα έτσι που

$$i \in D_z \iff i < \mathrm{lh}(z) \ \&\ (z)_i > 0,$$

και, ειδικότερα, η σχέση $i \in D_z$ να είναι πρωτογενώς αναδρομική.

6B.8. Θεωρημα (**Κανονική Μορφή για το $\mathcal{R}_{\mathbf{nd}}$**). *Το τυχαίο συναρτησιακό $\alpha(\vec{x}, p)$ είναι αναιτιοκρατικά αναδρομικό, αν και μόνον αν για κάποια αναδρομική σχέση $R(\vec{x}, w, z, y)$,*

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff (\exists z)[d_z \sqsubseteq p \ \&\ (\exists y) R(\vec{x}, w, z, y)]. \tag{115}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τη μια κατεύθυνση, με $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, θέτουμε

$$\begin{aligned} T^*_n(e, \vec{x}, z, i, y) \iff\ & \text{ο } e \text{ είναι κωδικός κάποιου (ίσως αναιτιοκρατικού)} \\ & \text{αναδρομικού προγράμματος } E \\ & \text{και μόνο η } \xi^1_i \text{ είναι εξωτερική στο } E \\ & \text{και ο } y \text{ είναι κωδικός τερματικού} \\ & \text{υπολογισμού του } E \text{ στην είσοδο } \zeta^n_0 : \vec{x} \\ & \text{για την αποτίμηση } \xi^1_i := d_z. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή είναι πρωτογενώς αναδρομική με τις μεθόδους του 3A, και, εύκολα, αν το E είναι τέτοιο που

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff E, \zeta^1_i := p \vdash \zeta^n_0(\vec{x}) = w,$$

τότε

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff (\exists z)[d_z \sqsubseteq p \;\&\; (\exists y)[T^*_n(e, \vec{x}, z, i, y) \;\&\; U(y) = w]].$$

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι το $\alpha(\vec{x}, p)$ ικανοποιεί την ισοδυναμία (115), θέτουμε

$$h(z, \vec{x}) = \Big(\mu y R(\vec{x}, (y)_0, z, (y)_1)\Big)_0,$$

και παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό

$$\beta(z, \vec{x}, p) = \text{αν } (\forall i < \mathrm{lh}(z))[d_z(i)\!\downarrow \Longrightarrow p(i) = d_z(i)] \text{ τότε } h(z, \vec{x}) \text{ αλλιώς } \perp$$

είναι αναδρομικό, από τις ιδιότητες κλειστότητες των αναδρομικών συναρτησιακών 6A.4. Έστω E πρόγραμμα που υπολογίζει το $\beta(z, \vec{x}, p)$ έτσι που

$$\beta(z, \vec{x}, p) = w \iff E, \xi := p \vdash \zeta(z, \vec{x}) = w,$$

και έστω E' το πρόγραμμα που δημιουργείται με την πρόσθεση των εξής εξισώσεων, με καινούργιες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 0 \\ \eta(t) &= S(\eta(t)) \\ \theta(\vec{x}) &= \zeta(\eta(0), \vec{x}). \end{aligned}$$

Οι τερματικοί υπολογισμοί του E' που ξεκινούν με $\theta : \vec{x}$ είναι της μορφής

$$\begin{array}{rcl} \theta & : & \vec{x} \\ \zeta\ \eta & : & 0\ \vec{x} \\ & \vdots & \\ \zeta & : & z\ \vec{x} \\ & \vdots & \\ & : & w \end{array}$$

και επειδή από τη στιγμή που υπολογίζεται η τιμή z δεν ενεργοποιούνται πια οι μεταβάσεις που προσθέσαμε στο E, έπεται ότι

$$w = \overline{\theta}(\vec{x}) = \beta(z, \vec{x}, p),$$

έτσι που με τους ορισμούς,

$$d_z \sqsubseteq p \mathbin{\&} (\exists y)R(\vec{x}, w, z, y), \tag{116}$$

δηλαδή $\alpha(\vec{x}, p) = w$. Από την άλλη μεριά, αν $\alpha(\vec{x}, p) = w$, τότε υπάρχει z τέτοιο που ισχύει η (116), και με τις μεταβάσεις της $\eta(t)$ στο E', υπάρχει υπολογισμός του E' που φτάνει στο σημείο

$$\zeta : z\ \vec{x}\cdot$$

για παράδειγμα, αν $z = 2$, ο υπολογισμός φτάνει στις καταστάσεις

$$\begin{aligned} \theta &: \vec{x} \\ \zeta\ \eta &: 0\ \vec{x} \\ \zeta\ S\ \eta &: 0\ \vec{x} \\ \zeta\ S\ S\ \eta &: 0\ \vec{x} \\ \zeta\ S\ S &: 0\ \vec{x} \\ \zeta\ S &: 1\ \vec{x} \\ \zeta &: 2\ \vec{x}. \end{aligned}$$

Από δω και μετά ο υπολογισμός συνεχίζει με τις μεταβάσεις του E και τελικά αποδίδει τη σωστή τιμή

$$\overline{\zeta}(z, \vec{x}) = \beta(z, \vec{x}, p) = \alpha(\vec{x}, p). \qquad \dashv$$

6B.9. **Turing αναγωγιμότητα.** Η τυχαία ολική, μονομελής συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ανάγεται αναδρομικά* σε μιαν άλλη g, αν υπάρχει κάποιο αναδρομικό συναρτησιακό $\alpha(t, p)$ τέτοιο που

$$f(t) = \alpha(t, g) \quad (t \in \mathbb{N}). \tag{117}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} f \leq_T g &\iff \text{η } f \text{ ανάγεται αναδρομικά στη } g \\ f \equiv_T g &\iff f \leq_T g \mathbin{\&} g \leq_T f. \end{aligned}$$

Ο δείκτης T στο συμβολισμό αναφέρεται στον Turing, και η σχέση $\leq_T$ κοινά καλείται *Turing αναγωγή* και συνήθως εφαρμόζεται σε σύνολα, μέσω των χαρακτηριστικών τους συναρτήσεων,

$$\begin{aligned} A \leq_T B &\iff \chi_A \leq_T \chi_B \\ A \equiv_T B &\iff A \leq_T B \mathbin{\&} B \leq_T A. \end{aligned}$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\equiv_T$ στα σύνολα καλούνται (Turing) *βαθμοί αναποκρισιμότητας* (degrees of unsolvability)

$$\deg_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\},$$

και η «προδιάταξη» $\leq_T$ ορίζει στους βαθμούς τη μερική διάταξη

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \leq_T \mathbf{b} &\iff (\exists A \in \mathbf{a}, B \in \mathbf{b})[A \leq_T B] \\ &\iff (\forall A \in \mathbf{a}, B \in \mathbf{b})[A \leq_T B]. \end{aligned}$$

Επίσης θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \deg(\emptyset) \qquad\qquad (= \deg(A) \text{ για κάθε αναδρομικό } A) \\ \mathbf{0}' &= \deg(K), \end{aligned}$$

όπου K είναι το κανονικό, πλήρες αναδρομικά απαριθμητό σύνολο (90).

Η θεωρία της μερικής διάταξης $\leq_T$ στο σύνολο $\mathcal{D}$ των βαθμών αναποκρισιμότητας είναι (ακόμη) ένας από τους πλέον δραστήριους κλάδους έρευνας στη θεωρία αναδρομής, τον οποίο όμως δε θα καλύψουμε εδώ. Θα περιοριστούμε σε μερικές απλές, σχετικές ασκήσεις και στη διατύπωση τριών από τα βασικά θεωρήματά του που υποδείχνουν μια από τις κύριες κατευθύνσεις του.

6B.10. ΘΕΩΡΗΜΑ. (1) *Για κάθε σύνολο* $A \subseteq \mathbb{N}$ *υπάρχει κάποιο* B *με μεγαλύτερο βαθμό αναποκρισιμότητας,* $\deg(A) <_T \deg(B)$.

(2) [Kleene-Post] *Υπάρχουν σύνολα* $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *που δεν συγκρίνονται ως προς τη* $\leq_T$, *δηλαδή* $A \not\leq_T B$ *και* $B \not\leq_T A$.

