

Quotients et extensions de groupes de réflexion

David Bessis · Cédric Bonnafé · Raphaël Rouquier

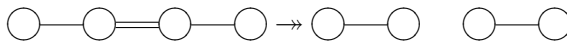
Accepté le 1 mars 2001 / Published online: 23 May 2002 – © Springer-Verlag 2002

Abstract. We give a geometric description of a certain class of epimorphisms between complex reflection groups. We classify these epimorphisms, which can be interpreted as “morphisms” between the diagrams symbolizing standard presentations by generators and relations for complex reflection groups and their braid groups.

1. Introduction

Dans l'étude des groupes de réflexion, il est classique de considérer certaines classes de bons sous-groupes (les sous-groupes paraboliques) et de bons automorphismes (les automorphismes “de diagramme”). Nous procédons ici à la définition et à l'étude d'une classe de bons quotients.

Notre motivation originale était de comprendre pourquoi les présentations par générateurs et relations classiques (voir les tables de [BrMaRou]) associées à différents groupes de réflexion présentent certaines similarités. Prenons l'exemple du diagramme de Coxeter de type F_4 . Quand on en supprime la double-barre, on obtient le diagramme de Coxeter de type $A_2 \times A_2$. En termes de présentations, supprimer la double-barre consiste à ajouter une relation de commutation. Ainsi cette opération décrit un morphisme surjectif de $W(F_4)$ vers $W(A_2 \times A_2)$:



Quelle est la signification géométrique d'un tel morphisme ? Quelles en sont les conséquences, en termes d'arrangements d'hyperplans, d'invariants polynomiels et de groupes de tresses ?

DAVID BESSIS

Department of Mathematics, Yale University, P.O. Box 208283, New Haven, CT 06520-8283, USA (e-mail: db278@math.yale.edu)

CÉDRIC BONNAFÉ

Université de Franche-Comté, Département de Mathématiques, 16 Route de Gray, 25000 Besançon, France (e-mail: bonnafa@math.univ-fcomte.fr)

RAPHAËL ROUQUIER

UFR de Mathématiques et Institut de Mathématiques de Jussieu (CNRS UMR 7586), Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France (e-mail: rouquier@math.jussieu.fr)

Des épimorphismes semblables apparaissent fréquemment entre groupes de réflexion complexes. Nous expliquons comment construire des suites exactes

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow W \longrightarrow 1$$

où \tilde{W} et W sont deux groupes de réflexion complexes.

Soit \tilde{W} un groupe de réflexion complexe, agissant sur un espace \tilde{V} . Dans la situation qui nous intéresse, G est un sous-groupe distingué de \tilde{W} et l'action de $W = \tilde{W}/G$ sur la variété quotient \tilde{V}/G s'étend en une action linéaire sur l'espace tangent V à \tilde{V}/G en 0.

Nous montrons que W est un groupe de réflexion sur V si et seulement si \tilde{V}/G est une intersection complète et W agit trivialement sur $\text{Tor}_{\ast}^{\mathbb{C}[V]}(\mathbb{C}[\tilde{V}/G], \mathbb{C})$.

Nous expliquons alors comment relier les degrés de \tilde{W} , son arrangement d'hyperplans, ses réflexions, ses sous-groupes paraboliques, son groupe de tresses à ceux de W . Par exemple, dans le cas (crucial) où G ne contient pas de réflexions, l'image d'une réflexion de \tilde{W} est une réflexion de W du même ordre.

Nous abordons ensuite (partie 4) le problème de la classification des paires (\tilde{W}, G) . Un des résultats obtenus est le suivant : lorsque \tilde{V} est de dimension 2 et $G = \{\pm 1\}$, la correspondance $\tilde{W} \mapsto W$ induit une bijection entre les classes de conjugaison de groupes de réflexion complexes de dimension 2 engendrés par des réflexions d'ordre 2 et contenant G et les groupes de Coxeter finis (non triviaux) de dimension au plus 3.

Nous donnons des tables de transformations élémentaires entre diagrammes "à la Coxeter" qui permettent de décrire récursivement l'ensemble des paires (\tilde{W}, G) . Nous expliquons comment le morphisme $\tilde{W} \rightarrow W$ peut être interprété comme un "morphisme de diagramme".

Dans une dernière partie, nous traitons le problème inverse : au lieu de construire W à partir de \tilde{W} et G , nous étudions l'existence d'un groupe de réflexion \tilde{W} étant donnés W et G .

La classification des groupes de réflexion complexes recèle de nombreuses coïncidences numérogiques et correspondances internes. Certaines de ces coïncidences sont bien comprises. Par exemple, certains groupes de réflexion sont des sous-groupes *paraboliques* d'autres groupes de réflexion. D'autres coïncidences sont expliquées par la théorie des éléments réguliers de Springer [Sp]. D'autres encore peuvent être interprétées grâce à la correspondance de McKay. Le présent travail permet d'expliquer un nouveau type de correspondance entre groupes de réflexion.

Outre le fait qu'elle permet de mieux comprendre la classification de Shephard-Todd, un des intérêts de la correspondance décrite ici est de relier des groupes de Coxeter, dont la combinatoire est bien connue, à certains groupes de réflexion complexes (non réels) pour lesquels des présentations ne sont connues que de façon empirique.

Nous détaillons par exemple le cas du groupe exceptionnel G_{31} qui admet comme quotient de réflexion le groupe symétrique \mathfrak{S}_6 , faisant apparaître une hypersurface \mathfrak{S}_6 -invariante remarquable de \mathbb{C}^5 . Or, si un diagramme pour G_{31} est proposée dans [BrMaRou], la question de savoir si ce diagramme donne aussi une présentation du groupe de tresses associé est toujours ouverte. Ce diagramme est compatible, via le morphisme $G_{31} \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_6$, avec la présentation de Coxeter de \mathfrak{S}_6 , indice qui renforce la conviction qu’il est probablement le “bon” diagramme pour G_{31} .

Reste bien entendu à préciser quelles propriétés exactes doivent vérifier de “bons” diagrammes des groupes de réflexion complexes. Le présent travail fournit une nouvelle condition de compatibilité à inclure dans le cahier des charges.

2. Préliminaires

Soit k un corps de caractéristique nulle. Si n est un entier naturel non nul, on notera $\mu_n(k)$ le groupe des racines n -èmes de l’unité dans k .

2.1. Soit W un groupe fini agissant sur une k -algèbre A . Si I est un idéal de A , on notera W_I (ou $W_{\text{Spec } A/I}$) le groupe d’inertie de I . Si χ est un caractère irréductible de W , on notera A_χ^W la composante χ -isotypique de A .

2.2. Soit V un espace vectoriel (tous les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie) sur k . On notera V^* le dual de V et $k[V] = S(V^*)$, l’algèbre symétrique de V^* . Nous confondrons parfois le schéma $\text{Spec } k[V]$ et l’espace vectoriel de ses points sur k , i.e., V . Soit I un idéal de $k[V]$. On dira que I (ou $\text{Spec } k[V]/I$) est une intersection complète si le nombre minimal de générateurs de I est égal à $\dim V - \dim(\text{Spec } k[V]/I)$.

Une graduation sur V est une action de k^\times avec poids strictement positifs. On dira qu’une graduation est standard si les poids sont tous 1. Si V est muni d’une graduation, alors l’algèbre $k[V]$ hérite d’une graduation, c’est-à-dire, d’une action de k^\times avec poids positifs ou nuls.

2.3. Soit A une k -algèbre commutative de type fini, munie d’une graduation. Soit A_n la composante de degré n de A . On pose $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_i$. On suppose que $A_0 = k$: en particulier, A_+ est un idéal maximal de A . Soit $X = \text{Spec } A$ et soit 0 le point de X correspondant à l’idéal maximal A_+ de A . Si I est un idéal homogène de A , alors le nombre minimal de générateurs homogènes de l’idéal I est $\dim I/A_+I$ par le lemme de Nakayama.

L’espace tangent $V = (A_+/(A_+)^2)^*$ au schéma X en 0 est un k -espace vectoriel gradué. Le lemme suivant est classique :

Lemme 2.1. *Soient p_1, \dots, p_n des éléments homogènes de A_+ . Alors A est engendrée par p_1, \dots, p_n si et seulement si les images de p_1, \dots, p_n dans $V^* = A_+/(A_+)^2$ engendrent V^* . En particulier, $\dim V$ est le nombre minimal de générateurs de A .*

D’après le Lemme 2.1, une scission graduée $V^* \rightarrow A_+$ du morphisme surjectif $A_+ \rightarrow V^*$ induit un morphisme surjectif de k -algèbres graduées $k[V] \rightarrow A$, c’est-à-dire une immersion fermée de $\text{Spec } A$ dans son espace tangent en 0. Si A est une algèbre de polynômes, alors l’application construite est un isomorphisme.

2.4. Soit \tilde{V} un k -espace vectoriel gradué et soit G un sous-groupe fini de $GL_{grad}(\tilde{V})$, où $GL_{grad}(\tilde{V})$ est le sous-groupe de $GL(\tilde{V})$ des éléments commutant à l’action de k^\times . On note $N(G)$ le normalisateur de G dans $GL_{grad}(\tilde{V})$: $N(G)$ est un groupe réductif (non nécessairement connexe) dont la composante connexe de l’élément neutre est le centralisateur de G dans $GL_{grad}(\tilde{V})$.

L’algèbre $k[\tilde{V}]^G$ est une k -algèbre commutative graduée de type finie et $k[\tilde{V}]_0^G = k$. Le groupe $N(G)$ agit de manière graduée sur la k -algèbre $k[\tilde{V}]^G$ et, puisqu’il est réductif et que k est de caractéristique 0, on peut choisir une scission graduée $N(G)$ -équivariante $V^* \rightarrow k[\tilde{V}]_+^G$ du morphisme $k[\tilde{V}]_+^G \rightarrow V^*$, où $V = (k[\tilde{V}]_+^G / (k[\tilde{V}]_+^G)^2)^*$. On identifiera \tilde{V}/G avec le schéma $\text{Spec} k[\tilde{V}]^G$. Alors V est l’espace tangent à \tilde{V}/G en 0 et la scission précédente induit une immersion fermée $N(G)$ -équivariante $\tilde{V}/G \rightarrow V$.

On note I le noyau du morphisme surjectif d’algèbres $k[V] \rightarrow k[\tilde{V}]^G$, c’est-à-dire l’idéal de définition du schéma \tilde{V}/G dans V . On dit que G est d’*intersection complète* si l’idéal I l’est ou, de manière équivalente, si $\dim I/k[V]_+I = \dim V - \dim \tilde{V}$ (en effet, $\text{Krulldim} k[\tilde{V}]^G = \dim \tilde{V}$).

L’ensemble des *degrés* de G est l’ensemble des poids de k^\times agissant sur V (pris avec multiplicités). C’est aussi l’ensemble des degrés d’un système minimal d’invariants fondamentaux homogènes de G dans son action sur $k[\tilde{V}]$. L’ensemble des *degrés des relations* de G est l’ensemble des poids de k^\times sur $I/k[V]_+I$. On notera $N(G, rel)$ le sous-groupe de $N(G)$ des éléments qui agissent trivialement sur $I/k[V]_+I$.

On appelle *réflexion* de V un automorphisme g d’ordre fini tel que $\ker(g - 1)$ est un hyperplan de V . On dira que G est de *réflexion* s’il est engendré par ses réflexions. Le théorème de Shephard-Todd-Chevalley [Ben, Théorème 7.2.1] donne plusieurs caractérisations des groupes de réflexion en termes de leur algèbre d’invariants :

Théorème 2.2 (Shephard-Todd-Chevalley). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) G est de réflexion,
- (ii) $k[V]^G$ est une algèbre de polynômes,
- (iii) $k[V]$ est un $(k[V]^G)[G]$ -module libre de rang 1.

L’équivalence entre les assertions (i) et (ii) du Théorème 2.2 montre qu’un groupe de réflexion est d’intersection complète.

On appelle *double réflexion* de V un endomorphisme g d’ordre fini tel que $\ker(g - 1)$ est de codimension 2 dans V . Kac et Watanabe [KaWa, Théorème A]

ont montré que, si G est d'intersection complète, alors G est engendré par ses réflexions et ses doubles réflexions (la réciproque n'est pas vraie).

2.5. Si V est un k -espace vectoriel, W est un groupe de réflexion dans $GL_{grad}(\tilde{V})$ et L est un sous-espace de V , alors le groupe W_L est de réflexion sur V [Ste, Théorème 1.5]. On note $\mathcal{A}(W)$ l'ensemble des hyperplans des réflexions de W . Si W' est un groupe de réflexion sur V' , on dira que $f : W \rightarrow W'$ est un morphisme de groupes de réflexion si c'est un morphisme de groupes et si l'image d'une réflexion de W est 1 ou une réflexion de W' .

