JOURNAL OF ALGEBRA **180,** 571–586 (1996)
ARTICLE NO. 0083

Caractérisation des caractères et Pseudo-caractères

Raphaël Rouquier

Département de Mathématiques, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, Paris 75005, France

Communicated by Michel Broué

Received January 5, 1995

1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des propriétés du caractère d'une représentation d'algèbre dans une algèbre d'Azumaya (e.g., dans une algèbre de matrices) et la caractérisation de ces caractères parmi les fonctions centrales. La notion-clef est celle de pseudo-caractère, (cf définition 2.1) dûe à R. Taylor [Tay], qui a étudié le cas d'algèbres de groupes sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Nous vérifions tout d'abord que le caractère d'une représentation est un pseudo-caractère (proposition 3.1).

Nous établissons, pour une algèbre sur un corps, une correspondance bijective entre représentations absolument irréductibles dans une algèbre centrale simple de dimension n^2 et pseudo-caractères absolument irréductibles de dimension n, donnée par la trace réduite (théorème 4.2). Lorsque toute algèbre centrale simple sur le corps K est isomorphe à une algèbre de matrices sur K, alors l'application qui à une représentation fait correspondre son caractère induit une bijection entre représentations absolument irréductibles dans une algèbre de matrices de dimension n^2 sur K et pseudo-caractères absolument irréductibles de dimension n dans K (corollaire 4.4).

Ensuite, nous construisons une bijection entre représentations absolument irréductibles dans une algèbre d'Azumaya de rang constant n^2 et pseudo-caractères de dimension n tels que les pseudo-caractères résiduels associés soient absolument irréductibles de dimension n (théorème 5.1). De cette correspondance se déduisent des résultats de H. Carayol et J.-P. Serre [Ca, Se] sur les caractères de représentations dans des anneaux locaux (corollaires 5.3 et 5.4).

0021-8693/96 $18.00

Ainsi, le problème de «remonter» une représentation résiduelle est équivalent à celui de remonter son caractère en un pseudo-caractère, résultat dû à L. Nyssen (corollaire 5.2). Alors, étant donnée une algèbre sur un anneau local et une représentation résiduelle absolument irréductible, nous construisons une déformation universelle d'une telle représentation, généralisant et simplifiant une construction de B. Mazur [Ma].

Je tiens à remercier J.-P. Serre, qui m'a suggéré ce travail, pour ses encouragements et commentaires; je remercie également M. Broué pour son aide lors de la rédaction d'une version préliminaire et L. Scott pour plusieurs discussions ainsi que pour son hospitalité à l'université de Charlottesville.

2. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Soit A un anneau commutatif et R une A-algèbre.

Soient $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ une fonction centrale (i.e. telle que $f(xy) = f(yx)$ pour tous $x, y \in R$) et n un entier. Soit $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, \ldots, n\})$ le groupe symétrique sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et ε le caractère signature de $\mathfrak{S}_n$. On définit l'application $S_n(f)\colon R^n \to A$ par

$$S_n(f)(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x)$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ et où pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décomposant en produit de cycles disjoints $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, si $\sigma_i = (j_1, \ldots, j_m)$, alors on pose $\sigma_i(x) = x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ et $(\sigma \cdot f)(x) = f(\sigma_1(x)) \cdots f(\sigma_k(x))$.

Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$. La décomposition de $\tau^{-1}\sigma\tau$ en produit de cycles disjoints est $\tau^{-1}\sigma\tau = (\tau^{-1}\sigma_1\tau) \cdots (\tau^{-1}\sigma_k\tau)$ et si $\sigma_i = (j_1, \ldots, j_m)$, alors on a $\tau^{-1}\sigma_i\tau = (\tau(j_1), \ldots, \tau(j_m))$. Ainsi, $(\sigma \cdot f)(\tau \cdot x) = ((\tau^{-1}\sigma\tau) \cdot f)(x)$. Il en résulte que $S_n(f)$ est symétrique.

DÉFINITION 2.1. Si d est un entier positif, on dit que $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ est un pseudo-caractère de dimension d de R sur A (et on note $\dim f = d$) si:

(1) $f(xy) = f(yx)$ pour tous $x, y \in R$,

(2) d est le plus petit entier positif k tel que $S_{k+1}(f) = 0$.

Nous verrons (proposition 2.3) que si f est un pseudo-caractère de dimension d, alors $S_{k+1}(f) = 0$ pour $k \geq d$.

Nous dirons que f est *irréductible* s'il n'existe pas deux pseudo-caractères f_1 et f_2 tels que $f = f_1 + f_2$ et $\dim f = \dim f_1 + \dim f_2$ (il résulte du lemme 2.8 que c'est équivalent à $\dim f \geq \dim f_1 + \dim f_2$).

L'application S_n apparaît dans le cas de caractères irréductibles d'un groupe fini chez Frobenius [Fr], où elle est définie comme une dérivée n-ème du facteur irréductible du «Gruppendeterminant» associé à un caractère irréductible donné. Qu'un caractère irréductible d'un groupe finit soit un pseudo-caractère est démontré par Frobenius [Fr, §3, 21].