(3) [Friedberg-Muchnik] *Υπάρχουν α.α. σύνολα* $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *που δεν συγκρίνονται ως προς την* $\leq_T$, *δηλαδή* $A \not\leq_T B$ *και* $B \not\leq_T A$, *άρα και*

$$\mathbf{0} <_T \deg(A) <_T \mathbf{0}'$$

και το ίδιο για το B.

Η βελτίωση (3) του (2) διατυπώνεται ξεχωριστά επειδή ήταν ανοικτό πρόβλημα (το «Πρόβλημα του Post») από το 1944 μέχρι τη λύση της το 1956, και η «μέθοδος προτεραιότητας» (priority method) με την οποία τελικά λύθηκε έχει εξελιχθεί σε μια από τις βασικές μεθόδους της θεωρίας υπολογισιμότητας.

6B. Ασκήσεις

x6B.1. Από τα εξής συναρτησιακά, ποια είναι αναδρομικά και ποια είναι αναιτιοκρατικά αναδρομικά; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

$$\alpha(p) = \text{αν } (\exists x)[p(x) = 1] \text{ τότε } 1 \text{ αλλιώς } \perp$$

$$\beta(p) = \text{αν } (\exists x)[p(x) = 1 \ \& \ (\forall i < x)p(i) = 0] \text{ τότε } 1 \text{ αλλιώς } \perp$$

x6B.2. Δείξτε με αντιπαραδείγματα ότι καμιά από τις συνθήκες στον ορισμό 6B.5 δεν συνάγεται από τις άλλες δύο.

x6B.3. Δείξτε ότι για ολικές, μονομελείς συναρτήσεις f, g, αν υπάρχει αναιτιοκρατικά αναδρομικό συναρτησιακό $\alpha(t, p)$ έτσι που

$$f(t) = \alpha(t, g),$$

τότε $f \leq_T g$. ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Επικαλεστείτε το Θεώρημα Κανονικής Μορφής 6B.8.

x6B.4. Δείξτε ότι $f \leq_T g \;\&\; g \leq_T h \Longrightarrow f \leq_T h$.

x6B.5. Δείξτε ότι αν η g είναι αναδρομική και η f ανάγεται στη g, τότε και η f είναι αναδρομική.

x6B.6. Δείξτε ότι αν $f \leq_T g$ και το γράφημα της g είναι Σ_k, τότε και το γράφημα της f είναι Σ_k.

x6B.7. Δείξτε ότι $\mathbf{0} <_T \mathbf{0}'$.

6B.11. ΟΡΙΣΜΟΣ (**Πολυσήμαντη αναιτιοκρατική αναδρομή**). Το αναιτιοκρατικό πρόγραμμα

$$\zeta(x) = 0$$
$$\zeta(x) = 1,$$

δεν υπολογίζει μερική συνάρτηση, επειδή, προφανώς, για κάθε x έχει δύο υπολογισμούς

$$\zeta : x \to^* \;: 0 \quad \zeta : x \to^* \;: 1,$$

και έτσι δεν καθορίζει μια συγκεκριμένη τιμή $\overline{\zeta}(x)$. Είναι όμως φυσικό να θεωρήσουμε ως «τιμή» που υπολογίζεται από το E το σύνολο $\{0, 1\}$ των δύο τιμών 0 και 1, και ο επόμενος ορισμός κάνει αυστηρή αυτή τη φυσική έννοια.

Για κάθε συναρτησιακή μεταβλητή ζ σε δοσμένο αναιτιοκρατικό αναδρομικό πρόγραμμα E (χωρίς εξωτερικές μεταβλητές), θέτουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}(\vec{x}) = \{w \mid & w \in \mathbb{N} \;\&\; \text{υπάρχει υπολογισμός } \zeta : \vec{x} \to \cdots \to \;: w \text{ του } E\\ & \text{ή } w = \bot \text{ και υπάρχει αποκλίνων υπολογισμός του } E\\ & \zeta : \vec{x} \to \alpha_1 : \beta_1 \to \cdots\}.\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, η «τιμή» του προγράμματος

$$\zeta(x) = 0$$
$$\zeta(x) = 1$$
$$\zeta(x) = \zeta(x)$$

είναι $\widetilde{\zeta}(x) = \{0, 1, \bot\}$.

x6B.8. Δώστε παραδείγματα αναιτιοκρατικών προγραμμάτων με κύριο σύμβολο ζ για τα οποία:

(1) $\widetilde{\zeta}(x) = \mathbb{N} \cup \{\bot\}$.
(2) $\widetilde{\zeta}(x) = \{0, 1, \dots, x\}$.

x6B.9. Έστω E_+ πρόγραμμα που υπολογίζει την πρόσθεση, και E η αναιτιοκρατική επέκταση του E_+ με τους ορισμούς

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1 \\ \zeta(x) &= \zeta(x) + \zeta(x). \end{aligned}$$

Ποιο είναι το σύνολο $\widetilde{\zeta}(0)$;

x6B.10. Έστω E_2 πρόγραμμα που υπολογίζει τη συνάρτηση $2x$, και E η αναιτιοκρατική επέκταση του E_2 με τους ορισμούς

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1 \\ \zeta(x) &= 2\zeta(x). \end{aligned}$$

Ποιο είναι το σύνολο $\widetilde{\zeta}(0)$;

x6B.11*. Δείξτε ότι αν για κάποιο αναιτιοκρατικό πρόγραμμα E με κύριο σύμβολο ζ το σύνολο $\widetilde{\zeta}(x)$ είναι άπειρο, τότε $\bot \in \widetilde{\zeta}(x)$, δηλαδή υπάρχει αποκλίνων υπολογισμός του E που αρχίζει με την κατάσταση $\zeta : x$. (Αυτή η άσκηση χρειάζεται ένα αποτέλεσμα από τη συνολοθεωρία.)

6C. Το 1ο Θεώρημα Αναδρομής

Το θεώρημα σ'αυτό το εδάφιο είναι θεμελιακό για τη θεωρία αναδρομής. Για την απόδειξή του, δείχνουμε πρώτα ένα απλό Λήμμα.

6C.1. ΛΗΜΜΑ. *Για κάθε αναιτιοκρατικά αναδρομικό συναρτησιακό $\alpha(\vec{x}, \vec{p})$, η μερική συνάρτηση*

$$f(\vec{x}, e_1, \dots, e_l) = \alpha(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_l})$$

είναι αναδρομική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για την περίπτωση με μια μόνο συναρτησιακή μεταβλητή, όπου ο συμβολισμός είναι απλούστερος, έχουμε από το Θεώρημα Κανονικής Μορφής 6B.8 μια ισοδυναμία

$$\alpha(\vec{x}, p) = w \iff \exists z)[d_z \sqsubseteq p \,\&\, (\exists y)R(\vec{x}, w, z, y)],$$

όπου η $R(\vec{x}, w, z, y)$ είναι ημιαναδρομική σχέση· άρα

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, e) = w &\iff (\exists z)[d_z \sqsubseteq \varphi_e \,\&\, (\exists y)R(\vec{x}, w, z, y)] \\ &\iff (\exists z)[(\forall i < \mathrm{lh}(z)[d_z(i)\downarrow \Longrightarrow \varphi_e(i) = d_z(i)] \\ &\qquad\qquad \& \, (\exists y)R(\vec{x}, w, z, y)], \end{aligned}$$

και η $f(\vec{x}, e)$ είναι αναδρομική επειδή το γράφημά της είναι Σ_1. ⊣

6C.2. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Το 1ο Θεώρημα Αναδρομής**). *Για κάθε μονοτονικό και συνεχές συναρτησιακό $\alpha(x_1,\ldots,x_n,p)$ όπου η p είναι n-μελής συναρτησιακή μεταβλητή, υπάρχει ελάχιστη λύση $\overline{p}$ της αναδρομικής εξίσωσης*

$$p(\vec{x}) = \alpha(\vec{x},p),$$

που χαρακτηρίζεται από τις συνθήκες

(1) *για κάθε $\vec{x}$, $\overline{p}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x},\overline{p})$, και*

