C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 1037-1042, 1999
Théorie des groupes/*Group Theory*

Familles et blocs d'algèbres de Hecke

Raphaël ROUQUIER

UFR de mathématiques et Institut de mathématiques de Jussieu, Université Denis-Diderot, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
Courriel : rouquier@math.jussieu.fr

(Reçu et accepté le 26 octobre 1999)

Résumé. Nous montrons que les familles de caractères irréductibles d'un groupe de Weyl (selon Lusztig) coïncident avec les blocs de caractères de l'algèbre de Hecke associée, définie sur un anneau convenable. Les représentations cellulaires à gauche s'interprètent (dans certains cas au moins) comme les « caractères des modules projectifs indécomposables » de cette algèbre de Hecke. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Families and blocks of Hecke algebras

Abstract. *We show that Lusztig's partition of irreducible characters of a Weyl group into families corresponds to the partition of the irreducible characters of the corresponding Hecke algebra over a suitable base ring. The "characters of the projective indecomposable modules" of this Hecke algebra are the left cell representations, in some cases at least.* © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English Version

In [1], Gyoja shows some compatibility between modular representations of Hecke algebras and families of characters and left cell representations. We pursue this study here and show that families and cell representations are related to certain integral representations of Hecke algebras.

Let (W, S) be a finite crystallographic Coxeter system, let $A = \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$ be the ring of Laurent polynomials in an indeterminate v and let $\mathcal{H}$ be the Hecke algebra of (W, S) over A. This is the free A-module with basis $(T_w)_{w \in W}$. The multiplication is given by

$$\begin{cases} (T_s + v^{-1})(T_s - v) = 0 & \text{for } s \in S, \\ T_w T_{w'} = T_{ww'} & \text{when } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w'). \end{cases}$$

As usual, we will identify simple $\mathbf{C}W$-modules and simple $\mathbf{C}(v) \otimes_A \mathcal{H}$-modules ("Tits' deformation theorem").

Note présentée par Jacques Tits.

0764-4442/99/03291037 © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Let $\mathcal{O} = A\big[(1+vP(v))^{-1}\big]_{P\in\mathbf{Z}[v]}$. We show (Theorem 1) that the partition of the irreducible characters of W into families corresponds to the partition of the irreducible characters of $\mathcal{H}$ according to the blocks of $\mathcal{O}\otimes_A \mathcal{H}$.

The relation is provided by Lusztig's algebra J ([4], § 2.3). This algebra J comes with a distinguished basis $(t_w)_{w\in W}$ giving J the structure of a based ring ([6], § 3.1 (j)).

Lusztig defines a morphism of A-algebras $\phi : \mathcal{H} \to A\otimes J$. It has the property that $1_{\mathcal{O}}\otimes_A \phi$ is an isomorphism ([5], § 1.3 (a),(b)).

Let $\mathcal{D}$ be the set of Duflo involutions: we have a decomposition of 1 as a sum of orthogonal idempotents $1=\sum_{d\in\mathcal{D}} t_d$. Recall that two elements w, $w'\in W$ are in the same two-sided cell if $t_{w'}\,J\,t_{w^{-1}}\neq 0$. Given a two-sided cell $\mathbf{c}$, we consider the central idempotent $t_{\mathbf{c}}=\sum_{d\in\mathcal{D}\cap\mathbf{c}} t_d$ of J. Two simple $(\mathbf{C}\otimes J)$-modules V and V' are in the same family if there is a two-sided cell $\mathbf{c}$ such that $t_{\mathbf{c}}V\neq 0$ and $t_{\mathbf{c}}V'\neq 0$.