La définition de pseudo-caractère donnée ici est une légère modification de la notion originale de «pseudo-représentation» dûe à R. Taylor [Tay, §1] (Taylor demandait, à la place de (2), $S_{d+1}(f) = 0$ et $f(1) = d \cdot 1_A$; notre définition permet d'avoir une dimension bien déterminée pour chaque pseudo-caractère et nous verrons (proposition 2.4) que pour A intègre, si f est un pseudo-caractère, alors $f(1) = \dim f \cdot 1_A$). Dans le cas particulier où $n = 2$, une définition plus restrictive avait été introduite auparavant par A. Wiles [Wi, 2.2].

Pour $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ une fonction centrale, on pose $S_0(f) = 1$. Pour I un ensemble fini, on note $|I|$ le cardinal de I.

LEMME 2.2. *Soient n un entier positif, $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ une fonction centrale et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in R$. On a*

$$\begin{aligned} S_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= f(x_{n+1}) S_n(f)(x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} S_n(f)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{n+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Soit g une seconde fonction centrale. On note $E = \{1, \ldots, n\}$. On a

$$S_n(f+g)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \subset E} S_{|I|}(f)\big(\{x_i\}_{i \in I}\big) S_{|E-I|}(g)\big(\{x_i\}_{i \in E-I}\big). \tag{2}$$

où I décrit les sous-ensembles de E.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1},\ \sigma(i)=n+1} \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1},\ \sigma(n+1)=n+1} \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1},\ \sigma(n+1)=n+1} \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ &\qquad = f(x_{n+1}) S_n(f)(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

et pour $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1},\\ \sigma(i)=n+1}} \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_{n+1})$$
$$= -S_n(f)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{n+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

d'où la première égalité. On a

$$\begin{aligned} S_n(f+g)\big(\{x_i\}_{i \in E}\big) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(E)} \sum_{I \subset E,\, \sigma(I)=I} \varepsilon(\sigma)\big(\sigma_{|I} \cdot f\big)\big(\{x_i\}_{i \in I}\big)\big(\sigma_{|E-I} \cdot g\big)\big(\{x_i\}_{i \in E-I}\big) \\ &= \sum_{I \subset E} \sum_{\substack{\sigma_1 \in \mathfrak{S}(I),\\ \sigma_2 \in \mathfrak{S}(E-I)}} \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)(\sigma_1 \cdot f)\big(\{x_i\}_{i \in I}\big)(\sigma_2 \cdot g)\big(\{x_i\}_{i \in E-I}\big), \end{aligned}$$

d'où la deuxième égalité. ∎

Il résulte alors immédiatement du lemme 2.2 (1):

PROPOSITION 2.3. *Si f est un pseudo-caractère de dimension n, alors $S_k(f) = 0$ pour $k > n$.*

PROPOSITION 2.4. *Supposons A est intègre. Si f est un pseudo-caractère de dimension n, alors $f(1) = n \cdot 1_A$.*

Preuve. Si $n = 0$, alors le résultat est clair. Sinon, soient $x_1, \ldots, x_n \in R$. On a $S_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_n, 1) = (f(1) - n \cdot 1_A) S_n(f)(x_1, \ldots, x_n)$, d'après le lemme 2.2 (1). Puisque $S_n(f) \neq 0$ et A est intègre, on a donc $f(1) = n \cdot 1_A$. ∎

LEMME 2.5. *Soient k un entier, $\{1, \ldots, k\} = I_1 \cup \cdots \cup I_l$ une partition de $\{1, \ldots, k\}$. Soit $x = x_1 \times \cdots \times x_l$ où $x_j \in R^{I_j}$. Supposons $yy' = y'y = 0$ pour tous y et y' éléments de x_i et x_j, lorsque $i \neq j$.*

Alors, pour $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ une fonction centrale, on a

$$S_k(f)(x) = \prod_{j=1}^{l} S_{|I_j|}(f)(x_j).$$

Preuve. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ ayant une orbite dont les intersections avec deux parties distinctes I_i et I_j sont non vides. Soit alors σ' un cycle de σ correspondant à un telle orbite. On a $\sigma'(x) = 0$ et donc $(\sigma \cdot f)(x) = 0$. Ainsi, $S_k(f) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\sigma \cdot f)(x)$ où σ décrit $\mathfrak{S}(I_1) \times \cdots \times \mathfrak{S}(I_l)$. ∎

LEMME 2.6. *Soit f un pseudo-caractère de R. Pour tout $x \in R$ nilpotent, $f(x)$ est nilpotent.*

Preuve. Soit x tel que $f(x^r)$ est nilpotent pour $r \geq 2$. Alors $f(x)^{1+\dim f}$ est nilpotent, puisque $S_{1+\dim f}(f)(x,\ldots,x) = 0$, d'où $f(x)$ est nilpotent. Ainsi, si x est nilpotent, il existe un entier $r > 1$ tel que $x^r = 0$, donc tel que $f(x^i)$ est nilpotent pour $i \geq r$ et en particulier $f((x^{r-1})^i)$ est nilpotent pour $i \geq 2$. Il résulte de ce qui précède par récurrence descendante sur r que $f(x)$ est nilpotent. ∎

