JOURNAL OF ALGEBRA 168, 648–694 (1994)

Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques

RAPHAËL ROUQUIER

Département de Mathématique et d'Informatique, Ecole Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

Communicated by Walter Feit

Received January 19, 1993

Avant-Propos

AVANT-PROPOS

Nous étudions dans cet article des correspondances entre caractères d'un bloc b d'un groupe fini G, de groupe de défaut D abélien, et du bloc correspondant de $N_G(D, b_D)$ où (D, b_D) est une b-sous-paire maximale de G.

Nous nous plaçons dans le cas où G est un groupe symétrique ou un groupe sporadique. Dans ce dernier cas, nous n'étudions que les blocs principaux, mais nous montrons aussi que les isométries de caractères que nous construisons sont compatibles avec les automorphismes extérieurs du groupe. Ainsi, nous vérifions dans les cas précédents la conjecture énoncée par M. Broué dans [Br2]:

Soient G un groupe fini, e un bloc de G et (D, f) une e-sous-paire maximale de G. Si D est abélien, les paires (G, e) et $(N_G(D, f), f)$ sont de même type.

Dans le premier chapitre, nous définissons tout d'abord le type d'un bloc, puis nous introduisons les notations nécessaires à l'étude des représentations du groupe symétrique et aux produits en couronne par des groupes symétriques. Ensuite, nous reprenons la construction classique des caractères irréductibles des produits en couronne.

0021-8693/94 $6.00

Dans le deuxième chapitre, nous prouvons la conjecture citée plus haut pour les groupes symétriques. L'ingrédient essentiel est une généralisation de la formule de Murnagham–Nakayama qui décrit les valeurs des caractères des groupes symétriques, aux produits en couronne par un groupe symétrique. Cette formule, outre son utilité pour les produits en couronne de deux groupes symétriques, donne dans le cas du produit en couronne d'un groupe cyclique par un groupe symétrique, un résultat d'Osima.

La dernière partie consiste en une vérification, cas par cas, de la conjecture pour les 26 groupes sporadiques. Après avoir déterminé la structure locale des groupes concernés, nous déterminons les nombres de décomposition généralisés des caractères des blocs principaux. On en profite, suivant les idées de P. Fong, pour vérifier que les isométries construites s'étendent en des isométries entre les groupes étendus par des automorphismes extérieurs—qui sont d'ordre 2 dans le cas des groupes sporadiques.

1. Définitions et notations

1.1. *Type d'un bloc*

Dans la suite, on expose les notations et les définitions nécessaires pour définir le type d'un bloc (cf. [Br2]).

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique nulle, supposé assez gros pour tous les groupes finis considérés. Soit k son corps résiduel, supposé de caractéristique $p \neq 0$.

Soient G un groupe fini et e un idempotent du centre ZKG de l'algèbre de groupe KG de G sur K. On note $\mathcal{R}_K(G, e)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie ${}_{KGe}Mod$ des KGe-modules à gauche de type fini, c'est-à-dire le $\mathbf{Z}$-module engendré par les caractères des KGe-modules à gauche de type fini. On note $\mathrm{Irr}(G, e)$ l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathcal{R}_K(G, e)$; si $e = 1$, on note $\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}(G, 1)$. Soit H un groupe fini et f un idempotent de ZKH. On note $\mathcal{R}_K((G, e), (H, f))$ le $\mathbf{Z}$-module engendré par les caractères des (KGe, KHf)-bimodules. Soit $\mu \in \mathcal{R}_K((G, e), (H, f))$. Suivant Broué [Br2], on définit l'application linéaire I_μ: $\mathcal{R}_K(H, f) \to \mathcal{R}_K(G, e)$ par $I_\mu(\beta)(g) = (1/|H|) \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1})\, \beta(h)$, pour β fonction centrale sur H à valeurs dans K et $g \in G$. En outre, tout homomorphisme de $\mathcal{R}_K(H, f)$ dans $\mathcal{R}_K(G, e)$ est de la forme I_μ pour un élément μ dans $\mathcal{R}_K((G, e), (H, f))$:

$$\mu = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(H, f)} I_\mu(\chi) \otimes \chi$$

Définition 1.1. *On dit que le caractère μ est parfait si pour tout $g \in G$ et $h \in H$, on a $\mu(g, h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$ et $\mu(g, h)/|C_H(h)| \in \mathcal{O}$ et si $\mu(g, h) \neq 0$ entraîne que g est d'ordre premier à p si et seulement si h est d'ordre premier* à p. Une isométrie entre $\mathscr{R}_K(H, f)$ et $\mathscr{R}_K(G, e)$ est dite parfaite si elle est de la forme I_μ, où μ est parfait.

Soit e un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}G$, c'est-à-dire un bloc de G. On note $CF(G, e; K)$ le K-espace vectoriel des fonctions centrales α sur G à valeurs dans K, telles que $\alpha(eg) = \alpha(g)$ pour $g \in G$. On désigne par $CF_{p'}(G, e; K)$ le sous-espace formé des fonctions qui s'annulent en dehors de l'ensemble $G_{p'}$ des p'-éléments de G.

Soit x un p-élément de G et P le sous-groupe de G engendré par x. Soit ε un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}C_G(P)$ tels que (P, ε) soit une e-sous-paire de G [Al-Br]. Alors, on définit l'application de décomposition généralisée

$$d_G^{(x,\varepsilon)}\colon CF(G, e; K) \to CF_{p'}(C_G(P), \varepsilon; K)$$

par $d_G^{(x,\varepsilon)}(\alpha)(y) = \alpha(xy\varepsilon)$ pour $\alpha \in CF(G, e; K)$ et $y \in C_G(x)_{p'}$.

On appelle *catégorie de Brauer* de e et on note $\mathrm{Br}_e(G)$, la catégorie dont les objets sont les e-sous-paires de G, et telle que les morphismes de (P, b) dans (P', b') sont les morphismes de P dans P' induits par les automorphismes intérieurs de G qui envoient (P, b) sur une paire contenue dans (P', b') [Br1, p. 162]. Nous noterons $\mathrm{Frob}(G) = \mathrm{Br}_e(G)$ si e est le bloc principal de G. Si les catégories de Brauer $\mathrm{Br}_e(G)$ et $\mathrm{Br}_f(H)$ sont équivalentes, alors, si D est un groupe de défaut de e dans G et D' un groupe de défaut de f dans H, il existe un isomorphisme entre D et D', ce qui nous permet, par abus de notation, d'identifier les sous-groupes de D et les sous-groupes de D'. Soit (D, e_D) une e-sous-paire maximale de G et (D, f_D) une f-sous-paire maximale de H. Si P est un sous-groupe de D, désignons par (P, e_P) la paire contenue dans (D, e_D) et (P, f_P) la paire contenue dans (D, f_D).

Le type d'un bloc est défini par la relation d'équivalence qui suit[1]:

DÉFINITION 1.2. On dit que les paires (G, e) et (H, f) ont même type si $\mathrm{Br}_e(G)$ et $\mathrm{Br}_f(H)$ sont équivalentes et s'il existe une famille d'isométries

$$\{I^P : \mathscr{R}_K(C_H(P), f_P) \to \mathscr{R}_K(C_G(P), e_P)\}_{\{P \text{ cyclique} \subseteq D\}}$$

telle que si $P = \langle x \rangle$, $x \neq 1$, alors $I^{\langle x \rangle}$ est parfaite et le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_K(H,f) \arrow[r, "I=I^1"] \arrow[d, "d_H^{(x,f_P)}"'] & \mathcal{R}_K(G,e) \arrow[d, "d_G^{(x,e_P)}"] \\
CF_{p'}(C_H(P), f_P; K) \arrow[r, "I^P_{p'}"'] & CF_{p'}(C_G(P), e_P; K)
\end{tikzcd}$$

[1] Dans le cas de blocs principaux et dans le cas du groupe symétrique, cette définition coïncide exactement avec celle donnée par R. Brauer ([Bra1]).

où $I^P_{p'}$ est l'isométrie entre $CF_{p'}(C_H(P), f_P; K)$ et $CF_{p'}(C_G(P), e_P; K)$ induite par I^P. Une telle isométrie I est parfaite et on a alors une isotypie entre e et f, de système local $(I^P)_{\{P \text{ cyclique} \subseteq D\}}$.

Cette définition est une forme équivalente à la définition originale ([Br2, 4.6]), d'après la remarque qui la suit.

Remarque 1.3. Si e est un bloc de G, (D, e_D) est une e-sous-paire maximale de G et D est abélien, alors $\mathrm{Br}_{e_D}(N_G(D, e_D))$ et $\mathrm{Br}_e(G)$ sont équivalentes.

Preuve. Cf. [Al-Br, 4.21]. ∎

1.2. *Combinatoire*

On rappelle ici succinctement quelques notations et définitions liées à la combinatoire du groupe symétrique, en suivant les notations et la terminologie de James–Kerber ([Ja-Ke]).

Nous noterons $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(E)$ le groupe symétrique sur un ensemble E à n éléments et Z_n le groupe cyclique d'ordre n. Soit n un entier et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ une partition de n, c'est-à-dire un k-uplet tel que $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k > 0$ et $n = \sum \alpha_i$. Soit $E = E_1 \cup \cdots \cup E_k$ une partition de E, avec $\mathrm{Card}(E_i) = \alpha_i$. Nous noterons $\mathfrak{S}_{(\alpha)}$ le sous-groupe $\mathfrak{S}(E_1) \times \cdots \times \mathfrak{S}(E_k)$ de $\mathfrak{S}_n$, qui est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\alpha_k}$ (un tel sous-groupe est unique à automorphisme intérieur près). Si α est une partition, nous noterons $\mathscr{D}(\alpha)$ le diagramme de Young [Ja-Ke, 1.4] associé à la partition α. On note ${}'\alpha$ la partition de diagramme de Young symétrique de $\mathscr{D}(\alpha)$. On définit $|\alpha|$ par $|\alpha| = n$, et on note $[\alpha]$ le caractère irréductible de $\mathfrak{S}_n$ associé à cette partition, c'est-à-dire le caractère de $\mathfrak{S}_n$ dont la restriction à $\mathfrak{S}_{(\alpha)}$ fait intervenir une fois le caractère trivial et dont la restriction a $\mathfrak{S}_{({}'\alpha)}$ fait intervenir une fois le caractère signature [Ja-Ke, 2.1]. Ainsi, on a $[{}'\alpha] = \sigma[\alpha]$, où σ est le caractère signature de $\mathfrak{S}_n$.

Soit l un entier strictement positif. On définit la partition $l\alpha$ de ln par: $l\alpha = (l\alpha_1, ..., l\alpha_k)$. Soit e un entier. On appelle e-crochet une partition γ de e de la forme: $(e-r, 1^r)$, où $0 \leqslant r \leqslant e$. Alors, on définit $\varepsilon(\gamma)$ par: $\varepsilon(\gamma) = (-1)^r$. On appelle *longueur* du crochet γ l'entier $|\gamma| = e$. On dit que γ est un crochet de α si γ un crochet du diagramme de Young $\mathscr{D}(\alpha)$ de α, c'est-à-dire, γ est attaché à un nœud donné de $\mathscr{D}(\alpha)$. On note $\gamma * \alpha$ la partition dont le diagramme de Young est obtenu en enlevant à $\mathscr{D}(\alpha)$ le bord de $\mathscr{D}(\alpha)$ correspondant au crochet γ ([Ja-Ke, 2.7]).

DÉFINITION 1.4. Soit α une partition. Soit ζ_1 un crochet de α, ζ_2 un crochet de $\zeta_1 * \alpha$, ..., ζ_l un crochet de $\zeta_{l-1} * \cdots * \zeta_1 * \alpha$. On dit que $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_l)$ est une suite de crochets de α. On note alors $\zeta * \alpha = \zeta_l * \cdots * \zeta_1 * \alpha$ la partition obtenue en enlevant ζ_l à $\zeta_{l-1} * \cdots * \zeta_1 * \alpha$. Si la suite des longueurs des crochets de ζ est décroissante, alors elle définit une partition σ, et on dit alors que la suite ζ est compatible avec la partition σ. Ainsi, si x est un élément d'un groupe symétrique de classe de conjugaison indexée par σ, il existe une correspondance qui à tout crochet de la suite ζ associe un cycle $x(\zeta_i)$ de longueur $|\zeta_i|$ de x.

Soit $\zeta = (\zeta_i)$ une suite de crochets. On définit $|\zeta|$ par $|\zeta| = \sum_i |\zeta_i|$, on désigne par $\mathrm{Card}(\zeta)$ le nombre de termes de la suite ζ et on définit $\varepsilon(\zeta)$ par $\varepsilon(\zeta) = \prod_i \varepsilon(\zeta_i)$.

DÉFINITON 1.5. Soient $\alpha^1, ..., \alpha^m$ des partitions. On appelle produit de $\alpha^1, ..., \alpha^m$ et on note $\alpha = \times \alpha^i$, le m-uplet $(\alpha^1, ..., \alpha^m)$.

On dit que γ est un crochet de α si il existe k tel que γ est un crochet de α^k. On note alors $\gamma * \alpha$ le produit $\times \beta^i$, où $\beta^i = \alpha^i$ si $i \neq k$ et $\beta^k = \gamma * \alpha^k$.

DÉFINITION 1.6. Soient $\alpha^1, ..., \alpha^m$ des partitions et $\alpha = \times \alpha^i$. Soit ζ_1 un crochet de α, ζ_2 un crochet de $\zeta_1 * \alpha, ..., \zeta_l$ un crochet de $\zeta_{l-1} * \cdots * \zeta_1 * \alpha$. On dit alors que $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_l)$ est une suite de crochets de α et on note $\zeta * \alpha = \zeta_l * \cdots * \zeta_1 * \alpha$. Supposons que la suite des longueurs des crochets de la suite ζ est décroissante, alors elle définit une partition σ, et on dit alors que ζ est compatible avec la partition σ.

Dans la situation précédente, il existe un m-uplet $(\zeta^1, ..., \zeta^m)$, où ζ^i est une suite de crochets de α^i, tel que $\zeta * \alpha = \times (\zeta^i * \alpha^i)$. On a ainsi une surjection de l'ensemble des suites de crochets de α dans le produit des ensembles de suites de crochets des α^i, et, en général, cette application n'est pas injective.

