TRAVAUX DE RECHERCHES

REPRÉSENTATIONS ET CATÉGORIES DÉRIVÉES

RAPHAËL ROUQUIER

Table des matières

0. Introduction

Mes travaux de recherche portent sur les représentations de groupes finis, algébriques et quantiques ; j'essaie en particulier de comprendre les catégories dérivées, homotopiques ou stables correspondantes.

J'ai commencé mes recherches par l'étude de représentations modulaires de groupes finis. La conjecture de Broué sur les catégories dérivées de blocs à groupe de défaut abélien (ainsi que

Date: 30 Octobre 1998.

la version pour les groupes réductifs finis) a été la motivation de l'essentiel de mes travaux dans ce domaine. J'ai été amené à des travaux reposant en partie importante sur de l'algèbre homologique et comprenant une part de géométrie (variétés de Deligne-Lusztig).

J'ai été également intéressé par les caractères des modules simples pour les groupes symétriques ; ceci m'a conduit à travailler sur les algèbres de Hecke dans un premier temps. Dans un second temps, j'ai réalisé l'intérêt d'étudier plutôt les représentations modulaires de groupes quantiques ou algébriques sur un corps algébriquement clos, où l'on dispose d'une structure beaucoup plus riche sur la catégorie des représentations. L'étude des modules simples peut alors y être avantageusement remplacée par l'étude des modules basculants, voire de certaines catégories de foncteurs entre catégories homotopiques ou dérivées. Il me semble qu'une certaine 2-catégorie de foncteurs (§3.4) entre différents blocs de groupes algébriques (ou de groupes quantiques, d'algèbres de Lie semi-simples ou affines complexes) est un objet crucial ; j'aimerais en avoir une compréhension géométrique.

1. La conjecture de Broué sur les blocs à défaut abélien

1.1. **Généralités.** L'étude des représentations modulaires des groupes finis s'est portée de plus en plus vers la théorie locale des blocs (on s'intéresse aux représentations sur un corps k assez gros de caractéristique $\ell > 0$ ou sur un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{O}$ de corps des fractions K de caractéristique nulle et de corps résiduel k). Son objet est de relier les représentations modulaires d'un groupe fini G aux représentations modulaires de sous-groupes locaux de G, *i.e.*, les normalisateurs de ℓ-sous-groupes non triviaux.

La conjecture d'Alperin (reformulée par Robinson) exprime le nombres de modules simples dans un bloc comme somme alternée de nombres de modules simples dans des blocs correspondants de sous-groupes locaux — cette conjecture a été précisée par Dade (pour prendre en compte la ℓ-valuation des degrés de caractères irréductibles, les automorphismes extérieurs et le centre).

La complexité d'un bloc A est mesurée par un groupe de défaut D (un ℓ-sous-groupe de G). Lorsque D est abélien, Broué [Br] conjecture que la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(A)$ de A est équivalente à la catégorie dérivée bornée du bloc B correspondant du normalisateur de D. Une telle équivalence de catégories triangulées donne naissance à un isomorphisme entre les groupes de Grothendieck de $\mathcal{D}^b(kA)$ et $\mathcal{D}^b(kB)$ — en particulier, kA et kB ont alors le même nombre de modules simples, ce que conjecture Alperin. L'isométrie entre les groupes de Grothendieck de $\mathcal{D}^b(KA)$ et $\mathcal{D}^b(KB)$ (ce sont les groupes des caractères ordinaires) déduite de l'équivalence possède alors de remarquables propriétés arithmétiques : c'est une *isométrie parfaite* selon Broué ; j'ai construit de telles isométries pour les groupes symétriques et sporadiques dans [1]. Comprendre ces isométries est un préalable à la construction d'équivalences de catégories dérivées.

L'intérêt de la conjecture de Broué est que le bloc B a une structure particulièrement simple. Soit E le quotient $N_G(D, B_D)/C_G(D)$ où B_D est un bloc de $C_G(D)$ en-dessous de B. Alors, B est Morita équivalent à une algèbre de groupe tordue $\mathcal{O}_*(D \rtimes \hat{E})$, où $\hat{E}$ est une extension centrale de E par $\mathcal{O}^*$. Lorsque A est le bloc principal de G, alors B est le bloc principal de $N_G(D)$, $E = N_G(D)/C_G(D)$ et B est Morita équivalent à $\mathcal{O}D \rtimes E$. On pourrait aussi s'intéresser aux structures plus fines d'algèbres de source (selon Puig). Avec J. Alperin et M. Linckelmann, j'ai repris les premiers résultats de la théorie de Puig en remplaçant des techniques d'idempotents par des constructions à base de modules [16].

On dit qu'un complexe borné C de (A, B)-bimodules, projectifs de type fini comme A-modules et comme B-modules à droite, est un *complexe de Rickard* si $C \otimes_B -$ et $C^* \otimes_A -$ induisent des équivalences inverses entre les catégories homotopiques de complexes bornés de B-modules $K^b(B)$ et de A-modules $K^b(A)$, c'est-à-dire, si

$$C \otimes_B C^* \simeq A \text{ dans } K^b(A \otimes A^\circ) \text{ et } C^* \otimes_A C \simeq B \text{ dans } K^b(B \otimes B^\circ).$$

(On note A° l'algèbre opposée à A, on identifie la catégorie des (A, B)-bimodules à celle des $(A \otimes B^\circ)$-modules et $C^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(C, \mathcal{O})$ est le dual $\mathcal{O}$-linéaire).

On dit alors que les algèbres A et B sont Rickard équivalentes (on déduit une équivalence $\mathcal{D}^b(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(B)$ d'une équivalence de Rickard). Si C est concentré en un degré, on obtient une équivalence de Morita ; celles-ci sont beaucoup moins fréquentes que les équivalences de Rickard.