LEMME 2.7. *Soient $f \in \mathrm{Hom}_A(R, A)$ une fonction centrale et k un entier tel que $k!$ n'est pas un diviseur de 0 dans R. On a $S_k(f) = 0$ si et seulement si $S_k(f)(x,\ldots,x) = 0$ pour tout $x \in R$.*

Preuve. Soient $S^k(R)$ la puissance symétrique k-ème du A-module R et φ l'application $R^k \to S^k(R)$ définie par $\varphi(x_1,\ldots,x_k) = x_1 \cdots x_k$. Par la propriété universelle de $S^k(R)$, puisque $S_k(f)$ est k-linéaire et symétrique, il existe g dans $\mathrm{Hom}_A(S^k(R), A)$ tel que $S_k(f) = g \circ \varphi$ (voir par exemple [Bki1, Chapitre III, §6, proposition 6]).

Soit A' le localisé de A en la partie multiplicative engendrée par $k!$, $R' = A' \otimes_A R$ et $f' = id_{A'} \otimes f \in \mathrm{Hom}_{A'}(R', A')$. Puisque $k!$ n'est pas un diviseur de 0 dans R, donc dans A, les morphismes canoniques $A \to A'$ et $R \to R'$ sont injectifs. Comme $S_k(f')$ est k-linéaire, on a $S_k(f') = 0$ si et seulement si $S_k(f) = 0$ et $S_k(f')(x,\ldots,x) = 0$ pour tout $x \in R'$ si et seulement si $S_k(f)(x,\ldots,x) = 0$ pour tout $x \in R$. Par conséquent, il suffit de démontrer le lemme pour $k!$ inversible dans A, ce que nous supposons désormais.

Lorsque $k!$ est inversible dans A, le A-module $S^k(R)$ est engendré par les x^k avec $x \in R$ [Bki 1, Chapitre III, §6, remarque 3] et par conséquent $S_k(f) = 0$ si et seulement si $S_k(f)(x,\ldots,x) = 0$ pour tout $x \in R$. ∎

LEMME 2.8. *Soient f et g deux pseudo-caractères. Alors, $f+g$ est un pseudo-caractère et* $\dim(f+g) \leq \dim f + \dim g$.

En outre, si A est intègre, $(\dim f + \dim g)! \cdot 1_A \neq 0$ *et* $(\dim f)! \cdot (\dim g)!$ *n'est pas un diviseur de 0 dans R, alors* $\dim(f+g) = \dim f + \dim g$.

De même, si A est intègre, R est le produit direct de deux sous A-algèbres R_1 et R_2, telles que $f(R_2) = g(R_1) = 0$, alors $\dim(f+g) = \dim f + \dim g$.

Preuve. Soient $m = \dim f$ et $n = \dim g$. Il résulte immédiatement de la deuxième égalité du lemme 2.2 que $S_{n+m+1}(f+g) = 0$.

D'après le lemme 2.7, il existe $x, y \in R$ tels que $S_m(f)(x,\ldots,x) \neq 0$ et $S_n(g)(y,\ldots,y) \neq 0$. Soit alors k l'entier positif minimal tel que

$$S_n(g)\Big(\underbrace{x,\ldots,x}_{n-k \text{ termes}}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k \text{ termes}}\Big) \neq 0.$$

On a alors, d'après le lemme 2.2 (2),

$$S_{m+n}(f+g)\Big(\underbrace{x,\ldots,x}_{m+n-k},\underbrace{y,\ldots,y}_{k}\Big)$$
$$=\binom{m+n-k}{n-k}S_m(f)(x,\ldots,x)S_n(g)\Big(\underbrace{x,\ldots,x}_{n-k},\underbrace{y,\ldots,y}_{k}\Big).$$

Si $(m+n)!\cdot 1_A \neq 0$, on a donc $S_{m+n}(f+g)\neq 0$.

Si R est le produit direct de deux sous A-algèbres R_1 et R_2, telles que $f(R_2)=g(R_1)=0$, alors grâce au lemme 2.5 on conclut encore que $S_{m+n}(f+g)\neq 0$. ∎

Remarque 1. Si r est un entier strictement positif et $r\cdot 1_A=0$, f un pseudo-caractère non nul et $g=(r-1)f$, alors g est un pseudo-caractère, $f+g=0$ est un pseudo-caractère nul, c'est-à-dire de dimension nulle, bien que $\dim f+\dim g>0=\dim(f+g)$.

La multilinéarité de S_n rend immédiat le lemme suivant:

LEMME 2.9. *Soit A' une A-algèbre commutative. Soit $f\in \mathrm{Hom}_A(R,A)$ une fonction de classe et f' l'extension de f à $R\otimes_A A'$. Si f est un pseudo-caractère, alors f' est un pseudo-caractère de $R\otimes_A A'$ et* $\dim f'\leq \dim f$.