A toute partition α de n entier, il existe un unique e-uplet $\alpha^1, ..., \alpha^e$ de partitions appelé e-quotient de α, déterminé à partir d'une famille de β-nombres de cardinal n associée à α ([Ja-Ke, 2.7.29]).

PROPOSITION 17. *Si β est une partition dont le e-quotient est $\alpha^1, ..., \alpha^e$, alors, pour tout crochet ζ de β il existe $1 \leqslant k \leqslant e$ et un crochet ζ' de α^k de telle sorte que $\zeta * \beta$ est de e-quotient $\alpha^1, ..., \alpha^{k-1}, \zeta' * \alpha^k, \alpha^{k+1}, ..., \alpha^e$. Plus généralement, à toute suite de crochets de β compatible avec une partition de la forme $e\sigma$, on peut associer ainsi une suite de crochets de $\times \alpha^i$ compatible avec σ, et cette correspondance est bijective.*

Preuve. Cf. [En, 2.7 p7]. ∎

Soit e un entier et β une partition sans e-crochet. On dit que α est une partition de e-cœur β s'il existe une suite de e-crochets ζ de α telle que $\zeta * \alpha = \beta$. D'après [En, 2.15] et [Ja-Ke, 2.7.16], $\varepsilon(\zeta)$ et β ne dépendent pas du choix de la suite ζ vérifiant $\zeta * \alpha = \beta$. On peut donc définir $\varepsilon_e(\alpha)$ par $\varepsilon_e(\alpha) = \varepsilon(\zeta)$, et on appelle e-poids de α l'entier $\mathrm{Card}(\zeta)$.

DÉFINITION 1.8. Soit σ un e-cœur, c'est-à-dire une partition qui est égale à son e-cœur, telle que $n-|\sigma| \in e\mathbb{N}$. Le e-bloc de $G=\mathfrak{S}_n$ associé à σ, noté b_σ^e (ou plus simplement b_σ), est l'idempotent de ZKG associé à l'ensemble des caractères $[\alpha]$, pour α partition de n de e-cœur σ:

$$b_\sigma=\sum_\alpha e_{[\alpha]} \quad \text{et} \quad e_{[\alpha]}=\frac{[\alpha](1)}{|G|}\sum_{g\in G}[\alpha](g^{-1})\,g,$$

On appelle e-poids de b_σ le e-poids des caractères qu'il contient.

D'après le théorème de Brauer–Nakayama–Robinson ([Ja-Ke, 6.1.21]), si $e=p$, on retrouve la notion usuelle de p-blocs.

1.3. *Produit en couronne*

Nous décrivons les modules simples d'un produit en couronne, puis nous donnons une construction explicite des caractères irréductibles d'un produit en couronne.

Soient E un ensemble fini, G un groupe fini et $\mathscr{E}$ le groupe des fonctions de E dans G. Soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$. On appelle produit en couronne $G \wr H$ de G par H, le groupe $\mathscr{E} \rtimes H$, dont la multiplication est donnée par: $(f;\pi)\cdot(f';\pi')=(f\cdot(f'\circ\pi^{-1});\pi\pi')$ ([Ja-Ke, 4.1]). Nous identifierons $\mathscr{E}$ avec son image dans $G\wr H$, i.e., $\varepsilon\in\mathscr{E}$ sera identifié avec $(\varepsilon;1)$. Si G est un sous-groupe d'un groupe symétrique $\mathfrak{S}(F)$, où F est un ensemble fini, alors $G\wr H$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E\times F)$.

Soient $(f_1;\pi_1)$, $(f_2;\pi_2)$ deux éléments de $G\wr H$. On dit que $(f_1;\pi_1)$ et $(f_2;\pi_2)$ sont à supports disjoints s'il existe une partition $E=E_1\cup E_2$ de E telle que si $\{i,j\}=\{1,2\}$, alors $f_i(E_j)=\{1_G\}$ et π_i fixe chaque élément de E_j.

1.3.1. *Modules simples.* Soit $R=\mathcal{O}$, K ou k. Pour tout $i\in E$, soit V_i un RG-module. Le groupe d'inertie du RE-module $V=\bigotimes_{i\in E}V_i$ dans $G\wr H$ est de la forme $G\wr L$ où L est un sous-groupe de H. Soit $V^\sim$ le $R(G\wr L)$-module défini par:

$$(f;\pi)\left(\bigotimes_{i\in E} v_i\right)=\bigotimes_{i\in E}\left(f(i)\,v_{\pi^{-1}(i)}\right)$$

où $(f;\pi)\in G\wr L$. Soit W un RL-module, considéré comme $R(G\wr L)$-module. Alors, si W est simple et V_i est simple pour tout $i\in E$, $\mathrm{Ind}_{G\wr L}^{G\wr H}(V^\sim\otimes W)$ est un $R(G\wr H)$-module simple, d'après la théorie de Clifford.

1.3.2. *Caractères irréductibles.* Soit $\varphi\colon E\to \mathrm{Irr}(G)$. On définit alors $\chi_\varphi\colon \mathscr{E}\to K$ par:

$$\chi_\varphi(f)=\prod_{e\in E}\varphi(e)(f(e)), \qquad \text{pour} \quad f\in\mathscr{E}.$$

Alors, $\{\chi_\varphi \mid \varphi: E \to \mathrm{Irr}(G)\} = \mathrm{Irr}(\mathscr{E})$. En outre, si $\varphi: E \to \mathrm{Irr}(G)$, alors $\{\varphi^{-1}(\psi) \mid \psi \in \varphi(E)\}$ est une partition de E et le stabilisateur de χ_φ dans $G \wr H$ est

$$\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi) = G \wr \left(H \cap \prod_{\psi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}_{\varphi^{-1}(\psi)}\right)$$

$$= \mathscr{E} \cdot \left(H \cap \prod_{\psi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}_{\varphi^{-1}(\psi)}\right).$$

De plus, χ_φ s'étend en un caractère irréductible $\mathrm{E}(\chi_\varphi)$ de $\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)$ ([Ja-Ke, 4.3]). Si $\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi))$ et $\mathscr{E} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$, alors $(\lambda E(\chi_\varphi)) \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi))$ et $\mathrm{Ind}^{G \wr H}(\lambda E(\chi_\varphi)) \in \mathrm{Irr}(G \wr H)$. Enfin, si $\mathscr{R}$ est un système de représentants des applications $\varphi: E \to \mathrm{Irr}(G)$ de telle sorte que χ_φ décrit un système de représentants des orbites de $G \wr H$ sur $\mathrm{Irr}(\mathscr{E})$, alors

$$\{\mathrm{Ind}^{G \wr H}(\lambda E(\chi_\varphi)) \mid \lambda \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)), \mathscr{E} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda) \text{ et } \varphi \in \mathscr{R}\}$$

est l'ensemble $\mathrm{Irr}(G \wr H)$ des caractères irréductibles de $G \wr H$.

Soient $n = \mathrm{Card}(E)$ et $H = \mathfrak{S}(E)$. Soit $\varphi: E \to \mathrm{Irr}(G)$, $E_\phi = \varphi^{-1}(\phi)$ et $n_\phi = \mathrm{Card}(E_\phi)$, pour tout $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$. Alors, $E = \bigcup E_\phi$ est une partition de E et $\sum n_\phi = n$. On a

$$\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi) = G \wr \left(\prod_{\phi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}(E_\phi)\right) = \mathscr{E} \cdot \left(\prod_{\phi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}(E_\phi)\right).$$

Pour tout $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ avec $n_\phi > 0$, soit α^ϕ une partition de n_ϕ. Alors, $\prod_{\phi \in \varphi(E)} [\alpha^\phi]$ définit un caractère irréductible de $\prod_{\phi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}(E_\phi)$, donc définit par inflation un caractère irréductible λ de $\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)$ tel que $\mathscr{E} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda)$. Nous posons alors $[\times \alpha^\phi] = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)}^{G \wr H}(\lambda \mathrm{E}(\chi_\varphi))$.

Suivant [Ja-Ke, 4.4.10], on détermine dans le cas où $H = \mathfrak{S}(E)$ les valeurs des caractères irréductibles de $G \wr H$.

Soient $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ et $\varphi: E \to \mathrm{Irr}(G)$ donnée par $\varphi(i) = \psi$ pour $i \in E$. Alors, χ_φ est un caractère irréductible de $G \wr H$.

Soit $x = (f; \pi) \in G \wr H$. Soit $\pi = \pi_1 \cdots \pi_r$ la décomposition de π en un produit de cycles disjoints, avec r entier. Si $1 \leqslant k \leqslant r$ et $\pi_k = (j_k \pi(j_k) \cdots)$, alors on pose $x_k = f(j_k) f(\pi(j_k)) \cdots$. On a alors

$$\chi_\varphi(x) = \prod_k \psi(x_k).$$

2. Groupes symétriques

2.1. *Réduction du problème*

PROPOSITION 2.1. *Soient E un ensemble fini, $G = \mathfrak{S}(E)$, e un bloc de G de groupe de défaut D et w le poids de e. Alors, D est abélien si et seulement si w est strictement inférieur à p. Dans ce cas, $D \simeq (Z_p)^w$.*

Preuve. En effet, on sait qu'il existe un sous-ensemble F de E de cardinal pw tel que D est un p-sous-groupe de Sylow de $H = \mathfrak{S}(F)$, ([Br1, 1.B.3]). ∎

PROPOSITION 2.2. *Soient E un ensemble fini, $G = \mathfrak{S}(E)$, e un bloc de G de poids $w < p$ et (D, f) une e-sous-paire maximale de G. Soit $F \subseteq E$ avec* $\mathrm{Card}(F) = pw$, $H = \mathfrak{S}(F)$ *tels que D est un p-sous-groupe de Sylow de H et soit b_0 le bloc principal de $N_H(D)$. Alors, $(N_G(D, f), f)$ et $(N_H(D), b_0)$ ont même type.*

Preuve. Si $F' = E \setminus F$, alors $C_G(D) = \mathfrak{S}(F') \times D$, $C_H(D) = D$ et $N_G(D) = \mathfrak{S}(F') \times N_H(D)$ où $N_H(D) \cong (Z_p \rtimes Z_{p-1}) \wr \mathfrak{S}$. Ainsi, b_0, le bloc principal de $N_H(D)$, est le seul bloc de $N_H(D)$. Par conséquent, il existe un unique bloc b de $\mathfrak{S}(F')$ de défaut zéro tel que $f = b \otimes b_0$. Ainsi, $N_G(D, f) = N_G(D)$. Il est clair que $\mathrm{Br}_f(N_G(D, f))$ et $\mathrm{Br}_{b_0}(N_H(D))$ sont équivalentes, et il existe une équivalence de Morita entre les blocs f et b_0. Cette équivalence définit une isométrie au niveau des caractères, qui est une isotypie ([Ha]). ∎

THÉORÈME 2.3 (Fong–Harris). *Soit X un groupe fini dont un p-sous groupe de Sylow P est abélien, $Y = N_X(P)$ et A un p'-sous-groupe d'un groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Si les blocs principaux de X et de Y ont le même type, alors les blocs principaux de $X \wr A$ et $Y \wr A$ ont même type.*

Preuve. Cf. [Fo-Ha]. ∎

La conjecture citée au début est vraie dans le cas du défaut cyclique:

THÉORÈME 2.4 (Broué). *Soit G un groupe fini, e un bloc de G et (D, f) une e-sous-paire maximale de G. Si D est cyclique, alors les paires (G, e) et $(N_G(D, f), f)$ sont de même type.*

Preuve. Cf. [Br2, 5.C]. ∎

COROLLAIRE 2.5. *Si $w < p$, alors les blocs principaux de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ et $(Z_p \rtimes Z_{p-1}) \wr \mathfrak{S}_w$ ont même type.*

Preuve. Le normalisateur d'un p-sous-groupe de Sylow cyclique de $\mathfrak{S}_p$ est isomorphe à $Z_p \rtimes Z_{p-1}$, donc on peut conclure grâce aux deux théorèmes précédents. ∎

2.2. *Formules de Murnagham–Nakayama.*

Soit e un entier strictement positif. Soit n un entier. Si $x \in \mathfrak{S}_n$, on note $x_{(e)}$ le produit des cycles de longueur divisible par e dans la décomposition de x en cycles à supports disjoints, et $x_{(e')}$ le produit des cycles de longueur non divisible par e dans la décomposition de x. La classe de conjugaison de $x_{(e)}$ dans $\mathfrak{S}(F)$, où F est le sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$ formé des éléments qui ne sont pas fixés par $x_{(e)}$, est caractérisée par une partition dont toutes les composantes sont divisibles par e. Cette partition est donc de la forme $e\beta$, où β est une partition. On appelle *e-type* de $x_{(e)}$ la partition β.

THÉORÈME 2.6. *Soit m un entier tel que $em \leqslant n$ et σ une partition de m. Soit r^σ: $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_n) \to \mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_{n-em})$ définie par*

$$r^\sigma([\alpha]) = \sum_\xi \varepsilon(\xi)[\xi * \alpha]$$

où ξ parcourt l'ensemble des suites de crochets de α compatibles avec $e\sigma$. Si $z \in \mathfrak{S}_n$ et si σ est le type de $z_{(e)}$, alors pour toute partition α de n, on a $[\alpha](z) = r^\sigma([\alpha])(z_{(e')})$.

Preuve. Il s'agit d'une forme itérée de la formule de Murnagham–Nakayama [Ja-Ke, 2.4.7], donnée par Enguehard [En, 3.2]. ∎

Soit G un groupe fini. On a une formule analogue pour $G \wr \mathfrak{S}_n$:

Soit E un ensemble de cardinal n, $H = \mathfrak{S}(E)$. Soient φ: $E \to \mathrm{Irr}(G)$, $E_\phi = \varphi^{-1}(\phi)$ et α^ϕ une partition de $\mathrm{Card}(E_\phi)$ pour tout $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$. Alors, $\prod_{\phi \in \varphi(E)} [\alpha^\phi]$ définit un caractère irréductible de $\prod_{\phi \in \varphi(E)} \mathfrak{S}(E_\phi)$, donc définit par inflation, un caractère irréductible λ de $\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)$. Nous avons ainsi un caractère irréductible $[\times \alpha^\phi] = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}_{G \wr H}(\chi_\varphi)}^{G \wr H}(\lambda E(\chi_\varphi))$ de $G \wr H$.