3. Quotients de groupes de réflexion

Soient \tilde{W} un groupe de réflexion sur un k -espace vectoriel \tilde{V} , G un sous-groupe distingué de \tilde{W} et $W = \tilde{W}/G$. Soit V l'espace tangent à \tilde{V}/G en 0. On fixe un plongement $N(G)$ -équivariant $\tilde{V}/G \rightarrow V$. On pose $B = k[\tilde{V}]$, $A = k[V]$ et on note I l'idéal de A définissant la sous-variété fermée \tilde{V}/G . On a $B^{\tilde{W}} = (A/I)^{\tilde{W}} = A^{\tilde{W}}/I^{\tilde{W}}$.

On note $\mathcal{A}'(\tilde{W})$ le sous-ensemble des éléments H de $\mathcal{A}(\tilde{W})$ tels que $\tilde{W}_H \neq G_H$. On définit $\bar{\mathcal{A}}'(\tilde{W})$ comme le quotient de $\mathcal{A}'(\tilde{W})$ par la relation d'équivalence qui identifie H et H' si \tilde{W}_H et $\tilde{W}_{H'}$ ont la même image dans W . Pour $H \in \bar{\mathcal{A}}'(\tilde{W})$, on fixe une forme linéaire $\alpha_H \in B$ définissant H . Pour $C \subseteq \bar{\mathcal{A}}'(\tilde{W})$, on pose $\alpha_C = \prod_{H \in C} \alpha_H^{e_H}$ où $e_H = |G_H|$.

Dans cette partie, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe W soit de réflexion sur V (cf. Théorème 3.2). Lorsque cette condition est réalisée, nous comparons les propriétés des groupes W et \tilde{W} (sous-groupes paraboliques, ordres des réflexions, arrangements d'hyperplans, degrés des invariants, groupes de tresses associés...).

3.1. Bons sous-groupes distingués des groupes de réflexion

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que W est de réflexion sur V si et seulement si G est d'intersection complète et W agit trivialement sur I/A_+I . Cette deuxième condition a plusieurs interprétations qui sont données par le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) le schéma $\tilde{V}/\tilde{W} \times_{V/W} V$ est réduit ;
- (ii) l'application canonique $\tilde{V}/G \rightarrow \tilde{V}/\tilde{W} \times_{V/W} V$ est un isomorphisme ;
- (iii) on a $I = AI^W$;
- (iv) W agit trivialement sur $\text{Tor}_1^A(A/I, A/A_+) \simeq I/A_+I$.

Démonstration. On a $\tilde{V}/\tilde{W} \times_{V/W} V = \text{Spec } A^W/I^W \otimes_{A^W} A = \text{Spec } A/(AI^W)$. D'autre part, l'application canonique $\tilde{V}/G \rightarrow \tilde{V}/\tilde{W} \times_{V/W} V$ est bijective sur les points fermés. Il résulte alors du Nullstellensatz que l'application canonique $A/(AI^W) \rightarrow A/I$ est un isomorphisme si et seulement si $A/(AI^W)$ est réduit. En outre, c'est un isomorphisme si et seulement si I est engendré par des éléments W -invariants.

On a $\text{Tor}_1^A(A/I, A/A_+) \simeq I/A_+I$. Ainsi, W agit trivialement sur ce module si et seulement si $I = AI^W + A_+I$. D'après le lemme de Nakayama, $I = AI^W + A_+I$ implique $I = AI^W$.

Le résultat suivant est dans la même veine que les §3.3.2 et 3.3.3 de [Go].

Théorème 3.2. *Le groupe W est de réflexion sur V si et seulement si G est d'intersection complète et W agit trivialement sur I/A_+I .*

Démonstration. Supposons que W agit trivialement sur I/A_+I et que A/I est une intersection complète. Alors, I peut être engendré par r éléments W -invariants, où $r = \dim V - \dim \tilde{V}$ (Lemme 3.1, équivalence entre (iii) et (iv)). Par conséquent, l'idéal I^W de A^W est engendré par r éléments. Puisque $A^W/I^W = B^{\tilde{W}}$ est une algèbre de polynômes en $\dim \tilde{V}$ variables, A^W est engendrée par $\dim \tilde{V} + r$ éléments. Comme $\text{Krulldim } A^W = \dim V = \dim \tilde{V} + r$, on en déduit que A^W est une algèbre de polynômes, donc que W est de réflexion sur V .

Supposons W de réflexion sur V . Alors, A est un A^W -module libre de rang $|W|$, donc $A^W/I^W \otimes_{A^W} A$ est un $A^W/I^W = B^{\tilde{W}}$ -module libre de rang $|W|$. Puisque $B \simeq B^{\tilde{W}}[\tilde{W}]$ comme $B^{\tilde{W}}[\tilde{W}]$ -modules, on a $B^G \simeq B^{\tilde{W}}[W]$ comme $B^{\tilde{W}}[W]$ -modules. Par conséquent, $A/I = B^G$ est un $B^{\tilde{W}}$ -module libre de rang $|W|$. Finalement, la surjection canonique $A^W/I^W \otimes_{A^W} A \rightarrow A/I$ est un isomorphisme, donc W agit trivialement sur I/A_+I par le Lemme 3.1, équivalence entre (ii) et (iv).

Puisque A^W et A^W/I^W sont des algèbres de polynômes, I^W est engendré par r éléments. Par conséquent, I est engendré par $r = \text{Krulldim } A - \text{Krulldim } A/I$ éléments, donc I est une intersection complète.

Le Théorème 3.2 nous amène à la définition suivante :

Définition 3.3. *On dira que G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} (ou simplement que G est bon dans \tilde{W}) si G est d'intersection complète et si W agit trivialement sur I/A_+I .*

Si G est bon dans \tilde{W} , on a une action triviale de W sur sur les groupes Tor supérieurs :

Proposition 3.4. *Si G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} , alors on a un isomorphisme de $A^W[W]$ -modules :*

$$\text{Tor}_*^A(A/I, A/A_+) \simeq \text{Tor}_*^{A^W}(A^W/I^W, A^W/(A^W)_+).$$

Démonstration. On a

$$A^W/I^W \otimes_{A^W}^L A \simeq A^W/I^W \otimes_{A^W} A \simeq A/I$$

car A est libre comme A^W -module et $I = AI^W$ car G est bon (\otimes^L désigne le foncteur dérivé à gauche de \otimes). Puisque

$$(A^W/I^W \otimes_{A^W}^L A) \otimes_A^L A/A_+ \simeq A^W/I^W \otimes_{A^W}^L (A \otimes_A^L A/A_+),$$

on a

$$A/I \otimes_A^L A/A_+ \simeq A^W/I^W \otimes_{A^W}^L A^W/(A^W)_+.$$

Proposition 3.5. *Si G est de réflexion, alors c 'est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} .*

Démonstration. En effet, on a alors un isomorphisme $\tilde{V}/G \xrightarrow{\sim} V$ et le Théorème 3.2 apporte la conclusion.

Remarque 3.6. Si G est d'intersection complète, il n'est pas nécessairement bon dans \tilde{W} . Pour $\tilde{W} = \mu_2(\mathbf{C}) \times \mu_4(\mathbf{C})$ agissant sur \mathbf{C}^2 et G le sous-groupe engendré par $(-1, -1)$, G est d'intersection complète mais n'est pas bon dans \tilde{W} .

Remarque 3.7. On suppose ici que G n'est pas de réflexion. Si l'action de G sur \tilde{V} est absolument irréductible, alors $N(G, rel)$ est fini.

Soit d le pgcd des degrés des relations de G . Alors, $N(G, rel) \cap k^\times = \mu_d(k)$. Par conséquent, si \tilde{W} est irréductible et G est bon dans \tilde{W} , alors l'ordre du centre de \tilde{W} divise d (en effet, un groupe de réflexion est irréductible si et seulement si il est absolument irréductible).

Remarque 3.8. Supposons G d'intersection complète. Alors, G est bon dans \tilde{W} si et seulement si \tilde{W} est contenu dans $N(G, rel)$. D'autre part, si \tilde{V}/G est une hypersurface (i.e., $\text{Tor}_1^A(A/I, A/A_+)$ est de dimension 1) et k est algébriquement clos, alors $N(G) = k^\times \cdot N(G, rel)$.

3.2. Propriétés du quotient

On suppose ici que G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} . On sait que $Z = \tilde{V}/G$ est une intersection complète. Notons $q : \tilde{W} \rightarrow W$ la surjection canonique et $p : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/G = Z \hookrightarrow V$. Nous allons étudier dans ce paragraphe les propriétés des applications p et q .

3.2.1. *Sous-groupes paraboliques.* La propriété de la paire (\tilde{W}, G) est héritée par les sous-groupes paraboliques :

Théorème 3.9. *Soit $x \in \tilde{V}$. Alors, G_x est bon dans W_x : de plus, l'application canonique de l'espace tangent à \tilde{V}/G_x en x vers V est injective et elle induit un isomorphisme de groupes de réflexion $\tilde{W}_x/G_x \xrightarrow{\sim} W_{p(x)}$.*

Démonstration. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de B définissant x . Notons $H = G_x$ le groupe de décomposition de \mathfrak{m} dans G , $\tilde{K} = \tilde{W}_x$ le groupe de décomposition de \mathfrak{m} dans \tilde{W} et $K = \tilde{K}/H$.

Soit $\mathfrak{m}_H = \mathfrak{m} \cap B^H$ et $\mathfrak{m}_G = \mathfrak{m} \cap B^G$. Notons que K est le groupe de décomposition de \mathfrak{m}_G .

Le morphisme $\text{Spec } B_{\mathfrak{m}_H}^H \rightarrow \text{Spec } B_{\mathfrak{m}_G}^G$ est étale, donc il induit un isomorphisme de kK -modules $(\mathfrak{m}_H/\mathfrak{m}_H^2)^* \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2)^*$. Il s'agit donc de démontrer que K est de réflexion sur $E = (\mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2)^*$.

Soit \mathfrak{n} l'idéal maximal de A au-dessus de \mathfrak{m}_G . L'application naturelle de l'espace tangent E de $A_{\mathfrak{n}}/I_{\mathfrak{n}}$ vers l'espace tangent de $A_{\mathfrak{n}}$ est injective. Cette application est K -équivariante. L'espace tangent de $A_{\mathfrak{n}}$ est canoniquement isomorphe à V (et cet isomorphisme est compatible à l'action de K). Puisque K agit fidèlement sur E et est de réflexion sur V (c'est le groupe de décomposition de \mathfrak{n}), il est de réflexion sur E , d'où le résultat.

Corollaire 3.10. *Soit L un sous-espace de \tilde{V} . Alors, G_L est un bon sous-groupe distingué de W_L . L'application canonique $\tilde{W}_L/G_L \rightarrow W_{p(L)}$ est un isomorphisme de groupes de réflexion.*

Démonstration. Choisissons un point $x \in L$ tel que $\tilde{W}_x = \tilde{W}_L$. Les espaces tangents à V/G_x en x et 0 sont isomorphes de manière \tilde{W}_x -équivariante, donc \tilde{W}_x/G_x est un groupe de réflexion sur l'espace tangent à \tilde{V}/G_x en 0 , d'après le Théorème 3.9 et l'application canonique $\tilde{W}_x/G_x \rightarrow W_{p(x)}$ est un isomorphisme qui envoie une réflexion sur une réflexion.

Remarque 3.11. Si on prend \tilde{W}' un sous-groupe de réflexion quelconque de \tilde{W} , alors $G \cap \tilde{W}'$ n'est pas nécessairement bon dans \tilde{W}' (prendre $\tilde{W} = \mu_4(\mathbb{C}) \times \mu_4(\mathbb{C})$, $\tilde{W}' = \mu_4(\mathbb{C}) \times \mu_2(\mathbb{C})$ et $G = \tilde{W} \cap SL_2(\mathbb{C})$).

3.2.2. *Comparaison entre W et \tilde{W} .* On notera $m \wedge n$ le plus grand diviseur commun de deux entiers positifs m et n .

Théorème 3.12. *On a les propriétés suivantes :*

- (i) G est engendré par des réflexions et des doubles réflexions.
- (ii) Le morphisme $\tilde{W} \rightarrow W$ est un morphisme de groupes de réflexion. L'image d'une réflexion s d'ordre r autour d'un hyperplan \tilde{H} est une réflexion d'ordre $r/(r \wedge e_{\tilde{H}})$ si $r \nmid e_{\tilde{H}}$; son déterminant est alors $\det(s)^{e_{\tilde{H}}}$.