Si en outre A' est un A-module fidèle, alors f est un pseudo-caractère si et seulement si f' est un pseudo-caractère et dans ce cas, $\dim f'=\dim f$.

Si $f\in \mathrm{Hom}_A(R,A)$, on note $\hat{f}\in \mathrm{Hom}_A(R,\mathrm{Hom}_A(R,A))$ l'application donnée par $x\mapsto (y\mapsto f(xy))$. Si f est une fonction centrale, alors $\ker \hat{f}$ est un idéal de R.

DÉFINITION 2.10. Soit f un pseudo-caractère. On dit que f est fidèle si $\ker\hat{f}=0$.

PROPOSITION 2.11. *Supposons R de type fini comme A-module. Soit f un pseudo-caractère fidèle de R dans A, A' une A-algèbre et f' l'extension de f à $R\otimes_A A'$. Si R est de type fini comme A-module et A' plat sur A ou si A' est projectif sur A, alors f' est fidèle.*

Preuve. L'application $\hat{f}\colon R\to \mathrm{Hom}_A(R,A)$ est injective et A' est plat sur A, donc l'application obtenue par extension des scalaires $R\otimes_A A'\to (\mathrm{Hom}_A(R,A))\otimes_A A'$ est encore injective. Mais l'hypothèse sur R et A' implique que l'homomorphisme canonique $(\mathrm{Hom}_A(R,A))\otimes_A A'\to \mathrm{Hom}_{A'}(R\otimes_A A',A')$ est injectif [Bki3, Chapitre I, §2, proposition 11; Bki1, Chapitre II, §5, Proposition 7] et on en déduit alors que $\hat{f}'$ est injectif. ∎

LEMME 2.12. *Soit f un pseudo-caractère fidèle de dimension n de R. Soit A' une A-algèbre commutative, $R' = R \otimes_A A'$ et f' l'extension de f à R'.*

Soient $x_1, \ldots, x_n \in R'$. On a

$$\sum_{I, \sigma} (-1)^{|I|} S_{n-|I|}(f')\big(\{x_i\}_{i \notin I}\big) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(|I|)} = 0$$

où I décrit les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ et σ décrit l'ensemble des bijections $\{1, \ldots, |I|\} \to I$.

Preuve. L identité à prouver étant multilinéaire, il suffit de la prouver pour $A' = A$. Soit $y \in R$. On a

$$S_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_I (-1)^{|I|} S_{n-|I|}(f)\big(\{x_i\}_{i \notin I}\big) f(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(|I|)} y)$$

où I décrit les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ et σ décrit l'ensemble des bijections $\{1, \ldots, |I|\} \to I$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &S_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_n, y) \\ &\qquad = f\left(\left(\sum_I (-1)^{|I|} S_{n-|I|}(f)\big(\{x_i\}_{i \notin I}\big) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(|I|)}\right) y\right) = 0. \end{aligned}$$

Finalement, $\sum_I (-1)^{|I|} S_{n-|I|}(f)(\{x_i\}_{i \notin I}) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(|I|)} \in \ker \hat{f} = 0$. ∎

Une conséquence directe de ce lemme est:

LEMME 2.13. *Soit f un pseudo-caractère fidèle de dimension n de R. Soit A' une A-algèbre commutative, $R' = R \otimes_A A'$ et f' l'extension de f à R'.*

Alors, tout élément de R' est annulé par un polynôme de degré n sur A'. Pour $x \in R'$, on a $P_x(x) = 0$, où

$$P_x(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} S_{n-k}(f')(x, \ldots, x) t^k.$$

LEMME 2.14. *Soit f un pseudo-caractère fidèle de R. Soit A' une A-algèbre commutative, $R' = R \otimes_A A'$ et f' l'extension de f à R'.*

Si $e_1, \ldots, e_k$ sont des idempotents non nuls deux à deux orthogonaux de R', alors $k \leq \dim f$.

Preuve. Soit $n = \dim f$ et supposons $k > n$. On a $S_{n+1}(f')(e_1, \ldots, e_{n+1}) = f'(e_1) \cdots f'(e_{n+1}) = 0$. Notons que $P_{e_i}(1) = 0$ (notations du lemma 2.13). Soit i minimal tel que $f'(e_1) \cdots f'(e_i) = 0$. Si $i = 1$, alors $P_{e_i} = t^n$, ce qui est impossible.