(2) *για κάθε $q : \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$,*

$$\textit{αν } (\forall \vec{x},w)[\alpha(\vec{x},q) = w \Longrightarrow q(\vec{x}) = w], \ \textit{τότε } \overline{p} \sqsubseteq \overline{q}.$$

Επιπλέον, αν το $\alpha(\vec{x},p)$ είναι αναιτιοκρατικά αναδρομικό, τότε η $\overline{p}$ είναι αναδρομική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε πρώτα ότι η *μοναδικότητα* της μερικής συνάρτησης $\overline{p}$ που ικανοποιεί τα (1) και (2) του θεωρήματος είναι τετριμμένη· επειδή αν η $\overline{p}$ έχει αυτές τις δύο ιδιότητες και η $\overline{p}'$ τις αντίστοιχες

(1)′ $\overline{p}'(\vec{x}) = \alpha(\vec{x},\overline{p}')$,
(2)′ για κάθε $q : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$,

$$(\forall \vec{x},w)[\alpha(\vec{x},q) = w \Longrightarrow q(\vec{x}) = w] \Longrightarrow \overline{p}' \sqsubseteq q,$$

τότε $\overline{p} \sqsubseteq \overline{p}'$ από την (1)′ και την (2) με $q = \overline{p}'$, και $\overline{p}' \sqsubseteq \overline{p}$ από την (1) και την (2)′ με $q = \overline{p}$. Έτσι απομένει να δείξουμε την ύπαρξη μερικής συνάρτησης $\overline{p}$ που ικανοποιεί τις (1) και (2), και την αναδρομικότητά της, στην περίπτωση που το $\alpha(\vec{x},p)$ είναι αναιτιοκρατικά αναδρομικό.

Θέτουμε

$$\overline{p}^0(\vec{x}) = \bot,$$

και, αναδρομικά,

$$\overline{p}^{n+1}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x},\overline{p}^n).$$

Λήμμα. $\overline{p}^0 \sqsubseteq \overline{p}^1 \sqsubseteq \overline{p}^2 \sqsubseteq \cdots$,
έτσι πού για κάποια μερική συνάρτηση $\overline{p} : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$,

$$\overline{p}(\vec{x}) = w \iff (\exists n)[\overline{p}^n(\vec{x}) = w]. \tag{118}$$

Απόδειξη του Λήμματος. Δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι $\overline{p}^n \sqsubseteq \overline{p}^{n+1}$. Η βάση, $\overline{p}^0 \sqsubseteq \overline{p}^1$ είναι προφανής, επειδή $\overline{p}^0 \sqsubseteq q$, για κάθε q. Για το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned}
\overline{p}^{n+1}(\vec{x}) = w &\Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \overline{p}^n) = w \\
&\qquad \text{από τον ορισμό} \\
&\Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \overline{p}^{n+1}) = w \\
&\qquad \text{από την επαγωγική υπόθεση } \overline{p}^n \sqsubseteq \overline{p}^{n+1} \\
&\quad \text{και τη μονοτονικότητα του } \alpha(\vec{x}, p) \\
&\Longrightarrow \overline{p}^{n+2}(\vec{x}) = w \\
&\qquad \text{από τον ορισμό.}
\end{aligned}$$

Απόδειξη του (1). Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\vec{x}$ και w,

$$\overline{p}(\vec{x}) = w \iff \alpha(\vec{x}, \overline{p}) = w,$$

και θα επαληθεύσουμε ξεχωριστά τις δύο συνεπαγωγές.

Για την $\overline{p}(\vec{x}) = w \Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \overline{p}) = w$ πρώτα, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\overline{p}(\vec{x}) = w &\Longrightarrow (\exists n)[\overline{p}^{n+1}(\vec{x}) = w] && \text{(από τον ορισμό)} \\
&\Longrightarrow (\exists n)[\alpha(\vec{x}, \overline{p}^n)) = w] && \text{(από τον ορισμό)} \\
&\Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \overline{p}) = w && \text{(μονοτονικότητα του } \alpha(p)).
\end{aligned}$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω ότι $\alpha(\vec{x}, \overline{p}) = w$. Από τη συνέχεια του $\alpha(\vec{x}, p)$, έπεται ότι υπάρχει κάποια πεπερασμένη, μερική συνάρτηση $p^* \sqsubseteq \overline{p}$, με πεδίο σύγκλισης

$$\{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}\} = \{\vec{x} \mid p^*(\vec{x})\downarrow\},$$

τέτοια που

$$\alpha(\vec{x}, p^*) = w. \tag{119}$$

Από τον ορισμό της $\overline{p}$, για κάθε $i < k$, υπάρχει κάποιος n_i, τέτοιος που

$$p^*(\vec{x}_i) = \overline{p}(\vec{x}_i) = \overline{p}^{n_i}(\vec{x}_i) \quad (i < k),$$

και αν $n = \max\{n_0, \dots, n_{k-1}\} + 1$, τότε

$$p^*(\vec{x}_i) = \overline{p}^n(\vec{x}_i) \quad (i < k),$$

δηλαδή $p^* \sqsubseteq \overline{p}^n$. Η μονοτονικότητα του $\alpha(\vec{x}, p)$ συνεπάγεται τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\alpha(\vec{x}, p^*) = w &\Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \overline{p}^n) = w \\
&\Longrightarrow \overline{p}^{n+1}(\vec{x}) = w
\end{aligned}$$

που με την (119) συμπληρώνει την απόδειξη του (1).

Απόδειξη του (2). Έστω ότι για κάποια $q : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$

$$(\forall \vec{x}, w)[\alpha(\vec{x}, q) = w \Longrightarrow q(\vec{x}) = w].$$

Το ζητούμενο $\overline{p} \sqsubseteq q$ ακολουθεί από την

$$\overline{p}^n \sqsubseteq q \quad (n \in \mathbb{N})$$

που ισχύει προφανώς για $n = 0$. Επαγωγικά,

$$\begin{aligned}\overline{p}^{n+1}(\vec{x}) = w &\implies \alpha(\vec{x}, \overline{p}^n) = w && \text{από τον ορισμό}\\ &\implies \alpha(\vec{x}, q) = w && \text{από την επαγωγική υπόθεση}\\ & && \text{και τη μονοτονικότητα του } \alpha\\ &\implies q(\vec{x}) = w && \text{από την υπόθεση για την } q.\end{aligned}$$

Τελικά, αν το $\alpha(\vec{x}, p)$ είναι αναιτιοκρατικά αναδρομικό, τότε η μερική συνάρτηση

$$f(e, \vec{x}) = \alpha(\vec{x}, \varphi_e)$$

είναι αναδρομική από το Λήμμα 6C.1, έτσι που για κάποιον αριθμό $\widehat{f}$,

$$\{S^1_1(\widehat{f}, e)\}(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}, \varphi_e).$$

Έπεται ότι αν ο e_0 είναι κάποιος κωδικός της «κενής» μερικής συνάρτησης $\overline{p}^0(\vec{x}) = \bot$ και θέσουμε, αναδρομικά,

$$\begin{aligned}g(0) &= e_0\\ g(n+1) &= S^1_1(\widehat{f}, g(n)),\end{aligned}$$

τότε, για κάθε n, ο $g(n)$ είναι κωδικός της $\overline{p}^n\cdot$ άρα

$$\overline{p}(\vec{x}) = w \iff (\exists n)[\{g(n)\}(\vec{x}) = w],$$

και η $\overline{p}$ είναι αναδρομική, εφόσον έχει Σ_1 γράφημα. ⊣

6D. Υπολογιστές πράξεις

Σ' αυτό και το επόμενο εδάφιο θεωρούμε συναρτησιακά $\alpha(\vec{x}, \vec{p})$, όπου, όμως, οι μεταβλητές $p_1, \dots, p_m$ κυμαίνονται στις *αναδρομικές* (και όχι αυθαίρετες) μερικές συναρτήσεις, έτσι που το α μπορεί να «καλέσει» τις μεταβλητές του με τους κωδικούς τους — δηλαδή «κατ' όνομα» στην ορολογία των γλωσσών προγραμματισμού. Συνηθίζεται αυτά τα συναρτησιακά να καλούνται «πράξεις» (operations).