- (iii) Soit $\tilde{H} \in \mathcal{A}'(\tilde{W})$. Alors, il existe un unique hyperplan de réflexion $\phi(\tilde{H})$ de W contenant $p(\tilde{H})$. L'application ϕ est un isomorphisme $\overline{\mathcal{A}'}(\tilde{W}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(W)$. Pour $H \in \mathcal{A}(W)$, l'ensemble $\phi^{-1}(H)$ est la réunion des composantes irréductibles de $p^{-1}(H \cap Z)$.
- (iv) Pour $H \in \mathcal{A}(W)$, il existe une forme linéaire $\alpha_H \in A$ définissant H dont l'image dans A/I est $\alpha_{\phi^{-1}(H)}$. L'algèbre B^G est engendrée par $\{\alpha_{\phi^{-1}(H)}\}_{H \in \mathcal{A}(W)}$ et $B^{\tilde{W}}$.
- (v) Soit H un hyperplan de réflexion de W et H_1, H_2 deux composantes irréductibles distinctes de $p^{-1}(H \cap Z)$. Alors, $H_1 \cap H_2$ est contenu dans le lieu de ramification de G .

Démonstration. Puisque \tilde{V}/G est une intersection complète, (i) résulte de [KaWa, Théorème A].

L'assertion (ii) est une conséquence immédiate du Corollaire 3.10.

Soit $\tilde{H} \in \mathcal{A}'(\tilde{W})$. D'après (ii) et le Corollaire 3.10, il existe un unique hyperplan de réflexion $\phi(\tilde{H})$ contenant $p(\tilde{H})$. Puisque l'image de \tilde{H} dans $\overline{\mathcal{A}'}(\tilde{W})$ est déterminée par $W_{\phi(\tilde{H})}$, l'application ϕ est injective.

Pour $H \in \mathcal{A}(W)$, $H \cap Z$ est purement de codimension 1 dans Z . La sous-variété $p^{-1}(H \cap Z)$ de \tilde{V} est une réunion (non vide) d'hyperplans de réflexion, car c'est une sous-variété fermée purement de codimension 1 de \tilde{V} contenue dans le lieu de ramification de \tilde{W} . Cela prouve la surjectivité de ϕ et donc (iii).

Soit $H \in \mathcal{A}(W)$ et $\alpha_H \in A$ une forme linéaire définissant H . Alors, l'image α de α_H dans A/I est, à une constante près, un produit $\prod_{\tilde{H} \in \phi^{-1}(H)} \alpha_{\tilde{H}}^{a_{\tilde{H}}}$ avec $a_{\tilde{H}} \geq 1$. Soit $\tilde{H} \in \phi^{-1}(H)$, $x \in \tilde{H}$ tel que $\tilde{W}_{\tilde{H}} = \tilde{W}_x$ et \mathfrak{m} l'idéal maximal correspondant de B . Soit $\mathfrak{m}_G = \mathfrak{m} \cap B^G$ et $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m} \cap B^K$ où $K = G_x$. Soit \mathfrak{n} l'idéal maximal de A au dessus de \mathfrak{m}_G . Le noyau de l'application canonique $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2$ est contenu dans les invariants par \tilde{W}_x (car \tilde{W}_x/K est un groupe de réflexion sur $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ et agit fidèlement sur $\mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2$). Par conséquent, l'image de $\alpha_H + \mathfrak{n}^2$ par cette application est non-nulle. Ainsi, l'idéal $\alpha B_{\mathfrak{m}_G}^G$ de l'anneau local régulier $B_{\mathfrak{m}_G}^G$ est premier. Puisque $B_{\mathfrak{m}_K}^K$ est étale sur $B_{\mathfrak{m}_G}^G$, l'idéal premier $\alpha_{\tilde{H}}^{e_{\tilde{H}}} B_{\mathfrak{m}_K}^K$ de $B_{\mathfrak{m}_K}^K$ est engendré par α . Par conséquent, $\alpha B_{\mathfrak{m}} = \alpha_{\tilde{H}}^{e_{\tilde{H}}} B_{\mathfrak{m}}$, donc $a_{\tilde{H}} = e_{\tilde{H}}$.

Puisque $\{\alpha_H\}_{H \in \mathcal{A}(W)}$ et A^W engendrent A , on a établi (iv).

Soient s_1 et s_2 deux réflexions de \tilde{W} d'hyperplans de réflexion H_1 et H_2 telles que $q(s_1) = q(s_2)$ — cela existe par (ii). Soit $g = s_1 s_2^{-1}$. On a $g \in G$ et g n'est pas trivial, puisqu'il agit non trivialement sur $H_1 \setminus (H_1 \cap H_2)$. Comme g agit trivialement sur $H_1 \cap H_2$, on en déduit (v).

Remarque 3.13. La sous-variété $p(\tilde{H})$ de V peut être contenue dans un sous-espace vectoriel strict de $\phi(\tilde{H})$ (prendre $\tilde{W} = \mu_2(\mathbf{C}) \times \mu_2(\mathbf{C})$ et G engendré par $(-1, -1)$). En outre, la variété $H \cap Z$ n'est pas nécessairement irréductible (même exemple).

Corollaire 3.14. *Supposons que G ne contient pas de réflexions (c'est-à-dire, $e_{\tilde{H}} = 1$ pour $\tilde{H} \in \mathcal{A}(\tilde{W})$). Alors,*

- (i) G est engendré par des doubles réflexions.
- (ii) Une réflexion de \tilde{W} a pour image dans W une réflexion du même ordre.
- (iii) G est contenu dans $SL(\tilde{V})$.
- (iv) L'image de l'idéal Jacobien de A^W sur A est l'idéal Jacobien de $B^{\tilde{W}}$ sur B .

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du Théorème 3.12.

Puisque $\alpha_C \in B^G$ pour $G \in \mathcal{A}(\tilde{W})$ (Théorème 3.12 (iv)), on a $\alpha_{\mathcal{A}(\tilde{W})} \in B^G$. Or, $\alpha_{\mathcal{A}(\tilde{W})} \in B_{\det^{-1}}^{\tilde{W}}$ (cf. par exemple le Lemme 3.24), donc $\det|_G = 1$, ce qui montre (iii).

L'assertion (iv) est une conséquence du Théorème 3.12 (iv), car l'idéal Jacobien de A^W sur A est engendré par $\prod_{H \in \mathcal{A}(W)} \alpha_H^{|W_H|-1}$ et l'idéal Jacobien de $B^{\tilde{W}}$ sur B par $\prod_{\tilde{H} \in \mathcal{A}(\tilde{W})} \alpha_{\tilde{H}}^{|\tilde{W}_{\tilde{H}}|-1}$.

Remarque 3.15. Soit H le sous-groupe de G engendré par les réflexions de G . Quitte à remplacer \tilde{W} , G et \tilde{V} par \tilde{W}/H , G/H et \tilde{V}/H , on se ramène grâce à la Proposition 3.5 au cas où G ne contient pas de réflexions, c'est-à-dire, au cas où l'application $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/G$ est non ramifiée en codimension 1.

La relation entre les degrés de \tilde{W} , W et G est donnée par la proposition immédiate suivante (cf. Remarque 3.7) :

Proposition 3.16. *Munissons \tilde{V} de sa graduation standard et V de la graduation induite. Soit V_i le sous-espace de V de degré i , W_i le fixateur de $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ et E_i l'ensemble des degrés de W_i pour la graduation standard sur V_i .*

Alors $W = \times_i W_i$ et W_i est un groupe de réflexion sur V_i . En outre, $\bigcup_i i E_i$ est la réunion de l'ensemble des degrés de \tilde{W} avec l'ensemble des degrés des relations de G .

Dans le cas d'un groupe de Coxeter \tilde{W} , le groupe W est naturellement un groupe de Coxeter :

Proposition 3.17. *Supposons que (\tilde{W}, \tilde{S}) est un groupe de Coxeter dans sa représentation naturelle. Soit S l'ensemble des éléments non triviaux de l'image de \tilde{S} dans W . Alors (W, S) est un groupe de Coxeter.*

Démonstration. Nous avons ici $k = \mathbf{R}$. Dans cette preuve, nous considérerons la topologie classique. Soit X (resp. \tilde{X}) le complémentaire des hyperplans de réflexion de W (resp. \tilde{W}) dans V (resp. \tilde{V}). Alors, \tilde{S} est l'ensemble des réflexions par rapport aux murs d'une chambre \tilde{C} (=composante connexe) de \tilde{X} . Soit D

l'image de \tilde{C} dans V . Alors, D est connexe et on note C la composante connexe de X la contenant.

Soit \tilde{H} un hyperplan de réflexion d'un élément $\tilde{s} \in \tilde{S}$ tel que $\tilde{s} \notin G$. Soit \tilde{H}^+ l'intersection de \tilde{H} avec l'adhérence de \tilde{C} . Alors, $p(\tilde{H}^+)$ est contenu dans l'adhérence de C . Puisque $p(\tilde{H}^+)$ est contenu dans un unique hyperplan de réflexion $\phi(\tilde{H})$ de W (Théorème 3.12 (iii)), cet hyperplan est un mur de la chambre C . Par conséquent, l'image de \tilde{s} est une réflexion autour d'un mur de C .

3.2.3. Groupes de tresses. Dans ce paragraphe, nous supposons que $k = \mathbf{C}$. La topologie considérée sera la topologique classique. Posons :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{V} - \bigcup_{\tilde{H} \in \mathcal{A}(\tilde{W})} \tilde{H}$$

et

$$\mathcal{M} = V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}(W)} H.$$

Soit $x_0 \in \tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{B} = \pi_1(\tilde{\mathcal{M}}/\tilde{W}, x_0)$ et $B = \pi_1(\mathcal{M}/W, p(x_0))$. D'après le Théorème 3.12, (iii), l'application $p : \tilde{V} \rightarrow V$ vérifie $p(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{M}$ donc elle induit un morphisme de groupes $p_* : \tilde{B} \rightarrow B$.

Soit $\tilde{H} \in \mathcal{A}(\tilde{W})$, γ un chemin de \tilde{V} tel que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(t) \in \tilde{\mathcal{M}}$ pour $t < 1$ et $\gamma(1) \in \tilde{H} - \bigcup_{\tilde{H}' \in \mathcal{A}(\tilde{W}), \tilde{H}' \neq \tilde{H}} \tilde{H} \cap \tilde{H}'$. Soit $s_{\tilde{H}}$ le générateur de déterminant $\exp(2i\pi/|\tilde{W}_{\tilde{H}}|)$ de $\tilde{W}_{\tilde{H}}$. On note $[\gamma] \in \tilde{B}$ la classe d'homotopie de chemins de x_0 à $s_{\tilde{H}}(x_0)$ dans $\tilde{\mathcal{M}}$ associée à γ [BrMaRou, Appendix 1 et §2.13] : c'est un $s_{\tilde{H}}$ -générateur de la monodromie.

Alors $p([\gamma]) = [p(\gamma)]$. Si $\tilde{H} \in \mathcal{A}'(\tilde{W})$, c'est un $q(s_{\tilde{H}})$ -générateur de la monodromie. Sinon, c'est l'élément neutre de B .

Supposons maintenant que \tilde{W} est le complexifié d'un groupe de réflexion réel agissant sur l'espace vectoriel réel \tilde{V}' , avec $\tilde{V} = \tilde{V}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. On reprend les notations de la Proposition 3.17 et de sa preuve. On fixe une chambre \tilde{C} de \tilde{W} dans \tilde{V}' et on choisit un point x_0 de \tilde{C} . Pour $\tilde{s} \in \tilde{S}$, on choisit un chemin γ dans \tilde{V}' avec $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(t) \in C$ pour $t < 1$ et $\tilde{W}_{\gamma(1)} = \langle \tilde{s} \rangle$. Soit $\sigma_{\tilde{s}} = [\gamma]$ l'élément de \tilde{B} associé. Brieskorn [Br] a montré (voir aussi Deligne [De, Théorème 4.4]) que \tilde{B} est engendré par les $\sigma_{\tilde{s}}$, avec $\tilde{s} \in \tilde{S}$ et que les relations entre les $\sigma_{\tilde{s}}$ sont les relations de tresses.

De même, on a des générateurs σ_s de B pour $s \in S$: d'après ce qui précède, ce sont les images des $\sigma_{\tilde{s}}$, pour $\tilde{s} \in \tilde{S}$, $\tilde{s} \notin G$.

On a montré le résultat suivant :

Proposition 3.18. *Si \tilde{W} est le complexifié d'un groupe de réflexion réel, alors l'application canonique $p_* : \tilde{B} \rightarrow B$ est une surjection. Elle envoie $\sigma_{\tilde{s}}$ sur $\sigma_q(\tilde{s})$ si $\tilde{s} \notin G$ et sur 1 sinon.*

Cette proposition reste vraie dans le cas général où \tilde{W} n'est pas nécessairement le complexifié d'un groupe de réflexion réel (voir [Bes, Proposition 4.3]).

3.2.4. *Extensions successives et réductibilité.* La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.19. *Soit \tilde{W}' un sous-groupe de réflexion de \tilde{W} contenant G . Alors, G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}' .*

Remarque 3.20. Il se peut que G soit un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}' sans être un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} (prendre $\tilde{W}' = \mu_2(\mathbb{C}) \times \mu_2(\mathbb{C})$ dans la Remarque 3.6).