On a alors $f'(e_1) \cdots f'(e_{i-1}) P_{e_i}(t) = f'(e_1) \cdots f'(e_{i-1}) t^n$, d'où finalement $f'(e_1) \cdots f'(e_{i-1}) P_{e_i}(1) = f'(e_1) \cdots f'(e_{i-1}) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $k \leq n$. ∎

3. LES REPRÉSENTATIONS INDUISENT DES PSEUDO-CARACTÈRES

Nous prouvons ici la proposition suivante (comparer avec [Lo, théorème 9.3.4]):

PROPOSITION 3.1. *Soit $\rho: R \to \Sigma$ une représentation de R dans une A-algèbre d'Azumaya Σ. Soit χ la trace réduite de ρ. Alors, χ est un pseudo-caractère. Si Σ est de rang n^2 sur A, alors χ est de dimension au plus n.*

Preuve. Il est clair qu'il suffit de traiter le cas où $R = \Sigma$ et ρ est l'identité. Il suffit de prouver la proposition pour A remplacé par $A_{\mathfrak{m}}$ et R remplacé par $R \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A (lemme 2.9). Par conséquent, on peut supposer A local. Quitte à étendre les scalaires de mainière fidèlement plate, on peut supposer que $R = M_n(A)$ (cf. [Kn-Oj, Chapitre III, corollaire 6.7]). On peut remplacer A par un anneau commutatif intègre de caractéristique 0 dont A est un quotient. On peut alors remplacer A par une clôture algébrique de son corps des fractions.

Ainsi, on suppose maintenant que A est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit k un entier, $k > n$. D'après le lemme 2.7, il suffit de montrer que $S_k(\chi)(x, \ldots, x) = 0$ pour tout $x \in M_n(A)$. Les matrices diagonalisables étant denses dans $M_n(A)$ pour la topologie de Zariski, il suffit de vérifier cette annulation pour les matrices diagonalisables et en fait seulement pour les matrices diagonales, puisque $S_k(\chi)(x, \ldots, x) = S_k(\chi)(y, \ldots, y)$ si x et y sont conjuguées. Soit x une matrice diagonale de $M_n(A)$. Soit $V = A^n$. Alors, x agit sur $V^{\otimes k}$ par $x(v_1, \ldots, v_n) = (xv_1, \ldots, xv_n)$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ agit sur $V^{\otimes k}$ par permutation des facteurs et cette action commute avec celle de x. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Alors, dans la base canonique $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}_{1 \le i_j \le n}$ de $V^{\otimes k}$ induite par la base $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ de V, la matrice de l'endomorphisme induit par $x\sigma$ est monomiale car la matrice de l'endomorphisme induit par x est diagonale. Soit $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Les vecteurs de base fixes par σ sont les $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ tels que $i_{\sigma(j)} = i_j$ pour $1 \le j \le k$. Par conséquent, la trace de $x\sigma$ sur $V^{\otimes k}$ est $\chi(x^{c_1}) \cdots \chi(x^{c_m})$, où $c_1, \ldots, c_m$ sont les longueurs des cycles de σ. Ainsi, la trace de $x\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\sigma$ sur $V^{\otimes k}$ est $S_k(\chi)(x, \ldots, x)$. Puisque l'action de x commute avec celle de $\mathfrak{S}_k$, la trace de $x\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\sigma$ sur $V^{\otimes k}$ est égale à la trace de x sur $(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\sigma)V^{\otimes k}$ qui est la puissance k-ème antisymétrique de V, donc est nulle puisque $k > n$. Ainsi, $S_k(\chi)(x, \ldots, x) = 0$. ▮

COROLLAIRE 3.2. *Soit k un entier positif et soit P_k le polynôme donné par $P_k(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) t^{c_\sigma}$ où c_σ désigne le nombre d'orbites de σ. Alors, on a*

$$P_k(t) = (t - k + 1)(t - k + 2) \cdots (t - 1)t.$$

Preuve. Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, on a $P_k(n) = S_k(\chi)(1, \dots, 1) = 0$ pour $k > n$. Par conséquent, les entiers $0, \dots, k-1$ sont des racines de P_k. Or, P_k est de degré k et est unitaire, d'où le résultat. ∎

Comme me l'a expliqué S. Kim, ce corollaire peut se déduire de la formule du déterminant de Cauchy.

COROLLAIRE 3.3. *Soit R une algèbre de matrices de dimension n^2 sur un corps K. Soit α un entier strictement positif avec $\alpha < p$ si le corps K est de caractéristique p strictement positive. Alors, le pseudo-caractère α* Tr *est de dimension αn.*

Preuve. Soit $1 = e_1 + \cdots + e_n$ une décomposition de l'unité de R en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. On a, d'après le lemme 2.5,

$$S_{\alpha n}(\alpha \operatorname{Tr})\Big(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\alpha}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{\alpha}\Big) = \prod_{i=1}^{n} S_\alpha(\alpha \operatorname{Tr})(e_i, \dots, e_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P_\alpha(\alpha \operatorname{Tr}(e_i)) = P_\alpha(\alpha)^n \neq 0.$$

Ainsi, $\dim(\alpha \operatorname{Tr}) \geq \alpha n$. En outre, d'après la proposition 3.1, on a $\dim \operatorname{Tr} \leq n$. D'après le lemme 2.8, on a $\dim(\alpha \operatorname{Tr}) \leq \alpha \dim \operatorname{Tr}$, d'où le résultat. ∎

4. CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS SUR UN CORPS

Nous supposons ici que K est un corps commutatif et R une K-algèbre.