THÉORÈME 2.7. *Soit $z \in G \wr H$ et $z = xy$ une décomposition telle que x et y soient à supports disjoints, $x = (f; \sigma)$ et $\sigma = (j\sigma(j) \cdots \sigma^{m-1}(j))$ est un cycle de longueur m. On pose $x_\sigma = f(j) f(\sigma(j)) \cdots f(\sigma^{m-1}(j))$. Alors,*

$$[\times \alpha^\phi](xy) = \sum_\psi \sum_\zeta \varepsilon(\zeta)\, \psi(x_\sigma)[\times_{\phi \neq \psi} \alpha^\phi \times (\zeta * \alpha^\psi)](y)$$

où ψ décrit $\mathrm{Irr}(G)$, ζ est un m-crochet de α^ψ.

Notons avant de démontrer ce théorème que l'on obtient immediatement le résultat suivant, forme itérée du théorème précédent:

THÉORÈME 2.8. *Soit $z \in G \wr H$ et $z = xy$ une décomposition telle que x et*

y soient à supports disjoints, $x=(f;\sigma)$. Alors, pour tout caractère irréductible $[\times\alpha^\phi]$ de $G \wr H$, on a

$$[\times\alpha^\phi](xy)=\sum_\zeta \varepsilon(\zeta)\, c_\zeta(x)[\times(\zeta^\phi * \alpha^\phi)](y)$$

où ζ décrit l'ensemble des suites de crochets de $\times\alpha^\phi$ compatibles avec σ et $c_\zeta(x)=\prod_\phi \prod_k \phi(x_{\sigma(\zeta_k^\phi)})$, $\zeta^\phi=(\zeta_k^\phi)$, $\sigma(\zeta_k^\phi)$ est le cycle de σ correspondant à ζ_k^ϕ, et si $\sigma(\zeta_k^\phi)=(j\sigma(j)\cdots)$, alors $x_{\sigma(\zeta_k^\phi)}=f(j)f(\sigma(j))\cdots$.

Preuve de 2.7. Soit $F\subset E$, $\mathrm{Card}(F)=m$ tel que $\sigma\in\mathfrak{S}(F)$. Soit $n_\phi=|E_\phi|$ pour tout $\phi\in\mathrm{Irr}(G)$. On a $y=(\rho;\tau)$. Alors:

$$\begin{aligned}[\times\alpha^\phi](xy)&=\frac{1}{\prod n_\phi!}\prod_{h\in H,\,(\sigma\tau)^h\in\prod\mathfrak{S}(E_\phi)}\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big(\prod[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^h)\\
&=\frac{1}{\prod n_\phi!}\sum_\psi\sum_{\substack{h\in H,\,\sigma^h\in\mathfrak{S}(E_\psi),\\(\sigma\tau)^h\in\prod\mathfrak{S}(E_\phi)}}\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big(\prod[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^h)\end{aligned}$$

Soit $h\in H$ tel que $\sigma^h\in\mathfrak{S}(E_\psi)$, $(\sigma\tau)^h\in\prod\mathfrak{S}(E_\phi)$; alors, si $k\in\mathfrak{S}(E_\psi)$, on a $\sigma^{hk}\in\mathfrak{S}(E_\psi)$, $(\sigma\tau)^{hk}\in\prod\mathfrak{S}(E_\phi)$ et

$$\begin{aligned}&\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big([\alpha^\psi]\prod_{\phi\neq\psi}[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^h)\\
&\quad=\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big([\alpha^\psi]\prod_{\phi\neq\psi}[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^{hk}),\end{aligned}$$

d'où

$$[\times\alpha^\phi](xy)=\frac{1}{\prod n_\phi!}\sum_\psi\sum_{f:F\to E_\psi}\sum_{\substack{h\in H,\,\sigma^h\in\mathfrak{S}(E_\psi),\\(\sigma\tau)^h\in\prod\mathfrak{S}(E_\phi)\\ \text{et } h_{|F}=f}}\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big([\alpha^\psi]\prod_{\phi\neq\psi}[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^h)$$

où f décrit l'ensemble des injections de F dans E_ψ

$$=\frac{1}{\prod n_\phi!}\sum_\psi\frac{n_\psi!}{(n_\psi-m)!}\sum_{\substack{h\in\mathfrak{S}(E\setminus F)\\ \tau^h\in\prod_{\phi\neq\psi}\mathfrak{S}(E_\phi)\times\mathfrak{S}(E_\psi\setminus F)}}\left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})\Big([\alpha^\psi]\prod_{\phi\neq\psi}[\alpha^\phi]\Big)\right]((xy)^h)$$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}(E_\psi)$, et $\psi \in \operatorname{Irr}(G)$, on a $\prod \mathrm{E}(\phi^{n_\phi})(xy) = \psi(x_\sigma) \prod \mathrm{E}(\phi^{n'_\phi})(y)$ où $n'_\phi = n_\phi$ si $\phi \neq \psi$ et $n'_\psi = n_\psi - m$. Ainsi,

$$[\times \alpha^\phi](xy) = \sum_\psi \frac{1}{\prod n'_\phi !} \sum_\zeta \psi(x_\sigma)\, \varepsilon(\zeta) \sum_{\substack{h \in \mathfrak{S}(E \setminus F), \\ \tau^h \in \prod_{\phi \neq \psi} \mathfrak{S}(E_\phi) \times \mathfrak{S}(E_\psi \setminus F)}} \left[\prod \mathrm{E}(\phi^{n'_\phi}) \left([\zeta * \alpha^\psi] \times \prod_{\phi \neq \psi} [\alpha^\phi] \right)\right](y^h)$$

où ζ décrit l'ensemble des m-crochets de α^ψ, d'après la formule de Murnagham–Nakayama 2.6.

Par conséquent,

$$[\times \alpha^\phi](xy) = \sum_\psi \sum_\zeta \psi(x_\sigma)\, \varepsilon(\zeta) [\times_{\phi \neq \psi} \alpha^\phi \times (\zeta * \alpha^\psi)](y),$$

d'où le résultat. ∎

On obtient quelques corollaires immédiats dans le cas où l'on peut exprimer facilement la valeur de $c_\zeta(x)$. Lorsque $G = Z_m$ est un groupe cyclique, on retrouve un résultat d'Osima ([Osi, th. 7, p. 48]), et plus généralement, lorsque G est abélien, on a:

Corollaire 2.9. *Soit G un groupe fini abélien. Soit $z \in G \wr \mathfrak{S}_n$ et $z = xy$ une décomposition telle que x et y soient à supports disjoints, et $x = (1; \sigma)$. Alors, pour tout caractère irréductible $[\alpha^\phi]$ de $G \wr \mathfrak{S}_n$,*

$$[\times \alpha^\phi](xy) = \sum_\zeta \varepsilon(\zeta) [\times (\zeta^\phi * \alpha^\phi)](y)$$

où ζ décrit l'ensemble des suites de crochets de $\times \alpha^\phi$ compatibles avec σ.

Nous fixons un plongement de $\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w$ dans $\mathfrak{S}_{we}$, un tel plongement étant unique à automorphisme intérieur près (cf. [Ja-Ke, 4.1.18.]). Rappelons que les caractères irréductibles du e-bloc b_0^e de $\mathfrak{S}_e$ sont associés aux e-crochets. Soit w un entier. On note $\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w)$ engendré par les caractères irréductibles de la forme $[\times_\alpha \beta^{[\alpha]}]$, où β est la partition vide si α n'est pas un e-crochet.

Lorsque $G = \mathfrak{S}_e$, on trouve un corollaire du théorème qui sera utile par la suite:

Corollaire 2.10. *Soit $m \leqslant w$ et σ une partition de m. Soit δ^σ: $\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0) \to \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_{w-m})$ définie par*

$$\delta^\sigma([\times \beta^{[\gamma]}]) = \sum_\zeta \varepsilon(\zeta) \cdot \prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{\mathrm{Card}(\zeta^{[\gamma]})} \cdot [\times (\zeta^{[\gamma]} * \beta^{[\gamma]})]$$

où ζ décrit l'ensemble des suites de crochets de $\times\beta^{[\gamma]}$ compatibles avec σ et γ parcourt l'ensemble des e-crochets. Soit $z \in \mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w$, $z = xy$, x et y à supports disjoints, où x est de e-type σ, comme élément de $\mathfrak{S}_{we}$. Alors, pour tout caractère $\psi \in \mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0)$,

$$\psi(z) = \delta^\sigma(\psi)(y).$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que si $x = (f; \sigma) = (f_1; \sigma_1) \cdots (f_k; \sigma_k)$, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ est la décomposition de σ en cycles disjoints et si $\sigma_i = (j_i \sigma_i(j_i) \cdots)$, alors, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $x_{\sigma_i} = f_i(j_i) f(\sigma_i(j_i)) \cdots$ est un cycle de longueur e ([Ja-Ke, 4.2.19]). Soit $\psi \in \mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0)$, $\psi = [\times\beta^{[\gamma]}]$. On a

$$\psi(xy) = \sum_\zeta \varepsilon(\zeta)\, c_\zeta(x) [\times(\zeta^{[\gamma]} * \beta^{[\gamma]})](y)$$

où ζ décrit l'ensemble des suites de crochets de $\times\beta^{[\gamma]}$ compatibles avec σ, d'après le théorème 2.8 et avec les notations de ce théorème. On a $c_\zeta(x) = \prod_\gamma \prod_k \gamma(x_{\sigma(\zeta_k^{[\gamma]})})$, donc $c_\zeta(x) = \prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{\mathrm{Card}(\zeta^{[\gamma]})}$, d'où le résultat. ∎

2.3. *Isométrie entre $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w$*

Soient E un ensemble fini de cardinal n, $G = \mathfrak{S}(E)$, λ un e-cœur tel que $(n - |\lambda|) \in e\mathbf{N}$, b_λ le e-bloc correspondant de G et w son poids.

Soit $\{1, ..., e\} \to \{e - \text{crochets}\}$ une bijection, $i \mapsto \gamma_i$. Soit α une partition de n de e-cœur λ et $\eta = \eta^1, ..., \eta^e$ son e-quotient ([Ja-Ke, 2.7.29]). Pour tout i, on définit $\alpha^{\gamma_i} = \eta^{\gamma_i}$ si $\varepsilon(\gamma_i) = 1$ et $\alpha^{\gamma_i} = {}'\eta^{\gamma_i}$ si $\varepsilon(\gamma_i) = -1$. Si γ est un e-crochet, on pose $n_\gamma = |\alpha^\gamma|$. On définit alors l'isométrie I_w entre $\mathscr{R}_K(G, b_\lambda)$ et $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0)$ par:

$$I_w([\alpha]) = e(\alpha)[\times\alpha^\gamma]$$

où

$$e(\alpha) = \varepsilon_e(\alpha) \prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{n_\gamma}$$

et

$$[\times\alpha^\gamma] = [\times\alpha^{[\gamma]}]$$

THÉORÈME 2.11. *Soit $m \leqslant w$ un entier, σ une partition de m et b'_λ le bloc de $\mathfrak{S}_{n-em}$ associé à λ. Alors, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_n, b_\lambda) & \xrightarrow{I_w} & \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_w, b_0) \\ \downarrow{\scriptstyle r^\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^\sigma} \\ \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_{n-em}, b'_\lambda) & \xrightarrow[I_{w-m}]{} & \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_e \wr \mathfrak{S}_{w-m}) \end{array}$$

Preuve. Soit α une partition de n de e-cœur λ et $\eta = \eta^1, ..., \eta^e$ son e-quotient comme ci-dessus. A toute suite de crochets ξ de α compatible avec $e\sigma$ on peut associer une suite de crochets $\zeta' = \{\zeta'_i\}$ de $\times \eta^\gamma$ compatible avec σ (prop. 1.7). On associe à une telle suite de crochets la suite de crochets $\zeta = \{\zeta_i\}$ de $\times \alpha^\gamma$ compatible avec σ, avec $\zeta_i = \zeta'_i$ si ζ'_i est un crochet de α^j et $\alpha^j = \eta^j$, et $\zeta_i = {}'\zeta'_i$ si $\alpha^j = {}'\eta^j$. Les correspondances $\xi \mapsto \zeta'$ et $\zeta' \mapsto \zeta$ étant bijectives, la correspondance $\xi \mapsto \zeta$ est bijective. Alors,

$$\delta^\sigma(I_w([\alpha])) = \sum_\zeta \varepsilon(\zeta) \cdot \prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{\mathrm{Card}(\zeta^\gamma)} \cdot e(\alpha) \cdot [\times(\zeta^\gamma * \alpha^\gamma)]$$

où ζ décrit l'ensemble des suites de crochets de $\times \alpha^\gamma$ compatibles avec σ. On a:

$$I_{w-m}(r^\sigma([\alpha])) = \sum_\xi \varepsilon(\xi) \cdot I_{w-m}([\xi * \alpha])$$

où ξ décrit l'ensemble des suites de crochets de α compatibles avec $e\sigma$.

$$I_{w-m}(r^\sigma([\alpha])) = \sum_\xi \varepsilon(\xi) \cdot e(\xi * \alpha) \cdot [\times(\zeta^\gamma * \alpha^\gamma)]$$

où ζ est associée à ξ.

Or, $\varepsilon_e(\alpha)\,\varepsilon(\xi) = (\varepsilon(\zeta)\prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{|\zeta^\gamma| - \mathrm{Card}(\zeta^\gamma)})\,\varepsilon_e(\xi * \alpha)$ [En, 2.17]. De plus, $e(\alpha)\,e(\xi * \alpha) = \varepsilon_e(\alpha)\,\varepsilon_e(\xi * \alpha)\prod_\gamma \varepsilon(\gamma)^{|\zeta^\gamma|}$, d'où le résultat. ▮

2.4. *Résultats principaux*

On revient ici au cas où $e = p$ est un nombre premier et on suppose en outre que $w < p$; λ est un p-cœur tel que $(n - |\lambda| \in pN)$ et b est le p-bloc correspondant de $\mathfrak{S}_n$ de groupe de défaut D. Soient $m \leqslant w$, σ une partition de m et x un p-élément de p-type σ de D (en fait, $\sigma = (1^m)$ puisque D est abélien élémentaire). On a $C_{\mathfrak{S}_n}(x) = K_1 \times H$ et $C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x) = K_2 \times H$ où $H \simeq Z_p \wr \mathfrak{S}_m$, $K_1 \simeq \mathfrak{S}_{n-pm}$ et $K_2 \simeq \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{w-m}$, $K_2 \subseteq K_1$.