6D.1. Ορισμος. **Πράξη** (στις αναδρομικές μερικές συναρτήσεις) είναι η τυχαία μερική συνάρτηση

$$\alpha : \mathbb{N}^n \times \mathbb{P}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^r_{k_m} \rightharpoonup \mathbb{N},$$

όπου $\mathbb{P}^r_k$ είναι το σύνολο όλων των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων k μεταβλητών,

$$\mathbb{P}^r_k = \{\varphi^k_e \mid e \in \mathbb{N}\}\cdot$$

και η πράξη α είναι **υπολογιστή** (effective operation) αν η μερική συνάρτηση

$$f(\vec{x}, e_1, \dots, e_m) = \alpha(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_m}) \tag{120}$$

είναι αναδρομική.

Παρατηρούμε ότι η μερική συνάρτηση f που υπολογίζει τη πράξη α ικανοποιεί την εξής **συνθήκη αναλλοίωσης** (invariance property):

$$(121)\quad \varphi_{e_1} = \varphi_{z_1}, \dots, \varphi_{e_m} = \varphi_{z_m} \Longrightarrow f(\vec{x}, e_1, \dots, e_m) = f(\vec{x}, z_1, \dots, z_m)\cdot$$

και (προφανώς) κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση f που ικανοποιεί την (121) υπολογίζει την πράξη στις αναδρομικές μερικές συναρτήσεις

$$\alpha(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_m}) = f(\vec{x}, e_1, \dots, e_m).$$

Το βασικό θεώρημα αυτού του εδαφίου είναι ότι οι υπολογιστές πράξεις (ουσιαστικά) συμπίπτουν με τα αναιτιοκρατικά αναδρομικά συναρτησιακά, και η μια κατεύθυνση συνάγεται αμέσως από το Λήμμα 6C.1. Το κλειδί για την αντίστροφη κατεύθυνση είναι το εξής

6D.2. ΛΗΜΜΑ. *Κάθε υπολογιστή πράξη είναι μονοτονική και συνεχής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε μόνο πράξεις $\alpha : \mathbb{P}_1^r \rightharpoonup \mathbb{N}$, εφόσον η απόδειξη στη γενική περίπτωση είναι η ίδια — μόνο πιο περίπλοκη στο συμβολισμό.

Για την απόδειξη της μονοτονικότητας, έστω $p \sqsubseteq q$, όπου

$$p = \varphi_e \text{ και } q = \varphi_m,$$

και $\widehat{f}$ ο κωδικός της μερικής συνάρτησης που υπολογίζει την α, δηλαδή, για κάθε z,

$$(122)\qquad \alpha(\varphi_z) = \{\widehat{f}\}(z).$$

Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\alpha(\varphi_e) = w,$$

και πρέπει να δείξουμε ότι $\alpha(\varphi_m) = w$.

Η σχέση

$$R(z, x, v) \iff \varphi_e(x) = v \text{ ή } [\{\widehat{f}\}(z) = w \;\&\; \varphi_m(x) = v]$$

είναι ημιαναδρομική· η υπόθεση $\varphi_e \sqsubseteq \varphi_m$ συνεπάγεται ότι

$$R(z, x, v) \Longrightarrow \varphi_m(x) = v\cdot$$

άρα η $R(z, x, v)$ είναι γράφημα κάποιας μερικής, αναδρομικής συνάρτησης $g(z, x)$· και επομένως, το 2ο Θεώρημα Αναδρομής συνεπάγεται ότι $\varphi_{z^*}(x) = g(z^*, x)$ για κάποιον αριθμό z^*, έτσι που

$$(123)\qquad \varphi_{z^*}(x) = v \iff \varphi_e(x) = v \text{ ή } [\{\widehat{f}\}(z^*) = w \;\&\; \varphi_m(x) = v].$$

Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

(1a) $\alpha(\varphi_{z^*}) = \{\widehat{f}\}(z^*) = w$. Επειδή στην αντίθετη περίπτωση, από την (123), $\varphi_{z^*} = \varphi_e$, άρα $\alpha(\varphi_{z^*}) = \alpha(\varphi_e) = w$.

(1b) $\varphi_{z^*} = \varphi_m$, κατευθείαν από την υπόθεση $\varphi_e \sqsubseteq \varphi_m$ και το (1a).

Έπεται ότι $\alpha(\varphi_m) = \alpha(\varphi_{z^*}) = w$.

Η κατασκευή για την απόδειξη της συνέχειας είναι μικρή παραλλαγή αυτής που χρησιμοποιήσαμε για τη μονοτονικότητα. Πρώτα βρίσκουμε από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής κάποιο z^* τέτοιο που

(124)
$$\varphi_{z^*}(x) = v \iff (\forall u \le x)\neg[T_1(\widehat{f}, z^*, u) \mathbin{\&} U(u) = w] \mathbin{\&} \varphi_e(x) = v,$$

και παρατηρούμε:

(2a) $\alpha(\varphi_{z^*}) = w$. Επειδή στην αντίθετη περίπτωση,

$$(\forall u)\neg[T_1(\widehat{f}, z^*, u) \mathbin{\&} U(u) = w],$$

άρα, για κάθε x,

$$(\forall u \le x)\neg[T_1(\widehat{f}, z^*, u) \mathbin{\&} U(u) = w],$$

και επομένως, από την (124), $\varphi_{z^*} = \varphi_e$ και $\alpha(\varphi_{z^*}) = \alpha(\varphi_e) = w$.

(2b) $\varphi_{z^*} \sqsubseteq \varphi_e$, κατευθείαν από την (124).

(2c) Η μερική συνάρτηση φ_{z^*} είναι πεπερασμένη, επειδή συγκλίνει μόνον αν

$$x < (\mu u)[T_1(\widehat{f}, z^*, u) \mathbin{\&} U(u) = w]. \tag{125}$$ ⊣

6D.3. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Θεώρημα Myhill-Shepherdson**). *Η τυχαία πράξη* α *είναι υπολογιστή αν και μόνον αν είναι ο περιορισμός στις αναδρομικές μερικές συναρτήσεις κάποιου αναιτιοκρατικά αναδρομικού συναρτησιακού, δηλαδή αν για κάποιο* $\beta \in \mathcal{R}_{nd}$,

$$\alpha(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_m}) = \beta(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_m}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η μια κατεύθυνση αποδείχτηκε στο Λήμμα 6C.1. Για την άλλη, θεωρούμε μόνο πράξεις $\alpha(p)$ με μια, μονομελή μεταβλητή, και παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Κανονικής Μορφής 6B.8 αρκεί να αποδείξουμε το εξής: υπάρχει ημιαναδρομική σχέση $R(x, w)$, τέτοια που

$$\alpha(p) = w \iff (\exists x)[d_x \sqsubseteq p \mathbin{\&} R(x, w)]. \tag{126}$$

Αν ο $\widehat{d}$ είναι κωδικός της μερικής συνάρτησης $d(z, i)$ που απαριθμεί όλες τις πεπερασμένες, μερικές συναρτήσεις, τότε

$$d_z(i) = \{\widehat{d}\}(z, i) = \{S^1_1(\widehat{d}, z)\}(i),$$

και επομένως, αν η μερική, αναδρομική συνάρτηση $f(e)$ υπολογίζει την $\alpha(p)$, τότε η σχέση

$$R(z, w) \iff \alpha(d_z) = w \iff f(S^1_1(\widehat{d}, z)) = w$$

είναι ημιαναδρομική, και η (126) έπεται αμέσως από το Λήμμα 6D.2. ⊣

6D.4. ΠΟΡΙΣΜΑ (Rice-Shapiro). *Η $f(e)$ είναι μερική, αναδρομική, και*

$$W_e = W_m \Longrightarrow f(e) = f(m),$$

τότε και μόνον αν υπάρχει ημιαναδρομική σχέση $R(x, w)$ τέτοια που

$$f(e) = w \iff (\exists x)[D_x \subseteq W_e \ \&\ R(x, w)],$$

όπου η απαρίθμηση $D_0, D_1, \ldots$ των πεπερασμένων συνόλων ορίστηκε στο 6B.7.