In order to prove Theorem 1, we have to show that $t_{\mathbf{c}}$ is a block of J (a primitive idempotent of the center of J). We show (Proposition 3) that this is a general property of based rings. Let $(R,\mathcal{B})$ be a based ring ([6], § 1.1), $\mathcal{B}_0$ be the subset of $\mathcal{B}$ such that $1=\sum_{b\in\mathcal{B}_0} b$. Let $\mathcal{C}$ be the set of equivalence classes of elements of $\mathcal{B}_0$ for the relation $b\sim b'$ if $b\,R\,b'\neq 0$ and given $\mathbf{c}\in\mathcal{C}$, let $t_{\mathbf{c}}=\sum_{b\in\mathbf{c}} b$. Then, we show (Proposition 3) that $\{t_{\mathbf{c}}\}_{\mathbf{c}\in\mathcal{C}}$ is the set of blocks of R and that the elements of $\mathcal{B}_0$ are primitive idempotents. This generalizes the classical result of indecomposability of 1 in the group algebra of a finite group over $\mathbf{Z}$. The proof reduces to the case where $\mathcal{B}_0=\{1\}$ and then follows from evaluating the trace form of R on an idempotent, using the positivity of the trace of a central idempotent of $\mathbf{C}\otimes J$.

When W has no irreducible component of type E_n ($n=6,7$ or 8) or F_4, we show that the submonoid of the character group of W given by the characters of the projective $(\mathcal{O}\otimes_A\mathcal{H})$-modules is free, with basis the set of characters of left cell representations (Theorem 2). This is achieved by comparing this monoid with the intersection of the corresponding monoids for the projective $(\widehat{\mathcal{O}}_p\otimes_A\mathcal{H})$-modules, where p runs over the bad primes of W. It would be interesting to know whether Theorem 2 is true in general.

1. Rappels de la théorie de Lusztig

Rappelons quelques constructions et résultats de Lusztig.

Soit (W,S) un système de Coxeter crystallographique fini, $A=\mathbf{Z}\big[v,v^{-1}\big]$ et $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de (W,S) sur A, i.e., le A-module libre de base $(T_w)_{w\in W}$ où la multiplication est donnée par

$$\begin{cases} (T_s+v^{-1})(T_s-v)=0 & \text{pour } s\in S,\\ T_w\,T_{w'}=T_{ww'} & \text{si } \ell(ww')=\ell(w)+\ell(w'). \end{cases}$$

Soit $(C_w)_{w\in W}$ la base de Kazhdan–Lusztig de $\mathcal{H}$ ([2], § 1) :

$$C_w=\sum_{y\leq w}(-v)^{\ell(w)-\ell(y)}P_{y,w}(v^{-2})T_y,$$

où $P_{y,w}$ est un polynôme de degré inférieur à $(\ell(w)-\ell(y)-1)/2$ si $y\neq w$ et où $P_{w,w}=1$.

Définissons $h_{x,y,z}$ pour $x,\ y,\ z\in W$ par

$$C_x\,C_y=\sum_z h_{x,y,z}\,C_z.$$

Pour $z \in W$, soit $a(z)$ le plus petit entier naturel positif tel que, pour tous x, $y \in W$, on a

$$v^{a(z)} h_{x,y,z} \in \mathbf{Q}[v].$$

Soit alors $\gamma_{x,y,z}$ le terme constant de $(-v)^{a(z)} h_{x,y,z^{-1}}$.

On définit ([4], § 2.3) une $\mathbf{Z}$-algèbre (associative) $J = J(W)$ de base $(t_w)_{w \in W}$ par

$$t_x \, t_y = \sum_z \gamma_{x,y,z} \, t_{z^{-1}}.$$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des involutions de Duflo : c'est le sous-ensemble de W tel que l'unité de J est $\sum_{d \in \mathcal{D}} t_d$. La famille $\{t_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ est une famille d'idempotents orthogonaux de J. Soit $t_i = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ a(d)=i}} t_d$: c'est un idempotent central de J. Alors, $(t_w)_{a(w)=i}$ est une base de $J^i = t_i \, J$. On pose $J^{>i} = \bigoplus_{j>i} J^j$.

L'application A-linéaire

$$\phi : \mathcal{H} \to A \otimes J,$$

définie par

$$C_w \longmapsto \sum_{d \in \mathcal{D},\, z \in W,\, a(d)=a(z)} h_{w,d,z} \, t_z,$$

est un morphisme unitaire d'algèbres ([4], § 2.4).