LEMME 4.1. *Soit f un pseudo-caractère de R dans K. Alors, $R/\ker \hat{f}$ est une algèbre semi-simple. En outre, les centres des facteurs simples de cette algèbre sont des extensions séparables de K.*

Preuve. Quitte à remplacer R par $R/\ker \hat{f}$, on peut supposer $\ker \hat{f} = 0$. Alors, d'après le lemme 2.13, tout élément de R est annulé par un polynôme de degré $\dim f$ sur K.

Soit V un R-module irréductible et $D = \operatorname{End}_R(V)$: c'est un corps de centre contenant K, d'après le lemme de Schur [Bki2, Chapitre VIII, §4, proposition 2]. L'image de R dans $\operatorname{End}_K(V)$ est un sous-anneau dense S de $\operatorname{End}_D(V)$, d'après le théorème de densité de Jacobson [Bki2, Chapitre VIII, §4, théorème 1]. Si V est de dimension infinie sur D, alors pour tout entier $n > 0$, il existe un morphisme surjectif d'un sous-anneau de S dans $M_n(D^0)$ (D^0 est le corps opposé à D) [Bki2, Chapitre VIII, §4, exercice 9].

Or, tout élément de R, donc de S, est annulé par un polynôme de degré $\dim f$ sur K: ainsi, tout élément de $M_n(D^0)$ est annulé par un polynôme de degré $\dim f$ sur K; c'est impossible pour $n > \dim f$. Ainsi, V est de dimension finie sur D.

Soient k un entier, $V_1, \ldots, V_k$ des R-modules irréductibles deux à deux non isomorphes et $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Alors, d'après le théorème de densité [Bki2, Chapitre VIII, §4, corollaire 1], l'image de R dans $\mathrm{End}_K(V)$ est égale à $\prod_{i=1}^k \mathrm{End}_{D_i}(V_i)$ où $D_i = \mathrm{End}_R(V_i)$. Ainsi, R a un quotient isomorphe à $\prod_{i=1}^k M_{n_i}(D_i^0)$ où $n_i = \dim_{D_i}(V_i)$.

Notons que si S est une sous-algèbre de R et S' un quotient de S, alors tout idempotent de S' est l'image d'un idempotent de S: en effet, soit $e \in S'$ un idempotent et $x \in S$ d'image e. Alors, la K-sous-algèbre de S engendrée par x est de dimension finie, puisque x est annulé par un polynôme non nul sur K. Il résulte alors de [Bki3, Chapitre III, §4, exercice 5] qu'il existe un idempotent de la sous-algèbre engendrée par x, d'image e.

Soient $1_1, \ldots, 1_k$ les unités de $\mathrm{End}_{D_1}(V_1), \ldots, \mathrm{End}_{D_k}(V_k)$: ce sont des idempotents non nuls deux à deux orthogonaux. Suivant [Bki3, Chapitre III, §4, exercice 5], il existe des idempotents deux à deux orthogonaux $e_1, \ldots, e_k$ de R tels que l'image de e_i dans $\mathrm{End}_K(V)$ est 1_i, pour tout i, $1 \leq i \leq k$. D'après le lemme 2.14, on a donc $k \leq \dim f$. Ainsi, R a au plus $\dim f$ classes d'isomorphisme de modules irréductibles.

Montrons que $J(R) = 0$. Soit $x \in J(R)$. Soit P un polynôme de degré $\dim f$ tel que $P(x) = 0$. Soit $r \geq 0$, $a \in K$ et Q un polynôme tels que $P = aX^r(1 + XQ)$. Puisque $x \in J(R)$, $1 + xQ(x)$ est inversible à droite. Or, $P(x) = ax^r(1 + xQ(x)) = 0$, donc $x^r = 0$ et $r > 0$. Ainsi, x est nilpotent d'ordre $r \leq \dim f$. Par conséquent, l'idéal $J(R)$ est nilpotent. Ainsi, d'après le lemme 2.6, on a $J(R) = 0$, puisque f est un pseudo-caractère fidèle. L'algèbre R, n'ayant qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules irréductibles, lesquels sont de dimension finie, et ayant un radical nul, est donc un produit fini d'algèbres simples: ceci prouve la première partie du lemme.

Soit S une sous-algèbre simple de R qui est facteur direct. La restriction f' de f à S est un pseudo-caractère fidèle de R. D'après 2.11, l'application $f' \otimes 1_{Z(S)}\colon S \otimes_K Z(S) \to Z(S)$ est un pseudo-caractère fidèle de $S \otimes_K Z(S)$. D'après la première partie du lemme, l'algèbre $S \otimes_K Z(S)$ est donc semi-simple: par conséquent, $Z(S)$ est une extension séparable de K. ∎

Nous dirons qu'un pseudo-caractère f de R dans K est *absolument irréductible* si pour toute extension L de K, le pseudo-caractère $f \otimes 1_L$ de $R \otimes_K L$ dans L est irréductible.