Les travaux de Rickard [Ri3] ont conduit à une conjecture qui suggère que le complexe recherché est, si ce n'est d'origine géométrique, tout au moins formé à partir de modules de permutation (voir aussi §1.5) :

Conjecture 1.1 (Broué, Rickard)**.** *Il existe un complexe de Rickard de (A, B)-bimodules qui sont facteurs directs de modules de permutation du type $\mathcal{O}(G \times N_G(D)^\circ)/Q$, où Q est un sous-groupe de $\Delta D = \{(x, x^{-1}) | x \in D\}$.*

Une telle équivalence est appelée *splendide*. De telles conditions sur le complexe ont permis à Rickard de déduire l'existence de complexes de Rickard pour les blocs correspondants des sous-groupes locaux de G.

La première difficulté dans l'approche de cette conjecture est la construction du complexe de Rickard.

1.2. **Equivalences stables.** La catégorie stable $(k \otimes A)-\mathrm{Stab}$ de $k \otimes A$ (on peut aussi définir une catégorie $A-\mathrm{Stab}$) est le quotient de la catégorie de modules par la sous-catégorie des modules projectifs. C'est aussi le quotient de la catégorie dérivée par la sous-catégorie des complexes parfaits : la catégorie stable est une catégorie triangulée.

C'est un objet beaucoup plus facile à étudier que la catégorie dérivée. Une raison en est que l'on peut reconstruire la catégorie stable à partir de la collection des sous-groupes locaux.

Une équivalence de Rickard donne lieu, par passage au quotient, à une équivalence stable : on a un (A, B)-bimodule M tel que $M \otimes_B -$ et $M^* \otimes_A -$ sont des équivalences inverses entre $A-\mathrm{Stab}$ et $B-\mathrm{Stab}$, c'est-à-dire,

$$M \otimes_B M^* \simeq A \text{ dans } (A \otimes A^\circ)-\mathrm{Stab} \quad \text{et} \quad M \otimes_A M^* \simeq B \text{ dans } (B \otimes B^\circ)-\mathrm{Stab}\,.$$

(Si C est un complexe induisant une équivalence de Rickard et M un bimodule tel que C et M sont isomorphes dans $(A \otimes B^\circ)-\mathrm{Stab}$, alors M induit l'équivalence stable entre A et B déduite de C par passage au quotient).

Une réponse positive à la question suivante serait une étape cruciale dans la résolution de la conjecture 1.1 :

Question 1.2. *Si M est un (A, B)-bimodule induisant une équivalence stable entre A et B, existe-t-il un complexe C induisant une équivalence de Rickard entre A et B et isomorphe à M dans $(A \otimes B^\circ)-\mathrm{Stab}$?*

Cette question est à rapprocher de la conjecture d'Auslander qui prédit l'égalité du nombre de modules simples de deux algèbres stablement équivalentes.

Si A n'est pas un bloc à défaut abélien, on peut avoir une équivalence stable entre A et B sans que les catégories dérivées $\mathcal{D}^b(A)$ et $\mathcal{D}^b(B)$ soient équivalentes, par exemple pour $G = \mathrm{Suz}(8)$, $\ell = 2$ et A le bloc principal.

La réponse à la question est positive lorsque D est cyclique ou d'ordre 4 (cf. §1.4.2). Avec J. Carlson, j'ai démontré que lorsque E est un ℓ'-groupe cyclique agissant librement sur D — on dispose alors d'une équivalence stable entre A et B d'après [Pu] —, alors une réponse postive à la question est équivalente à la conjecture 1.1 (cf. §3.2).

Lorsque $E = 1$, la question se ramène à la classification des modules endo-triviaux pour kD (les modules V tels que $\mathrm{End}_k(V) \simeq k \oplus$ libre comme kD-modules). Dade a démontré que les modules $\Omega^n k$ (pour $n \in \mathbf{Z}$) sont les seuls modules endo-triviaux (j'ai trouvé une nouvelle preuve plus constructive de cette assertion, dans le cas crucial où $D = (\mathbf{Z}/\ell)^2$). Ceci n'est plus vrai lorsque D n'est pas abélien et fournit des exemples où la réponse à la question est négative pour G un ℓ-groupe non abélien.

1.3. **Recollement.** L'approche naturelle de la conjecture 1.1 est inductive : on démontre d'abord la conjecture pour les sous-groupes locaux de G, en s'assurant de certaines compatibilités. Celles-ci devraient être choisies de manière à permettre de construire un complexe de bimodules pour G et $N_G(D)$ "recollant" la collection des complexes donnés localement (au sens de la construction de Brauer). Un tel complexe induira alors une équivalence stable et l'on sera ramené au problème de relever une équivalence stable en une équivalence dérivée (question 1.2).

Pour mener à bien cette technique, il semble falloir demander aux complexes de Rickard intervenant dans la conjecture 1.1 de vérifier des conditions supplémentaires.

Dans le cas où les complexes ne sont que des modules concentrés en degré 0, on peut effectuer les recollements voulus. Dans [14], j'ai défini une catégorie de "faisceaux" de modules de ℓ-permutation (=facteurs directs de modules de permutation) pour les sous-groupes locaux de G, les morphismes de restriction étant donnés par le foncteur de Brauer et démontré que cette catégorie est équivalente au quotient de la catégorie des modules de ℓ-permutation de G par la sous-catégorie des modules projectifs.

1.4. **Exemples.**

1.4.1. *Construction de complexes.* Dans [3], j'ai montré comment construire des complexes de Rickard à deux termes $C = 0 \to P \to M \to 0$, où P est projectif. Le bimodule M est supposé induire une équivalence entre les catégories stables. Alors, C induit une équivalence de Rickard si P est facteur direct d'une enveloppe projective P_M de M (et la flèche $P \to M$ est la restriction d'une surjection $P_M \to M$), P et P_M/P n'ont pas de facteur direct non nul en commun et si le morphisme $K_0(KB) \to K_0(KA)$ induit par C est une isométrie. Cela permet ainsi de relever, dans certains cas, une équivalence stable en une équivalence de Rickard.

1.4.2. *Défaut cyclique ou d'ordre* 4. J'ai pu démontrer grâce à la construction précédente la conjecture 1.2 pour les blocs à groupe de défaut cyclique [10] et d'ordre 4 [21].