Αφήνουμε την απόδειξη για άσκηση, x6D.6.

6D. Ασκήσεις

x6D.1. Έστω $f(z)$ αναδρομική μερική συνάρτηση τέτοια που

$$[f(e)\downarrow \ \&\ W_e = W_m] \Longrightarrow f(m)\downarrow \cdot$$

δείξτε ότι για κάθε e,

$$f(e)\downarrow \Longrightarrow \text{υπάρχει πεπερασμένο } W_z, \text{ τέτοιο που } W_z \subseteq W_e \text{ και } f(z)\downarrow.$$

x6D.2. Έστω $f(e)$ αναδρομική μερική συνάρτηση, τέτοια που $f(e) \leq 5$ για κάθε κωδικό e ολικής, μονομελούς συνάρτησης φ_e. Αληθεύει ή όχι η εξής πρόταση: υπάρχει κάποιος m τέτοιος που η φ_m δεν είναι ολική, αλλά $f(m)\downarrow$ και $f(m) \leq 5$. Αποδείξτε την απάντησή σας.

x6D.3. Έστω $f(e)$ αναδρομική, μερική συνάρτηση τέτοια που

$$W_e = \emptyset \Longrightarrow f(e)\downarrow.$$

(a). Δείξτε ότι για κάποιο $W_e \neq \emptyset$, $f(e)\downarrow$.

(b). Δείξτε ότι για κάθε m, υπάρχει κάποιος e τέτοιος που

$$W_e = W_m \text{ και } f(e)\downarrow.$$

x6D.4. Δείξτε ότι για κάθε υπολογιστή πράξη $\alpha(x, p)$, η αναδρομική εξίσωση

$$p(x) = \alpha(x, p)$$

έχει αναδρομική (μερική) λύση.

x6D.5. Δείξτε ότι για κάθε υπολογιστή πράξη $\alpha(x, p)$, η αναδρομική εξίσωση

$$p(x) = \alpha(x, p)$$

έχει ελάχιστη λύση, που είναι αναδρομική.

x6D.6. Αποδείξτε το Θεώρημα Rice-Shapiro 6D.4.

x6D.7 (**Θεώρημα του Rice**). Δείξτε ότι αν η ολική αναδρομική συνάρτηση $f(e)$ ικανοποιεί τη συνθήκη αναλλοίωσης

$$W_e = W_m \Longrightarrow f(e) = f(m),$$

τότε η $f(e)$ είναι σταθερή.

x6D.8*. (a) Δείξτε ότι υπάρχει αναδρομική μερική συνάρτηση $f(e)$ τέτοια που για κάθε e,

$$f(e)\downarrow \iff (\exists x)[\varphi_e(x)\downarrow], \tag{127}$$

$$(\exists x)[\varphi_e(x)\downarrow] \implies \varphi_e(f(e))\downarrow. \tag{128}$$

(b) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αναδρομική μερική συνάρτηση $f(e)$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες (127), (128), και επιπλέον την

$$\varphi_e = \varphi_m \Longrightarrow f(e) = f(m). \tag{129}$$

6E. Τα θεωρήματα Kreisel-Lacombe-Shoenfield και Friedberg

Το βασικό μήνυμα του 6D.3 είναι ότι δεν υπάρχει τρόπος να χρησιμοποιήσουμε ένα πρόγραμμα P (ισοδύναμα: τον κωδικό του P) που υπολογίζει μια τυχαία αναδρομική μερική συνάρτηση p στον υπολογισμό ιδιοτήτων της p άλλος από τον προφανή: στη πορεία του υπολογισμού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το P για να υπολογίσουμε όποια τιμή $p(u)$ της p χρειαζόμαστε. Το ανάλογο πρόβλημα για υπολογιστές πράξεις σε *ολικές αναδρομικές συναρτήσεις* είναι δυσκολότερο και έχει πιο ενδιαφέρουσα απάντηση.

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, $\mathbb{F}^r_k$ είναι το σύνολο όλων των αναδρομικών (ολικών) συναρτήσεων k μεταβλητών,

$$\mathbb{F}^r_k = \{\varphi^k_e \mid (\forall \vec{x})(\exists y) T_k(e, \vec{x}, y)\},$$

και, ειδικότερα, $\mathbb{F}^r_1$ είναι ο κλασικός *χώρος Baire*, το σύνολο όλων των *ακολουθιών* από φυσικούς αριθμούς.

6E.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Πράξη** (στις ολικές αναδρομικές συναρτήσεις) είναι η τυχαία μερική συνάρτηση

$$\alpha : \mathbb{N}^n \times \mathbb{F}^r_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{F}^r_{k_m} \rightharpoonup \mathbb{N}\cdot$$

και η πράξη α είναι *υπολογιστή* αν υπάρχει κάποια αναδρομική μερική συνάρτηση $f(\vec{x}, e_1, \ldots, e_m)$ τέτοια που

$$\varphi_{e_1}, \ldots, \varphi_{e_m} \in \mathbb{F}^r \Longrightarrow \alpha(\vec{x}, \varphi_{e_1}, \ldots, \varphi_{e_m}) = f(\vec{x}, e_1, \ldots, e_m), \tag{130}$$

όπου $\mathbb{F}^r = \bigcup_k \mathbb{F}^r_k$.

Εδώ η μερική συνάρτηση f που υπολογίζει τη πράξη α ικανοποιεί τη *συνθήκη αναλλοίωσης* (invariance property):

$$(131)\quad \varphi_{e_1} = \varphi_{z_1}, \dots , \varphi_{e_m} = \varphi_{z_m} \in \mathbb{F}^r \\ \Longrightarrow f(\vec{x}, e_1, \dots , e_m) = f(\vec{x}, z_1, \dots , z_m)$$

που είναι σημαντικά ασθενέστερη από την ανάλογη συνθήκη (121) για πράξεις στις αναδρομικές μερικές συναρτήσεις· για παράδειγμα, η

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (\forall i \leq e)[\varphi_e(i) = 0], \\ \bot, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ικανοποιεί την (130) (και υπολογίζει, κάπως αφύσικα, την πράξη

$$\alpha(p) = 1$$

στο χώρο Baire $\mathbb{F}^r_1$), ενώ, προφανώς, δεν ικανοποιεί την (121) και δεν υπολογίζει πράξη στο χώρο $\mathbb{P}^r$.

Ο ορισμός δημιουργεί τις εξής δύο ερωτήσεις — για την απλούστερη περίπτωση πράξεων $\alpha : \mathbb{F}^r_1 :\rightharpoonup \mathbb{N}$:

6Ε.2. **Ερώτηση 1.** *Μπορούμε να βρούμε, για κάθε υπολογιστή πράξη* $\alpha : \mathbb{F}^r_1 \rightharpoonup \mathbb{N}$, *κάποια αναδρομική, μερική συνάρτηση που να την υπολογίζει σύμφωνα με την* (130), *και που να ικανοποιεί την ισχυρή συνθήκη αναλλοίωσης* (121)*;*

Ισοδύναμα — όπως θα δούμε:

6Ε.3. **Ερώτηση 2.** *Υπάρχει, για κάθε υπολογιστή πράξη* $\alpha : \mathbb{F}^r_1 \rightharpoonup \mathbb{N}$, *αναδρομικό (έστω αναιτιοκρατικό) συναρτησιακό* $\alpha^* : \mathbb{P}_1 \rightharpoonup \mathbb{N}$ *τέτοιο που*

$$X \in \mathbb{F}^r_1 \Longrightarrow \alpha(X) = \alpha^*(X);$$

Το βασικό περιεχόμενο του Θεωρήματος Kreisel-Lacombe-Shoenfield και του αντιπαραδείγματος του Friedberg που θα δείξουμε σ' αυτό το εδάφιο είναι ότι η απάντηση είναι *θετική* και στις δύο αυτές ερωτήσεις *για υπολογιστές ολικές πράξεις* $\alpha : \mathbb{F}^r_1 \to \mathbb{N}$, για τις οποίες

$$X \in \mathbb{F}^r_1 \Longrightarrow \alpha(X)\downarrow,$$

αλλά (γενικά) *αρνητική* για πράξεις που αποκλίνουν για κάποιες τιμές των μεταβλητών τους.

