614, Αναδρομικές συναρτήσεις
Λ2, Υπολογισιμότητα
και Α.27, Θεωρία αναδρομής
Χειμερινό εξάμηνο, 2006–2007
Διδάσκων: Γιάννης Μοσχοβάκης
Τελική εξέταση, Παρασκευή, 2 Φεβρουαρίου 2007

Για το Λ2 και το Α.27, προσπαθήστε να λύσετε όλα τα μέρη των οκτώ προβλημάτων του Μέρους Α. Οι προπτυχιακοί φοιτητές του 614 μπορούν να παραλείψουν το πρόβλημα 8. Όλοι οι φοιτητές πρέπει να γράψουν μιαν εύγλωττη (και όχι μακροσκελή) «έκθεση» στο θέμα του Μέρους Β. Σε περιπτώσεις που πρέπει να επικαλεστείτε κάποιο θεώρημα από τις Σημειώσεις, να το διατυπώσετε πλήρως και σωστά. Όλα τα προβλήματα έχουν το ίδιο βάρος — άρα συμφέρει να λύσετε πρώτα τα εύκολα.

Παρακαλώ να αρχίσετε κάθε πρόβλημα ή μέρος προβλήματος σε ξεχωριστή κόλλα. Καλή επιτυχία!

Μέρος Α, Προβλήματα

Πρόβλημα 1. Η συνάρτηση του Ackermann ορίζεται με τη λεγόμενη *διπλή αναδρομή*

$$\begin{cases} A(0,x) &= x+1 \\ A(n+1,0) &= A(n,1) \\ A(n+1,x+1) &= A(n, A(n+1,x)) \cdot \end{cases}$$

και για κάθε n, η «τομή» $A_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (της συνάρτησης) του Ackermann ορίζεται με την εξίσωση

$$A_n(x) = A(n,x).$$

Γι' αυτό το πρόβλημα δεχόμαστε ότι αυτές οι εξισώσεις ορίζουν ακριβώς μία, αναδρομική, ολική συνάρτηση (δηλαδή δεν είναι ανάγκη να το αποδείξετε αυτό).

Δείξτε ότι κάθε τομή A_n της συνάρτησης του Ackermann είναι *αυστηρά αύξουσα*, δηλαδή

$$x < y \Longrightarrow A_n(x) < A_n(y).$$

Υποδειξη: Είναι χρήσιμο να δείξτε πρώτα ότι $A_n(x) \geq 1$, για κάθε n και x, και το εξής *Λήμμα: Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, αν για κάθε x, $f(x) < f(x+1)$, τότε η f είναι αυστηρά αύξουσα.*

Λυση. Για το Λήμμα, δείχνουμε με εύκολη επαγωγή στο $y > 0$, ότι αν η f ικανοποιεί την υπόθεση, τότε

$$f(x) < f(x+y).$$

Για το πρόβλημα, η απόδειξη είναι με επαγωγή στο n, όπου η βάση για την $A_0(x) = x + 1$ είναι προφανής. Στο επαγωγικό βήμα, δείχνουμε με επαγωγή στο x ότι

$$A_{n+1}(x) < A_{n+1}(x+1).$$

Για τη Βαση, $x = 0$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} A_{n+1}(1) &= A_n(A_{n+1}(0)) \\ &= A_n(A_n(1)) \\ &> A_n(1) && \text{(επ. υπ., και Λήμμα, } A_n(1) > A_n(0) \geq 1.) \\ &= A_{n+1}(0) \end{aligned}$$

Για το Επαγωγικο Βημα, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x+1) &= A_n(A_{n+1}(x)) \\ &< A_n(A_{n+1}(x+1)) && \text{(επ. υπ., για το } n \text{ και το } x\text{, και Λήμμα)} \\ &= A_{n+1}(x+2). \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

(2a). Δείξτε ότι για κάποια πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $p(e)$ και όλα τα e,

$$W_{p(e)} = \{x \mid x, x+1, x+2, \dots, x+x \in W_e\}$$

Λύση. Ορίζουμε την αναδρομική μερική συνάρτηση

$$f(e,x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (\forall t \leq x)[x+t \in W_e], \\ \bot, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

επιλέγουμε κάποιον κωδικό της $\hat{f}$, έτσι που

$$f(e,x) = \{\hat{f}\}(e,x) = \{S^1_1(\hat{f}, e)\}(x),$$

και θέτουμε

$$p(e) = S^1_1(\hat{f}, e).$$

Έπεται ότι

$$\{p(e)\}(x)\!\downarrow \iff (\forall t \leq x)[x+t \in W_e],$$

έτσι που $W_{p(e)} = \{x \mid x, x+1, x+2, \dots, x+x \in W_e\}$.