Finalement, j'ai démontré la conjecture 1.1 lorsque D est cyclique ou d'ordre 4 (des travaux antérieurs de Rickard et Linckelmann [Ri1, Li1] avaient prouvé l'existence d'une équivalence des catégories dérivées sans construire explicitement le foncteur, donc sans pouvoir assurer l'existence d'une équivalence de Rickard splendide).

Dans [10], j'ai donné un nouveau traitement de la théorie des blocs à groupe de défaut cyclique, reposant sur l'utilisation systématique d'équivalences de Rickard splendides (parfois en remplacement d'équivalences de Morita induites par des bimodules "compliqués").

1.4.3. *Groupes symétriques.* Soit $w < \ell$, $D = (\mathbf{Z}/\ell)^w$ et A le bloc de défaut D de groupe symétrique associé au ℓ-cœur

$$(1^{\ell-1}, 2^{\ell-1}, \ldots, (w-1)^{\ell-1}, (w+1)^{\ell-2}, (w+3)^{\ell-2}, \ldots, (3w-3)^{\ell-2}, \ldots, (\frac{k(k-1)}{2}(w-1)+k)^{\ell-k},$$
$$(\frac{k(k-1)}{2}(w-1)+2k)^{\ell-k}, \ldots, (\frac{k(k+1)}{2}(w-1))^{\ell-k}, \ldots, \frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}(w-1)+\ell-1, \ldots, \frac{\ell(\ell-1)}{2}(w-1)).$$

J'ai proposé la conjecture suivante en 1991 :

Conjecture 1.3. *Le bloc A est Morita équivalent au bloc principal de $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_\ell \wr \mathfrak{S}_w)$.*

Rickard a construit en 1990 des complexes dont il conjecture qu'ils devraient induire des équivalences de Rickard entre deux blocs quelconques de groupes symétriques ayant des groupes de défaut isomorphes. Il a prouvé cette conjecture dans certains cas.

La conjecture 1.1 pour des groupes symétriques est conséquence de cette conjecture de Rickard et de la conjecture 1.3, qui a l'avantage de ne faire intervenir qu'une équivalence de Morita.

La conjecture 1.3 est facile à vérifier pour $w = 1$. Elle vient d'être vérifiée par Chuang [Ch] pour $w = 2$.

La conjecture 1.3 a un analogue pour les blocs d'algèbres de Hecke en une racine ℓ-ème de l'unité, sur $\mathbf{C}$. Le nombre ℓ n'est plus nécessairement premier, aucune hypothèse sur w n'est nécessaire (l'algèbre $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_\ell \wr \mathfrak{S}_w)$ est à remplacer par le produit en couronne de l'algèbre de Hecke de $\mathfrak{S}_\ell$ par le groupe $\mathfrak{S}_w$). Pour $\ell = 2$, l'égalité des matrices de décomposition est conséquence de travaux de James et Mathas [JaMa]. On peut aussi démontrer qu'elle résulte de la formule du "produit tensoriel de Steinberg" pour les modules basculants du groupe linéaire quantique.

1.5. **Groupes réductifs finis.** Soit G un groupe réductif connexe sur un corps fini de caractéristique différente de ℓ. Broué a donné une version très précise de la conjecture 1.1 pour un tel groupe. Le complexe de cohomologie ℓ-adique de certaines variétés de Deligne-Lusztig devrait induire l'équivalence de Rickard entre blocs [BrMa].

Expliquons la situation dans le cas de blocs principaux. On a une variété X munie d'une action de $G \times (T \rtimes B)^\circ$, où T est un tore de G contenant un ℓ-sous-groupe de Sylow et B un sous-groupe du groupe de tresses du groupe de Weyl de G. Soit C le complexe de cohomologie ℓ-adique (sur $\mathcal{O}$) de X. Alors, Broué, Malle et Michel [BrMa, BrMi] conjecturent que l'action de $\mathcal{O}B$ sur C se factorise en une action d'une déformation de l'algèbre de groupe de $E = N_G(T)/C_G(T)$ (en fait isomorphe à $\mathcal{O}E$) et que le complexe de $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}(T \rtimes E))$-bimodules obtenu induit une équivalence de Rickard entre les blocs principaux de G et $T \rtimes E$.

La restriction de C à $\mathcal{O}(G \times T^\circ)$ est un objet défini à quasi-isomorphisme près. Rickard [Ri4] a construit un complexe bien défini dans la catégorie homotopique. C'est un complexe borné de modules qui sont facteurs directs de modules de permutation par rapport à des fixateurs de points de X (comparer à la notion de complexes splendides de la conjecture 1.1). Le problème de l'action de B est plus délicat. J'ai démontré [18] que le complexe construit par Rickard est homotope au complexe obtenu à partir d'une résolution canonique de Godement et ai au passage étendu la construction de Rickard du cas d'une variété sur un corps algébriquement clos au cas d'un morphisme compactifiable $X \to S$ avec un faisceau d'algèbres constructible sur S. Cette construction fournit alors un "bon" complexe de $\mathcal{O}(G \times (T \rtimes B)^{\circ})$-modules.

J'ai utilisé cette construction pour donner une preuve de la conjecture pour les courbes de Deligne-Lusztig (certains cas pour GL_2, U_3, Ree et Suz). J'ai démontré que pour E cyclique, la conjecture est équivalente à la concentration en degré 0 de l'homologie de l'anneau différentiel gradué des endomorphismes $\mathrm{End}^{\bullet}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{O}G)}(C)$.

Pour les courbes de Deligne-Lusztig, la concentration en degré 0 résulte d'une propriété élémentaire du complexe de cohomologie des revêtements étales connexes de la droite affine, que l'on peut voir elle-même comme une propriété de certains complexes de cochaînes pour des groupes profinis de ℓ-dimension cohomologique 1.

J'avais auparavant vérifié la conjecture pour $GL_2(q)$, en calculant d'abord explicitement le complexe de cohomologie ℓ-adique entière C puis en démontrant que c'était un complexe de Rickard [7].