Soient b'_λ le bloc de $\mathfrak{S}_{n-pm}$ associé à λ et $b'' = b'_\lambda \otimes 1$ le bloc correspondant de $C_{\mathfrak{S}_n}(x)$. Soient b_0 le bloc principal de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ et b'_0 le bloc principal de $C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x)$. Soit I'_{w-m} l'isométrie entre $\mathcal{R}_K(C_{\mathfrak{S}_n}(x), b'')$ et $\mathcal{R}_K(C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x), b'_0)$ étendant I_{w-m} par l'identité sur $\mathcal{R}_K(H)$.

On peut alors réécrire le résultat précédent sous la forme suivante, grâce aux formules de Murnagham–Nakayama 2.6 et 2.10:

COROLLAIRE 2.12. *Pour $0 \leqslant m \leqslant w$, I'_{w-m} est une isométrie parfaite et le diagramme suivant est commutatif, pour tout p-élément x de type (1^m) de D:*

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_n, b_\lambda) & \xrightarrow{I_w} & \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w, b_0) \\ \downarrow d^x_{\mathfrak{S}_n} & & \downarrow d^x_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w} \\ CF_{p'}(C_{\mathfrak{S}_n}(x), b''; K) & \xrightarrow[(I'_{w-m})_{p'}]{} & CF_{p'}(C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x), b'_0; K)\end{array}$$

et donc le bloc b de $\mathfrak{S}_n$ et le bloc principal de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ sont isotypiques.

Preuve. Les catégories $\mathrm{Br}_{b_\lambda}(\mathfrak{S}_n)$ et $\mathrm{Br}_{b_0}(\mathfrak{S}_{wp})$ sont équivalentes (cf. [En]) et $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ contient le normalisateur du p-sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{wp}$, donc $\mathrm{Br}_{b_0}(\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w)$ est équivalente à $\mathrm{Br}_{b_0}(\mathfrak{S}_{wp})$ (cf. 1.3) et ainsi $\mathrm{Br}_{b_\lambda}(\mathfrak{S}_n)$ et $\mathrm{Br}_{b_0}(\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w)$ sont équivalentes.

Nous allons montrer par récurrence que I_w est parfaite. Supposons que I_r est une isométrie parfaite pour $r < w$; pour $r = 0$, c'est évident, car les blocs sont de défaut nul. Comme $m > 0$, I_{w-m} est une isométrie parfaite, donc I'_{w-m} est parfaite. Nous allons maintenant montrer la commutativité du diagramme qui précède.

Soit g un élément de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ qui est, en tant qu'élément de $\mathfrak{S}_n$, un produit de cycles de longueurs divisibles par p, de p-type σ. Alors pour tout $y \in \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ tel que g et y sont à supports disjoints et pour tout caractère ψ de $\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w, b_0)$, on a, d'après le corollaire 2.10,

$$\psi(gy) = \delta^\sigma(\psi)(y).$$

En outre, si $\chi \in \mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_n, b_\lambda)$, on a, d'après 2.6,

$$\chi(gy) = r^\sigma(\chi)(y).$$

Ainsi, si x est un p-élément de D et $y \in C_{\mathfrak{S}_n}(x)_{p'}$, alors il existe $y_1, y_2 \in \mathfrak{S}_n$ tels que $y = y_1 y_2$, xy_1 et y_2 sont à supports disjoints et xy_1 est un produit de cycles de longueurs divisibles par p, de p-type σ, on a, d'après 2.6:

$$d^x_{\mathfrak{S}_n}(\chi)(y) = r^\sigma(\chi)(y_2)$$

d'où, pour $y \in C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x)_{p'}$,

$$I_{w-m}(r^\sigma(\chi))(y_2) = (I'_{w-m})_{p'}(d^x_{\mathfrak{S}_n}(\chi))(y).$$

De même, si $y \in C_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(x)_{p'}$, alors il existe $y_1, y_2 \in \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ tels que $y = y_1 y_2$, y_1 et y_2 sont à supports disjoints et xy_1 est un produit de cycles de longueurs divisibles par p, de p-type σ, on a, d'après 2.10:

$$d^x_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(\psi)(y) = \delta^\sigma(\psi)(y_2).$$

Par conséquent,

$$d^x_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(I_w(\chi))(y) = I_{w-m}(r^\sigma(\chi))(y_2)$$

d'après le théorème 2.11. Donc,

$$d^{x}_{\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w}(I_w(\chi))(y) = (I'_{w-m})_{p'}\,(d^{x}_{\mathfrak{S}_n}(\chi))(y).$$

Ainsi, le diagramme est commutatif et par conséquent I_w est une isotypie, donc I_w est parfaite. Par récurrence, on a ainsi montré que I_w est parfaite; on a vu en outre que le diagramme du corollaire était commutatif, donc I_w est une isotypie. ▮

THÉORÈME 2.13. *Soit G un groupe symétrique, e un bloc à défaut abélien D de G et (D, e_D) une e-sous-paire maximale. Alors, (G, e) et $(N_G(D, e_D), e_D)$ ont même type.*

Preuve. Soient b_0 le bloc principal de $\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w$ et b'_0 le bloc principal de $\mathfrak{S}_p$. L'isotypie entre (G, e) et $(N_G(D, e_D), e_D)$ est donnée par le diagramme commutatif suivant, grâce à 2.2, 2.5 et 2.12:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_K(G,e) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isotypie}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{isotypie}"'] & \mathcal{R}_K(N_G(D,e_D),e_D) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{isotypie}"] \\
\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_w, b_0) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isotypie}"] & \mathcal{R}_K((Z_p \rtimes Z_{p-1}) \wr \mathfrak{S}_w) \\
\mathcal{R}_K(\mathfrak{S}_p, b'_0) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isotypie}"] \arrow[u, dashed, "\wr \mathfrak{S}_w"] & \mathcal{R}_K(Z_p \rtimes Z_{p-1}) \arrow[u, dashed, "\wr \mathfrak{S}_w"']
\end{tikzcd}$$

▮

3. GROUPES SPORADIQUES

3.1. *Introduction*

Nous prouvons dans cette partie le résultat suivant:

THÉORÉME 3.1. *Soit G un groupe sporadique simple, p un nombre premier tel que un p-sous-groupe de Sylow P de G est abélien non cyclique. Alors, il existe une isotypie entre les blocs principaux de G et $N_G(P)$. En outre, cette isotypie s'étend à une isotypie entre le bloc principal de* $\mathrm{Aut}(G)$ *et le bloc principal de $N_{\mathrm{Aut}(G)}(P)$.*

Nous donnons ci-dessous les groupes sporadiques possédant un p-sous-groupe de Sylow P abélien non cyclique. Nous noterons p^n un groupe abélien élémentaire d'ordre p^n. On note $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/G$.

G	P	$\lvert\mathrm{Out}(G)\rvert$
J_1	2^3	1
M_{11}	3^2	1
M_{22}	3^2	2
M_{23}	3^2	1
HS	3^2	2
ON	3^4	2
J_2	5^2	2
Suz	5^2	2
He	5^2	2
Fi_{22}	5^2	2
Fi_{23}	5^2	1
Fi_{24}'	5^2	2
Co_1	7^2	1
Th	7^2	1
BM	7^2	1
M	11^2	1

La structure des normalisateurs des sous-groupes de Sylow et des centralisateurs de p-éléments des groupes sporadiques est donnée dans [Go-Ly], [Asch] et [Atlas]. Les tables de caractères des groupes sporadiques et de leurs groupes d'automorphismes utilisées sont toutes déterminées dans [Atlas]. Les tables de caractères des normalisateurs des p-sous-groupes de Sylow abéliens non cycliques sont données pour les groupes J_1, M_{11}, M_{22}, M_{23}, HS, ON, J_2, Suz, He et Co_1 dans [Ost].

Nous noterons D_{2n} le groupe dihédral d'ordre $2n$, QD_{16} le groupe quasi-dihédral d'ordre 16. Nous noterons $G * H$ un produit central de G et de H et $G \# H$ un groupe de sous-groupe distingué G, tel que $(G \# H)/G \simeq H$. Nous noterons $G \cdot H$ le groupe $G \# H$ lorsque l'extension est scindée.

Soient G et H deux groupes finis, $\tilde{G} = G \cdot 2$ et $\tilde{H} = H \cdot 2$. Soit χ un caractère de G qui s'étend en χ_1 et χ_2 à $\tilde{G}$ et ψ un caractère de H qui s'étend en ψ_1 et ψ_2 à $\tilde{H}$. L'application qui envoie χ sur ψ d'une part et χ_i sur ψ_i pour $i \in \{1, 2\}$ d'autre part sera notée:

$$\begin{tikzcd}
\chi_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & \psi_1 \arrow[dl, dash] \\
& \chi \arrow[r, leftrightarrow] & \psi & \\
\chi_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & \psi_2 \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

Soient maintenant χ_1 et χ_2 deux caractères de G qui fusionnent en le caractère χ de $\tilde{G}$ et ψ_1 et ψ_2 deux caractères de H qui fusionnent en le caractère ψ de $\tilde{H}$. Alors, l'application qui envoie χ sur ψ d'une part et χ_i sur ψ_i pour $i \in \{1, 2\}$ d'autre part sera notée:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \chi_1 \arrow[r, leftrightarrow] & \psi_1 \arrow[dr, dash] & \\ \chi \arrow[ur, dash] \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & \psi \\ & \chi_2 \arrow[r, leftrightarrow] & \psi_2 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

On suppose $p \neq 2$.

Soit I une isométrie entre $\mathscr{R}_K(G, e)$ et $\mathscr{R}_K(H, f)$, où e et f sont les blocs principaux de G et H. Soit $\tilde{I}$ une isométrie entre $\mathscr{R}_K(\tilde{G}, \tilde{e})$ et $\mathscr{R}_K(\tilde{H}, \tilde{f})$, où $\tilde{e}$ et $\tilde{f}$ sont les blocs principaux de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$.

Soit χ un caractère irréductible de $\mathscr{R}_K(G, e)$. Soit $\varepsilon(\chi) = \pm 1$ tel que $\varepsilon(\chi)\, I(\chi)$ est un caractère irréductible. Alors, supposons que χ s'étend à $\tilde{G}$ si et seulement si $\varepsilon(\chi)\, I(\chi)$ s'étend à $\tilde{H}$, et alors si $\tilde{\chi}$ est une extension de χ, que $\varepsilon(\chi)\, \tilde{I}(\tilde{\chi})$ est une extension de $\varepsilon(\chi)\, I(\chi)$.

On dit alors que l'isométrie I s'étend en l'isométrie $\tilde{I}$.

Supposons que $\{I^P\}$ et $\{\tilde{I}^P\}$ définissent des isotypies entre (G, e) et (H, f) d'une part, et $(\tilde{G}, \tilde{e})$ et $(\tilde{H}, \tilde{f})$ d'autre part. On dit alors que l'isotypie I s'étend en l'isotypie $\tilde{I}$ si pour tout P, l'isométrie I^P s'étend en l'isométrie $\tilde{I}^P$.

3.2. $p = 2$, J_1

M. Broué a prouvé que les 2-blocs principaux de J_1 et de $N_{J_1}(2^3) = 2^3 \cdot (7 \cdot 3)$ ont le même type ([Br2, A.1.2]). Rappelons cette construction.

Soient $G = J_1$, $D = 2^3$ un 2-sous-groupe de Sylow de G et $H = N_G(D) = 2^3 \cdot (7 \cdot 3)$. Il existe une unique classe de conjugaison d'involutions dans G; soit s une involution de D. On a $C_G(s) = 2 \times PSL_2(5)$ et $C_H(s) = 2 \times PSL_2(3)$.

On a une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $PSL_2(3)$ et $PSL_2(5)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ \overline{1'} \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -\bar{3} \\ -5 \end{pmatrix}$$

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	77_1	77_2	$\overline{77}_2$	133_1	133_2	$\overline{133}_2$	209
$d(1)$	1	-1	0	0	-1	0	0	1
$-d(3)$	0	-1	1	0	-1	1	0	0
$-d(\bar{3})$	0	-1	0	1	-1	0	1	0

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	$\overline{1_1}$	3	$\overline{3}$	7_1	7_2	$\overline{7_2}$
1	1	0	0	1	1	-1	0	0
$1'$	0	1	0	1	1	0	-1	0
$\overline{1'}$	0	0	1	1	1	0	0	-1

Ainsi, l'application suivante définit une isotypie entre les blocs principaux de G et H:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 77_1 \\ 77_2 \\ \overline{77_2} \\ 133_1 \\ 133_2 \\ \overline{133_2} \\ 209 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1_1 \\ \overline{1_1} \\ -\overline{3} \\ -7_2 \\ -\overline{7_2} \\ -7_1 \end{pmatrix}$$

3.3. $p = 3$

3.3.1 M_{11}. Soit $G = M_{11}$. Soit $D = 3^2$ un 3-sous groupe de Sylow de G. Soit $H = 3^2 \cdot QD_{16}$ le normalisateur de D. On sait que G a une seule classe de conjugaison de 3-éléments; soit x un 3-élément de D. Comme $C_G(x) = C_H(x) = 2 \times 3^2$, il suffit de connaître les matrices de décomposition généralisées de G et de H en x pour établir une isotypie entre les blocs principaux de ces deux groupes.