(2b). Δείξτε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός e τέτοιος που

$$W_e = \{e, e+1, \dots, e+e\}.$$

Λύση. Από το 2ο Θεώρημα Αναδρομής, υπάρχει κάποιος αριθμός e τέτοιος που

$$\phi_e(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } e \leq t \leq e+e, \\ \bot, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3.

(3a). Ορίστε τα απλά σύνολα.

Λύση. Το σύνολο A είναι απλό αν είναι α.α., το συμπλήρωμά του $A^c = \mathbb{N} \setminus A$ είναι άπειρο, και κάθε άπειρο α.α. σύνολο τέμνει το A.

(3b). **Διόρθωση**: η υπόθεση σ' αυτό το πρόβλημα δεν αρκούσε για το συμπέρασμα—για παράδειγμα, δεν ισχύει αν $f(x) = 2x$. (Γιατί;)

Δείξτε ότι αν το A είναι απλό και η $f : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ είναι αναδρομική *μετάθεση*, δηλαδή ολική, ένα-προς-ένα και επί, τότε και η εικόνα $f[A]$ είναι απλό σύνολο.

Λύση. Το $B = f[A]$ είναι α.α., και το συμπλήρωμά του είναι άπειρο, επειδή η f είναι ένα-προς-ένα. Για την τελευταία, χαρακτηριστική ιδιότητα της απλότητας, έστω W_e τυχαίο, άπειρο α.α. σύνολο. Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[W_e]$ είναι α.α., και είναι άπειρο σύνολο, επειδή η f είναι ένα-προς-ένα και επί· άρα υπάρχει κάποιο $x \in A \cap f^{-1}[W_e]$, άρα $f(x) \in f[A] \cap W_e$, που έπρεπε να δείξουμε.

Πρόβλημα 4. Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο

$$A_f = \{e \mid \varphi_e = f\},$$

όπου η $f(x)$ είναι τυχαία, ολική αναδρομική συνάρτηση.

Λύση. Για το άνω φράγμα:

$$e \in A_f \iff (\forall x)(\exists y)[T_1(e,x,y) \,\&\, U(y) = f(x)],$$

έτσι που το A_f είναι Π^0_2.

Για το κάτω φράγμα, έστω

$$P(x) \iff (\forall u)(\exists v)R(x,u,v)$$

τυχαία Π^0_2 σχέση (με την $R(x,u,v)$ αναδρομική). Θέτουμε

$$g(x,u) = 0 \cdot \mu v R(x,u,v) + f(x)$$

και επαληθεύουμε εύκολα ότι

$$P(x) \iff (\forall u)[g(x,u)\downarrow \,\&\, g(x,u) = f(x)].$$

Αν ο $\hat{g}$ είναι κωδικός της g έτσι που

$$g(x,u) = \{\hat{g}\}(x,u) = \{S^1_1(\hat{g},x)\}(u),$$

συνάγεται εύκολα ότι

$$P(x) \iff S^1_1(\hat{g},x) \in A_f,$$

που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι το A_f δεν είναι Σ^0_2—γιατί αν ήταν, τότε κάθε Π^0_2 σχέση θα ήταν Σ^0_2, που δεν.

Πρόβλημα 6. Αληθεύει ή όχι: για κάθε αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(x)$, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική σχέση $R(x,y)$ τέτοια που

$$f(x) = (\mu y)R(x,y).$$

Αποδείξτε την επιλογή σας.

Λύση. Αυτό δεν αληθεύει. Για να το δείξουμε, έστω $P(x)$ τυχαία ημιαναδρομική, όχι αναδρομική σχέση, έτσι που για κάποια αναδρομική, μερική συνάρτηση $g(x)$,

$$P(x) \iff g(x)\downarrow,$$

και έστω $f(x) = 0 \cdot g(x)$, έτσι που η $f(x)$ είναι αναδρομική, μερική συνάρτηση και

$$P(x) \iff f(x)\downarrow \iff f(x) = 0\cdot$$

αν υπήρχε πρωτογενής, αναδρομική σχέση $R(x,y)$ τέτοια που $f(x) = (\mu y)R(x,y)$, τότε θα είχαμε

$$P(x) \iff (\mu y)R(x,y) = 0 \iff R(x,0),$$

που συνεπάγεται ότι η $P(x)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική, ενάντια στην επιλογή της.

Πρόβλημα 7. Για τις επόμενες δύο προτάσεις, αποφασίστε αν αληθεύουν ή όχι, και δικαιολογήστε την απάντησή σας με απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(7a) Για κάθε άπειρο α.α. σύνολο A, υπάρχει πλήρης, αναδρομική συνάρτηση f, τέτοια που για κάθε x,

$$f(x) > x \text{ και } f(x) \in A.$$

(7b) Για κάθε α.α. σύνολο B με άπειρο συμπλήρωμα, υπάρχει πλήρης αναδρομική συνάρτηση g, τέτοια που για κάθε x,

$$g(x) > x \text{ και } g(x) \notin B.$$

(Υπόδειξη: γι' αυτό αρκεί η επίκληση ενός από τα θεωρήματα που αποδείξαμε.)