Avec F. Digne et J. Michel [20], j'ai étudié la conjecture pour des coefficients $\bar{\mathbf{Q}}_l$; nous tentons de comprendre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et de voir que l'action du groupe de tresses sur la cohomologie se factorise par l'algèbre de Hecke associée.

2. Déformations : algèbres de Hecke et groupes quantiques

La motivation de mon travail a été la suivante : étant donnée une algèbre (libre) A sur un anneau local $\mathcal{O}$, comment retrouver les propriétés des représentations à la fibre spéciale de $\mathcal{O}$ en connaissant les propriétés des représentations aux idéaux de hauteur 1 ?

2.1. Algèbres de Hecke.

Pour W un groupe de Coxeter fini, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ de W est une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}W$ de W : c'est une $R = \mathbf{Z}[X, X^{-1}]$-algèbre libre munie d'un isomorphisme $\mathcal{H} \otimes_R R/(X-1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}W$. Les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de R pour lesquels la fibre $\mathcal{H} \otimes_R (R_{\mathfrak{p}})/\mathfrak{p}$ de $\mathcal{H}$ n'est pas semi-simple sont engendrés par des polynômes cyclotomiques Φ_n $(n \geq 2)$ ou par des nombres premiers mauvais pour W (cf. §4.2 pour le rôle des mauvais nombres premiers).

Supposons ℓ bon pour W (l'hypothèse est vide pour W de type A). Considérons la localisation $R_{\mathfrak{m}}$ en $\mathfrak{m} = (\ell, X-1)$. On aimerait alors pouvoir décrire certains aspects de la catégorie de représentations de la fibre de $\mathcal{H}$ en $\mathfrak{m}$ à l'aide des fibres en les (Φ_{ℓ^r}), $(r \geq 1)$ (algèbre de Hecke en une racine de l'unité en caractéristique 0).

Supposons maintenant la fibre en (Φ_{ℓ^r}) semi-simple pour $r \geq 2$. Alors Geck [Ge1] conjecture que les modules simples sont "les mêmes" en $\mathfrak{m}$ et en (Φ_ℓ), *i.e.*, que les $\mathcal{H} \otimes_R R/\mathfrak{m}$-modules simples se relèvent en des $\mathcal{H} \otimes_R R/(\Phi_\ell)$-modules sans ℓ-torsion. Dans [6], nous démontrons au moins que le nombre de modules simples en $\mathfrak{m}$ et en (Φ_ℓ) est le même, comme conséquence de la surjectivité de l'application canonique $\mathrm{HH}_0(\mathcal{H})^* \to \mathrm{HH}_0(\mathcal{H} \otimes_R R/\mathfrak{m})^*$ (l'algèbre $\mathcal{H}$ étant symétrique, cela revient à la surjectivité de l'application canonique $Z\mathcal{H} \to Z(\mathcal{H} \otimes_R R/\mathfrak{m})$). Nous avons au passage donné un cadre général aux matrices de décomposition et triangle de Brauer pour une algèbre finie libre sur un anneau local intégralement clos.

Pour le type A (et des cas importants en type B et D), les caractères des modules simples de $\mathcal{H}$ en une racine de l'unité, sur $\mathbf{C}$, sont connus (on les obtient à partir d'une algèbre de Hecke affine ou à partir d'un groupe quantique et de ses modules basculants).

La catégorie de représentations de $\mathcal{H}$, sur $\mathbf{C}$, en une racine de l'unité, ressemble à la catégorie des représentations d'un bloc à défaut abélien (cf. par exemple la remarque suivant la conjecture 1.3).

2.2. **Pseudo-caractères.** Dans [5], suivant une idée de Serre, j'ai montré comment construire une déformation universelle associée à une représentation de A sur le corps résiduel de $\mathcal{O}$. Ceci résulte de la caractérisation des caractères de représentations (dans des produits d'algèbres d'Azumaya) parmi les fonctions centrales à l'aide d'une identité polynomiale (*pseudo-caractères*). L'existence de déformations universelles avait été démontrée par Mazur pour des représentations de groupes profinis, à l'aide du critère de représentabilité de Schlessinger (L. Nyssen [Ny] a obtenu des résultats similaires, par des méthodes différentes).

2.3. **Groupes quantiques.** Pour G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\ell > 0$, Lusztig a défini un groupe quantique, déformation de l'algèbre des distributions de G de support l'origine. Il a conjecturé que les modules simples de G associés à des poids restreints ont le même caractère que les modules simples correspondants du groupe quantique associé en une racine ℓ-ème de l'unité sur $\mathbf{C}$ (si $\ell \geq 2h$ où h est le nombre de Coxeter de G). Andersen, Jantzen et Soergel ont montré comment contrôler la catégorie de représentations à partir d'une algèbre de dimension finie, définie indépendamment de ℓ et en ont déduit la validité de la conjecture de Lusztig pour ℓ suffisamment grand.

La détermination des caractères des modules simples de G peut se faire à partir de la connaissance des caractères des modules basculants indécomposables (les modules basculants sont les modules M tels que M et M^* ont des filtrations de quotients des modules de Weyl ; ils forment une bonne classe génératrice pour la catégorie dérivée). Le problème de "recoller" les modules basculants pour un groupe quantique en des racines ℓ^r-èmes de l'unité (sur $\mathbf{C}$) en des modules basculants pour G est plus naturel que l'étude des modules simples. Je n'ai toujours pas compris comment pouvait se faire ce recollement ; il me semble cependant avoir compris la nécessité d'étudier un problème plus "rigide", où l'on chercherait à comprendre des propriétés de certains morphismes plutôt que des propriétés d'objets, voire plutôt des propriétés de certains foncteurs (cf. §3.4).

Je cherche maintenant à mieux comprendre les groupes quantiques aux racines de l'unité avant de reprendre l'étude de G. Ceci m'a conduit à tenter de mieux comprendre dans un premier temps les représentations d'une algèbre de Lie semi-simple complexe ainsi que les faisceaux pervers sur une variété de drapeaux.