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	10_1	10_2	10_2	11	16	16	44	55
1	1	0	1	1	1	-1	-1	0	0
$1'$	0	1	0	0	1	-1	-1	-1	1

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	2_1	2_2	8_1	8_2
1	1	1	0	0	1	1	1	0	-1
$1'$	0	0	1	1	1	1	1	-1	0

On a donc une isotypie entre le bloc principal de G et le bloc principal de H définie par l'isométrie parfaite:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 10_1 \\ 10_2 \\ \overline{10_2} \\ 11 \\ 16 \\ \overline{16} \\ 44 \\ 55 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1_2 \\ 1_1 \\ -8_2 \\ 2_2 \\ -2_1 \\ -\overline{2_1} \\ 8_1 \\ 1_3 \end{pmatrix}$$

3.3.2. M_{22}. Soit $G = M_{22}$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = M_{22} \cdot 2$ et $D = 3^2$ un 3-sous groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 3^2 \cdot Q_8$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = 3^2 \cdot QD_{16}$. Il y a une classe de conjugaison de 3-éléments dans G et dans $\tilde{G}$, soit x un 3-élément dans D. On a $C_G(x) = 3 \times A_4$, $C_{\tilde{G}}(x) = 3 \times \mathfrak{S}_4$, $C_H(x) = 3^2$ et $C_{\tilde{H}}(x) = 3 \times \mathfrak{S}_3$.

On a une isométrie parfaite entre le bloc principal de Z_3 et le bloc principal de A_4 qui est 3-nilpotent qui s'étend en une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$, donnée par l'inflation:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \arrow[dl, dash] \\ & 1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & \\ 1' \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1' \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1' \arrow[dr, dash] & \\ 2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 2 \arrow[dl, dash] \\ & \overline{1'} \arrow[r, leftrightarrow] & \overline{1'} & \end{tikzcd}$$

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	55	154	280	$\overline{280}$	385
1	1	1	1	1	1	−2

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{G}$ en x est:

	1	1_1	55_1	55_2	154_1	154_2	560	385_1	385_2
1	1	0	1	0	0	1	1	−1	−1
1'	0	1	0	1	1	0	1	−1	−1

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	2	8
1	1	1	1	1	2	−1

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{H}$ en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	$\overline{2_1}$	2_2	8_1	8_2
1	1	1	0	0	1	1	1	0	-1
$1'$	0	0	1	1	1	1	1	-1	0

On a une isotypie du bloc principal de G vers le bloc principal de H qui s'étend en une isotypie entre les blocs principaux de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \arrow[dl, dash] \\
& 1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & \\
1_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
55_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1_1 \arrow[dl, dash] \\
& 55 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1_1 \arrow[dr, dash] & \\
55_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
154_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -8_1 \arrow[dl, dash] \\
& 154 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -8 \arrow[dr, dash] & \\
154_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -8_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 280 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1_2 \arrow[dr, dash] & \\
560 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 2_2 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{280} \arrow[r, leftrightarrow] & 1_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
385_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -2_1 \arrow[dl, dash] \\
& 385 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -2 \arrow[dr, dash] & \\
385_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -\overline{2_1}
\end{tikzcd}$$

3.3.3. M_{23}. Soit $G = M_{23}$ et $D = 3^2$ un 3-sous groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 3^2 \cdot QD_{16}$. Il existe une unique classe de conjugaison de 3-éléments dans G; soit $x \in D$ un 3-élément. Alors, $C_G(x) = 3 \times A_5$ et $C_H(x) = 3 \times \mathfrak{S}_3$.

On a une isotypie entre le bloc principal de $\mathfrak{S}_3$ et le bloc principal de A_5 donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'image par cette application des caractères modulaires irréductibles du bloc principal de $C_H(x)$ est: $d(1)$, $d(4)$.

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	$\overline{2_1}$	2_2	8_1	8_2
1	1	1	0	0	1	1	1	0	−1
$1'$	0	0	1	1	1	1	1	−1	0

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	22	230	253	770	$\overline{770}$	896	$\overline{896}$	2024
$d(1)$	1	0	1	1	1	1	0	0	−1
$d(4)$	0	1	1	0	1	1	−1	−1	0

On a donc une isotypie du bloc principal de H vers le bloc principal de G:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 230 \\ 253 \\ 770 \\ \overline{770} \\ 896 \\ \overline{896} \\ 2024 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1_2 \\ 2_2 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ \overline{2_1} \\ 8_1 \\ -1_3 \\ 8_2 \end{pmatrix}$$

3.3.4. *HS*. Soit $G = HS$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = HS \cdot 2$ et $D = 3^2$ un 3-sous groupe de Sylow de G. Il existe une seule classe de conjugaison de 3-éléments dans G et dans $\tilde{G}$; soit $x \in D$ un 3-élément. Soit $H = N_G(D) = 2 \times (3^2 \cdot QD_{16})$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = 2^2 \times (3^2 \cdot QD_{16})$. On a $C_G(x) = 3 \times \mathfrak{S}_5$, $C_{\tilde{G}}(x) = 3 \times \mathfrak{S}_5 \times 2$, $C_H(x) = 3 \times \mathfrak{S}_3$ et $C_{\tilde{H}}(x) = 3 \times \mathfrak{S}_3 \times 2$.

Le caractère 1 de G (respectivement de H, $C_G(x)$, $C_H(x)$) s'étend de manière unique en un caractère du bloc principal de $\tilde{G}$ (respectivement $\tilde{H}$, $C_{\tilde{G}}(x)$, $C_{\tilde{H}}(x)$). Ainsi, il suffit de construire une isotypie entre les blocs principaux de G et H.

Pour construire $I^{\langle x \rangle}$, il suffit de construire une isométrie parfaite entre les blocs principaux de S_5 et de S_3.

L'application:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une isométrie parfaite du bloc principal de S_3 vers le bloc principal de S_5, qui induit une isométrie parfaite du bloc principal de $C_H(x)$ vers le bloc principal de $C_G(x)$. Les images par cette application des caractères modulaires irréductibles du bloc principal de $C_H(x)$ sont: $d(1)$, $d(4)$.

La matrice de décomposition généralisée de H en $\langle x \rangle$ est

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	$\bar{2}_1$	2_2	8_1	8_2
1	1	1	0	0	1	1	1	0	-1
$1'$	0	0	1	1	1	1	1	-1	0

La matrice de décomposition généralisée de G en $\langle x \rangle$ par rapport à $d(1)$, $d(4)$ est

	1	22	154	770	1408	1750	1925	2750	3200
$d(1)$	1	0	1	1	0	-1	-1	1	0
$d(4)$	0	1	0	1	1	-1	0	1	-1

On a donc une isotypie du bloc principal de G vers le bloc principal de H:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 154 \\ 770 \\ 1408 \\ 1750 \\ 1925 \\ 2750 \\ 3200 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1_2 \\ 1_1 \\ 2_1 \\ 1_3 \\ -\bar{2}_1 \\ 8_2 \\ 2_2 \\ 8_1 \end{pmatrix}$$

3.3.5. *ON*. Soit $G = ON$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = G \cdot 2$, $D = 3^4$ un 3-sous-groupe de Sylow de G, $H = N_G(D) = 3^4 \cdot ((Q_8 * D_8) \# (5 \cdot 2))$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = 3^4 \cdot (((Q_8 * D_8) \# (5 \cdot 2)) \cdot 2)$. Il existe une unique classe de 3-éléments dans G et dans $\tilde{G}$; soit $x \in D$ non trivial. On a $C_G(x) = 3^2 \times A_6$, $C_H(x) = 3^2 \times (3^2 \cdot 4)$, $C_{\tilde{G}}(x) = 3 \times (3 \times A_6) \cdot 2$ (où $A_6 \cdot 2 = PSO_3(9)$) et $C_{\tilde{H}}(x) = 3 \times (3 \times (3^2 \cdot 4)) \cdot 2$.

On a une isométrie parfaite entre le bloc principal de $3^2 \cdot 4$ et le bloc principal de A_6 qui s'étend en une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $3^2 \cdot 8$ et $A_6 \cdot 2$, donnée par:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \arrow[dl, dash] \\
& 1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & \\
1_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 10_1 \arrow[dl, dash] \\
& 1_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 10 \arrow[dr, dash] & \\
1_3 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 10_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1_4 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -8_1 \arrow[dl, dash] \\
& 1_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -8_1 \arrow[dr, dash] & \\
1_5 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -8_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1_6 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -8_3 \arrow[dl, dash] \\
& 1_3 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -8_2 \arrow[dr, dash] & \\
1_7 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -8_4
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 4_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -5_1 \arrow[dr, dash] & \\
8 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -10_3 \arrow[dl, dash] \\
& 4_2 \arrow[r, leftrightarrow] & -5_2 &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, il existe une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $C_H(x)$ et $C_G(x)$ qui s'étend en une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $C_{\tilde{H}}(x)$ et $C_{\tilde{G}}(x)$.

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	13376_1	13376_2	25916_1	25916_2	26752	32395_1	32395_2	37696
$d(1)$	1	1	1	2	2	0	−1	−1	−1
$d(10)$	0	1	1	1	1	−1	−2	−2	0
$-d(8_1)$	0	0	0	1	1	−2	−1	−1	−2
$-d(8_2)$	0	0	0	1	1	−2	−1	−1	−2

	64790_1	64790_2	85064	116963	143374	175616_1	175616_2
$d(1)$	2	2	−2	−1	0	0	0
$d(10)$	2	2	0	0	2	0	0
$-d(8_1)$	2	2	−1	0	1	−2	1
$-d(8_2)$	2	2	−1	0	1	1	−2

	234080_1	234080_2
$d(1)$	0	0
$d(10)$	-1	-1
$-d(8_1)$	0	0
$-d(8_2)$	0	0

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{G}$ en x est:

	1	1_1	26752	51832	26752_1	26752_2	64790	37696_1	37696_2
$d(1)$	1	0	1	2	0	0	-1	-1	0
$d(1_1)$	0	1	1	2	0	0	-1	0	-1
$d(10_1)$	0	0	1	1	-1	0	-2	0	0
$d(10_2)$	0	0	1	1	0	-1	-2	0	0
$-d(8_1)$	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1
$-d(8_2)$	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1
$-d(8_3)$	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1
$-d(8_4)$	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1

	129580	85064_1	85064_2	116963_1	116963_2	143374_1	143374_2
$d(1)$	2	-1	-1	-1	0	0	0
$d(1_1)$	2	-1	-1	0	-1	0	0
$d(10_1)$	2	0	0	0	0	1	1
$d(10_2)$	2	0	0	0	0	1	1
$-d(8_1)$	2	-1	0	0	0	1	0
$-d(8_2)$	2	0	-1	0	0	0	1
$-d(8_3)$	2	-1	0	0	0	0	1
$-d(8_4)$	2	0	-1	0	0	1	0

	175616_1	175616_2	175616_3	175616_4	234080_1	234080_2	234080_3
$d(1)$	0	0	0	0	0	0	0
$d(1_1)$	0	0	0	0	0	0	0
$d(10_1)$	0	0	0	0	-1	0	-1
$d(10_2)$	0	0	0	0	0	-1	0
$-d(8_1)$	-1	-1	1	0	0	0	0
$-d(8_2)$	-1	-1	0	1	0	0	0
$-d(8_3)$	1	0	-1	-1	0	0	0
$-d(8_4)$	0	1	-1	-1	0	0	0

	234080_4
$d(1)$	0
$d(1_1)$	0
$d(10_1)$	0
$d(10_2)$	-1
$-d(8_1)$	0
$-d(8_2)$	0
$-d(8_3)$	0
$-d(8_4)$	0

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	2_1	2_2	4_1	4_2	5_1	5_2	5_3	5_4	5_5	5_6	8_1	8_2	80_1	80_2	80_3	80_4
1	1	0	1	1	2	0	2	1	2	1	1	0	2	2	−1	0	0	0
1_1	0	1	1	1	0	2	1	2	1	2	0	1	2	2	0	−1	0	0
1_2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	−2	1
1_3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	1	−2

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{H}$ en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	4_1	4_2	4_3	4_4	4_5	5_1	5_2	5_3	5_4
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1_1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1_2	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
1_3	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1_4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1_5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1_6	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1_7	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

	10_1	10_2	16	80_1	80_2	80_3	80_4	80_5	80_6	80_7	80_8
1	2	1	2	−1	0	0	0	0	0	0	0
1_1	2	1	2	0	−1	0	0	0	0	0	0
1_2	1	2	2	0	0	−1	0	0	0	0	0
1_3	1	2	2	0	0	0	−1	0	0	0	0
1_4	1	1	2	0	0	0	0	−1	−1	1	0
1_5	1	1	2	0	0	0	0	−1	−1	0	1
1_6	1	1	2	0	0	0	0	1	0	−1	−1
1_7	1	1	2	0	0	0	0	0	1	−1	−1

Ainsi, il existe une isotypie entre les blocs principaux de G et H qui s'étend en une isotypie entre les blocs principaux de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$, donnée par:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \\
& 1 \arrow[r, leftrightarrow] & 1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
1_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & 1_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 13376_1 \arrow[r, leftrightarrow] & 2_1 \arrow[dr, dash] & \\
26752 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 4_5 \\
& 13376_2 \arrow[r, leftrightarrow] & 2_2 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 25916_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 5_1 \arrow[dr, dash] & \\
51832 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 10_1 \\
 & 25916_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ul, dash] & 5_3 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
26752_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -5_3 \arrow[dl, dash] \\
 & 26752 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -5_6 \arrow[dr, dash] & \\
26752_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -5_4
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 32395_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -5_2 \arrow[dr, dash] & \\
64790 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -10_2 \\
 & 32395_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ul, dash] & -5_4 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
37696_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -5_1 \arrow[dl, dash] \\
 & 37696 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -5_5 \arrow[dr, dash] & \\
37696_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -5_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 64790_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 8_1 \arrow[dr, dash] & \\
129580 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 16 \\
 & 64790_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ul, dash] & 8_2 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
85064_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -4_1 \arrow[dl, dash] \\
 & 85064 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -4_1 \arrow[dr, dash] & \\
85064_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -4_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
116963_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 80_1 \arrow[dl, dash] \\
 & 116963 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 80_1 \arrow[dr, dash] & \\
116963_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 80_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
143374_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 4_3 \arrow[dl, dash] \\
 & 143374 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 4_2 \arrow[dr, dash] & \\
143374_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 4_4
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
175616_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 80_5 \arrow[dl, dash] \\
& 175616_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 80_3 \arrow[dr, dash] & \\
175616_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 80_6 \\
175616_3 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 80_7 \arrow[dl, dash] \\
& 175616_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 80_4 \arrow[dr, dash] & \\
175616_4 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 80_8 \\
243080_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -1_2 \arrow[dl, dash] \\
& 243080_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -1_1 \arrow[dr, dash] & \\
243080_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -1_3 \\
243080_3 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 80_3 \arrow[dl, dash] \\
& 243080_2 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 80_2 \arrow[dr, dash] & \\
243080_4 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 80_4
\end{tikzcd}
$$

3.4. $p = 5$

3.4.1. J_2. Soit $G = J_2$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = J_2 \cdot 2$ et $D = 5^2$ un 5-sous-groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 5^2 \cdot (2 \times \mathfrak{S}_3)$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = 5^2 \cdot (4 \times \mathfrak{S}_3)$. Il y a quatre classes de conjugaison de 5-éléments dans G, soient x_1, x_2, y_1, y_2 des représentants de ces quatre classes, de telle sorte que dans $\tilde{G}$, x_1 et x_2 sont dans la même classe, y_1 et y_2 sont dans la même classe. On a $C_G(x_1) = C_{\tilde{G}}(x_1) = 5 \times A_5$, $C_H(x_1) = C_{\tilde{H}}(x_1) = 5 \times (5 \cdot 2)$, $C_G(y_1) = C_{\tilde{G}}(y_1) = 5 \times (5 \cdot 2)$ et $C_H(y_1) = C_{\tilde{H}}(y_1) = 5 \times (5 \cdot 2)$.