Proposition 3.21. *Soit H un sous-groupe distingué de \tilde{W} contenant G . Alors, H est bon dans \tilde{W} si et seulement si H/G est bon dans W .*

Si H est bon dans \tilde{W} , l'isomorphisme canonique $\tilde{W}/H \xrightarrow{\sim} W/(H/G)$ est un isomorphisme de groupes de réflexion.

Démonstration. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de A^H définissant le point 0 de V/H . L'injection de \tilde{V}/G dans V induit une injection du plan tangent $(\mathfrak{m}/(I^H + \mathfrak{m}^2))^*$ à \tilde{V}/H en 0 dans le plan tangent $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ à V/H en 0. La proposition découlera de la propriété de \tilde{W} d'agir trivialement sur le conoyau de cette injection.

On a $I = I^{\tilde{W}}A$ (Théorème 3.2), donc $I^H = I^{\tilde{W}}A^H = I^{\tilde{W}} + I^{\tilde{W}}\mathfrak{m} \subseteq I^{\tilde{W}} + \mathfrak{m}^2$ et finalement $I^H + \mathfrak{m}^2 = I^{\tilde{W}} + \mathfrak{m}^2$. Par conséquent, \tilde{W} agit trivialement sur $(I^H + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2$ qui est le noyau de la surjection canonique $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/(I^H + \mathfrak{m}^2)$.

Les Propositions 3.21 et 3.5 ramènent la classification des paires (\tilde{W}, G) (avec G bon) au cas où G est de réflexion ou bien ne contient pas de réflexions.

Si le groupe \tilde{W} est réductible, une décomposition de \tilde{W} est presque toujours compatible à une décomposition de G :

Proposition 3.22. *Soient \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 des sous-espaces \tilde{W} -stables de \tilde{V} avec $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$. Soient $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_{\tilde{V}_1}$ et $\tilde{W}_2 = \tilde{W}_{\tilde{V}_2}$. Alors $G_1 = G \cap \tilde{W}_1$ (resp. $G_2 = G \cap \tilde{W}_2$) est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}_1 (resp. \tilde{W}_2). En outre, $G/(G_1 \times G_2)$ est un bon sous-groupe distingué de $\tilde{W}/(G_1 \times G_2)$.*

Si $G_1 = G_2 = 1$, $G \neq 1$ et \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 sont irréductibles, alors, \tilde{V} est de dimension 2, il existe un entier d tel que \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 sont des groupes de réflexion cycliques d'ordre d et $G = \tilde{W} \cap SL(\tilde{V})$.

Démonstration. D'après le Corollaire 3.10, G_1 et G_2 sont bons dans \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 . Par conséquent, $G_1 \times G_2$ est bon dans \tilde{W} . Il résulte maintenant de la Proposition 3.21 que $G/(G_1 \times G_2)$ est bon dans $\tilde{W}/(G_1 \times G_2)$.

Supposons maintenant $G_1 = G_2 = 1$, $G \neq 1$ et \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 irréductibles. Examinons tout d'abord le cas où \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 sont de dimension 1. Alors \tilde{W} est abélien et

G ne contient pas de réflexion. Par conséquent, $G \subseteq SL(\tilde{V})$ (cf. Corollaire 3.14) donc est cyclique. Soit d son ordre. Alors \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 sont cycliques d'ordre d comme le montre le calcul de $N(G, rel)$ qui sera effectué aux Paragraphes 4.1 et 4.2.1. En particulier, $G = \tilde{W} \cap SL(\tilde{V})$ et est engendré par un élément de la forme $(s_1, s_2) \in \tilde{W}_1 \times \tilde{W}_2 = \tilde{W}$ où s_1 et s_2 sont d'ordre d .

Revenons maintenant au cas où \tilde{V} est de dimension quelconque. Soit H_1 un hyperplan de réflexion de \tilde{W}_1 agissant sur \tilde{V}_1 , H_2 un hyperplan de réflexion de \tilde{W}_2 agissant sur \tilde{V}_2 et $L = H_1 \oplus H_2$. Alors, G_L est un bon sous-groupe distingué de $\tilde{W}_L = \tilde{W}_{H_1} \times \tilde{W}_{H_2}$ dans son action sur $(\tilde{V}_1/H_1) \oplus (\tilde{V}_2/H_2)$ qui est de dimension 2 (cf. Corollaire 3.10). D'après la remarque précédente, on en déduit que G_L est engendré par un élément $g = (s_1, s_2)$ où s_i est une réflexion génératrice de $\tilde{W}_{\tilde{H}_i}$.

Soit $w \in \tilde{W}_1$. Alors, $gwg^{-1}w^{-1} \in G \cap \tilde{W}_1 = 1$. Par conséquent, $s_1 \in Z(\tilde{W}_1)$. La représentation \tilde{V}_1 étant irréductible, elle est par conséquent de dimension 1 et s_1 engendre \tilde{W}_1 . De même, \tilde{V}_2 est de dimension 1 et \tilde{W}_2 est engendré par s_2 .

Les deux propositions précédentes permettent de ramener la classification des paires (\tilde{W}, G) (avec G bon) au cas où \tilde{W} est irréductible.

3.3. Construction à partir du rang 2

Le résultat suivant précise le Théorème 3.12 et explique comment construire G bon dans \tilde{W} .

Théorème 3.23. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) le groupe G est bon dans \tilde{W} ;
- (ii) il existe une famille \mathcal{G} de sous-groupes de G engendrant G et pour chaque $G' \in \mathcal{G}$, un sous-espace L de \tilde{V} tel que G' est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}_L ;
- (iii) il existe une famille \mathcal{G} de sous-groupes de G engendrant G et pour chaque $G' \in \mathcal{G}$, un sous-espace L de codimension 2 de \tilde{V} tel que G' est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}_L .

Nous allons commencer par décrire l'action d'une réflexion ou d'une double réflexion sur un produit de formes linéaires.

Lemme 3.24. *Soit \mathcal{F} une famille finie d'hyperplans de \tilde{V} stable et permutée transitivement par un élément $g \in GL(\tilde{V})$. Soit $\alpha = \prod_{H \in \mathcal{F}} \alpha_H$ où α_H est une forme linéaire définissant H . Soit $H \in \mathcal{F}$ et $a \in k^\times$ défini par $g^{|\mathcal{F}|}(\alpha_H) = a\alpha_H$. Alors, $g(\alpha) = a\alpha$.*

Supposons \mathcal{F} réduite à un hyperplan H et $a \neq 1$, i.e., $g(\alpha_H) \in (k - \{1\})\alpha_H$. Si g est une réflexion, alors $H = \ker(g - 1)$.

Si g est une double réflexion, alors il existe une (unique) réflexion s d'hyperplan H telle que gs est une réflexion. En particulier, $\ker(g - 1) \subset H$.

Démonstration. Soit $a_H \in k^\times$ défini par $g(\alpha_H) = a_H \alpha_{H'}$ où $H' = g(H)$. Alors, $g(\alpha) = (\prod_{H' \in \mathcal{F}} a_{H'}) \alpha$ et $g^{|\mathcal{F}|}(\alpha_H) = (\prod_{H' \in \mathcal{F}} a_{H'}) \alpha_H$, d'où la première partie du lemme.

L'hyperplan H est stable par g et g n'agit pas trivialement sur \tilde{V}/H .

Si g est une réflexion on en déduit que $H = \ker(g - 1)$.

Supposons maintenant que g est une double réflexion. Il existe une unique réflexion s d'hyperplan H telle que $gs(\alpha_H) = \alpha_H$. Alors, gs est une réflexion.

Le lemme suivant fournit un critère pour que G soit bon en termes d'invariants.

Lemme 3.25. *Supposons que G ne contient pas de réflexions. Alors, G est bon dans \tilde{W} si et seulement si $G \subseteq SL(\tilde{V})$ et pour tout $C \in \overline{\mathcal{A}'}(\tilde{W})$, on a $\alpha_C \in B^G$.*

Démonstration. Supposons G bon dans \tilde{W} . Les propriétés requises sont données par le Théorème 3.12 (iv) et le Corollaire 3.14 (iii).

Montrons maintenant la réciproque. Soit $H \in \mathcal{A}(\tilde{W})$, $C \in \overline{\mathcal{A}'}(\tilde{W})$ contenant H et $K = G\tilde{W}_H$. L'ensemble C est stable sous l'action de K . D'après le Lemme 3.24, $\alpha_C \in B_{\det^{-1}}^{\tilde{W}_H}$. Donc, $\alpha_C \in B_{\det^{-1}}^K$. Il résulte de [Sta, Lemme 2.2] que la famille des hyperplans de réflexion de K est incluse dans C . Puisque les éléments de C sont des hyperplans de réflexion de K , on en déduit que $\mathcal{A}(K) = C$.

Pour s' une réflexion autour d'un hyperplan $H' \in C$, il existe $s \in \tilde{W}_H$ tel que $ss' \in G$, donc $\det(ss') = 1$ et s, s' ont le même ordre. Par conséquent, $|\tilde{W}_{H'}| \leq |\tilde{W}_H|$. On montre de même l'inégalité inverse. Par conséquent, l'entier $|\tilde{W}_{H'}|$ est indépendant du choix de $H' \in C$. On le note e .

Puisque $\alpha_C^i \in B_{\det^{-i}}^K$, il résulte de [Sta, Théorème 2.3] que $B_{\det^{-i}}^K = \alpha_C^i B^K$ pour $0 \leq i < e$.

On a montré que $B^G = \bigoplus_{0 \leq i < e} \alpha_C^i B^K$, donc B^G est engendrée par B^K et α_C . Par conséquent, l'espace des invariants de \tilde{W}_H dans V est un hyperplan et donc \tilde{W}_H est un groupe de réflexion sur V . Donc, W est de réflexion sur V .

Démonstration du Théorème 3.23. Notons que (iii) \Rightarrow (ii) est clair.

Si G est bon, alors il est engendré par des réflexions et des doubles réflexions d'après le Théorème 3.12, donc il existe une famille finie \mathcal{F} de sous-espaces de codimension 2 de \tilde{V} telle que G est engendré par les G_L pour $L \in \mathcal{F}$. D'après le Corollaire 3.10, G_L est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W}_L . On a montré (i) \Rightarrow (iii).

Montrons maintenant (ii) \Rightarrow (i). Grâce aux Propositions 3.21 et 3.5 et au Corollaire 3.10, on peut remplacer G et \tilde{W} par G/G_r et \tilde{W}/G_r , où G_r est le sous-groupe engendré par les réflexions de G . On peut ainsi supposer que G ne contient pas de réflexions.

Soit $C \in \overline{\mathcal{A}'}(\tilde{W})$. Soit $G' \in \mathcal{G}$, L un sous-espace de \tilde{V} tel que G' est bon dans \tilde{W}_L et $g \in G'$ une double réflexion.

On a $\alpha_C = \alpha_{C'}\alpha_{C''}$ où $C' = C \cap \mathcal{A}(\tilde{W}_L)$ et $C'' = C - C'$. L'ensemble C' admet une partition en parties D formées des hyperplans H' avec $G'\tilde{W}_{H'}$ fixé. Pour une telle partie D , il résulte du Lemme 3.25 que $\alpha_D \in B^g$. Puisque $\alpha_{C'}$ est un produit de tels α_D , on a $\alpha_{C'} \in B^g$.

Il résulte du Lemme 3.24 que $\alpha_{C''} \in B^g$. Par conséquent, $\alpha_C \in B^g$, donc $\alpha_C \in B^{G'}$ puisque G' est engendré par des doubles réflexions (Corollaire 3.10). Donc, $\alpha_C \in B^G$ et le théorème résulte du Lemme 3.25.

Le résultat suivant précise la première implication du Théorème 3.23. On note ζ_e une racine primitive e -ième de l'unité dans k .

Théorème 3.26. *Soit G un bon sous-groupe de \tilde{W} ne contenant pas de réflexions. Pour $H \in \mathcal{A}(\tilde{W})$, soit s_H le générateur de \tilde{W}_H de déterminant $\zeta_{|\tilde{W}_H|}$.*

Alors, G est engendré par les $s_{H'}s_H^{-1}$ où $\{H, H'\}$ décrit les paires d'hyperplans de $\mathcal{A}'(\tilde{W})$ ayant la même image dans $\overline{\mathcal{A}'(\tilde{W})}$.

Démonstration. Soit G' le sous-groupe de \tilde{W} engendré par les $s_{H'}s_H^{-1}$. Puisque $G\tilde{W}_H = G'\tilde{W}_{H'}$, $\det(s_H) = \det(s_{H'})$ et $G < SL(\tilde{V})$, on a $G' \leq G$.

Si $G\tilde{W}_H = G'\tilde{W}_{H'}$ pour $H, H' \in \mathcal{A}(\tilde{W})$, alors $G'\tilde{W}_H = G'\tilde{W}_{H'}$. Par conséquent, il résulte du Lemme 3.25 que G' est bon dans \tilde{W} et du Théorème 3.12 (iv) que $B^{G'} = B^G$. Par conséquent, $G' = G$.