Soit $w \in W$ et $i = a(w)$. On a ([5], § 1.3 (c))

$$\phi\big((-v)^i \, C_w\big) - t_w \in v\mathbf{Z}[v] J^i + J^{>i}.$$

Soit maintenant $\mathcal{O} = A\big[(1+vP(v))^{-1}\big]_{P \in \mathbf{Z}[v]}$. Alors, $1_{\mathcal{O}} \otimes \phi : \mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H} \to \mathcal{O} \otimes J$ est un isomorphisme.

En particulier, $1_{\mathbf{C}(v)} \otimes \phi : \mathbf{C}(v) \otimes_A \mathcal{H} \to \mathbf{C}(v) \otimes J$ est un isomorphisme, et l'on identifie ainsi les classes d'isomomorphisme de représentations simples de $\mathbf{C}W$ à celles de $\mathbf{C}(v) \otimes J$, en utilisant l'identification classique (« théorème de déformation de Tits ») entre représentations simples de $\mathbf{C}W$ et de l'algèbre déployée $\mathbf{C}(v) \otimes_A \mathcal{H}$.

Deux éléments w, $w' \in W$ sont dans la même *cellule à gauche* lorsque $t_{w'} \, t_{w^{-1}} \neq 0$ ([6], § 3.1 (k)). Chaque cellule à gauche contient une unique involution de Duflo. Les *représentations cellulaires* (*à gauche*) de J sont les $t_d \, J$, pour $d \in \mathcal{D}$.

Deux éléments $w, w' \in W$ sont dans la même *cellule bilatère* lorsque $t_{w'} \, J \, t_{w^{-1}} \neq 0$ ([6], § 3.1 (l)).

Soit $\mathbf{c}$ une cellule bilatère et $t_{\mathbf{c}} = \sum_{d \in \mathcal{D} \cap \mathbf{c}} t_d$. Alors, on a une décomposition $J = \bigoplus_{\mathbf{c}} t_{\mathbf{c}} \, J$, où $\mathbf{c}$ décrit l'ensemble des cellules bilatères.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des représentations simples de $\mathbf{C} \otimes J$: deux représentations V et V' sont dans la même *famille* s'il existe une cellule bilatère $\mathbf{c}$ telle que $t_{\mathbf{c}} V \neq 0$ et $t_{\mathbf{c}} V' \neq 0$.

2. Description algébrique

Dans [1], Gyoja a mis en évidence des compatibilités entre les représentations modulaires de $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$ d'une part et les familles et les représentations cellulaires à gauche d'autre part.

Nous allons voir que les familles et les représentations cellulaires sont liées naturellement aux représentations entières de $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$.

THÉORÈME 1. – *La partition des caractères irréductibles de W en familles correspond à la partition des caractères irréductibles de $\mathcal{H}$ selon les blocs de $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$.*

Ce théorème affirme que les t_c sont des idempotents primitifs du centre de $\mathcal{O} \otimes J$. Montrons que cela résulte de la proposition 3 à venir.

Comme $\left(J, (t_w)_{w \in W}\right)$ est un anneau basé ([6], § 3.1 (j)), il découle de la proposition 3 que les t_c sont des idempotents primitifs du centre de J. Puisque les seuls éléments de $\mathcal{O}$ algébriques sur $\mathbf{Q}$ sont les entiers naturels, on en déduit que les t_c sont primitifs dans le centre de $\mathcal{O} \otimes J$.

Notons que l'anneau $\mathcal{O}$ est principal.

Tout d'abord, remarquons que $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}$ est principal et $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ est un corps pour tout nombre premier p. Soit maintenant I un idéal non nul de $\mathcal{O}$. L'idéal $\mathbf{Q}I$ de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}$ est principal. Il existe donc un (unique) polynôme $P \in \mathbf{Z}[v]$ à terme constant strictement positif, non divisible par un polynôme (non constant) de $1 + v\mathbf{Z}[v]$ et dont les coefficients sont premiers entre eux, tel que P engendre $\mathbf{Q}I$. On a alors $I \subset P\mathcal{O}$, donc $J = \frac{1}{P} I$ est un idéal de $\mathcal{O}$ et il existe un entier strictement positif minimal n tel que $n\mathcal{O} \subsetneq J$. Soit p premier divisant n. On a $\frac{n}{p}(J + p\mathcal{O}) \subseteq J$, donc $J + p\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$ et enfin $J \subseteq p\mathcal{O}$. L'idéal $\frac{1}{p} J$ contient $\frac{n}{p} \mathcal{O}$ et par récurrence sur n, on obtient finalement $J = n\mathcal{O}$, donc $I = nP\mathcal{O}$.