THÉORÈME 4.2. *Soit f un pseudo-caractère absolument irréductible de dimension n de R dans K. Alors, $R/\ker \hat{f}$ est une algèbre centrale simple sur*

K, de dimension n^2 et f est la trace réduite de la représentation absolument irréductible $R \to R/\ker \hat{f}$.

Preuve. On peut supposer que f est fidèle et donc, d'après le lemme 4.1, on peut supposer que R est isomorphe à un produit d'algèbres simples sur K dont les centres sont des extensions séparables de K. Soit K_s une clôture séparable de K. Alors, $R \otimes_K K_s$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices sur K_s [Bki2, Chapitre VIII, §10, corollaire 3]. En outre, d'après 2.11, l'extension f' de f à $R \otimes_K K_s$ est encore un pseudo-caractère fidèle et irréductible car f est absolument irréductible. Si $R \otimes_K K_s$ est isomorphe à une algèbre de matrices de dimension n^2 sur K_s et f' est la trace correspondante, alors R est isomorphe à une algèbre centrale simple de dimension n^2 sur K et f est la trace réduite correspondante. Ainsi, il suffit de démontrer le théorème lorsque R est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices sur K. La proposition résulte alors du lemme 4.3 qui suit. ∎

LEMME 4.3. *Soient $n_1, \ldots, n_s$ des entiers positifs et $R = \prod_{i=1}^s R_i$ où $R_i \simeq M_{n_i}(K)$ pour $1 \leq i \leq s$. Soit f un pseudo-caractère de R. Alors, il existe des entiers positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, avec $\alpha_i \leq p-1$ pour $1 \leq i \leq s$, si K est de caractéristique p strictement positive, tels que $f = \sum \alpha_i \mathrm{Tr}_i$, où Tr_i est le caractère de la projection $R \to R_i$. On a alors $\dim f = \sum \alpha_i n_i$.*

Preuve. Soit e_i un idempotent primitif de R_i pour $1 \leq i \leq s$. Puisque f est une fonction centrale, on a $f = \sum f(e_i)\,\mathrm{Tr}_i$. On a $S_{k+1}(f)(e_i, \ldots, e_i) = P_{k+1}(f(e_i)) = 0$. Ainsi, d'après le corollaire 3.2, on a $f(e_i) \in \{0, \ldots, 1_K \cdot \dim f\}$.

Soit p la caractéristique de K. Soient $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq s}$ les entiers tels que pour tout i, $f(e_i) = 1_K \cdot \alpha_i$ et $0 \leq \alpha_i \leq p-1$ si $p > 0$. D'après le lemme 2.8, on a $\dim f = \sum \dim(\alpha_i \,\mathrm{Tr}_i)$. D'après le corollaire 3.3, on a en outre $\dim(\alpha_i \,\mathrm{Tr}_i) = \alpha_i n_i$, d'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 4.4. *Supposons que toute algèbre centrale simple sur K est isomorphe à une algèbre de matrices (par exemple, K algébriquement clos). Soit f un pseudo-caractère absolument irréductible de dimension n de R dans K. Alors, $R/\ker \hat{f}$ est isomorphe à une algèbre de matrices de dimension n^2 sur K et f est le caractère de la représentation absolument irréductible $R \to R/\ker \hat{f}$.*

Dans le cas où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, R. Taylor [Tay, théorème 1] a montré que tout pseudo-caractère est le caractère d'une représentation.

5. PSEUDO-CARACTÈRES SUR UN ANNEAU

Nous supposons ici que A est un anneau commutatif.

Si Σ est une A-algèbre d'Azumaya et ρ, ρ' deux représentations de R dans Σ, on dit que ρ et ρ' sont *équivalentes* si il existe un A-automorphisme τ de Σ tel que $\rho' = \tau\rho$. Notons que si A est semi-local (plus généralement si $\mathrm{Pic}(A) = 0$), alors tout A-automorphisme de Σ est intérieur, c'est-à-dire, deux représentations équivalentes sont conjuguées [Kn-Oj, Chapitre IV, proposition 1.2].

THÉORÈME 5.1. *Soit f un pseudo-caractère de R tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, si $f_{\mathfrak{m}}$ désigne le pseudo-caractère correspondant de $R \otimes_A A/\mathfrak{m}$, alors $f_{\mathfrak{m}}$ est absolument irréductible et* $\dim f_{\mathfrak{m}} = \dim f$. *Alors, $R/\ker \hat{f}$ est une algèbre d'Azumaya de rang $(\dim f)^2$ sur A et f est la trace réduite de la représentation $\rho_f \colon R \to R/\ker \hat{f}$. En outre, si ρ est une représentation de R dans une algèbre d'Azumaya de rang $(\dim f)^2$ sur A, de trace réduite f, alors ρ est équivalente à ρ_f.*

Preuve. On peut d'emblée supposer $\ker \hat{f} = 0$. Soit $n = \dim f$.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, $B = A_{\mathfrak{m}}$ et k le corps résiduel de B.