Les caractères des modules basculants indécomposables pour un groupe quantique en une racine de l'unité (sur $\mathbf{C}$) sont donnés par les valeurs en 1 de certains polynômes de Kazhdan-Lusztig paraboliques associés au groupe de Weyl affine et au groupe de Weyl fini, comme l'a démontré Soergel [Soe2, Soe3] : on considère l'action de l'algèbre de Hecke affine $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $M = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\tilde{\mathcal{H}}} \mathbf{C}[X, X^{-1}]$, où $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Hecke usuelle. Les polynômes considérés sont les coefficients de la base canonique exprimée dans la base standard de ce module.

Tout module (intégrable de type 1) V est quasi-isomorphe à un complexe borné de modules basculants indécomposable $T(V)$, unique à isomorphisme près. J'ai montré comment calculer les termes de $T(V)$ pour V un module de Weyl. Avec O. Mathieu, j'ai montré comment calculer ces termes pour un module simple [17] : ils sont donnés par les coefficients de la "base canonique duale" de M exprimée dans la base canonique.

3. Groupes d'automorphismes de catégories triangulées

3.1. **Groupes de Picard de catégories dérivées de modules.** Il n'est pas clair qu'il existe un complexe "naturel" qui induise l'équivalence de la conjecture 1.1. Aussi, il est utile d'étudier le groupe des auto-équivalences de catégories dérivées de blocs. Avec A. Zimmermann [12], j'ai étudié le groupe TrPic des complexes de bimodules inversibles dans la catégorie dérivée. Ce groupe contient comme sous-groupe (non distingué en général) le produit $\mathbf{Z} \times \mathrm{Pic}$ où $\mathbf{Z}$ est donné par le foncteur de translation. Pour un anneau local ou un anneau commutatif indécomposable, c'est exactement le groupe TrPic. Nous avons démontré que le groupe TrPic se comportait bien par extension plate par rapport au centre. En général, on peut s'attendre à une structure beaucoup plus riche pour TrPic que pour le groupe de Picard usuel. Nous avons ainsi construit un morphisme du groupe de tresses d'Artin B_n vers le groupe TrPic d'une algèbre d'arbre de Brauer à n sommets, avec multiplicité 1 (par exemple, le bloc principal de $k\mathfrak{S}_\ell$ pour $n = \ell$ premier) et démontré que le morphisme était un isomorphisme pour $n = 3$, à un sous-groupe central identifié près. Ainsi, à un sous-groupe central près, le groupe TrPic de $\mathbf{F}_3\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à B_3 (ceci est démontré en "reconnaissant" $PSL_2(\mathbf{Z}) = B_3/Z(B_3)$ dans la structure des complexes).

3.2. **Groupes de Picard de catégories stables.** Très utile pour la conjecture 1.1 est aussi l'étude des auto-équivalences de la catégorie stable d'un bloc ; c'est l'objet du travail en commun avec J. Carlson [11]. Le groupe StPic des bimodules inversibles dans la catégorie stable contient le sous-groupe $Z\times\mathrm{Pic}$ où Z est cyclique engendré par le foncteur de translation. Pour une algèbre $kD \rtimes E$ où D est abélien et E un ℓ'-groupe cyclique agissant librement sur D, nous démontrons que StPic consiste exactement en $Z \times \mathrm{Pic}$ (ceci avait été fait par Linckelmann [Li2] pour D cyclique), donc que l'application canonique $\mathrm{TrPic} \to \mathrm{StPic}$ est surjective, en accord avec la question 1.2. Nous utilisons pour cela des techniques de cohomologie des groupes, en particulier la propriété pour un $k(D \rtimes E)$-module V qui n'a pas de cohomologie ($\hat{H}^*(D \rtimes E, V) = 0$) d'être projectif.

Ceci nous permet de déduire que la version la plus faible de la conjecture 1.1, *i.e.* l'équivalence des catégories dérivées des blocs sur k, implique la forme 1.1.

3.3. **Espace de Fock et somme des catégories dérivées des groupes symétriques.** L'espace de Fock est une représentation intégrable de l'algèbre de Lie affine $\hat{sl}_\ell$. Une base de cet espace vectoriel est donnée par l'ensemble des partitions : l'espace de Fock s'identifie alors naturellement à la somme $\mathcal{F} = \bigoplus_n \mathbf{C} \otimes K_0(\mathbf{C}\mathfrak{S}_n)$ des groupes de caractères des groupes symétriques. Le sous-espace engendré par les caractères des $\mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n$-modules projectifs $\mathcal{F}_0 = \bigoplus_n \mathbf{C} \otimes K_0(\mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n)$ est une sous-représentation de plus haut poids. Lascoux, Leclerc et Thibon [LaLeTh] ont conjecturé que la base canonique de cette représentation (au sens de Kashiwara et Lusztig) est donnée par les caractères des modules projectifs indécomposables pour les algèbres de Hecke en une racine ℓ-ème de l'unité, sur $\mathbf{C}$. Cette conjecture a été résolue par Ariki (cf. [Ge2]).

Les opérateurs qui définissent les actions des générateurs e_i et f_i de $\hat{sl}_\ell$ sur $\mathcal{F}$ sont déduits de foncteurs exacts E_i et F_i sur $\bigoplus_n \mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n-\mathrm{mod}$ obtenus en composant le foncteur $\bigoplus_n \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ (resp. le foncteur $\bigoplus_n \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$) avec un foncteur de projection sur une somme de blocs. Le foncteur $\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+r}}$ est muni d'une action de $\mathfrak{S}_r$. On en déduit une action de $\mathfrak{S}_r$ sur le foncteur E_i^r et on note $E^{(r)}$ les points fixes de $\mathfrak{S}_r$ sur E_i^r (Puig a montré que E_i^r est isomorphe à $r!$

copies de $E^{(r)}$). De même, on a une action de $\mathfrak{S}_r$ sur F_i^r et on note $F_i^{(r)}$ la partie où $\mathfrak{S}_r$ agit par son caractère signature.