Remarque 3.27. Il ne suffit pas que G soit engendré par des éléments de la forme $s's^{-1}$ comme dans le Théorème 3.26 pour qu'il soit bon, comme le montre l'exemple suivant.

Soit $\tilde{W} = B_2(4)$ (sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ des matrices monomiales à coefficients non nuls dans $\mu_4(\mathbb{C})$) et G le sous-groupe engendré par $g = -1$. Soit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $s' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $g = s's^{-1}$ et s, s' engendrent les groupes $\tilde{W}_{\ker s^{-1}}$ et $\tilde{W}_{\ker s'^{-1}}$ respectivement. Cependant, G n'est pas bon dans \tilde{W} car il n'est pas bon dans le sous-groupe de \tilde{W} formé des matrices diagonales qui est égal à $\mu_4(\mathbb{C}) \times \mu_4(\mathbb{C})$ (cf. Propositions 3.19 et 3.22).

3.4. Cas où W est abélien

Nous étudions dans ce paragraphe le cas où W est abélien, c'est-à-dire le cas où G contient le groupe des commutateurs de \tilde{W} . Dans ce cas, bien qu'un groupe abélien puisse toujours être réalisé comme un groupe de réflexion, il est possible que W ne soit pas un groupe de réflexion sur V , comme le montre l'exemple de la Remarque 3.6. On a cependant les deux résultats suivants :

Proposition 3.28. *Si $G = [\tilde{W}, \tilde{W}]$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs de \tilde{W} , alors c'est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} .*

Démonstration. Pour $H \in \mathcal{A}(\tilde{W})$, le groupe $G\tilde{W}_H$ est distingué dans \tilde{W} . Par conséquent, si $C \in \overline{\mathcal{A}}(\tilde{W})$, alors C est \tilde{W} -stable, donc $k\alpha_C$ est une représentation de dimension 1 de \tilde{W} . Alors, $G = [W, W]$ agit trivialement sur cette dernière et le Lemme 3.25 montre que G est bon dans \tilde{W} .

Combinée aux Propositions 3.21 et 3.22, la proposition précédente donne une description complète des cas où G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} contenant $[\tilde{W}, \tilde{W}]$.

Remarque 3.29. Stanley a déterminé les cas où $G = \tilde{W} \cap SL(\tilde{V})$ est d'intersection complète [Sta, Théorème 5.1]. Comme la Remarque 3.6 le montre, $\tilde{W} \cap SL(\tilde{V})$ peut être d'intersection complète sans être un bon sous-groupe distingué.

Proposition 3.30. *Soit $G = \tilde{W} \cap SL(\tilde{V})$. On suppose que \tilde{W}/G est d'ordre premier p . Alors $\overline{\mathcal{A}}(\tilde{W})$ est réduit à un seul élément C . De plus, le groupe G est bon dans \tilde{W} et l'algèbre B^G est engendrée par les invariants fondamentaux de \tilde{W} et $\alpha_C : \tilde{V}/G$ est donc une hypersurface dans V . L'idéal I est engendré par un seul élément qui est obtenu en remarquant que $\alpha_C^p \in B^{\tilde{W}}$.*

Soient d_1, \dots, d_n les degrés de \tilde{W} et soit $N = |\mathcal{A}(\tilde{W})|$. Alors les degrés de G sont d_1, \dots, d_n, N et le degré de la relation de G est Np .

Démonstration. Cela résulte du Lemme 3.25 et de [Sta, Théorème 3.1 et Corollaire 5.6].

4. Classification

Le but de cette partie est de déterminer les paires (G, \tilde{W}) où \tilde{W} est un groupe de réflexion et G un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} . On supposera pour cela que $k = \mathbf{C}$.

Le Théorème 3.23 montre qu'il suffit de traiter le cas où \tilde{V} est de dimension 2. Grâce aux Propositions 3.21 et 3.5, on peut remplacer G et \tilde{W} par G/G_r et \tilde{W}/G_r , où G_r est le sous-groupe de G engendré par les réflexions de G : on étudiera donc le cas où G ne contient pas de réflexions. D'après le Corollaire 3.14, cela implique que G est contenu dans $SL(\tilde{V})$.

Dans cette partie, nous ferons donc l'hypothèse suivante :

On suppose que G est contenu dans $SL(\tilde{V})$. En outre, et ce jusqu'à la Sect. 4.5, on suppose que $\dim \tilde{V} = 2$.

Une référence possible pour les résultats utilisés concernant les groupes de réflexion complexes est [BrMaRou].

Fixons tout d'abord quelques notations. Soit \tilde{V} un espace vectoriel de dimension 2 muni de sa graduation standard et soit (x, y) une base de \tilde{V} . On note (X, Y) la base de \tilde{V}^* duale de (x, y) . Via le choix de cette base, nous identifierons $GL(\tilde{V})$ avec $GL_2(\mathbf{C})$.

Il est bien connu que tout sous-groupe G de $SL_2(\mathbf{C})$ est d'intersection complète et que son algèbre d'invariants B^G est engendrée par trois polynômes homogènes p_1, p_2 et p_3 . On pose $d_i = \deg p_i$. Les p_i seront numérotés de sorte que $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ et choisis de sorte que l'espace qu'ils engendrent dans B^G soit stable sous l'action du normalisateur $N(G)$ de G dans $GL_2(\mathbf{C})$. On notera V^* cet espace vectoriel et on notera (X_1, X_2, X_3) les éléments de $A = k[V]$ correspondant à (p_1, p_2, p_3) : l'image de X_i par le morphisme surjectif d'algèbres graduées $A = k[X_1, X_2, X_3] \rightarrow B^G$ est p_i . On notera (x_1, x_2, x_3) la base de V duale de (X_1, X_2, X_3) . Le groupe $GL(V)$ sera identifié à $GL_3(\mathbf{C})$ par le choix de cette base. On notera

$$\varphi : N(G) \rightarrow GL_3(\mathbf{C})$$

le morphisme de groupes induit.

Puisque G est d'intersection complète, le noyau I du morphisme $A \rightarrow B^G$ est engendré par un élément homogène R de degré e (le degré de X_i est d_i). Avec ces notations, on a

$$|G| = \frac{d_1 d_2 d_3}{e}.$$

4.1. G d'ordre 2

Avant de s'intéresser au cas général, nous allons décrire la situation lorsque G est d'ordre 2. Supposons donc que $G = \mu_2(\mathbf{C})$, l'unique sous-groupe d'ordre 2 de $SL_2(\mathbf{C})$ (on identifie \mathbf{C}^\times avec $Z(GL_2(\mathbf{C}))$). On prend $p_1 = XY, p_2 = X^2, p_3 = Y^2$ et $R = X_1^2 - X_2 X_3$. On a donc $d_1 = d_2 = d_3 = 2$ et $e = 4$ car tous les X_i sont de degrés 2. L'ensemble des degrés de G est alors $\{2, 2, 2\}$ et l'ensemble des degrés des relations est $\{4\}$.

Le normalisateur de G dans $GL_2(\mathbf{C})$ est $GL_2(\mathbf{C})$ et, si $g \in GL_2(\mathbf{C})$, alors $\varphi(g)(R) = (\det g)^2 R$. Si $CO(R)$ est le groupe conforme orthogonal de la forme quadratique R sur V , alors l'image du morphisme naturel de groupes algébriques $\varphi : GL_2(\mathbf{C}) \rightarrow GL(V)$ est contenu dans $CO(R)$. De plus,

$$N(G, rel) = \sqrt{SL_2(\mathbf{C})} = \{g \in GL_2(\mathbf{C}) \mid g^2 \in SL_2(\mathbf{C})\}.$$

et l'image de $N(G, rel)$ par le morphisme φ est le groupe orthogonal $O(R)$ de la forme quadratique R . La proposition suivante résulte de ce qui précède, du Théorème 3.2 et de la Proposition 3.16 :

Proposition 4.1. *Soit \tilde{W} un groupe de réflexion complexe de rang 2 et contenant $G = \{1, -1\}$. Alors G est bon dans \tilde{W} si et seulement si \tilde{W} est engendré par des réflexions d'ordre 2. Dans ce cas, si $2, a$ et b sont les degrés de W dans V , alors les degrés de \tilde{W} dans \tilde{V} sont $2a$ et $2b$.*

Notons les résultats élémentaires suivants :

Lemme 4.2. *Soit g un élément de $GL_2(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres sont λ et μ . Alors les valeurs propres de $\varphi(g)$ dans V sont λ^2, μ^2 et $\lambda\mu$.*

Corollaire 4.3. *Si \tilde{s} est une réflexion d'ordre 2 de $GL_2(\mathbf{C})$, alors $\varphi(\tilde{s})$ est une réflexion d'ordre 2 de $O(R)$. Réciproquement, si s est une réflexion de $O(R)$, alors $\varphi^{-1}(s)$ est formé de deux réflexions d'ordre 2.*

Le morphisme φ établit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $GL_2(\mathbf{C})$ engendrés par des réflexions d'ordre 2 et contenant -1 et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes non triviaux de $O(R)$ engendrés par des réflexions.

Remarquons qu'un sous-groupe fini de $O(R)$ stabilise une structure réelle sur l'espace vectoriel V , donc la correspondance ci-dessus définit une bijection entre les classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_2(\mathbf{C})$ engendrés par des réflexions d'ordre 2 et contenant -1 et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes finis non triviaux de $GL_3(\mathbf{R})$ engendrés par des réflexions, c'est-à-dire, l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Coxeter de rang compris entre 1 et 3.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le groupe \tilde{W}/G est irréductible. Un cas particulièrement intéressant est celui où le groupe \tilde{W}/G est irréductible. Il n'y a que trois classes d'isomorphisme de groupes de Coxeter irréductibles de rang 3, les groupes de type A_3, B_3 et H_3 . Leurs images réciproques par φ sont les groupes de type G_{12}, G_{13} et G_{22} respectivement.

La Table 1 donne la liste des groupes de réflexion complexes de rang 2, engendrés par des réflexions d'ordre 2 et contenant $G = \mu_2(\mathbf{C})$, leurs degrés, le type du groupe \tilde{W}/G et les degrés de \tilde{W}/G ; d désignera un entier naturel non nul (on convient que $I_2(1) = A_1$).

Table 1. Quotients par ± 1 de groupes engendrés par des réflexions d'ordre 2

\tilde{W}	degrés de \tilde{W}	$\tilde{W}/\{1, -1\}$	degrés de $\tilde{W}/\{1, -1\}$
G_{12}	6, 8	A_3	2, 3, 4
G_{13}	8, 12	B_3	2, 4, 6
G_{22}	12, 20	H_3	2, 6, 10
$I_2(2d)$	2, $2d$	$I_2(d)$	1, 2, d
$G(2d, d, 2)$	$2d, 4$	$I_2(d) \times A_1$	2, 2, d

4.2. Sous-groupes de $SL_2(\mathbf{C})$ et $GL_2(\mathbf{C})$

Si d est un entier naturel non nul, on notera μ_d le groupe $\mu_d(\mathbf{C})$. Pour $\zeta \in \mathbf{C}^\times$, on pose :

$$t(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}.$$

On pose aussi

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$C_d = \{t(\zeta) \mid \zeta^d = 1\},$$

et

$$I_2(d) = \langle C_d, s \rangle$$

$$\tilde{I}_2(d) = \langle \sigma, C_{2d} \rangle.$$

Le groupe $\tilde{I}_2(d)$ est une extension centrale du groupe diédral d'ordre $2d$, $I_2(d)$, par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Notons que $\tilde{I}_2(1)$ est conjugué à C_4 dans $GL_2(\mathbf{C})$.

On note $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ le normalisateur de $\tilde{I}_2(2)$ dans $SL_2(\mathbf{C})$. Soit $\tilde{\mathfrak{A}}_4$ le groupe dérivé de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$. Le groupe $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{A}}_4$) est une extension centrale du groupe symétrique de degré 4 (respectivement du groupe alterné de degré 4) par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note $\tilde{\mathfrak{A}}_5$ un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{C})$ extension centrale du groupe alterné de degré 5 par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. La proposition suivante est bien connue :

Proposition 4.4. *Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbf{C})$. Alors G est conjugué, dans $GL_2(\mathbf{C})$, à un et un seul des groupes C_d ($d \geq 1$), $\tilde{I}_2(d)$ ($d \geq 2$), $\tilde{\mathfrak{A}}_4$, $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_5$.*

Pour finir, on pose

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C}^\times \right\},$$

$$C_\infty = \{t(\zeta) \mid \zeta \in \mathbf{C}^\times\}$$

et

$$I_2(\infty) = \langle C_\infty, s \rangle.$$

La Table 2 donne, en fonction du groupe G , les valeurs des paramètres $|G|$, d_1 , d_2 , d_3 , e , $N(G)$ et $N(G, rel)$.