6Ε.4. ΛΗΜΜΑ. *Έστω* $\alpha(X)$ *υπολογιστή πράξη στο χώρο* $\mathbb{F}^r_1$ *και* $f(e)$ *αναδρομική μερική συνάρτηση που την υπολογίζει,*

$$\varphi_e \in \mathbb{F}^r_1 \Longrightarrow \alpha(\varphi_e) = f(e),$$

και έστω $X = \varphi_e \in \mathbb{F}^r_1$ *αναδρομική ακολουθία τέτοια που* $\alpha(X) = f(e) = w \in \mathbb{N}$. *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$, *υπάρχει ακολουθία* $X_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *τέτοια που:*

(1) $t \leq k \Longrightarrow X_k(t) = X(t)$.

(2) $\alpha(X_k) = \alpha(X) = w$.

(3) *Η* X_k *είναι τελικά μηδενική, δηλαδή υπάρχει κάποιος* l *τέτοιος που* $t > l \Longrightarrow X_k(t) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής 4D.1, για κάθε k, υπάρχει κωδικός z αναδρομικής, μερικής συνάρτησης, τέτοιος που

$$(132)\quad \varphi_z(t) = \begin{cases} \varphi_e(t), & \text{αν } t \le k \text{ ή } (\forall u \le t)\neg[T_1(\widehat{f}, z, u) \mathbin{\&} U(u) = w], \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου ο $\widehat{f}$ είναι κωδικός της f, δηλαδή $f(e) = \varphi_{\widehat{f}}(e)$. Θέτουμε

$$X_k(t) = \varphi_z(t)$$

και επαληθεύουμε διαδοχικά τις απαιτούμενες ιδιότητες.

(1) Η $\varphi_z(t)$ είναι ολική, αναδρομική συνάρτηση και, για κάθε $t \le k$, $\varphi_z(t) = \varphi_e(t)$, κατευθείαν από την (132).

(2) $(\exists u)[T_1(\widehat{f}, z, u) \mathbin{\&} U(u) = w]$, δηλαδή $\alpha(\varphi_z) = f(e) = w$. Αν όχι, τότε

$$(\forall u)\neg[T_1(\widehat{f}, z, u) \mathbin{\&} U(u) = w]\cdot$$

απ' αυτό έπεται ότι, για κάθε t, $(\forall u \le t)\neg[T_1(\widehat{f}, z, u) \mathbin{\&} U(u) = w]$· άρα $\varphi_z = \varphi_e$, από την (132), και $f(z) = f(e) = w$, από την υπόθεση ότι η f είναι $\mathbb{F}_1^r$-αναλλοίωτη.

(3) Για κάθε $t > (\mu u)[T_1(\widehat{f}, z, u) \mathbin{\&} U(u) = w]$, $\varphi_z(t) = 0$, κατευθείαν από την (132). ⊣

Το Λήμμα βεβαιώνει ότι οι *τελικά μηδενικές* (και επομένως αναδρομικές) ακολουθίες εμφανίζονται «πυκνά» σε κάθε σύνολο

$$V_w = \{X \in \mathbb{F}_1^r \mid \alpha(X) = w\} \quad (w \in \mathbb{N}),$$

δηλαδή, για κάθε $X \in V_w$, υπάρχουν τελικά μηδενικές ακολουθίες στο V_w που «συμφωνούν» με την X σε οσονδήποτε μεγάλα, αρχικά τμήματα. Οι τελικά μηδενικές ακολουθίες κωδικοποιούνται απλά, με την ίδια (βασικά) κωδικοποίηση που χρησιμοποιήσαμε για τις πεπερασμένες, μερικές συναρτήσεις:

6E.5. **Κωδικοποίηση τελικά μηδενικών συναρτήσεων.** Έστω

$$c(x,i) = \begin{cases} (x)_i, & \text{αν } i < \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$c_x(i) = c(x,i).$$

Έπεται ότι η συνάρτηση $c(x,i)$ είναι αναδρομική, και η ακολουθία

$$c_0, c_1, \ldots$$

απαριθμεί όλες τις τελικά μηδενικές ακολουθίες, έτσι που

$$c_x(i) \neq 0 \Longrightarrow i < \mathrm{lh}(x).$$

Επίσης, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση

$$\iota(x) = S^1_1(\widehat{c}, x) \quad (\text{όπου } \varphi_{\widehat{c}}(x,t) = c(x,t)), \tag{133}$$

τέτοια που

$$c_x(t) = c(x,t) = \varphi_{\iota(x)}(t).$$

6E.6. ΘΕΩΡΗΜΑ (**Συνέχεια υπολογιστών πράξεων στο $\mathbb{F}^r_1$**). *Για κάθε υπολογιστή πράξη $\alpha : \mathbb{F}^r_1 \rightharpoonup \mathbb{N}$ και κάθε $X \in \mathbb{F}^r_1$, αν $\alpha(X)\!\downarrow$, τότε υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος που για κάθε $Y \in \mathbb{F}^r_1$,*

$$[\alpha(Y)\!\downarrow \;\&\; (\forall t \leq k)[Y(t) = X(t)]] \Longrightarrow \alpha(Y) = \alpha(X).$$

Ειδικότερα, αν η α είναι ολική, έτσι που, για κάθε $Y \in \mathbb{F}^r_1$, $\alpha(Y)\!\downarrow$, το συμπέρασμα παίρνει την απλούστερη μορφή,

$$(\forall t \leq k)[Y(t) = X(t)] \Longrightarrow \alpha(Y) = \alpha(X).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f(e)$ αναδρομική, μερική συνάρτηση που υπολογίζει την $\alpha(X)$, έτσι που

$$\varphi_e = \varphi_m \in \mathbb{F}^r_1 \Longrightarrow f(e) = f(m).$$

Η ιδέα της κατασκευής είναι να βρούμε κάποιο z τέτοιο που

$$\varphi_z(t) = \begin{cases} X(t), & \text{αν σε} \leq t \text{ «βήματα» δεν συγκλίνει η } f(z), \\ c_x(t), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου η τελικά μηδενική c_x επιλέγεται (συμβατά με την πρώτη περίπτωση, αν υπάρχει) έτσι που

$$\alpha(c_x)\!\downarrow \;\&\; \alpha(c_x) \neq \alpha(X).$$

Αν το καταφέρουμε αυτό, τότε θα έχουμε $f(z) = \alpha(X)$, με την οικεία πια απόδειξη, και απ' αυτό θα συμπεράνουμε ότι αν

$$k = \text{ο «αριθμός βημάτων» στον οποίο συγκλίνει η } f(z),$$

τότε *δεν υπάρχει* x τέτοιο που

$$\alpha(c_x)\!\downarrow \;\&\; \alpha(c_x) \neq \alpha(X) \;\&\; (\forall t \leq k)[c_x(t) = X(t)]\cdot$$

από το οποίο, με το Λήμμα 6E.4, θα συμπεράνουμε περαιτέρω ότι *δεν υπάρχει αναδρομική ακολουθία Y τέτοια που*

$$(\forall t \leq k)[Y(t) = X(t)] \;\&\; \alpha(Y)\!\downarrow \;\&\; \alpha(Y) \neq \alpha(X),$$

που είναι το ζητούμενο. Με λεπτομέρειες:

Από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής, για κάθε e, υπάρχει κωδικός z, τέτοιος που

(134)

$$\varphi_z(t) = \begin{cases} \varphi_e(t), & \text{αν } f(e)\downarrow \ \& \ (\forall u \le t)\neg[T_1(\widehat{f}, z, u) \ \& \ U(u) = f(e)], \\ c_{g(z,e)}(t), & \text{αν } f(e)\downarrow \ \& \ (\exists u \le t)[T_1(\widehat{f}, z, u) \ \& \ U(u) = f(e)], \\ \bot, & \text{αλλιώς, δηλαδή αν } f(e)\uparrow, \end{cases}$$