Est-ce que les opérateurs donnant l'action du groupe de Weyl affine $\mathcal{W}$ (de type $\tilde{A}_{\ell-1}$) sur $\mathcal{F}$ proviennent d'opérateurs naturels sur $\bigoplus_n \mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n$–mod ? La réponse est négative, mais elle est par contre positive lorsque l'on demande une action sur $\bigoplus_n K^b(\mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n\text{–mod})$ ou $\bigoplus_n \mathcal{D}^b(\mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n\text{–mod})$. Pour $1 \leq i \leq \ell$, on peut construire un complexe C_i de $(\bigoplus_n \mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n, \bigoplus_n \mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n)$-bimodules. Les termes de C_i sont du type $E_i^{(r)}F_i^{(s)}E_i^{(t)}$ et l'action sur $\mathcal{F}$ est donnée par

$$\sum_{r,s,t} \frac{(-1)^s}{r!s!t!} e_i^r f_i^s e_i^t.$$

Ainsi, le foncteur induit par le complexe C_i agit sur $\mathcal{F}$ comme la réflexion élémentaire s_i de $\mathcal{W}$.

Je pense que les C_i devraient être inversibles et induire une action du groupe de tresses de type $\tilde{A}_{\ell-1}$ sur $\bigoplus_n K^b(\mathbf{Z}_\ell\mathfrak{S}_n-\text{mod})$, mais je ne sais démontrer aucune de ces deux propriétés. Les complexes C_i devraient coïncider, à homotopie près, avec des sommes de complexes définis par Rickard (cf. §1.4.3), qui sont eux beaucoup plus "petits".

Peut-être existe-t-il une catégorie abélienne indécomposable filtrée dont le gradué associé serait la somme des catégories de représentations des groupes symétriques sur un corps de caractéristique ℓ, avec une action du groupe de tresses affine sur sa catégorie dérivée (une catégorie du type "foncteurs polynomiaux des espaces vectoriels de dimension finie vers les espaces vectoriels, sur $\mathbf{F}_\ell$" ?).

3.4. **Représentations rationnelles.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Borel, $X \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids et W le groupe de Weyl. Soit $\mathcal{O}^\infty$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules localement finis pour $\mathfrak{b}$. Pour $\lambda \in X/W$, on note $\mathcal{O}^\infty_\lambda$ le bloc de $\mathcal{O}^\infty$ engendré par les modules simples dont les plus hauts poids sont dans λ. On considère la 2-catégorie $\mathcal{A}$ dont l'ensemble d'objets est X/W, avec $\mathrm{Hom}(\lambda, \lambda')$ la catégorie homotopique des complexes bornés de foncteurs projectifs (au sens de Bernstein-Gelfand) de $\mathcal{O}^\infty_\lambda$ dans $\mathcal{O}^\infty_{\lambda'}$.

Si λ est un poids régulier (*i.e.*, dont le fixateur dans W est trivial), alors on dispose de foncteurs Θ_s ("wall crossing") pour $s \in S$ une réflexion élémentaire de W et d'un morphisme d'adjonction $1_{\mathcal{O}^\infty_\lambda} \to \Theta_s$. On note F_s le complexe obtenu. Alors, F_s est une auto-équivalence de $K^b(\mathcal{O}^\infty_\lambda)$ [Ri2] ou de $\mathrm{End}_\mathcal{A}(\lambda)$ si l'on préfère.

On peut conjecturer que les foncteurs F_s, $s \in S$, induisent une action du groupe de tresses B_W sur $K^b(\mathcal{O}^\infty_\lambda)$: on disposerait alors de foncteurs F_w pour $w \in B_W$. Il serait souhaitable de pouvoir construire directement les foncteurs F_w pour $w \in W$, comme on peut le faire dans le cas géométrique (cf. §3.5).

On pourrait ensuite conjecturer que $\mathrm{Hom}(F_{w'}[i], F_{w^{-1}}) = 0$ pour tout i et tous $w, w' \in B_W^+$ d'images distinctes dans W. Ainsi, les F_w et $F_{w^{-1}}$, pour $w \in W$, joueraient le rôle d'objets standards et costandards, donnant à $\mathrm{End}_\mathcal{A}(\lambda)$ une structure rappelant celle d'une catégorie de plus hauts poids.

J'aimerais aller plus loin et construire un champ Υ en catégories triangulées sur $(\mathfrak{h}^*/W)_{reg}$ tel que la fibre en $\lambda \in X/W$ de $i_*\Upsilon$ est $\mathrm{End}_\mathcal{A}(\lambda)$, où i est l'inclusion $(\mathfrak{h}^*/W)_{reg} \hookrightarrow (\mathfrak{h}^*/W)$.

Les constructions précédentes gardent un sens pour des catégories C de représentations rationnelles d'un groupe algébrique semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique

ℓ ou pour un analogue quantique ; ce fut en fait mon point de départ. L'intérêt de travailler avec des catégories de foncteurs est double :

- On peut espérer avoir un paramétrage des foncteurs projectifs indécomposables par tous les éléments de $\mathcal{W}$, le groupe de Weyl affine (et pas seulement par $\mathcal{W}/W$, qui indexe par exemple les modules simples).
- En outre, on dispose d'une catégorie Z-linéaire, où Z est le centre de la catégorie C, donc d'une catégorie "déformée", analogue j'espère à la déformation de la catégorie $\mathcal{O}$ de Soergel [Soe1]. Cet anneau devrait jouer un rôle analogue au complété de $S(\mathfrak{h}^*)$: on disposerait alors d'une catégorie déformée et on pourrait espérer étudier la catégorie à partir des localisations de Z en ses idéaux de hauteur 1. On pourrait aussi espérer que cette catégorie est liée à une catégorie de faisceaux pervers équivariants sur une variété de drapeaux affines (dans le cas quantique sur $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$ localisé en l'idéal engendré par un polynôme cyclotomique). Il faudrait ultimement comprendre le cas d'un groupe quantique sur l'anneau de hauteur 2, $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]_{(\ell, X-1)}$ — le centre Z est alors très compliqué.

3.5. **Actions sur les variétés de drapeaux.** Soit G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur $\mathbf{C}$ et $\mathcal{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G. On note W le groupe de Weyl de G et pour $w \in W$, $\mathcal{O}_w$ la G-orbite des paires de sous-groupes de Borel en position relative w dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $i_w : \mathcal{O}_w \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ l'inclusion correspondante.