Cas de $I^{\langle y_1 \rangle}$. La matrice de décomposition généralisée de G en y_1 est:

	1	14	14	21	21	36	63	126	189	189	224	224	288	336
1	1	1	1	$-b$	$-b$	0	-1	0	$-b$	$-b$	b	b	-1	1
1′	0	$-\bar{b}$	$-b$	$-b$	$-\bar{b}$	1	-1	1	1	1	b	$\bar{b}$	-1	0

où $b = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ et $\bar{b} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$.

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{G}$ en y_1 est:

	1	1_1	28	42	36_1	36_2	63_1	63_2
1	1	1	2	1	0	0	-1	-1
1′	0	0	1	1	1	1	-1	-1

	126_1	126_2	378	448	288_1	288_2	336	336
1	0	0	1	-1	-1	-1	1	1
1′	1	1	2	-1	-1	-1	0	0

La matrice de décomposition généralisée de H en y_1 est:

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	2_2	6_1	$\bar{6}_1$	6_2	$\bar{6}_2$	6_3	$\bar{6}_3$	6_4	$\bar{6}_4$
1	1	0	1	0	1	1	b	b	-1	-1	$-b$	$-b$	$-b$	$-b$
$1'$	0	1	0	1	1	1	-1	-1	b	$\bar{b}$	$-b$	$-\bar{b}$	$-b$	$-\bar{b}$

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{H}$ en y_1 est:

	1	1_1	1_2	$\bar{1}_2$	1_3	1_4	1_5	$\bar{1}_5$	2_1	$\bar{2}_1$	2_2	2_3	12_1	12_2	12_3	12_4
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-2	1	1
$1'$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-2	-1	1	1

Cas de $I^{\langle x_1 \rangle}$. Il existe une isotypie entre les blocs principaux de $5 \cdot 2$ et de A_5 donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \bar{2} \\ 1' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -\bar{3} \\ -4 \end{pmatrix}$$

L'image par cette application des caractères modulaires du bloc principal de $5 \cdot 2$ est: $d(1)$, $-d(4)$.

La matrice de décomposition généralisée de G en x_1 est:

	1	14	$\overline{14}$	21	$\overline{21}$	36	63	126	189	$\overline{189}$	224	$\overline{224}$	288	336
$d(1)$	1	b	b	b	b	0	-1	1	b	b	1	1	-1	0
$-d(4)$	0	b	$\bar{b}$	-1	-1	1	-1	0	b	$\bar{b}$	$-b$	$-\bar{b}$	-1	1

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{G}$ en x_1 est:

	1	1_1	28	42	36_1	36_2	63_1	63_2
$d(1)$	1	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$-d(4)$	0	0	-1	-2	1	1	-1	-1

	126_1	126_2	378	448	288_1	288_2	336	$\overline{336}$
$d(1)$	1	1	-1	2	-1	-1	0	0
$-d(4)$	0	0	-1	1	-1	-1	1	1

La matrice de décomposition généralisée de H en x_1 est:

	1	1_1	1_2	1_3	2_1	2_2	6_1	$\bar{6}_1$	6_2	$\bar{6}_2$	6_3	$\bar{6}_3$	6_4	$\bar{6}_4$
1	1	0	0	1	1	1	$-b$	$-b$	$-b$	$-b$	b	b	-1	-1
$1'$	0	1	1	0	1	1	$-b$	$-\bar{b}$	$-b$	$-\bar{b}$	-1	-1	b	$\bar{b}$

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{H}$ en x_1 est:

	1	1_1	1_2	$\overline{1_2}$	1_3	1_4	1_5	$\overline{1_5}$	2_1	$\overline{2_1}$	2_2	2_3	12_1	12_2	12_3	12_4
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-2
$1'$	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	-2	-1

Ainsi, on a une isotypie entre les blocs principaux de G et H qui s'étend en une isotypie entre les blocs principaux de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \arrow[dl, dash] \\
& 1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & \\
1_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 14 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -6_2 \arrow[dr, dash] & \\
28 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -12_2 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{14} \arrow[r, leftrightarrow] & -\overline{6_2} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 21 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 6_3 \arrow[dr, dash] & \\
42 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 12_3 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{21} \arrow[r, leftrightarrow] & \overline{6_3} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
36_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1_3 \arrow[dl, dash] \\
& 36 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1_1 \arrow[dr, dash] & \\
36_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_4
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
63_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -2_1 \arrow[dl, dash] \\
& 63 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -2_1 \arrow[dr, dash] & \\
63_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -\overline{2_1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
126_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1_5 \arrow[dl, dash] \\
& 126 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1_3 \arrow[dr, dash] & \\
126_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & \overline{1_5}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 189 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -6_1 \arrow[dr, dash] & \\
378 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -12_1 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{389} \arrow[r, leftrightarrow] & -\overline{6_1} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& 224 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & & -6_4 \arrow[dr, dash] & \\
448 \arrow[rrrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & & -12_4 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{224} \arrow[rr, leftrightarrow] & & -\overline{6}_4 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
288_1 \arrow[rrrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & & -2_2 \arrow[dl, dash] \\
& 288 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & & -2_2 \arrow[dr, dash] & \\
288_2 \arrow[rrrr, leftrightarrow] & & & & -2_3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
336 \arrow[rrrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & & 1_2 \arrow[dl, dash] \\
& 336 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & & 1_2 \arrow[dr, dash] & \\
\overline{336} \arrow[rrrr, leftrightarrow] & & & & \overline{1}_2
\end{tikzcd}$$

3.4.2. *Suz*. Soit $G = Suz$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = Suz \cdot 2$ et $D = 5^2$ un 5-sous groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 5^2 \cdot (4 \times \mathfrak{S}_3)$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = (5^2 \cdot (4 \times \mathfrak{S}_3)) \times 2$. Il y a deux classes de conjugaison de 5-éléments dans G et $\tilde{G}$; soient x et y des représentants de chaque classe. Alors, $C_G(x) = 5 \times A_6$, $C_{\tilde{G}}(x) = 5 \times A_6 \times 2$, $C_G(y) = 5 \times A_5$, $C_{\tilde{G}}(y) = 5 \times A_5 \times 2$, $C_H(x) = 5 \times (5 \cdot 2)$, $C_{\tilde{H}}(x) = 5 \times (5 \cdot 2) \times 2$, $C_H(y) = 5 \times (5 \cdot 2)$ et $C_{\tilde{H}}(y) = 5 \times (5 \cdot 2) \times 2$. Le caractère 1 du bloc principal de G (respectivement H, $C_G(x)$, $C_H(x)$) s'étend de manière unique en un caractère du bloc principal de $\tilde{G}$ (respectivement $\tilde{H}$, $C_{\tilde{G}}(x)$, $C_{\tilde{H}}(x)$). Ainsi, il suffit de construire une isotypie entre les blocs principaux de G et H.

Cas de $I^{\langle x \rangle}$. Il existe une isotypie du bloc principal de $5 \cdot 2$ vers le bloc principal de A_6 donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ 2 \\ \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -8 \\ -\bar{8} \end{pmatrix}$$

Cette isotypie induit une isotypie du bloc principal de $C_H(x)$ vers le bloc principal de $C_G(x)$. Les images par cette application des caractères modulaires irréductibles du bloc principal de $C_H(x)$ sont: $d(1)$, $-d(9)$.

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	$\bar{1}_2$	1_3	1_4	1_5	$\bar{1}_5$	2_1	$\bar{2}_1$	2_2	2_3	12_1	12_2	12_3	12_4
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-2	1	1
$1'$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-2	-1	1	1

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	143	364	1001	3432	12012	18954	54054	64064
$d(1)$	1	-1	-1	1	-1	1	0	0	-1
$-d(9)$	0	-1	0	0	-2	1	-1	-1	0

	79872	88452	133056	146432	208494	243243	248832
$d(1)$	1	-2	0	1	0	-1	1
$-d(9)$	1	-1	1	1	-1	-1	1

Cas de $I^{\langle y \rangle}$. Il existe une isotypie du bloc principal de $5 \cdot 2$ vers le bloc principal de A_5 donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ 2 \\ \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ -\bar{3} \end{pmatrix}$$

Cette isotypie induit une isotypie du bloc principal de $C_H(y)$ vers le bloc principal de $C_G(y)$. Les images par cette application des caractères modulaires irréductibles du bloc principal de H sont: $d(1)$, $-d(4)$.

La matrice de décomposition généralisée de H en y est:

	1	1_1	1_2	$\bar{1}_2$	1_3	1_4	1_5	$\bar{1}_5$	2_1	$\bar{2}_1$	2_2	2_3	12_1	12_2	12_3	12_4
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-2
$1'$	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	-2	-1

La matrice de décomposition généralisée de G en y est:

	1	143	364	1001	3432	12012	18954	54054	64064
$d(1)$	1	-1	0	1	1	-1	-1	-1	0
$-d(4)$	0	-1	-1	0	1	-2	0	0	-1

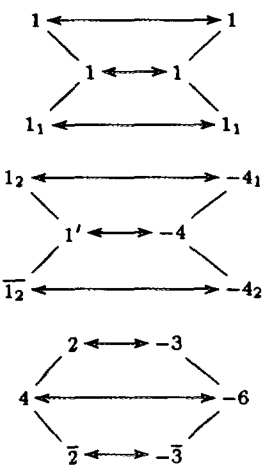
	79872	88452	133056	146432	208494	243243	248832
$d(1)$	-2	1	0	1	0	-1	1
$-d(4)$	-1	1	1	1	-1	-1	1

On a donc une isotypie du bloc principal de H vers le bloc principal de G:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 143 \\ 364 \\ 1001 \\ 3432 \\ 12012 \\ 18954 \\ 54054 \\ 64064 \\ 79872 \\ 88452 \\ 133056 \\ 146432 \\ 208494 \\ 243243 \\ 248832 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2_1 \\ -1_2 \\ 1_1 \\ 12_1 \\ 12_3 \\ -1_5 \\ -\overline{1_5} \\ -\overline{1_2} \\ 12_4 \\ 12_2 \\ 1_3 \\ \overline{2_1} \\ -1_4 \\ -2_2 \\ 2_3 \end{pmatrix}$$

3.4.3. *He.* Soit $G = He$, $\tilde{G} = \mathrm{Aut}(G) = He \cdot 2$ et $D = 5^2$ un 5-sous-groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 5^2 \cdot (4 * SL_2(3))$ et $\tilde{H} = N_{\tilde{G}}(D) = 5^2 \cdot ((4 * SL_2(3)) \# 2)$. Il y a une classe de conjugaison de 5-éléments dans G et dans $\tilde{G}$; soit x un 5-élément. On a $C_G(x) = 5 \times A_5$, $C_{\tilde{G}}(x) = 5 \times \mathfrak{S}_5$, $C_H(x) = 5 \times (5 \cdot 2)$ et $C_{\tilde{H}}(x) = 5 \times (5 \cdot 4)$.

On a une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $5 \cdot 2$ et A_5 qui s'étend en une isométrie parfaite entre les blocs principaux de 5.4 et $\mathfrak{S}_5$:



La matrice de décomposition de G en x est:

	1	51	$\overline{51}$	153	$\overline{153}$	1029	$\overline{1029}$	4352	6272
$d(1)$	1	1	1	−1	−1	0	0	−2	1
$-d(4)$	0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1	1

	6528	7497	$\overline{7497}$	17493	21504	$\overline{21504}$	23324
$d(1)$	−1	1	1	1	0	0	−1
$-d(4)$	−1	1	1	2	−1	−1	0

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{G}$ en x est:

	1	1_1	102	306	2058	4352_1	4352_2	6272_1	6272_2	6528_1
$d(1)$	1	0	1	−1	0	−1	−1	1	0	−1
$d(1_1)$	0	1	1	−1	0	−1	−1	0	1	0
$-d(4_1)$	0	0	0	−1	−1	0	−1	1	0	0
$-d(4_2)$	0	0	0	−1	−1	−1	0	0	1	−1

	6528_2	14994	17493_1	17493_2	21504_1	$\overline{21504_1}$	21504_2	$\overline{21504_2}$	23324_1	23324_2
$d(1)$	0	1	1	0	0	0	0	0	−1	0
$d(1_1)$	−1	1	0	1	0	0	0	0	0	−1
$-d(4_1)$	−1	1	1	1	0	−1	0	−1	0	0
$-d(4_2)$	0	1	1	1	−1	0	−1	0	0	0

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	$\overline{1_2}$	1_3	$\overline{1_3}$	2_1	$\overline{2_1}$	2_2	$\overline{2_2}$	2_3	$\overline{2_3}$	3_1	3_2	24_1	24_2
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	0	−1
1′	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	−1	0

La matrice de décomposition généralisée de $\tilde{H}$ en x est:

	1	1_1	1_2	$\overline{1_2}$	2_1	$\overline{2_1}$	2_2	$\overline{2_2}$	2_3	2_4
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1_1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1_2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
$\overline{1_2}$	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0