Remarque 4.5. Le groupe $\tilde{I}_2(2)$ est le groupe des quaternions.

Justifions maintenant la table pour $G = C_d$ et $G = \tilde{I}_2(d)$ (les trois derniers cas se traitent de manière similaire et sont laissés au lecteur).

4.2.1. $G = C_d$. Soit $G = C_d$ pour $d \geq 3$. Le normalisateur $N(G)$ de G dans $GL_2(\mathbf{C})$ est

$$N(G) = \langle T, s \rangle.$$

On prend $p_1 = XY$, $p_2 = X^d$, $p_3 = Y^d$ et $R = X_1^d - X_2X_3$. On a donc $d_1 = 2$, $d_2 = d_3 = d$ et $e = 2d$. On a $s \in N(G, rel)$, donc $N(G, rel) = \langle s, N(G, rel) \cap T \rangle$. Finalement,

$$N(G, rel) = I_2(\infty)\mu_d.$$

Table 2. Sous-groupes finis de $SL_2(\mathbf{C})$

G	$ G $	d_1, d_2, d_3	e	$N(G)$	$N(G, rel)$
C_2	2	2, 2, 2	4	$GL(\tilde{V})$	$\sqrt{SL}(\tilde{V})$
$C_d (d \geq 3)$	d	2, d, d	$2d$	$\langle s, T \rangle$	$I_2(\infty)\mu_{2d}$
$\tilde{I}_2(d) (d \geq 3)$	$4d$	4, $2d, 2(d+1)$	$4(d+1)$	$\tilde{I}_2(2d)\mathbf{C}^\times$	$\tilde{I}_2(2d)\mu_{4(d+1)}$
$\tilde{I}_2(2)$	8	4, 4, 6	12	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mathbf{C}^\times$	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mu_{12}$
$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	24	6, 8, 12	24	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mathbf{C}^\times$	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mu_{24}$
$\tilde{\mathfrak{S}}_4$	48	8, 12, 18	36	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mathbf{C}^\times$	$\tilde{\mathfrak{S}}_4\mu_{36}$
$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	120	12, 20, 30	60	$\tilde{\mathfrak{A}}_5\mathbf{C}^\times$	$\tilde{\mathfrak{A}}_5\mu_{60}$

4.3. $G = \tilde{I}_2(d)$

Considérons maintenant $G = \tilde{I}_2(d)$. On prend $p_1 = X^2Y^2, p_2 = X^{2d} + Y^{2d}, p_3 = XY(X^{2d} - Y^{2d})$ et $R = X_3^2 - X_1(X_2^2 - 4X_1^d)$. On a donc $d_1 = 4, d_2 = 2d, d_3 = 2(d+1)$ et $e = 4(d+1)$. Calculons maintenant le normalisateur de G . Tout d’abord, remarquons que le groupe dérivé de G est le groupe C_d donc le normalisateur de G est contenu dans le normalisateur de C_d .

Si $d \geq 3$, alors le normalisateur de $\tilde{I}_2(d)$ est contenu dans $\langle s, T \rangle$. Pour déterminer $N(G)$ et $N(G, rel)$, il suffit de déterminer leur intersection avec T , puisque $s \in N(G, rel)$:

$$T \cap N(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a^{2d} = b^{2d} \right\}$$

$$T \cap N(G, rel) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a^{2d} = b^{2d}, (ab)^{2d+2} = 1 \right\}.$$

Supposons maintenant $d = 2$. On a $N(G) = \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mathbf{C}^\times$ et, pour montrer que $N(G, rel) = \tilde{\mathfrak{S}}_4\mu_{12}$, il suffit de montrer que $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ est contenu dans $N(G, rel)$ et d’utiliser la Remarque 3.7. Montrons donc que $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ stabilise R . L’espace vectoriel des invariants de G de degré 6 est de dimension 1 et engendré par p_3 et on note $\varepsilon : \tilde{\mathfrak{S}}_4 \rightarrow \mathbf{C}^\times$ le caractère linéaire de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ par lequel $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ agit sur cet espace vectoriel. Alors, $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ agit sur $\mathbf{C}R$ via le caractère linéaire ε^2 de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$. Comme l’abélianisé de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ est d’ordre 2, le caractère ε^2 est trivial, donc $\tilde{\mathfrak{S}}_4 \subset N(G, rel)$.

Remarque 4.6. Si $G = \tilde{\mathfrak{A}}_4, \tilde{\mathfrak{S}}_4$ ou $\tilde{\mathfrak{A}}_5$, alors les degrés de G sont tous distincts. Il en résulte que si \tilde{W} est un groupe de réflexion de $GL_2(\mathbf{C})$ contenant G comme bon sous-groupe distingué, alors \tilde{W}/G est abélien.

Table 3. Groupes de réflexion irréductibles de rang 2

\tilde{W}	$\tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})$	$\tilde{W}/Z(\tilde{W})$	$a_{\tilde{W}}$	\tilde{W}	$\tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})$	$\tilde{W}/Z(\tilde{W})$	$a_{\tilde{W}}$
$G(mn, n, 2)$ (m pair)	$\tilde{I}_2(mn/2)$			G_{11}	$\tilde{\mathfrak{S}}_4$	\mathfrak{S}_4	12
				G_{12}	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{S}_4	2
				G_{13}	$\tilde{\mathfrak{S}}_4$	\mathfrak{S}_4	2
$G(mn, n, 2)$ (m impair)	C_{mn}			G_{14}	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{S}_4	6
				G_{15}	$\tilde{\mathfrak{S}}_4$	\mathfrak{S}_4	6
				G_4	$\tilde{I}_2(2)$	\mathfrak{A}_4	3
				G_5	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{A}_4	3
				G_6	$\tilde{I}_2(2)$	\mathfrak{A}_4	6
				G_7	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{A}_4	6
				G_8	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{S}_4	4
				G_9	$\tilde{\mathfrak{S}}_4$	\mathfrak{S}_4	4
				G_{10}	$\tilde{\mathfrak{A}}_4$	\mathfrak{S}_4	12
				G_{17}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	10
				G_{18}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	15
				G_{19}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	30
				G_{20}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	3
				G_{21}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	6
				G_{22}	$\tilde{\mathfrak{A}}_5$	\mathfrak{A}_5	2

4.4. Classification en rang deux

La Table 3 donne la liste, à conjugaison près, des groupes de réflexion \tilde{W} irréductibles de rang 2, le type de $\tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})$, de $\tilde{W}/Z(\tilde{W})$ ainsi que $a_{\tilde{W}} = [\tilde{W} : \tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})]$.

Pour la classification en dimension supérieure, nous aurons aussi besoin des groupes de réflexion de rang 2 non irréductibles. Ceux-ci sont produits directs de deux groupes cycliques d'ordre m et n . Pour éviter la confusion avec C_d , on préférera la notation

$$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} := \left\{ \left(\begin{matrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta' \end{matrix} \right) \mid \zeta^m = \zeta'^n = 1 \right\}.$$

L'intersection de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $SL_2(\mathbf{C})$ est $C_{m \wedge n}$. Soit d un diviseur de $m \wedge n$. Pour que C_d soit bon dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il faut et il suffit que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset N(C_d, rel) = I_2(\infty)\mu_{2d}$, ce qui ne se produit que si $m|d$ et $n|d$. Ainsi les seules paires (\tilde{W}, G) où \tilde{W} est réductible et G est non trivial et bon sont de la forme $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, C_m)$.

Les calculs effectués précédemment permettent maintenant d'obtenir la classification :

Proposition 4.7. *Soit \tilde{W} un groupe de réflexion de rang 2 et soit G un sous-groupe distingué de \tilde{W} contenu dans $SL_2(\mathbf{C})$. Alors G est bon dans \tilde{W} si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :*

- (a) $G = C_2$ et \tilde{W} est engendré par des réflexions d'ordre 2 (cf Table 1).
- (b) $G = C_d$ ($d \geq 3$) et $\tilde{W} = G(mn, n, 2)$ avec $m|d$ et $d|mn$.
- (c) $G = \tilde{I}_2(d)$ ($d \geq 3$) et $\tilde{W} = G(2d, d, 2)$ ou $\tilde{W} = G(4d, 4d, 2)$.

Table 4. Quotients non abéliens de groupes de réflexion de rang 2

(G, \tilde{W})	degrés de \tilde{W}		e	W	degrés de W
$(C_d, G(mn, n, 2))$	$mn, 2m$	$2d$	$G(m, 1, 1) \times G(mn/d, mn/d, 2)$	$m, mn/d, 2$	
$(\tilde{I}_2(2), G_{12})$	6, 8	12	A_2	2, 3, 1	
$(\tilde{I}_2(2), G_{13})$	8, 12	12	$A_2 \times A_1$	2, 3, 2	
$(\tilde{I}_2(2), G_{14})$	6, 24	12	$G(3, 1, 2)$	3, 6, 1	
$(\tilde{I}_2(2), G_{15})$	12, 24	12	$G(3, 1, 2) \times A_1$	3, 6, 2	

- (d) $G = \tilde{I}_2(2)$ et $\tilde{W} = G(4, 2, 2)$ ou $\tilde{W} = G_i$ avec $4 \leq i \leq 7$ ou $12 \leq i \leq 15$.
- (e) $G = \tilde{\mathfrak{A}}_4$ et $\tilde{W} = G_i, i = 5$ ou $7 \leq i \leq 15$.
- (f) $G = \tilde{\mathfrak{S}}_4$ et $\tilde{W} = G_{15}$.
- (g) $G = \tilde{\mathfrak{A}}_5$ et $\tilde{W} = G_i, 16 \leq i \leq 22$.

Pour $\tilde{W} = G(mn, n, 2)$, on a utilisé le fait suivant : on a $G(mn, n, 2) = \langle s, G(mn, n, 2) \cap T \rangle$ et $G(mn, n, 2) \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a^{mn} = b^{mn} = 1, (ab)^m = 1 \right\}$.

Étudions maintenant deux exemples de groupes \tilde{W} exceptionnels.

Considérons d’abord $\tilde{W} = G_{15}$. Puisque $\tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C}) = \tilde{\mathfrak{S}}_4$, les seuls G distingués dans \tilde{W} sont $\mu_2(\mathbf{C})$ (qui a déjà été étudié), $\tilde{I}_2(2)$, $\tilde{\mathfrak{A}}_4$ et $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ (ce sont tous des sous-groupes caractéristiques de $\tilde{\mathfrak{S}}_4$).

On a $\tilde{W}/Z(\tilde{W}) \simeq \tilde{\mathfrak{S}}_4$, donc $\tilde{W} \leq \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_\infty$. Puisque $[\tilde{W} : \tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})] = 6$, on a plus précisément $\tilde{W} \leq \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_{12}$. On en déduit que $\tilde{I}_2(2)$, $\tilde{\mathfrak{A}}_4$ et $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ sont bons dans \tilde{W} .

Pour $\tilde{W} = G_{11}$, on a aussi $\tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C}) = \tilde{\mathfrak{S}}_4$ et $\tilde{W} \leq \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_\infty$. On a $[\tilde{W} : \tilde{W} \cap SL_2(\mathbf{C})] = 12$, donc $\tilde{W} \leq \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_{24}$. Puisque $|\tilde{W}| = |\tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_{24}|$, on a l’égalité $\tilde{W} = \tilde{\mathfrak{S}}_4 \cdot \mu_{24}$. On en déduit que $\tilde{\mathfrak{A}}_4$ est bon dans \tilde{W} mais que $\tilde{I}_2(2)$ et $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ ne sont pas bons dans \tilde{W} .

La Table 4 contient toutes les paires (G, \tilde{W}) telles que G est bon dans \tilde{W} , $G \neq \{1, -1\}$ et $W = \tilde{W}/G$ n’est pas abélien.

4.5. Classification en rang supérieur

Grâce au Théorème 3.23, le problème général de la classification des paires (\tilde{W}, G) se ramène à la classification en rang 2 établie ci-dessus. Précisons comment cette réduction s’opère. Soit $\tilde{W} \subset GL(V)$ un groupe de réflexion et soit G bon dans \tilde{W} . D’après 3.23 (iii), si G est non trivial, il existe un sous-espace L de V de codimension 2 et un sous-groupe non trivial G' de G tel que G' est un bon

sous-groupe distingué de \tilde{W}_L . La classification en rang 2 donne, pour chaque \tilde{W}_L , une liste des G' possibles. Soit $\overline{G'}$ la clôture distinguée de G' dans \tilde{W} . Toujours grâce au Théorème 3.23, il est clair que G' est bon dans \tilde{W} . D'après 3.21, le groupe $G/\overline{G'}$ est bon dans $\tilde{W}/\overline{G'}$. Comme l'ordre de $G/\overline{G'}$ est strictement plus petit que celui de G , on peut, quitte à itérer l'opération, reconstruire G à partir de groupes G' de rang 2.