Soient $p_1, p_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ les première et deuxième projections.

On note $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux constructibles de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur $\mathcal{B}$.

Soit $w \in W$. On définit le foncteur F_w par

$$F_w = (p_1 i_w)_!(p_2 i_w)^* : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B}).$$

C'est un résultat classique que les foncteurs F_w vérifient les relations de tresses ($F_w F_{w'}$ est isomorphe à $F_{ww'}$ si $l(ww') = l(w) + l(w')$) et sont inversibles.

Une propriété de cocycle des noyaux jointe aux résultats de Deligne [De] permet de démontrer que les foncteurs F_w s'étendent en une action du groupe de tresses B_W sur $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ [15].

4. Groupes de réflexions, groupes de tresses

4.1. **Topologie des groupes de réflexions complexes.** La conjecture de Broué sur les blocs des groupes réductifs finis a mis en évidence l'existence de déformations des algèbres de groupes de certains groupes de réflexions complexes (les groupes E de §1.5). Ces algèbres apparaissent comme quotient d'algèbres de groupes de tresses, définis par générateurs et relations (travaux de Broué, Malle et Michel [BrMa]).

Dans [8], avec M. Broué et G. Malle, j'ai étudié le groupe de tresses B_W associé à un groupe de réflexions complexes W, défini comme le groupe fondamental du complémentaire de l'arrangement d'hyperplans de réflexions de W divisé par W. Nous avons calculé, sauf pour 6 groupes irréductibles, des présentations de ces groupes de tresses et vérifié que le centre est cyclique.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ associée à W peut alors être définie comme un quotient de l'algèbre de groupe de B_W sur un anneau de polynômes à plusieurs variables par des relations qui imposent des valeurs propres aux générateurs de la monodromie autour des hyperplans. Nous ne savons pas pourquoi cette construction donne une algèbre de dimension finie (on peut procéder à une vérification cas par cas sauf pour une dizaine de groupes). Nous savons construire un quotient de cette algèbre (ce devrait en fait être la même algèbre), qui est une déformation de l'algèbre de groupe de W : ce quotient est donné par une représentation de monodromie de B_W à partir d'une connexion à la Knizhnik-Zamolodchikov, généralisant des constructions de Kohno et Cherednik. Pour la série infinie de groupes de réflexions complexes irréductibles, nous obtenons alors une preuve rapide que l'algèbre $\mathcal{H}$ est une déformation de l'algèbre de groupe de W.

4.2. **Familles et représentations cellulaires.** Pour un groupe de Weyl W, Lusztig a défini, en utilisant la combinatoire liée aux bases de Kazhdan-Lusztig, une partition de l'ensemble des caractères irréductibles en familles et a défini des représentations cellulaires. J'ai compris que l'on pouvait caractériser la partition des caractères irréductibles en familles comme les blocs de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{Z}[X, X^{-1}][S^{-1}]$ où S est la partie multiplicative engendrée par les polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ de terme constant 1. Cela résulte d'une propriété d'indécomposabilité des anneaux basés de Lusztig (généralisant l'indécomposabilité de l'algèbre d'un groupe fini sur $\mathbf{Z}$). Les représentations cellulaires apparaissent alors comme les caractères de certains modules projectifs indécomposables (ce sont peut-être des générateurs de la partie positive du K_0).

Cette interprétation permet de définir des familles pour les caractères de groupes de réflexions complexes, suivant l'idée de Broué, Malle et Michel selon laquelle on peut définir des éléments d'une théorie des représentations d'un "groupe réductif fini" associé à un (bon) groupe de réflexions complexes.

4.3. **Extensions et quotients de groupes de réflexions.** Il s'agit de travaux en commun avec D. Bessis et C. Bonnafé [19]. La classification des groupes de réflexions complexes irréductibles fait apparaître 34 groupes exceptionnels et une série infinie (à trois paramètres). Des diagrammes donnant des présentations par générateurs et relations ont été donnés dans [8] et on peut noter de nombreux cas où un diagramme est "quotient" d'un autre : il existe alors un morphisme de groupes de réflexions $W \to W'$ (*i.e.* envoyant une réflexion sur une réflexion ou sur 1) qui est surjectif.

Il existe des groupes de réflexions complexes de dimension n qui ne peuvent pas être engendrés par n réflexions. Par exemple, le groupe de réflexions $W = G_{31}$ agissant sur un espace vectoriel complexe V de dimension 4 ne peut pas être engendré par moins de 5 réflexions. Soit G le plus grand 2-sous-groupe distingué de W. Alors, $W/G \simeq \mathfrak{S}_6$ et la surjection $W \to \mathfrak{S}_6$ est un morphisme de groupes de réflexions. On démontre que V/G est une hypersurface et que l'action de W/G sur l'espace tangent à V/G en 0 est la représentation de réflexion de $\mathfrak{S}_6$.

Nous caractérisons les "bonnes" paires (W, G) où W est un groupe de réflexions sur V, G un sous-groupe distingué de W tel que W/G est un groupe de réflexions sur l'espace tangent à V/G en 0. Une condition nécessaire et suffisante est que V/G soit une intersection complète et que W agisse trivialement sur la cohomologie locale de V/G en 0. Étant donnée une bonne paire (W, G) et L un sous-espace de V, alors la paire formée des fixateurs de L dans W et G a encore la même propriété. Réciproquement, on peut démontrer que si G est engendré par des sous-groupes $G(L)$ fixant un sous-espace L de V et la paire $(G(L), W_L)$ est bonne pour tout L, alors (W, G) est une bonne paire : cela ramène la classification au rang 2. Un cas amusant y apparaît : Soit W un groupe de réflexions sur $\mathbf{C}^2$ engendré par des réflexions d'ordre 2 et contenant $G = \{\pm 1\}$. Alors, W/G est un groupe de Coxeter fini de rang 3 et on obtient ainsi une bijection entre (classes de conjugaison dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ de) groupes de réflexions complexes de dimension 2 engendrés par des réflexions d'ordre 2, contenant -1, d'une part et groupes de Coxeter finis non triviaux de rang au plus 3, d'autre part.