Soit k un corps qui est une A-algèbre. Il est bien connu que l'algèbre $k \otimes_A \mathcal{H}$ est semi-simple si et seulement si les nombres premiers mauvais pour W et le polynôme de Poincaré sont inversibles dans k.

Le polynôme de Poincaré est inversible dans $\mathcal{O}$. Par conséquent, si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}$, l'algèbre $(\mathcal{O}/\mathfrak{p}) \otimes_A \mathcal{H}$ est semi-simple sauf si $\mathfrak{p}$ est l'idéal engendré par un mauvais nombre premier.

Lorsque W est de type A, alors $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$ est un produit d'algèbres de matrices sur $\mathcal{O}$ (car en plus $\mathbf{Q}(v) \otimes_A \mathcal{H}$ est semi-simple déployée).

Soit $\mathcal{M}$ le sous-monoïde du groupe des caractères de W donné par les caractères des $(\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H})$-modules projectifs.

THÉORÈME 2. – *Supposons que W n'a pas de facteur irréductible de type F_4 ou E_n. Alors, le monoïde $\mathcal{M}$ est abélien libre de base l'ensemble des caractères des représentations cellulaires.*

Démonstration. – Il suffit de démontrer le théorème lorsque W est irréductible – nous supposerons donc que c'est le cas.

Notons d'abord que les caractères des représentations cellulaires sont dans $\mathcal{M}$. Cela suffit pour conclure lorsque W est de type A.

Pour p premier, notons $\mathcal{M}_p$ le sous-monoïde du groupe des caractères de W formé des caractères des $(\widehat{\mathcal{O}}_p \otimes_A \mathcal{H})$-modules projectifs. On a $\mathcal{M} \subseteq \bigcap_p \mathcal{M}_p$.

Si W n'a qu'un mauvais nombre premier (type B ou D et alors le mauvais nombre premier est $p = 2$) le résultat découle du fait que l'ensemble des caractères des représentations cellulaires est une base de $\mathcal{M}_2$ ([1], théorème B).

Ce principe s'applique plus généralement aux blocs B de $\mathcal{O} \otimes_A \mathcal{H}$ tels que $\mathcal{O}\left[\frac{1}{2}\right] \otimes_{\mathcal{O}} B$ est un produit d'algèbres de matrices. C'est le cas lorsque le groupe associé à la famille donnée par le bloc n'est pas $\mathfrak{S}_n$ avec $n \geq 3$.

Le groupe G_2 a une seule famille ayant plusieurs éléments. Les matrices de décomposition et les caractères des représentations cellulaires de cette famille sont alors données par le tableau suivant :

$(1,1)$	1			1	1		1	1
$(1,r)$		1		1			1	
$(g_2,1)$	1					1	1	1
$(g_3,1)$			1		1			1

Nous avons suivi la notation de Lusztig ([3], § 4.8) : les caractères irréductibles de la famille sont $(1,1)$, $(1,r)$, $(g_2,1)$, $(g_3,1)$. Les trois premières colonnes forment une base de $\mathcal{M}_2$, les trois colonnes suivantes une base de $\mathcal{M}_3$ ([1], théorème C). Quant aux deux dernières colonnes, ce sont les caractères des représentations cellulaires.

On vérifie aisément que l'ensemble des caractères des représentations cellulaires forme une base de $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$. Puisque $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$, on en déduit que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$ a pour base l'ensemble des caractères des représentations cellulaires. □

L'auteur ignore si ce théorème est valable sans hypothèse sur W.