	3_1	$\overline{3_1}$	3_2	3_3	4	$\overline{4}$	24_1	$\overline{24_1}$	24_2	24_3
1	1	1	0	1	1	1	0	0	−1	0
1_1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	−1
1_2	0	1	1	1	1	1	−1	0	0	0
$\overline{1_2}$	1	0	1	1	1	1	0	−1	0	0

Ainsi, l'application suivante définie une isotypie entre les blocs principaux de G et H qui s'étend en une isotypie entre les blocs principaux de $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 1 \arrow[dl, dash] \\
& 1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1 \arrow[dr, dash] & \\
1_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & 1_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 51 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 1_2 \arrow[dr, dash] & \\
102 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 2_4 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{51} \arrow[r, leftrightarrow] & \overline{1_2} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 153 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -2_2 \arrow[dr, dash] & \\
306 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -4 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{153} \arrow[r, leftrightarrow] & -\overline{2_2} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 1029 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -1_3 \arrow[dr, dash] & \\
2058 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -2_3 \arrow[dl, dash] \\
& \overline{1029} \arrow[r, leftrightarrow] & -\overline{1_3} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
4352_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -3_1 \arrow[dl, dash] \\
& 4352 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -3_2 \arrow[dr, dash] & \\
4352_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -\overline{3_1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
6272_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & \overline{2_1} \arrow[dl, dash] \\
& 6272 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 2_3 \arrow[dr, dash] & \\
6272_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & \overline{2_2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
6528_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -2_1 \arrow[dl, dash] \\
& 6528 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & -\overline{2_3} \arrow[dr, dash] & \\
6528_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & -2_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& 7497 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dash] & 2_1 \arrow[dr, dash] & \\
14994 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & \overline{4} \arrow[dl, dash] \\
& \overline{7497} \arrow[r, leftrightarrow] & \overline{2_1} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
17493_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 3_3 \arrow[dl, dash] \\
& 17493 \arrow[r, leftrightarrow] & 3_1 \arrow[dr, dash] & \\
17493_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & 3_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
21504_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & -\overline{1_2} \arrow[dl, dash] \\
& 21504 \arrow[r, leftrightarrow] & -1_1 \arrow[dr, dash] & \\
\overline{21504_1} \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & -1_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
21504_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & \overline{24_1} \arrow[dl, dash] \\
& \overline{21504} \arrow[r, leftrightarrow] & 24_1 \arrow[dr, dash] & \\
\overline{21504_2} \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & 24_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
23324_1 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[dr, dash] & & & 24_2 \arrow[dl, dash] \\
& 23324 \arrow[r, leftrightarrow] & 24_2 \arrow[dr, dash] & \\
23324_2 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[ur, dash] & & & 24_3
\end{tikzcd}$$

3.4.4. *Fi_{22}, Fi_{23} et Fi'_{24}.* Soit Fi_{22}, Fi_{23} des sous-groupes de Fi'_{24}. Soit $D = 5^2$ un 5-sous-groupe de Sylow de Fi_{22}. Il existe une seule classe de conjugaison de 5-éléments dans les trois groupes précédents, ainsi que dans leurs groupes d'automorphismes. On a $N_{Fi_{22}}(D) = 5^2 \cdot ((4 * SL_2(3) \# 2)$ et $N_{Fi_{24}}(D) = 5^2 \cdot ((4 * SL_2(3)) \# 2) \times \mathfrak{S}_4$. Ainsi, il est clair que les blocs principaux des normalisateurs de D dans Fi_{22}, $Fi_{22} \cdot 2$, Fi_{23}, Fi'_{24} et Fi_{24} ont le même type. En outre, le caractère 1 de Fi_{22} (respectivement de Fi'_{24}, de $N_{Fi_{22}}(D)$, $N_{Fi'_{24}}(D)$) s'étend de manière unique en un caractère du bloc principal de $Fi_{22} \cdot 2$ (respectivement de Fi_{24}, $N_{Fi_{22} \cdot 2}(D)$, $N_{Fi_{24}}(D)$)

Ainsi, il suffit de prouver que les blocs principaux de Fi_{22}, Fi_{23} et Fi_{24} ont le même type que le bloc principal de $H = 5^2 \cdot ((4 * SL(2,3)) \# 2)$.

Soit $x \in D$, $x \neq 1$. On a $C_{Fi_{22}}(x) = 5 \times \mathfrak{S}_5$, $C_{Fi_{23}}(x) = 5 \times \mathfrak{S}_7$, $C_{Fi'_{24}}(x) = 5 \times A_9$ et $C_H(x) = 5 \times (5 \cdot 4)$.

On a vue précédemment que les blocs principaux de $5 \cdot 4$ et de $\mathfrak{S}_5$ sont isotypiques.

On a une isotypie du bloc de $5 \cdot 4$ dans le bloc principal de $\mathfrak{S}_7$ donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1_1 \\ 1_2 \\ \overline{1_2} \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -14_1 \\ -14_2 \\ -21 \end{pmatrix}$$

On a une isotypie entre les blocs principaux de $5 \cdot 4$ et A_9 donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1_1 \\ 1_2 \\ \overline{1_2} \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 56 \\ -84 \\ 216 \\ -189 \end{pmatrix}$$

La matrice de décomposition de Fi_{22} en x est:

	1	78	429	1001	3003	32032	48048	81081
$d(1)$	1	−1	0	0	0	0	1	−1
$d(1_1)$	0	0	0	1	−1	−1	1	−1
$-d(4_1)$	0	0	−1	0	−1	−1	0	−1
$-d(4_2)$	0	−1	0	0	0	−1	1	−1

	370656	576576	577368	938223	972972	1441792	1791153
$d(1)$	−1	0	1	1	0	0	−1
$d(1_1)$	−1	1	0	1	1	0	0
$-d(4_1)$	−1	0	1	1	0	1	−1
$-d(4_2)$	−1	0	1	0	1	1	0

	1876446	2050048	2555904_1	2555904_2	2729376
$d(1)$	0	−1	0	0	1
$d(1_1)$	0	−1	0	0	0
$-d(4_1)$	0	0	0	−1	0
$-d(4_2)$	1	0	−1	0	0

La matrice de décomposition de Fi_{23} en x est:

	1	3588	5083	25806	274482	1951872	7468032	9108736
$d(1)$	1	−1	0	0	1	0	−1	0
$d(6)$	0	0	−1	1	1	−1	−1	0
$-d(14_1)$	0	0	−1	0	0	−1	0	1
$-d(14_2)$	0	−1	0	0	0	−1	−1	0

	9108736	10567557	18812574	42270228	56360304_1	56360304_2	57254912
$d(1)$	0	−1	−1	0	1	1	1
$d(6)$	0	−1	0	0	1	1	0
$-d(14_1)$	1	−1	0	−1	1	1	1
$-d(14_2)$	0	0	0	−1	1	1	0

	73531392	1333398252	166559744	263376036	264536064
$d(1)$	0	−1	0	0	0
$d(6)$	1	0	−1	0	0
$-d(14_1)$	0	−1	0	0	0
$-d(14_2)$	1	−1	0	1	−1

La matrice de décomposition de Fi'_{24} en x est:

	1	1666833	4864431	32715683	1540153692	2346900864	8529641472
$d(1)$	1	-1	0	1	1	1	0
$d(56)$	0	0	1	0	0	1	1
$-d(84)$	0	-1	0	1	0	1	0
$d(216)$	0	0	0	1	1	1	1

	17161712568	45049495491	54234085491	63831063582	67331776512
$d(1)$	0	0	0	1	0
$d(56)$	0	0	0	1	-1
$-d(84)$	-1	1	0	0	-1
$d(216)$	-1	0	1	0	-1

	74887473024	118588933386	142378652416	145650089984
$d(1)$	-1	-1	0	0
$d(56)$	0	-1	0	0
$-d(84)$	0	-1	1	0
$d(216)$	0	-1	0	-1

	156321775827	169598100672	184117100544	282049015248
$d(1)$	-1	0	0	1
$d(56)$	-1	1	-1	1
$-d(84)$	-1	1	0	0
$d(216)$	0	0	0	1

La matrice de décomposition de H en x est:

	1	1_1	1_2	$\overline{1}_2$	2_1	$\overline{2}_1$	2_2	$\overline{2}_2$	2_3	2_4
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1_1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1_2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
$\overline{1_2}$	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0

	3_1	$\overline{3}_1$	3_2	3_3	4	$\overline{4}$	24_1	$\overline{24}_1$	24_2	24_3
1	1	1	0	1	1	1	0	0	-1	0
1_1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	-1
1_2	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0
$\overline{1_2}$	1	0	1	1	1	1	0	-1	0	0

Ainsi, l'application suivante est une isotypie entre le bloc principal de Fi_{22} et le bloc principal de H:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 78 \\ 429 \\ 1001 \\ 3003 \\ 32032 \\ 48048 \\ 81081 \\ 370656 \\ 576576 \\ 577368 \\ 938223 \\ 972972 \\ 1441792 \\ 1791153 \\ 1876446 \\ 2050048 \\ 2555904_1 \\ 2555904_2 \\ 2729376 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2_1 \\ -1_2 \\ 1_1 \\ -2_2 \\ -3_2 \\ 3_1 \\ -4 \\ -\overline{4} \\ -24_3 \\ 3_3 \\ \overline{3_1} \\ \overline{2_2} \\ 2_3 \\ -\overline{2_1} \\ \overline{1_2} \\ -2_4 \\ \overline{24_1} \\ 24_1 \\ -24_2 \end{pmatrix}$$

L'application suivante est une isotypie entre le bloc principal de Fi_{23} et le bloc principal de H:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3588 \\ 5083 \\ 25806 \\ 274482 \\ 1951872 \\ 7468032 \\ 9108736 \\ \overline{9108736} \\ 10567557 \\ 18812574 \\ 42270228 \\ 56360304_1 \\ 56360304_2 \\ 57254912 \\ 73531392 \\ 133398252 \\ 166559744 \\ 263376036 \\ 264536064 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2_1 \\ -2_2 \\ 1_1 \\ 2_4 \\ -3_2 \\ -3_1 \\ 1_2 \\ -24_1 \\ -\overline{3_1} \\ 24_2 \\ -2_3 \\ 4 \\ \overline{4} \\ \overline{2_1} \\ \overline{2_2} \\ -3_3 \\ 24_3 \\ \overline{1_2} \\ \overline{24_1} \end{pmatrix}$$

L'application suivante est une isotypie entre le bloc principal de Fi'_{24} et le bloc principal de H:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1666833 \\ 4864431 \\ 32715683 \\ 1540153692 \\ 2346900864 \\ 8529641472 \\ 17161712568 \\ 45049495491 \\ 54234085491 \\ 63831063582 \\ 67331776512 \\ 74887473024 \\ 118588933386 \\ 142378652416 \\ 145650089984 \\ 156321775827 \\ 169598100672 \\ 184117100544 \\ 282049015248 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -\overline{2_1} \\ 1_1 \\ 3_3 \\ 2_1 \\ 4 \\ \overline{2_2} \\ -2_3 \\ 1_2 \\ \overline{1_2} \\ 2_4 \\ -3_2 \\ 24_2 \\ -\overline{4} \\ -24_1 \\ \overline{24_1} \\ -\overline{3_1} \\ 2_2 \\ 24_3 \\ 3_1 \end{pmatrix}$$

3.5. $p=7$

3.5.1. Co_1. Soit $G=Co_1$, $D=7^2$ un 7-sous-groupe de Sylow de G et $H=N_G(D)=\ 7^2\cdot(3\times SL_2(3))$. Soient $x\in D$ et $y\in D$ des représentants des deux classes de conjugaison de 7-éléments de G, $C_G(x)=7\times A_7$ et $C_G(y)=7\times PSL_2(7)$. On a $C_H(x)=7\times(7\cdot 3)$ et $C_H(y)=7\times(7\cdot 3)$.

On a une isotypie du bloc principal de $7\cdot 3$ vers le bloc principal de A_7 donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ \overline{1'} \\ 3 \\ \overline{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \\ 10 \\ \overline{10} \end{pmatrix}$$

On a une isotypie du bloc principal de $7\cdot 3$ vers le bloc principal de $PSL_2(7)$ donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ \overline{1'} \\ 3 \\ \overline{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \\ 3 \\ \overline{3} \end{pmatrix}$$

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	276	299	17250	80730	94875	822250	871884	1821600
$d(1)$	1	1	−1	1	−1	1	1	0	−1
$-d(6)$	0	1	−1	1	0	1	0	−1	−1
$d(15)$	0	1	0	0	0	2	1	0	−1

	2055625	9221850	16347825	21528000	21579129	24667500
$d(1)$	−1	0	2	−1	0	−1
$-d(6)$	−1	1	1	−1	−1	−1
$d(15)$	0	0	1	−1	−1	−1

	31574400	57544344	66602250	85250880	150732800	163478250
$d(1)$	1	−1	0	0	1	0
$-d(6)$	2	−1	0	1	0	−1
$d(15)$	1	−1	1	0	0	−1

	191102976	207491625	215547904	219648000	299710125	326956500
$d(1)$	0	0	−1	−1	0	1
$-d(6)$	0	−1	0	0	0	1
$d(15)$	1	−1	−1	−1	1	1

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	1_6	1_7	1_8	2_1	2_2	2_3	2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$1'$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
$\overline{1'}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

	3_1	3_2	3_3	24_1	24_2	24_3	24_4	24_5	24_6
1	1	1	1	−2	−1	−1	1	1	1
$1'$	1	1	1	−1	−2	−1	1	1	1
$\overline{1'}$	1	1	1	−1	−1	−2	1	1	1

La matrice de décomposition généralisée de G en y est:

	1	276	299	17250	80730	94875	822250	871884	1821600
$d(1)$	1	1	−1	1	0	−1	1	−1	1
$-d(6)$	0	1	−1	0	−1	−1	1	0	1
$d(8)$	0	1	0	1	0	−1	0	0	2

	2055625	9221850	16347825	21528000	21579129	24667500
$d(1)$	0	0	−1	2	0	1
$-d(6)$	−1	0	−1	1	−1	2
$d(8)$	−1	1	−1	1	−1	1

	31574400	57544344	66602250	85250880	150732800	163478250
$d(1)$	−1	−1	0	0	0	−1
$-d(6)$	−1	−1	1	1	0	0
$d(8)$	−1	−1	0	0	1	−1