όπου

$$\mathrm{comp}(\widehat{f}, z) = \mu y T_1(\widehat{f}, z, y)$$

είναι το μήκος του υπολογισμού της $f(z)$ (αν $f(z)\downarrow$) και

(135) $$g(z,e) = (\nu x)[f(z)\downarrow \ \& \ f(\iota(x))\downarrow \ \& \ f(z) \neq f(\iota(x)) \\ \& \ (\forall t \le \mathrm{comp}(\widehat{f}, z))[c_x(t) = \varphi_e(t)]].$$

Εδώ η $\iota(x)$ είναι από την (133), έτσι που $\varphi_{\iota(x)} = c_x$ και, από το Λήμμα 4Α.7 Σ_1-Επιλογής, η $g(z,e)$ συγκλίνει ακριβώς αν υπάρχει κάποιος x τέτοιος που

$$f(z)\downarrow \ \& \ f(\iota(x))\downarrow \ \& \ f(z) \neq f(\iota(x)) \ \& \ (\forall t \le \mathrm{comp}(\widehat{f}, z))[c_x(t) = \varphi_e(t)],$$

και, όταν συγκλίνει, επιλέγει κάποιο $x = g(z,e)$ με αυτές τις ιδιότητες.

Υποθέτουμε τώρα ότι $X = \varphi_e \in \mathbb{F}_1^r$ και $\alpha(X) = f(e)\downarrow$.

(1) *$f(z)\downarrow$ και $f(z) = f(e)$*· αλλιώς $\varphi_z = \varphi_e \in \mathbb{F}_1^r$ και $f(z) = f(e)$, που είναι άτοπο. Θέτουμε

(136) $$k = \mathrm{comp}(\widehat{f}, z).$$

(2) *Δεν υπάρχει τελικά μηδενική συνάρτηση c_x, τέτοια που*

$$\alpha(c_x)\downarrow \ \& \ f(\iota(x)) = \alpha(c_x) \neq f(e) \ \& \ (\forall t \le \mathrm{comp}(\widehat{f}, z))[c_x(t) = \varphi_e(t)].$$

Γιατί αν υπήρχε, τότε $g(z,e)\downarrow$ και η $c_{g(z,e)}$ έχει αυτή την ιδιότητα, έτσι που, από την κατασκευή, $\varphi_z = c_{g(z,e)}$ και $f(z) = f(\iota(g(z,e))) = \alpha(c_{g(z,e)}) \neq f(e)$, που αντιτίθεται στο (1).

(3) *Για κάθε $Y \in \mathbb{F}_1^r$,*

$$[\alpha(Y)\downarrow \ \& \ (\forall t \le k)[Y(t) = X(t)]] \Longrightarrow \alpha(Y) = \alpha(X).$$

Αυτό έπεται τώρα από το Λήμμα 6Ε.4: γιατί αν $\alpha(Y) = v \neq f(e)$, τότε υπάρχει κάποια τελικά μηδενική c_x που συμφωνεί με την Y (και, επομένως, και με την X) για $t \le k$, και για την οποία $\alpha(c_x) = v \neq f(e)$, που αντιτίθεται στο (2). ⊣

Αυτό το θεώρημα είναι η βασική ανακάλυψη και, πολλές φορές, καλείται το «Θεώρημα Kreisel-Lacombe-Shoenfield», ή αποδίδεται στον Ρώσο μαθηματικό Čeitin που το απέδειξε ανεξάρτητα. Το όνομα, όμως, ταιριάζει πιο πολύ στο επόμενο ισχυρότερο αποτέλεσμα:

6Ε.7. ΘΕΩΡΗΜΑ (Kreisel-Lacombe-Shoenfield, Čeitin). *Για κάθε υπολογιστή πράξη* $\alpha : \mathbb{F}_1^r \rightharpoonup \mathbb{N}$ *υπάρχει αναδρομικό συναρτησιακό* $\alpha^* : \mathbb{P}_1 \rightharpoonup \mathbb{N}$*, τέτοιο που*

$$[X \in \mathbb{F}_1^r \ \&\ \alpha(X)\downarrow] \Longrightarrow \beta(X) = \alpha(X)\cdot \tag{137}$$

ιδιαίτερα, αν η $\alpha : \mathbb{F}_1^r \to \mathbb{N}$ *είναι ολική, τότε*

$$X \in \mathbb{F}_1^r \Longrightarrow \alpha(X) = \alpha^*(X),$$

και οι ερωτήσεις 6Ε.2 και 6Ε.3 έχουν θετικές απαντήσεις για ολικές υπολογιστές πράξεις.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως πάντα, έστω $\widehat{f}$ κωδικός κάποιας αναδρομικής, μερικής συνάρτησης που υπολογίζει το α, δηλαδή

$$\varphi_e \in \mathbb{F}_1^r \Longrightarrow \alpha(\varphi_e) = f(e) = \varphi_{\widehat{f}}(e).$$

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η απόδειξη του Θεωρήματος Συνέχειας 6Ε.6 είναι *κατασκευαστική*, συγκεκριμένα ότι ο αριθμός k στην (136) είναι η τιμή μιας αναδρομικής, μερικής συνάρτησης $\sigma(e)$, που συγκλίνει όταν ο e είναι κωδικός αναδρομικής ακολουθίας φ_e τέτοιας που $\alpha(\varphi_e) = f(e)\downarrow$. Πράγματι, η μερική συνάρτηση $g(z, e)$ είναι αναδρομική, ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, με τον ορισμό (135)· από την εκδοχή (97) του 2ου Θεωρήματος Αναδρομής με παράμετρο, υπάρχει κάποια πρωτογενώς αναδρομική $h(e)$ τέτοια που η (134) ισχύει αν θέσουμε

$$z = h(e)\cdot$$

και, τελικά, ο αριθμός k που χρειαζόμαστε υπολογίζεται από την

$$k = \sigma(e) = \mathrm{comp}(\widehat{f}, h(e)). \tag{138}$$

Εξετάζουμε τώρα πάλι την απόδειξη του 6Ε.6, να δούμε τι μας δίνει *χωρίς την υπόθεση ότι* $\varphi_e \in \mathbb{F}_1^r$:

ΛΗΜΜΑ. *Για κάθε* e*, με* $z = h(e)$*, αν*

$$f(e)\downarrow \ \&\ f(e) = f(z) \ \&\ (\forall t \le \sigma(e))\varphi_e(t)\downarrow,$$

τότε, για κάθε X,

$$[X \in \mathbb{F}_1^r \ \&\ \alpha(X)\downarrow \ \&\ (\forall t \le \sigma(e))X(t) = \varphi_e(t)] \Longrightarrow \alpha(X) = f(e).$$

Απόδειξη. Προς άτοπο, δεχόμαστε την υπόθεση για το e και ότι για κάποια $X \in \mathbb{F}_1^r$,

$$\alpha(X)\downarrow \ \&\ (\forall t \le \sigma(e))[X(t) = \varphi_e(t) \ \&\ \alpha(X) \ne f(e)].$$

Από το Λήμμα 6Ε.4 τώρα, υπάρχει κάποια τελικά μηδενική c_x τέτοια που

$$\alpha(c_x) = \alpha(X) \ne f(e) \ \&\ (\forall t \le \sigma(e))c_x(t) = \varphi_e(t)\cdot$$

και από τον ορισμό της $g(e,z)$ και την (134), η $c_{g(e,z)}$ έχει αυτή την ιδιότητα και $\varphi_z = c_{g(e,z)} \in \mathbb{F}_1^r$· άρα $f(z) = f(g(e,z)) \neq f(e)$, που αντιτίθεται στην υπόθεση.