Λύση. (7a) Θέτουμε

$$R(x,y) \iff x < y \;\&\; y \in A\cdot$$

η σχέση αυτή είναι Σ^0_1, και εφόσον το A είναι άπειρο, $(\forall x)(\exists y)R(x,y)\cdot$ από το Λήμμα Σ^0_1-επιλογής συνάγουμε ότι υπάρχει ολική, αναδρομική συνάρτηση $f(x)$ τέτοια που $(\forall x)R(x, f(x))$, δηλαδή, $(\forall x)[x < f(x) \;\&\; f(x) \in A]$.

(7b) Αυτό δεν ισχύει: αν το B είναι απλό, τότε είναι α.α., έχει άπειρο συμπλήρωμα αλλά δεν υπάρχει η ζητούμενη $g(x)$, γιατί αν υπήρχε, η εικόνα $g[\mathbb{N}]$ θα ήταν άπειρο, α.α., υποσύνολο του συμπληρώματος B^c—που δεν υπάρχει.

Πρόβλημα 8 (υποχρεωτική μόνο για τους φοιτητές στο Λ2 και το Α.27). Για τυχαία, αναδρομική μερική συνάρτηση $g(x)$, θέτουμε

$$D_g = \{x \mid g(x)\downarrow\}, \qquad B_g = \{e \mid \varphi_e = g\}.$$

(8a) Δείξτε ότι αν το πεδίο σύγκλισης D_g της $g(x)$ είναι πεπερασμένο, τότε το B_g είναι Δ^0_2.

(8b) Ταξινομήστε στην αριθμητική ιεραρχία το σύνολο B_g, στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης D_g της $g(x)$ είναι άπειρο. (Αυτό είναι γενίκευση του Προβλήματος 4.)

Λυση. (8b) Το B_g είναι Π^0_2, με εύκολο υπολογισμό:

$$\begin{aligned} e \in B_g &\iff (\forall x, w)[\varphi_e(x) = w \iff g(x) = w] \\ &\iff (\forall x, w)[[\varphi_e(x) = w \;\&\; g(x) = w] \vee [\varphi_e(x) \neq w \;\&\; g(x) \neq w]. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι είναι Π^0_2 πλήρες (άρα και όχι Σ^0_2), έστω

$$P(x) \iff (\forall s)(\exists v)R(x, s, v)$$

τυχαία Π^0_2 σχέση, με την $R(x, s, v)$ αναδρομική. Θέτουμε

$$h(x, u) = \begin{cases} g(u), & \text{αν } (\forall s \leq u)(\exists v)R(x, s, v), \\ \perp, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η $h(x, u)$ είναι αναδρομική και, προφανώς,

$$(\forall s)(\exists v)R(x, s, v) \Longrightarrow (\forall u)h(x, u) = g(u).$$

Για το αντίστροφο, αν $(\forall u)[h(x, u) = g(u)]$, τότε για κάθε s, υπάρχει κάποιος αριθμός $u > s$ τέτοιος που $g(u)\downarrow$ (από την υπόθεση για την $g(u)$), και η εξίσωση $h(x, u) = g(u)$ γι' αυτό το u συνεπάγεται ότι $(\exists v)R(x, s, v)$. Σ' αυτό το σημείο έχουμε δείξει ότι

$$P(x) \iff (\forall s)(\exists v)R(x, s, v) \iff (\forall u)[h(x, u) = g(u)]\cdot$$

άρα, αν επιλέξουμε τον αριθμό $\hat{h}$ έτσι που

$$h(x, u) = \{\hat{h}\}(x, u) = \{S^1_1(\hat{h}, x)\}(u),$$

έχουμε το ζητούμενο

$$P(x) \iff (\forall u)[\{S^1_1(\hat{h}, x)\}(u) = g(u)] \iff S^1_1(\hat{h}, x) \in B_g.$$

Το (8a) είναι εύκολο.

Μέρος Β, Θεωρία

Διατυπώστε το *Θεώρημα Απληρότητας του Gödel* στη γενική μορφή που του δώσαμε σ' αυτό το μάθημα, και σκιαγραφήστε (σύντομα αλλά πειστικά) την απόδειξή του. (Προσπαθήστε να ορίσετε τις βασικές έννοιες και θεωρήματα γι' αυτές που απαιτούνται για την διατύπωση και την απόδειξη· να αποφύγετε τις τεχνικές λεπτομέρειες, όσο αυτό είναι δυνατό.)