On est ainsi ramené à classifier, pour \tilde{W} donné, les paires (L, G') avec L de codimension 2 et G' bon dans \tilde{W}_L , à conjugaison près. Il suffit d'ailleurs de considérer, parmi ces paires, celles pour lesquelles G' est minimal, puisqu'il s'agit simplement d'initier le processus récursif ; les tables que nous donnons plus bas en donnent la liste. Les diagrammes "à la Coxeter" fournis dans [BrMaRou] facilitent la recherche des paires (L, G') . Sauf pour les groupes exceptionnels G_{27} , G_{29} , G_{33} et G_{34} , ces diagrammes possèdent la propriété suivante : soit S un système de générateurs de \tilde{W} correspondant au diagramme ; pour tout sous-groupe "parabolique", c'est-à-dire de la forme \tilde{W}_L pour un certain sous-espace L , il existe un sous-ensemble $I \subset S$ tel que le sous-groupe engendré par I soit conjugué à \tilde{W}_L .

4.6. "Morphismes de diagrammes" et nouveaux diagrammes

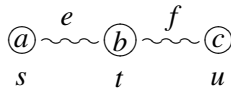
Considérons la présentation $\langle S|R \rangle$ associée au diagramme standard d'un groupe de réflexion $\tilde{W} \subset GL(\tilde{V})$. Soit $I \subset S$. Le sous-groupe de \tilde{W} engendré par les réflexions de I est de la forme \tilde{W}_L , où L est un sous-espace de V . L'espace L est de codimension 2 quand I est composé de 2 éléments liés par une relation de tresses usuelle, ou composé de 3 éléments liés par une relation de valence 3, par exemple une relation circulaire $stu = tus = ust$ (voir [BrMaRou]). Quotienter par un G' bon dans \tilde{W}_L correspond à ajouter à R une ou plusieurs relations supplémentaires, liant les éléments de I . Soit R' le nouvel ensemble de relations. Le groupe quotient W admet la présentation $\langle S|R' \rangle$.

Il se trouve que, dans la plupart des cas (en fait dans tous les cas, si l'on considère les diagrammes modifiés que nous proposons plus bas), cette présentation est identique, pour peu que l'on élimine les générateurs et les relations redondants, à celle donnée par le diagramme standard de W . Ainsi, le morphisme $\tilde{W} \rightarrow W$ provient d'un "morphisme de diagrammes" entre leurs diagrammes standard. Nous n'abordons pas cette formalisation dans le présent travail. Il serait souhaitable de comprendre géométriquement la catégorie des groupes de réflexion avec "morphismes de diagrammes". Notons toutefois qu'elle exigerait une définition précise non seulement de la catégorie des diagrammes, ce qui ne pose pas de difficulté, mais aussi du "foncteur" qui à un groupe de réflexion associe son diagramme (ou vice-versa). Deux difficultés apparaissent : la présence d'éléments de $N_{GL(\tilde{V})}(\tilde{W})/\tilde{W}$ qui ne peuvent pas être réalisés comme automor-

phismes de diagrammes et la présence de sous-groupes paraboliques qui ne sont pas conjugués à des sous-groupes paraboliques standard.

Les seules exceptions à la compatibilité entre diagrammes sont G_{12} , G_{13} et G_{22} : selon la Table 1, ils admettent comme quotients de réflexion les groupes de Coxeter de type respectivement A_3 , B_3 et H_3 ; or, partant des diagrammes de [BrMaRou], on ne retrouve pas au quotient des systèmes générateurs de Coxeter. Nous proposons de nouveaux diagrammes, compatibles au quotient avec les présentations de Coxeter.

Soient a, b, c, e, f des entiers. Le diagramme $\tilde{I}_{a,b,c}(e, f)$



symbolise la présentation

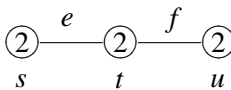
$$\langle s, t, u \mid s^a = t^b = u^c = 1, \underbrace{\dots t s t u s}_{e+1 \text{ termes}} = \underbrace{\dots s t s t u}_{e+1 \text{ termes}}, \underbrace{u s t u t \dots}_{f+1 \text{ termes}} = \underbrace{s t u t u \dots}_{f+1 \text{ termes}} \rangle .$$

La relation entre s et t est la relation de tresses de longueur e “tordue” en intercalant u en dernière et en avant-dernière position. De même pour celle entre t et u , d’où les arêtes “tordues” du diagramme.

Les groupes G_{12} , G_{13} et G_{22} correspondent à $a = b = c = 2$ et respectivement à (e, f) égal à $(3, 3)$, $(4, 3)$ et $(5, 3)$. On vérifie aisément qu’en supprimant les relations quadratiques on obtient une présentation du groupe de tresses associé.

Les groupes de réflexion complexes de rang 2, non réels, contenant -1 et engendrés par des réflexions d’ordre 2 correspondent aux paires $(e, f) \in \{(3, 3), (4, 3), (5, 3), (d, 2)(d \geq 2)\}$. Ce sont exactement les paires (e, f) avec $e, f \geq 2$ telles que $1/e + 1/f > 1/2$.

En ajoutant la relation $su = us$, les relations se simplifient et l’on retrouve la présentation de Coxeter associée à



(cf Table 1).

Le diagramme $\tilde{I}_{a,b,c}(e, f)$ redonne les présentations de [BrMaRou] pour un certain nombre de groupes de dimension 2 (en dehors des cas G_{12} , G_{13} et G_{22} où les présentations sont nouvelles). Ils fournissent ainsi des diagrammes pour tous les groupes de réflexion complexes de rang 2 qui ne sont pas de Shephard :

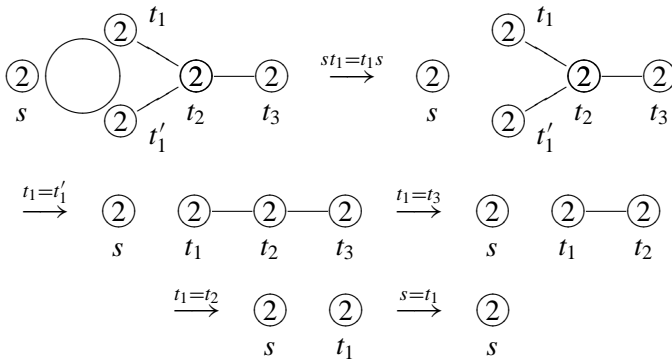
- $I_{2,2,d}(e, 2)$ pour $G(de, e, 2)$, $d, e \geq 2$
- $I_{2,2,3}(2, 4)$ pour G_{15}
- $I_{2,3,3}(2, 2)$ pour G_7 , $I_{2,3,4}(2, 2)$ pour G_{11} et $I_{2,3,5}(2, 2)$ pour G_{19} .

4.7. Tables des quotients élémentaires

Soit $\tilde{W} \subset GL(\tilde{V})$ un groupe de réflexion complexe. Les Tables 5 et 6 permettent de retrouver tous les $G \subset \tilde{W}$ tels que $G \subset SL(\tilde{V})$ et G est bon dans \tilde{W} , ainsi que les quotients $W = \tilde{W}/G$ correspondants. Considérons le diagramme standard associé à \tilde{W} , c’est-à-dire la réunion disjointe des diagrammes standard associés aux facteurs de réflexion irréductibles de \tilde{W} . Les quotients $W = \tilde{W}/G$ sont les groupes de réflexion obtenus en appliquant une ou plusieurs des transformations élémentaires décrites. (Les tables contiennent toutes les paires (\tilde{W}, G) où G est bon, non trivial, minimal — pour simplifier les tables, nous n’avons pas exclus certains cas où G n’est pas minimal).

Les tables se lisent de la façon suivante. La première colonne donne le nom usuel d’un \tilde{W} irréductible, la seconde son diagramme. La troisième colonne donne le diagramme quotient, obtenu en rajoutant la relation donnée dans la dernière colonne. Un générateur de \tilde{W} est envoyé sur le générateur de même nom de W . Comme il est expliqué en 4.5, un quotient élémentaire est donné par le choix d’un sous-espace L de V de codimension 2 et de G' minimal bon dans \tilde{W}_L .

Exemple. Le groupe $G(4, 2, 4)$ admet de multiples quotients de réflexion :



Remarque 4.8.

- La transformation de \mathfrak{S}_4 (ou G_{25}) vers \mathfrak{S}_3 (ou G_4) consiste à “replier” le diagramme. Une telle transformation pour \mathfrak{S}_n n’est pas possible si $n \geq 5$ (c’est lié à la simplicité du groupe alterné \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$). Ainsi tous les quotients non triviaux de \mathfrak{S}_n s’obtiennent par des morphismes de diagrammes.
- Excluons la règle $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Partant de \tilde{W} quelconque, et effectuant les transformations au hasard, on aboutit toujours à un diagramme qui ne peut plus être transformé. Ce diagramme est celui de $\tilde{W}^{ab} = \tilde{W}/[\tilde{W}, \tilde{W}]$, qui est un produit direct de groupes de réflexion de rang 1.

Table 5. Bons quotients minimaux en rang supérieur à 3

\tilde{W}	Diagramme de \tilde{W}	Diagramme de W	Relation
	Engendré par des réflexions s_1, \dots, s_r d'ordre p	\textcircled{p} s_1	$s_1 = \dots = s_r$
\mathfrak{S}_4, G_{25}	$\textcircled{p} \text{---} \textcircled{p} \text{---} \textcircled{p}$ $s \quad t \quad u$	$\textcircled{p} \text{---} \textcircled{p}$ $s \quad t$	$s = u$
G_{26}	$\textcircled{2} \text{=} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$ $s \quad t \quad u$	$\textcircled{2} \quad \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3}$ $s \quad t \quad u$	$st = ts$
G_{28} (= $W(F_4)$)	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{=} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t \quad u \quad v$	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t \quad u \quad v$	$tu = ut$
G_{29}	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{=} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t \quad u$ $\textcircled{2} \text{---} v$	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t \quad v \quad u$	$tu = ut$
G_{31}	$s \textcircled{2} \quad \textcircled{2} w$ $\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $t \quad u \quad v$	$s \textcircled{2} \quad \textcircled{2} w$ $\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2}$ $t \quad u \quad v$	$su = us$
$G(p, 1, n)$	$\textcircled{p} \text{=} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$\textcircled{p} \quad \textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $s \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$st_1 = t_1s$
$G(md, md, n)$	$t_1 \textcircled{2}$ $md \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$t_1 \textcircled{2}$ $m \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$\underbrace{t_1 t'_1 t_1 \dots}_{m \text{ termes}} = \underbrace{t'_1 t_1 t'_1 \dots}_{m \text{ termes}}$
$G(d, d, n)$	$t_1 \textcircled{2}$ $d \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$t_1 = t'_1$
$G(3d, 3d, n)$	$t_1 \textcircled{2}$ $3d \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$\textcircled{2} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$t_1 = t_2$
$G(de, e, n)$	$s \textcircled{d} \quad \textcircled{2} t_1$ $e+1 \text{---} \textcircled{2} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2}$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$s \textcircled{d} \quad e \text{---} \textcircled{2} t_1$ $t'_1 \textcircled{2}$ $t_2 \quad \dots \quad t_{n-1}$	$st_1 = t_1s$

Table 6. Bons quotients minimaux en rang 2

\tilde{W}	Diagramme de \tilde{W}	Diagramme de W	Relation
$I_{p,p}(m)$	$\begin{array}{ccc} & m & \\ \textcircled{p} & \text{---} & \textcircled{p} \\ & s & t \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & & \\ \textcircled{p} & & \\ & s & \end{array}$	$s = t$
$I_{p,q}(md)$	$\begin{array}{ccc} & md & \\ \textcircled{p} & \text{---} & \textcircled{q} \\ & s & t \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & m & \\ \textcircled{p} & \text{---} & \textcircled{q} \\ & s & t \end{array}$	$\underbrace{sts\dots}_{m \text{ termes}} = \underbrace{tst\dots}_{m \text{ termes}}$
$\tilde{I}_{a,b,c}(e, f)$	$\begin{array}{ccccccc} & e & & f & & e & f \\ \textcircled{a} & \text{---} & \textcircled{b} & \text{---} & \textcircled{c} & \text{---} & \textcircled{a} & \text{---} & \textcircled{b} & \text{---} & \textcircled{c} \\ & s & & t & & u & s & & t & & u \end{array}$		$su = us$

4.8. Un exemple : G_{31}

Soient

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit \tilde{W} le sous-groupe de $GL_4(\mathbf{C})$ engendré par s, t, u, v, w . C est le groupe de réflexion complexe G_{31} .