3. Décomposition des anneaux basés

Soit $(R, \mathcal{B})$ un *anneau basé* ([6], § 1.1) : R est un anneau libre de rang fini comme $\mathbf{Z}$-module et $\mathcal{B}$ est une base de R vérifiant les propriétés suivantes :
- les constantes de structures dans la base $\mathcal{B}$ sont des entiers naturels positifs ;
- il existe un sous-ensemble $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$ tel que $1 = \sum_{b \in \mathcal{B}_0} b$;
- soit $\tau : R \to \mathbf{Z}$ l'application $\mathbf{Z}$-linéaire donnée par

$$\tau(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \mathcal{B}_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe une anti-involution de $\mathbf{Z}$-algèbres $R \to R$, $r \mapsto \tilde{r}$, telle que $\tilde{b} \in \mathcal{B}$ pour $b \in \mathcal{B}$ et telle que

$$\tau(bb') = \begin{cases} 1 & \text{si } b' = \tilde{b}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont des idempotents.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathcal{B}_0$ pour la relation $b \sim b'$ si $bRb' \neq 0$. Pour $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, soit $t_{\mathbf{c}} = \sum_{b \in \mathbf{c}} b$. Les $t_{\mathbf{c}}$ sont des idempotents centraux deux à deux orthogonaux de R.

PROPOSITION 3. – *Les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont des idempotents primitifs. Pour $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, $t_{\mathbf{c}}$ est un idempotent primitif du centre de R.*

Démonstration. – Notons que la deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première.

Soit $b \in \mathcal{B}_0$. Alors, $(bRb, b\mathcal{B}b)$ est un anneau basé dont l'unité est dans la base et il suffit de démontrer la propriété dans ce cas. On suppose donc que $\tau(1) = 1$.

On a une décomposition

$$\tau = \sum_{\chi} c_{\chi} \chi,$$

où χ décrit l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathbf{C} \otimes R$ et $c_{\chi} \in \mathbf{C}$. D'après ([6], § 1.3 (d), 1.3 (c) et 1.4 (a)), c_{χ} est un nombre réel strictement positif.

Soit $e = \sum_{b \in \mathcal{B}} \alpha_b b$ un idempotent de R. On a $\tau(e) = \alpha_1 = \sum_{\chi} c_{\chi} \chi(e)$ et $\chi(e)$ est un entier naturel positif inférieur à $\chi(1)$. Puisque $\tau(1) = 1 = \sum_{\chi} c_{\chi} \chi(1)$, on déduit que $\alpha_1 = 0$ et $\chi(e) = 0$ pour tout χ ou que $\alpha_1 = 1$ et $\chi(e) = \chi(1)$ pour tout χ. Ainsi, $e = 0$ ou $e = 1$ et la proposition est prouvée. □

Remarque 1. – Si G est un groupe fini, alors $(\mathbf{Z}G, G)$ est un anneau basé et la proposition précédente est le résultat classique d'indécomposabilité de l'unité de $\mathbf{Z}G$.

4. Application aux groupes de réflexion complexes

Notre résultat permet de définir une partition des caractères irréductibles d'un groupe de réflexion complexe en familles. Par exemple, si $W = G_4$ est le groupe irréductible de dimension 2, d'ordre 24, engendré par des réflexions d'ordre 3, alors on trouve quatre familles de caractères irréductibles : il y a deux familles à un élément (le caractère trivial et le caractère de degré 3), une famille à deux éléments (le caractère de réflexion et son conjugué) et une famille à trois éléments (les deux caractères linéaires non triviaux et le caractère rationnel de degré 2).

Cette construction, qui semble s'accorder avec celle définie, pour certains groupes de réflexion, par Broué, Malle et Michel, est l'objet d'un travail en cours avec G. Malle.

Remerciements. Je remercie M. Broué, M. Geck et G. Malle pour leurs commentaires.

Références bibliographiques

[1] Gyoja A., Cells and modular representations of Hecke algebras, Osaka J. Math. 33 (1996) 307–341.
[2] Kazhdan D., Lusztig G., Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979) 165–184.
[3] Lusztig G., Characters of reductive groups over a finite field, Ann. of Math. Studies, Vol. 107, Princeton Univ. Press, 1984.
[4] Lusztig G., Cells in affine Weyl groups, II, J. of Alg. 109 (1987) 536–548.
[5] Lusztig G., Cells in affine Weyl groups, III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (Sect. IA) Math. 34 (1987) 223–243.
[6] Lusztig G., Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc. Symp. Pure Math. 47 (1987) 235–262.