	191102976	207491625	215547904	219648000	299710125	326956500
$d(1)$	0	−1	0	−1	1	1
$-d(6)$	0	−1	−1	0	0	1
$d(8)$	1	0	−1	−1	0	1

La matrice de décomposition généralisée de H en y est:

	1	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	1_6	1_7	1_8	2_1	2_2	2_3	2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$1'$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$\overline{1'}$	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0

	3_1	3_2	3_3	24_1	24_2	24_3	24_4	24_5	24_6
1	1	1	1	1	1	1	−2	−1	−1
$1'$	1	1	1	1	1	1	−1	−2	−1
$\overline{1'}$	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−2

Ainsi, on a une isotypie du bloc principal de G vers le bloc principal de H donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 276 \\ 299 \\ 17250 \\ 80730 \\ 94875 \\ 822250 \\ 871884 \\ 1821600 \\ 2055625 \\ 9221850 \\ 16347825 \\ 21528000 \\ 21579129 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3_1 \\ -2_9 \\ 2_8 \\ -1_1 \\ -24_3 \\ 2_6 \\ -1_3 \\ -24_6 \\ -2_7 \\ 1_5 \\ -24_1 \\ -24_4 \\ -2_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 24667500 \\ 31574400 \\ 57544344 \\ 66602250 \\ 85250880 \\ 150732800 \\ 163478250 \\ 191102976 \\ 207491625 \\ 215547904 \\ 219648000 \\ 299710125 \\ 326956500 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -24_5 \\ -24_2 \\ -3_2 \\ 1_7 \\ 1_4 \\ 1_2 \\ -2_2 \\ 1_8 \\ -2_3 \\ -2_4 \\ -2_5 \\ 1_6 \\ 3_3 \end{pmatrix}$$

3.5.2. *Th*. Soit $G = Th$, $D = 7^2$ un 7-sous-groupe de Sylow de G et $H = N_G(D) = 7^2 \cdot (3 \times (2\mathfrak{S}_4))$. Soit $x \in D$ un représentant de l'unique classe de conjugaison de 7-éléments de G. On a $C_G(x) = 7 \times PSL_2(7)$ et $C_H(x) = 7 \times (7 \cdot 3)$.

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	248	27000	27000	30628	30875	61256	147250	767637
$d(1)$	1	1	1	1	1	-1	0	-1	1
$-d(6)$	0	1	0	0	1	-1	-1	-1	1
$d(8)$	0	1	0	0	1	0	0	0	1

	767637	957125	1707264	1707264	2450240	4096000
$d(1)$	1	0	0	0	1	0
$-d(6)$	1	0	-1	-1	1	0
$d(8)$	1	1	0	0	0	-1

	4096000	4881384	6669000	6669000	6696000	6696000
$d(1)$	0	2	0	0	1	1
$-d(6)$	0	1	1	1	1	1
$d(8)$	-1	1	1	1	1	1

	16539120	51684750	72925515	76271625	77376000	190373976
$d(1)$	-1	-1	-1	-1	0	1
$-d(6)$	-2	0	0	-1	1	0
$d(8)$	-1	-1	-1	-2	1	1

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	2_1	2_2	2_3	2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	
$1'$	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
$\overline{1'}$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

	3_1	3_2	3_3	3_4	3_5	3_6	4_1	4_2	4_3	48_1	48_2	48_3
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	-1	0	0
$1'$	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0	-1	0
$\overline{1'}$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0	-1

Ainsi, on a une isotypie du bloc principal de G vers le bloc principal de H donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 248 \\ 27000 \\ \overline{27000} \\ 30628 \\ 30875 \\ 61256 \\ 147250 \\ 767637 \\ \overline{767637} \\ 957125 \\ 1707264 \\ \overline{1707264} \\ 2450240 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3_1 \\ 1_5 \\ -48_1 \\ 3_2 \\ -2_1 \\ -1_1 \\ -2_2 \\ 3_3 \\ 3_4 \\ 1_2 \\ -1_3 \\ 48_2 \\ 2_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4096000 \\ \overline{4096000} \\ 4881384 \\ 6669000 \\ \overline{6669000} \\ 6696000 \\ \overline{6696000} \\ 16539120 \\ 51684750 \\ 72925515 \\ 76271625 \\ 77376000 \\ 190373976 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1_4 \\ 48_3 \\ 4_1 \\ 2_7 \\ 2_8 \\ 3_5 \\ 3_6 \\ -4_2 \\ -2_4 \\ -2_5 \\ -4_3 \\ 2_9 \\ 2_6 \end{pmatrix}$$

3.5.3. *BM*. Soit $G = BM$, $D = 7^2$ un 7-sous-groupe de Sylow de G et $H = N_G(D) = (7^2 \times 2^2) \cdot (3 \times (2\mathfrak{S}_4))$. Soit $x \in D$ un représentant de l'unique classe de conjugaison de 7-éléments de G. On a $C_G(x) = 7 \times 2PSL(3,4) \cdot 2$.

On a une isotypie du bloc principal de $7 \cdot 3$ vers le bloc principal de $2PSL(3,4) \cdot 2$ donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1' \\ \overline{1'} \\ 3 \\ \overline{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ 64 \\ 45 \\ \overline{45} \end{pmatrix}$$

La matrice de décomposition généralisée de G en x est:

	1	3	6	13	15	24	40	60	66	79	84	93	97	111
$d(1)$	1	−1	1	1	1	1	−1	0	2	0	−1	0	1	1
$-d(20)$	0	−1	1	0	0	1	−1	1	1	1	0	−1	0	0
$d(64)$	0	0	1	1	0	2	0	0	1	0	−1	−1	0	−1

	124	131	137	138	141	144	146	150	164	165	173	175	177
$d(1)$	1	−1	1	1	−1	−1	0	1	0	0	0	0	0
$-d(20)$	1	−2	1	1	−1	−1	1	1	0	0	−1	1	0
$d(64)$	1	−1	1	1	−1	−1	0	0	1	1	−1	1	−1

où les caractères de *BM* sont indexés par leur numéro dans le classement par ordre des degrés des caractères irréductibles de *BM*.

Les blocs principaux de H et de $7^2 \cdot (3 \times (2\mathfrak{S}_4))$ sont isotypiques.

Ainsi, on a une isotypie du bloc principal de G vers le bloc principal de $7^2 \cdot (3 \times (2\mathfrak{S}_4))$ donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 13 \\ 15 \\ 24 \\ 40 \\ 60 \\ 66 \\ 79 \\ 84 \\ 93 \\ 97 \\ 111 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2_1 \\ 3_1 \\ 2_4 \\ 1_5 \\ 4_3 \\ -2_2 \\ 1_1 \\ 4_1 \\ 1_3 \\ -2_5 \\ -2_7 \\ -48_1 \\ 2_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 124 \\ 131 \\ 137 \\ 138 \\ 141 \\ 144 \\ 146 \\ 150 \\ 164 \\ 165 \\ 173 \\ 175 \\ 177 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3_2 \\ -4_2 \\ 3_3 \\ 3_4 \\ -3_5 \\ -3_6 \\ -48_2 \\ 2_3 \\ 1_2 \\ 1_4 \\ -2_8 \\ 2_9 \\ 48_3 \end{pmatrix}$$

et ainsi les blocs principaux de G et H sont isotypiques.

3.6. $p = 11$, M.

Soit $G = M$ et $D = 11^2$ un 11-sous-groupe de Sylow de G. Soit $H = N_G(D) = 11^2 \cdot (5 \times SL(2, 5))$.

Il existe une classe de 11-éléments dans G; soit $x \in D$, $x \neq 1$. Alors, $C_H(x) = 11 \times (11 \cdot 5)$ et $C_G(x) = 11 \times M_{12}$. Or, il existe une isotypie entre le bloc principal de M_{12} et le bloc principal du normalisateur d'un 11-Sylow de M_{12}, isomorphe à $11 \cdot 5$. Une isométrie du bloc principal de $C_G(x)$ vers le bloc principal de $C_H(x)$ est donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 16_1 \\ 16_2 \\ 45 \\ 54 \\ 120 \\ 144 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1_1 \\ -6 \\ -6 \\ 1_2 \\ -1_3 \\ -1_4 \\ 1_5 \end{pmatrix}$$

est une isotypie.

La matrice de décomposition généralisée de H en x est:

	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	2_1	2_2	2_3	2_4	2_5	2_6	2_7	2_8	2_9	2_{10}	3_1	3_2	3_3
1_1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1_5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1

	3_4	3_5	3_6	3_7	3_8	3_9	3_{10}	4_1	4_2	4_3	4_4	4_5	4_6	4_7	4_8	4_9	4_{10}
1_1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1_2	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1_3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1_4	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1_5	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

	5_1	5_2	5_3	5_4	5_5	6_1	6_2	6_3	6_4	6_5	120_1	120_2	120_3	120_4	120_5
1_1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1_2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	0	1	0	0	0
1_3	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	0	1	0	0
1_4	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0	0	0	1	0
1_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	1

La matrice de décompositon généralisée de G en x est:

	1	2	3	4	6	9	10	14	18	21	22	31	32	34	36	44
$d(1)$	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	1	1	−2	1	1	−1	0	0
$d(45)$	0	1	0	0	0	0	0	2	1	0	−1	0	1	0	−1	−1
$-d(54)$	0	1	−1	−1	1	0	−1	1	1	0	−1	0	1	−1	0	−1
$-d(120)$	0	1	−1	0	0	0	−1	1	0	1	−1	1	1	−1	−1	−1
$d(144)$	0	1	−1	0	1	1	0	1	1	1	−1	0	0	−1	−1	−1

	45	62	63	68	71	72	73	76	77	78	89	90	91	93
$d(1)$	0	0	−1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	−1	0
$d(45)$	−1	1	0	−1	−1	−1	1	0	−1	−1	1	1	−1	1
$-d(54)$	−1	1	0	0	0	0	1	0	−1	−1	1	1	−2	0
$-d(120)$	−1	1	0	−1	0	0	2	−1	0	0	1	1	−1	0
$d(144)$	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	1	1	−1	1

	96	112	119	131	148	158	159	162	168	169	172	173
$d(1)$	−1	1	−1	0	0	−1	1	−1	0	0	1	0
$d(45)$	−1	1	−1	0	0	−1	1	−1	0	0	1	0
$-d(54)$	0	1	0	0	0	−1	1	0	−1	−1	1	1
$-d(120)$	−1	1	−1	0	−1	0	0	−1	0	0	1	1
$d(144)$	−1	0	0	1	0	−1	0	−1	−1	0	1	1

	174	175	181	193	187	189	192	194
$d(1)$	0	1	1	1	0	0	-1	0
$d(45)$	0	1	1	1	0	0	-1	0
$-d(54)$	1	1	1	0	-1	0	0	0
$-d(120)$	1	1	1	0	0	0	0	-1
$d(144)$	0	1	2	1	0	1	0	-1

Les caractères de M sont indexés par leur numéro dans le classement par ordre des degrés des caractères irréductibles de M.

Ainsi, il existe une isotypie du bloc principal de H vers le bloc principal de G donnée par

$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4\\6\\9\\10\\14\\18\\21\\22\\31\\32\\34\\36\\44\\45\\62\\63\\68\\71\\72\\73\\76\\77 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1\\5_1\\-4_7\\-2_2\\3_5\\2_4\\-3_4\\6_2\\4_3\\3_6\\-6_1\\2_3\\4_1\\-4_8\\-3_9\\-4_9\\-4_{10}\\3_7\\-120_1\\-2_6\\-1_2\\-120_2\\6_4\\-120_4\\-2_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 78\\89\\90\\91\\93\\96\\112\\119\\131\\148\\158\\159\\162\\168\\169\\172\\173\\174\\175\\181\\183\\187\\189\\192\\194 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3_8\\5_2\\5_3\\-6_3\\2_7\\-4_5\\4_2\\-3_2\\120_5\\-1_4\\-4_4\\3_1\\-4_6\\-2_9\\-1_3\\5_4\\3_{10}\\2_8\\5_5\\6_5\\3_3\\-120_3\\1_5\\-2_1\\-2_{10} \end{pmatrix}$$

Remerciements

Je tiens à remercier Michel Broué et Michel Enguehard pour leur aide constante dans ce travail, et Paul Fong et Morton Harris pour leurs suggestions, essentielles pour la mise en forme de ce travail.

Références

[Al-Br] J. L. Alperin and M. Broué, Local methods in block theory, *Ann. Math.* **110** (1979), 143–157.

[Asch] M. Aschbacher, Overgroups of Sylow subgroups in sporadic groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **343** (1986).

[Atlas] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, "Atlas of Finite Groups," Clarendon Press, Oxford (1985).

[Bra1] R. Brauer, Types of blocks of representations of finite Groups, *Proc. Symp. Pure Math.* **21** (1971), 7–11.

[Br1] M. Broué, Les l-blocs des groupes $GL(n, q)$ et $U(n, q^2)$ et leurs structures locales, *Astérisque* **133-134** (1986), 159–188.

[Br2] M. Broué, Isométries Parfaites, Types de Blocs, Catégories Dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[En] M. Enguehard, "Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques," rapport de recherche du LMENS (1989).

[Fo-Ha] P. Fong and M. E. Harris, On perfect isometries in finite groups, preprint, 1990.

[Go-Ly] D. Gorenstein and R. Lyons, The local structure of finite groups of characteristic 2 type, *Mem. Amer. Math. Soc.* **276** (1983).

[Ha] M. E. Harris, Categorically equivalent and isotypic blocks, preprint, 1991.

[Ja-Ke] G. James and A. Kerber, "The Representation Theory of the Symmetric Group," *in* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.

[Mi-Ol] G. O. Michler and J. B. Olsson, Character correspondences in finite general linear, unitary and symmetric groups, *Math. Z.* **184** (1983), 203–233.

[Osi] M. Osima, On the representations of the generalized symmetric group, *Math. J. Okayama Univ.* **4** (1954), 39–56.

[Ost] Th. Ostermann, "Charaktertafeln von Sylownormalisatoren sporadischer einfacher Gruppen," Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, 1986.

Printed in Belgium
Uitgever: Academic Press, Inc.
Verantwoordelijke uitgever voor België:
Hubert Van Maele
Altenastraat 20, B-8310 Sint-Kruis