Soit $G = O_2(\tilde{W})$, le plus grand 2-sous-groupe distingué de \tilde{W} . C est un groupe d'ordre 64, engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les droites de la base canonique de \mathbf{C}^4 forment un système d'imprimitivité de G ; le groupe sous-jacent des permutations de ces quatre droites est le sous-groupe kleinien \mathfrak{K} de \mathfrak{S}_4 (le sous-groupe engendré par les doubles transpositions). Les coefficients non nuls de la matrice d'un élément de G sont soit tous dans $\{-1, 1\}$, soit tous dans $\{-i, i\}$.

La représentation naturelle de G est irréductible. Le centre de G est d'ordre 4. Le carré d'un élément de G est une matrice diagonale à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$. Ainsi l'exposant de G est 4.

Etant donnée une réflexion génératrice r de \tilde{W} , on considère l'ensemble des réflexions dans $G \cdot r$. C'est un ensemble à 4 éléments. Pour chacun de ses éléments, on considère une forme linéaire définissant l'hyperplan de réflexion et enfin, on note p_r le produit de ces formes linéaires. On a

$$p_s = X_1 X_2 X_3 X_4, \quad p_t = ((X_1 + X_2)^2 - (X_3 + X_4)^2)((X_1 - X_2)^2 - (X_3 - X_4)^2)$$

$$p_u = (X_1^2 + X_2^2)(X_3^2 + X_4^2), \quad p_v = (X_1^2 - X_4^2)(X_2^2 - X_3^2)$$

$$\text{et } p_w = (X_1^2 - X_2^2)(X_3^2 - X_4^2).$$

L'algèbre $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]^G$ est engendrée par p_s, p_t, p_u, p_v, p_w . C'est une hypersurface, *i.e.*, le noyau du morphisme canonique

$$\mathbf{C}[Y_s, Y_t, Y_u, Y_v, Y_w] \rightarrow \mathbf{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]^G, \quad Y_r \mapsto p_r,$$

est engendré par un polynôme R . L'expression de ce polynôme est plus simple dans une nouvelle base des invariants :

$$\begin{aligned} p_1 &= X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4 = -8p_s + p_t + 3p_u + 2p_v + p_w \\ p_2 &= 2(X_1^2 X_2^2 + X_3^2 X_4^2) = p_u + 2p_v + p_w \\ p_3 &= 2(X_1^2 X_3^2 + X_2^2 X_4^2) = p_u + p_w \\ p_4 &= 2(X_1^2 X_4^2 + X_2^2 X_3^2) = p_u - p_w \\ p_5 &= 4X_1 X_2 X_3 X_4 = 4p_s \end{aligned}$$

Alors,

$$R = Y_1^2 Y_5^2 - 2Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_3^2 + Y_2^2 Y_4^2 + Y_3^2 Y_4^2 - Y_5^2 (Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2) + Y_5^4$$

L'action de \tilde{W} sur $\mathbf{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]^G$ se factorise par $W = \tilde{W}/G$. L'action induite de W sur $\bigoplus_i \mathbf{C}Y_i$ est la représentation de réflexion de $W = \mathfrak{S}_6$. Dans son action sur \mathbf{C}^5 , le groupe \mathfrak{S}_6 laisse invariante l'hypersurface $R = 0$, qui est une singularité quotient, de groupe G .

5. Construction de \widetilde{W} à partir de W et G

Dans les parties précédentes, nous avons étudié le cas d'un groupe de réflexion W obtenu comme quotient d'un groupe de réflexion \widetilde{W} par un sous-groupe distingué d'intersection complète G . Dans cette partie, nous nous intéressons au problème inverse, à savoir l'existence d'un groupe de réflexion \widetilde{W} étant donnés W et G . Sauf mention du contraire nous ne supposons plus que k est de caractéristique nulle.

5.1. Un rappel de géométrie algébrique

On appellera schéma un schéma noethérien séparé sur le corps k . Rappelons l'existence de clôtures normales de revêtements :

Lemme 5.1. *Soit Y un schéma normal, H un groupe fini agissant sur Y et $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement étale connexe. Soit $f : Y \rightarrow Y/H$ l'application quotient.*

Alors, il existe un revêtement étale connexe $p : Z \rightarrow X$ de X et un groupe fini G agissant sur Z tels que $f \pi p : Z \rightarrow Y/H$ est l'application quotient par G .

Démonstration. Soit $\overline{k(X)}$ une clôture séparable de $k(X)$. Soit K' la clôture normale de l'extension $k(X)/k(Y)^H$ dans $\overline{k(X)}$ et Z la normalisation de X dans K' . Pour montrer que Z satisfait aux propriétés du lemme, il faut montrer que le revêtement $p : Z \rightarrow X$ est non ramifié.

Soit $K = \bigcup_F F$ où F décrit les extensions finies de $k(Y)$ contenues dans $\overline{k(X)}$ telles que la normalisation de Y dans F n'est pas ramifiée sur Y . L'extension $K/k(Y)^W$ est normale. Puisque $k(X)$ est un sous-corps de K , on déduit que K' est un sous-corps de K , donc que $\pi p : Z \rightarrow Y$ est non ramifiée et finalement que p est non ramifiée.

Proposition 5.2. *Soit X un schéma lisse connexe simplement connexe sur k , G un groupe fini agissant sur X et W un groupe fini agissant sur X/G . On suppose que le lieu de ramification de G a codimension au moins 2.*

Alors, il existe un unique groupe fini \widetilde{W} agissant sur X , contenant G comme sous-groupe distingué et tel que $\widetilde{W}/G = W$.

Démonstration. Le problème est de montrer que le revêtement $X \rightarrow (X/G)/W$ est galoisien. Il suffit de le montrer pour un ouvert dense de X : nous allons le faire pour U le complémentaire du lieu de ramification de G dans X .

Notons que U/G est lisse, puisque U l'est et $U \rightarrow U/G$ est étale. Puisque la codimension du complémentaire de U dans X est au moins 2 et que X est lisse et simplement connexe, la variété U est simplement connexe [SGA1, X, Corollaire

3.3]. Notons π l'application quotient $X \rightarrow X/G$. En outre, le théorème de pureté de Zariski-Nagata [SGA1, X, Théorème 3.1] affirme que le lieu de ramification de $\pi^{-1}((X/G)_{lisse}) \rightarrow (X/G)_{lisse}$ est vide, car s'il ne l'était pas, il serait purement de codimension 1. Par conséquent, $U/G = (X/G)_{lisse}$ est stable par W . Le Lemme 5.1 permet de conclure que le revêtement $U \rightarrow (U/G)/W$ est galoisien.

5.2. Application aux groupes de réflexion

Nous utiliserons de la proposition précédente le corollaire suivant :

Corollaire 5.3. *Soit \tilde{V} un espace vectoriel de dimension finie sur k muni de sa graduation standard, G un sous-groupe fini de $GL(\tilde{V})$ et W un groupe fini agissant de manière graduée sur \tilde{V}/G . On suppose que G ne contient pas de réflexions et que k est algébriquement clos de caractéristique nulle.*

Alors, il existe un sous-groupe \tilde{W} de $GL(\tilde{V})$ contenant G comme sous-groupe distingué et tel que $\tilde{W}/G = W$.

Démonstration. Puisqu'un espace affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est simplement connexe, on déduit de la Proposition 5.2 l'existence du groupe \tilde{W} .

Soit $a \in \tilde{V}^*$ et $w \in \tilde{W}$. Puisque \tilde{W} agit de manière graduée sur $k[\tilde{V}]^G$, l'élément $w(\prod_{g \in G} g(a))$ est homogène de degré $|G|$. Par conséquent, les éléments $wg(a)$ sont tous de degré 1. Ainsi, \tilde{W} agit de manière graduée sur $k[\tilde{V}]$ et préserve le sous-espace \tilde{V}^* de $k[\tilde{V}]$, donc \tilde{W} est un sous-groupe de $GL(\tilde{V})$.

Remarque 5.4. (i) Si G contient des réflexions, le résultat n'est plus vrai : on le voit en prenant $G = W$ groupe de réflexion (\tilde{V}/G étant identifié à \tilde{V}).

(ii) Le corollaire nécessite k algébriquement clos. La partie §4.1 fournit des cas où $k = \mathbf{R}$ et \tilde{W} agit sur $\tilde{V} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ mais pas sur \tilde{V} .

(iii) Le corollaire reste vrai pour k algébriquement clos de caractéristique p , à condition que les ordres de G et W soient premiers à p , puisque le groupe fondamental d'un espace affine sur un tel corps n'a pas de quotient non trivial d'ordre premier à p (étant donné trois groupes finis $H \triangleleft H' \triangleleft \Gamma$ avec $H = O^{p'}(H)$ et $p \nmid |\Gamma : H|$, alors $H = O^{p'}(H')$, donc $H \triangleleft \Gamma$).

(iv) Le corollaire est faux en général pour k algébriquement clos de caractéristique p , comme le montre l'exemple suivant. On prend E espace vectoriel de dimension 2 sur k muni d'un endomorphisme de Frobenius F . Soit B un sous-groupe de Borel F -stable de $GL(E)$ et U le radical unipotent de B . Soit $\tilde{V} = E/U^F$, $G = U^{F^2}/U^F$ et $W = B^{F^2}/U^{F^2}$. Alors, \tilde{V} est un espace affine de dimension 2 sur k , $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/G$ est non ramifiée, W est un groupe de réflexion sur \tilde{V}/G . Néanmoins, le revêtement $\tilde{V} \rightarrow (\tilde{V}/G)/W$ n'est pas galoisien ; une clôture normale est donnée par $E \rightarrow \tilde{V}$.

Théorème 5.5. Soit \tilde{V} un k -espace vectoriel muni de sa graduation standard, G un sous-groupe fini de $GL(\tilde{V})$ et $Z = \tilde{V}/G$. Soit V un k -espace vectoriel gradué, W un groupe de réflexion sur V et L un sous-espace affine homogène de V/W tel qu'il existe un isomorphisme $Z \xrightarrow{\sim} L \times_{V/W} V$ compatible à l'action de k^\times .

On suppose que G ne contient pas de réflexions et que k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Alors, il existe un (unique) groupe de réflexion \tilde{W} sur \tilde{V} contenant G comme sous-groupe distingué et tel que $\tilde{W}/G = W$. En outre, G est un bon sous-groupe distingué de \tilde{W} et W agit trivialement sur le quotient de V par l'espace tangent à Z en 0 .

Démonstration. Notons que W agit fidèlement sur Z . L'existence de \tilde{W} résulte alors du Corollaire 5.3. Puisque $\tilde{V}/\tilde{W} \simeq Z/W$ est un espace affine, \tilde{W} est de réflexion.

Soit E l'espace tangent à Z en 0 , vu comme sous-espace de V . Puisque W agit fidèlement sur E et qu'il est de réflexion, il agit trivialement sur V/E . Quitte à remplacer V par E , on est dans le cas où V est l'espace tangent à Z en 0 et on conclut par le Théorème 3.2 que Z est une intersection complète.

Bibliographie

- [Ben] D.J. Benson, "Polynomial invariants of finite groups", London Math. Sci. Lecture Notes Series **190**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Bes] D. Bessis, Zariski theorems and diagrams for braid groups, *Invent. Math.* **145** (2001), 487–507.
- [Br] E. Brieskorn, Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, *Inv. Math.* **12** (1971), 57–61.
- [BrMaRou] M. Broué, G. Malle et R. Rouquier, Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras, *J. reine angew. Math.* **500** (1998), 127–190.
- [De] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.* **17** (1972), 273–302.
- [Go] N.L. Gordeev, Finite linear groups whose algebras of invariants are complete intersections, *Math. USSR Izv.* **28** (1987), 335–379.
- [KaWa] V. Kac et K. Watanabe, Finite linear groups whose ring of invariants is a complete intersection, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 221–223.
- [SGA1] A. Grothendieck et al., "SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental", *Lecture Notes in Math.* **224**, Springer Verlag, 1971.
- [Sp] T. A. Springer, Regular elements of finite reflection groups, *Invent. Math.* **25** (1974), 159–198.
- [Sta] R.P. Stanley, Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, *J. of Alg.* **49** (1977), 134–148.
- [Ste] R. Steinberg, Differential equations invariant under finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964), 392–400.

Note added in proof.**Degrés fantômes et éléments réguliers.**

Reprenons les hypothèses et notations de la Proposition 3.16. Soit $\tilde{\chi}$ un caractère irréductible de \tilde{W} contenant G dans son noyau. Soit χ_i le caractère irréductible de W_i tel que $\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \dots$ soit le caractère irréductible de $W = W_1 \times W_2 \times \dots$ induit par $\tilde{\chi}$. Alors

$$F_{\tilde{\chi}}(t) = \prod_{i \geq 1} F_{\chi_i}(t^i),$$

où $F_{\tilde{\chi}}$ désigne le degré fantôme associé à $\tilde{\chi}$.

D'autre part, si \tilde{w} est un élément ζ -régulier (où ζ est une racine de l'unité) de \tilde{W} et si (w_1, w_2, \dots) désigne son image dans W , alors w_i est un élément ζ^i -régulier de W_i .