Articles publiés ou en préparation

[1] Raphaël Rouquier, *Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques*, J. of Alg. **168**, 648–694 (1994).

[2] Anne-Marie Aubert, Jean Michel et Raphaël Rouquier, *Correspondance de Howe pour les groupes finis*, Duke Math. J. 83, 353–387 (1996).

[3] Raphaël Rouquier, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, proceedings of "Groups 1993, Galway–Saint-Andrews conference" volume 2, 512–523, London Math. Soc. series 212, Cambridge University Press, 1995.

[4] Michel Broué, Gunter Malle et Raphaël Rouquier, *On complex reflection groups and their associated braid groups*, in "Representations of groups", CMS Conference Proceedings vol. 16, 1–13, Amer. Math. Soc., 1995.

[5] Raphaël Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, Journal of Algebra **180**, 571–586 (1996).

[6] Meinolf Geck et Raphaël Rouquier, *Centers and simple modules for Iwahori-Hecke algebras*, in "Finite reductive groups", Progress in Math. **141**, 251–272, Birkhäuser, 1996.

[7] Raphaël Rouquier, *Some examples of Rickard complexes*, proceedings of the Conference on representation theory of groups, algebras, orders, Ann. St. Univ. Ovidius Constantza **4** (1996), 169–173.

[8] Michel Broué, Gunter Malle et Raphaël Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. reine angew. Math. **500** (1998), 127–190.

[9] Raphaël Rouquier, *Weyl groups, affine Weyl groups and reflection groups*, in "Representations of reductive groups", Cambridge Univ. Press, 21–39, 1998.

[10] Raphaël Rouquier, *The derived category of blocks with cyclic defect groups*, in "Derived equivalences for group rings", Springer Lecture Notes **1685**, 199–220, 1998.

[11] Jon F. Carlson et Raphaël Rouquier, *Self-equivalences of stable module categories*, à paraître dans Math. Zeitschrift.

[12] Raphaël Rouquier et Alexander Zimermann, *Picard groups for derived categories*, soumis à publication dans Proc. London Math. Soc.

[13] Meinolf Geck et Raphaël Rouquier, *Filtrations on projective modules for Iwahori-Hecke algebras*, soumis à publication dans les comptes-rendus de la conférence "Symposium on the modular representation theory of finite groups ", Charlottesville, May 1998.

[14] Raphaël Rouquier, *Gluing p-permutation modules*, preprint (1998).

[15] Raphaël Rouquier, *Action du groupe de tresses sur la catégorie dérivée de la variété de drapeaux*, preprint (1998).

[16] Jon Alperin, Markus Linckelmann et Raphaël Rouquier, *On source algebras and source modules*, en préparation.

[17] Olivier Mathieu et Raphaël Rouquier, *Résolutions basculantes des modules simples*, en préparation.

[18] Raphaël Rouquier, *Revêtements de la droite affine, courbes de Deligne-Lusztig et équivalences de Rickard*, en préparation.

[19] David Bessis, Cédric Bonnafé et Raphaël Rouquier, *Extensions et quotients de groupes de réflexions*, en préparation.

[20] François Digne, Jean Michel et Raphaël Rouquier, *Cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig attachées à des éléments réguliers*, en préparation.

[21] Raphaël Rouquier, *Blocks with Klein four defect groups and Rickard equivalences*, en préparation.

Références

[Ar] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 789–808.

[Br] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181–182** (1990), 61–92.

[BrMa] M. Broué et G. Malle, *Zyklotomische Heckealgebren*, Astérisque **212** (1993), 119–189.

[BrMi] M. Broué et J. Michel, *Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées*, in "Finite reductive groups", Progress in Math. **141**, 73–139, Birkhäuser, 1996.

[Ch] J. Chuang, *The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué*, à paraître dans J. of Algebra.

[De] P. Deligne, *Action du groupe des tresses sur une catégorie*, Inv. Math. **128** (1997), 159–175.

[Ge1] M. Geck, *Brauer trees of Hecke algebras*, Comm. Alg. **20** (1992), 2937–2973.

[Ge2] M. Geck, *Representations of Hecke algebras at roots of unity*, Sém. Bourbaki 836, 1997–98.

[Ha] M.E. Harris, *Splendid derived equivalences for blocks of finite groups*, preprint, 1997.

[JaMa] G.D. James et A. Mathas, *Hecke algebras of type A with $q=-1$*, J. of Algebra **184** (1996), 102–158.

[LaLeTh] A.Lascoux, B. Leclerc et J.-Y. Thibon, *Une conjecture pour le calcul des matrices de décomposition des algèbres de Hecke de type A aux racines de l'unité*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **321** (1995), 511–516.

[Li1] M. Linckelmann, *Derived equivalences for cyclic blocks over a p-adic ring*, Math. Z. **207** (1991), 293–304.

[Li2] M. Linckelmann, *Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups*, Math. Z. **223** (1996), 87–100.

[Ny] L. Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), 257–283.

[Pu] L. Puig, *Une correspondance de modules pour les blocs à groupes de défaut abéliens*, Geom. Dedicata **37** (1991), 9–43.

[Ri1] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. of Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 303–317.

[Ri2] J. Rickard, *Translation functors and equivalences of derived categories for blocks of algebraic groups*, in "Finite dimensional algebras and related topics", Kluwer, 255–264, 1994.

[Ri3] J. Rickard, *Splendid equivalences : derived categories and permutation modules*, Proc. London Math. Soc. **72** (1996), 331–358.

[Ri4] J. Rickard, *Finite group actions and étale cohomology*, Publ. Math. IHES **80** (1995), 81–94.

[Soe1] W. Soergel, *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules*, J. reine angew. Math. **429** (1992), 49–74.

[Soe2] W. Soergel, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Representation Theory **1** (1997), 37–68.

[Soe3] W. Soergel, *Charakterformeln für Kipp-Moduln über Kac-Moody-Algebren*, Repr. Theory **1** (1997).