Το σύνολο

$$A = \{e \mid f(e)\downarrow \;\&\; f(e) = f(h(e)) \;\&\; (\forall t \leq \sigma(e))\varphi_e(t)\downarrow\},$$

των αριθμών e που ικανοποιούν την υπόθεση του Λήμματος είναι ημιαναδρομικό, άρα

$$e \in A \iff (\exists u)R(e,u)$$

για κάποια (πρωτογενώς) αναδρομική σχέση $R(e,u)$. Το συναρτησιακό

$$\gamma(p) = (\mu y)[(\forall t \leq y)p(t)\downarrow \;\&\; R((y)_0,(y)_1)]$$

είναι (εύκολα) αναδρομικό. Έπεται ότι αναδρομικό είναι και το

$$\beta(p) = f((\gamma(p))_0),$$

και δεν είναι δύσκολο, από το Λήμμα, να δείξουμε τώρα ότι

$$[X \in \mathbb{F}_1^r \;\&\; \alpha(X)\downarrow] \Longrightarrow \alpha(X) = \beta(X),$$

που είναι το ζητούμενο. ⊣

Η κάπως προσεκτική διατύπωση του Θεωρήματος είναι απαραίτητη, εξαιτίας του εξής αντιπαραδείγματος:

6E.8. ΘΕΩΡΗΜΑ (Friedberg). *Υπάρχει υπολογιστή πράξη* $\alpha : \mathbb{F}_1^r \rightharpoonup \mathbb{N}$ *τέτοια που:*

(1) $\alpha(X_0) = 1$, *όπου,* $X_0(t) = 0$, *για κάθε* t.

(2) *Για κάθε* k, *υπάρχει κάποια* $X_k \in \mathbb{F}_1^r$ *τέτοια που*

$$(\forall t \leq k)X_k(t) = 0 \text{ και } \alpha(X_k)\uparrow.$$

Έπεται ότι η πράξη α *δεν είναι ο περιορισμός στο* $\mathbb{F}_1^r$ *κάποιου* (έστω αναιτιοκρατικά) *αναδρομικού συναρτησιακού.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η δεύτερη πρόταση συνάγεται από την πρώτη, επειδή, αν το α ήταν ο περιορισμός στο $\mathbb{F}_1^r$ κάποιου αναδρομικού β, τότε $\beta(X_0) = 1$· άρα ο υπολογισμός της αναδρομικής μηχανής που υπολογίζει την τιμή $\beta(X_0)$ τερματίζει και, μέχρι να τερματίσει, έχει «καλέσει» πεπερασμένες το πλήθος τιμές της X_0· και αν k είναι ο μέγιστος αριθμός για τον οποίο ο υπολογισμός χρησιμοποίησε την τιμή $X_0(k)$, τότε, προφανώς, ο υπολογισμός θα τερματίσει και θα δώσει την τιμή 1 για κάθε X τέτοια που $(\forall t \leq k)X(t) = 0$.

Για να κατασκευάσουμε το α και να αποδείξουμε την πρώτη πρόταση, θέτουμε:

$$e \in A \iff (\forall t \le e)[\varphi_e(t) = 0], \tag{139}$$

$$\begin{aligned} e \in B \iff (\exists m \in A)(\exists k)(\forall t \le k)[\varphi_e(t) = \varphi_m(t) = 0 \\ \& \ \varphi_e(k+1) = \varphi_m(k+1)\downarrow \\ \& \ \varphi_e(k+1) \neq 0] \end{aligned} \tag{140}$$

$$f(e) = 1 \iff e \in A \cup B. \tag{141}$$

Η μερική συνάρτηση f είναι προφανώς αναδρομική.

ΛΗΜΜΑ. *Η f είναι $\mathbb{F}_1^r$-αναλλοίωτη, δηλαδή*

$$\varphi_e = \varphi_m \in \mathbb{F}_1^r \Longrightarrow f(e) = f(m).$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi_e = \varphi_m \in \mathbb{F}_1^r$, και $f(e) = 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι $f(m) = 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. $\varphi_e = \varphi_m = c_0$. Σ' αυτή την περίπτωση $m \in A$, άρα $f(m) = 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. $\varphi_e = \varphi_m \neq c_0$ και $e \in A$. Η (140) ισχύει με $m = e$, $k = e$ και m στη θέση του e, άρα $m \in B$ και $f(m) = 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3. $\varphi_e = \varphi_m \neq c_0$ και $e \in B$. Πρέπει τώρα να υπάρχουν «μάρτυρες» $m \in A$ και k που ικανοποιούν την (140) και βεβαιώνουν ότι $e \in B$· ακριβώς οι ίδιοι μάρτυρες ικανοποιούν την (140) με m στη θέση του e, άρα $m \in B$ και $f(m) = 1$.

Η υπολογιστή πράξη $\alpha : \mathbb{F}_1^r \rightharpoonup \mathbb{N}$ που υπολογίζεται από την f προφανώς έχει την ιδιότητα (1) στο Θεώρημα. Για να δείξουμε την (2), για το τυχαίο k, θέτουμε

$$C = \{e \in A \mid e \le k \ \& \ (\forall t \le k)\varphi_e(t) = 0 \ \& \ \varphi_e(k+1)\downarrow \ \& \ \varphi_e(k+1) \neq 0\}.$$

Το σύνολο C είναι πεπερασμένο, και (αν το k είναι αρκετά μεγάλο) όχι κενό, έστω

$$C = \{e_1, \ldots, e_n\}\cdot$$

θέτουμε

$$X_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \le k \text{ ή } t > k+1, \\ \max\{\varphi_{e_1}(k+1), \ldots, \varphi_{e_n}(k+1)\} + 1, & \text{αν } t = k+1, \end{cases}$$

έτσι που, ασφαλώς, $(\forall t \le k) X_k(t) = 0$, και αρκεί να οδηγηθούμε σε άτοπο από την υπόθεση ότι υπάρχει e τέτοιος που

$$\varphi_e = X_k \ \& \ e \in A \cup B.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. $\varphi_e = X_k$ και $e \in A$. Από τον ορισμό του A,

$$\begin{aligned} e \in A &\Longrightarrow (\forall t \le e)[\varphi_e(t) = 0] \\ &\Longrightarrow e \le k && \text{αφού } \varphi_e(k+1) = X_k(k+1) \ne 0 \\ &\Longrightarrow e \in C \end{aligned}$$

και το τελευταίο είναι άτοπο, επειδή $X_k(k+1) \ne \varphi_e(k+1)$ για κάθε $e \in C$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. $\varphi_e = X_k$ και $e \in B$. Τώρα υπάρχουν μάρτυρες $m \in A$ και k' που βεβαιώνουν ότι $e \in B$, και $k' = k + 1$, αφού $(\forall t \le k)X_k(t) = 0$ και $X_k(k+1) \ne 0$. Επίσης, $m \in C$, αφού $m \in A$ και $\varphi_m(k+1) \ne 0$. Αυτά όμως οδηγούν σε άτοπο, όπως και στην πρώτη περίπτωση, αφού $X_k(k+1) \ne \varphi_m(k+1)$, για κάθε $m \in A$. ⊣

6E. Ασκήσεις

x6E.1. Ας είναι η $f(e)$ αναδρομική μερική συνάρτηση, τέτοια που

$$(\forall x)[\varphi_e(x) = 0] \Longrightarrow f(e) = 3\cdot$$

δείξτε ότι για κάθε k, υπάρχει κάποιος m, τέτοιος που

(1) $(\forall x)[\varphi_m(x)\downarrow]$.
(2) $(\forall x \le k)[\varphi_m(x) = 0]$.
(3) $(\exists x)[\varphi_m(x) \ne 0]$.
(4) $f(m) = 3$.

x6E.2. Αληθεύει ή όχι η εξής πρόταση: Ας είναι η $f(e)$ αναδρομική μερική συνάρτηση, τέτοια που

$$(\forall x)[\varphi_e(x) = 0] \Longrightarrow f(e)\downarrow\cdot$$

για κάθε k, υπάρχει κάποιος m, τέτοιος που

(1) $(\forall x)[\varphi_m(x)\downarrow]$.
(2) $(\forall x \le k)[\varphi_m(x) = 0]$.
(3) $(\exists x)[\varphi_m(x) \ne 0]$.
(4) $f(m)\downarrow$.

(Αποδείξτε την απάντησή σας.)