Soit B' un hensélisé strict de B [Ray, Chapitre VIII, §2]: c'est un anneau local hensélien extension locale fidèlement plate de B, de corps résiduel k' une clôture séparable de k. Soit $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal. Soit $R' = R \otimes B$ et $f' = f \otimes id_B$ le pseudo-caractère de R' étendant f. On a, d'après le lemme 2.9, $\dim f' = \dim \bar{f}$ et $\dim \bar{f}' = \dim \bar{f}$ où $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ désignent les pseudo-caractères de $\bar{R} = R \otimes k$ et $R \otimes k'$ déduites de f. D'après le théorème 4.2, puisque $\bar{f} = f_{\mathfrak{m}}$ est absolument irréductible, la k-algèbre $\bar{R}/\ker \hat{\bar{f}}$ est centrale simple de dimension n^2, donc $(\bar{R}/\ker \hat{\bar{f}}) \otimes_k k'$ est une algèbre de matrices de dimension n^2 sur k' [Bki2, Chapitre VIII, §10, corollaire 3]. D'après la proposition 2.11, on a $\bar{R}'/\ker \hat{\bar{f}}' \simeq (\bar{R}/\ker \hat{\bar{f}}) \otimes_k k'$.

Soient $e_1, \ldots, e_n$ des idempotents de R' deux à deux orthogonaux d'images dans $\bar{R}'/\ker \hat{\bar{f}}'$ des idempotents non nuls deux à deux orthogonaaux. On a alors $1 = e_1 + \cdots + e_n$. En effet, sinon $e_1, \ldots, e_n$, $1 - (e_1 + \cdots + e_n)$ sont $n + 1$ idempotents deux à deux orthogonaux non nuls de R', ce qui est impossible d'après le lemme 2.14.

Suivant [Bki3, Chapitre III, §4, exercice 5], il existe des éléments e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ de R' tels que $e_{ij}e_{hk} = \delta_{jh}e_{ik}$ et $e_{ii} = e_i$. Soit S la sous-algèbre de R' engendrée par les e_{ij}. Si $n = 1$, on a $x = f'(x)1_{R'}$, pour tout $x \in R'$, d'après le lemme 2.13, c'est-à-dire, $R' = S$. Sinon, pour $i \neq j$, on a $e_{ij}^2 = 0$ d'où $f'(e_{ij})$ est nilpotent (lemme 2.6). Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal de A engendré par les $f'(e_{ij})$ pour $i \neq j$. C'est un idéal nilpotent, puisque engendré par un nombre fini d'éléments nilpotents. Soient $x \in R'$, $i_1, \ldots, i_n$ tels que

$\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ et $x_1 = e_{i_1 i_2}, \dots, x_{n-1} = e_{i_{n-1} i_n}$, $x_n = x e_{i_1}$. D'après le lemme 2.12, on a

$$\sum_{j=2}^{n-1} e_{i_j i_n} x e_{i_1 i_j} + x e_{i_1 i_n} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f'(x e_{i_1 i_j}) e_{i_j i_n} \in \Im R'$$

d'où, en multipliant à droite par $e_{i_n i_1}$,

$$x e_{i_1} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f'(x e_{i_1 i_j}) e_{i_j i_1} \in \Im R'.$$

Par conséquent, $x e_{i_1} \in S + \Im R'$. Alors, $x \in S + \Im R'$. On a ainsi $R' = S + \Im R'$. Comme $\Im$ est nilpotent, on a finalement $R' = S$, c'est-à-dire, R' est une algèbre de matrices de dimension n^2 sur B'. Par conséquent, $R \otimes A_{\mathfrak{m}}$ est une $A_{\mathfrak{m}}$-algèbre d'Azumaya, puisque elle devient isomorphe à une algèbre de matrices après extension fidèlement plate des scalaires [Kn-Oj, Chapitre III, théorème 6.6].

On a ainsi montré que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la $A_{\mathfrak{m}}$-algèbre $R \otimes A_{\mathfrak{m}}$ est une algèbre d'Azumaya de rang n^2. Par conséquent, R est une algèbre d'Azumaya de rang n^2 sur A.

Pour la dernière partie du théorème, on peut supposer que R est une A-algèbre d'Azumaya de rang n^2 et que f est un pseudo-caractère fidèle de R. Alors, ρ: $R \to \Sigma$, où Σ est une A-algèbre d'Azumaya de rang n^2 est injectif, puisque $\mathrm{Trd}(\rho) = f$ est fidèle. Le théorème est alors prouvé, car tout A-monorphisme φ entre deux A-algèbres d'Azumaya Σ_1 et Σ_2 de même rang est un isomorphisme.

En effet, il résulte de [Kn-Oj, Chapitre III, corollaire 5.3] que l'application $\varphi(\Sigma_1) \otimes (\Sigma_2)^{\varphi(\Sigma_1)} \to \Sigma_2$, $a \otimes b \mapsto ab$ est un isomorphisme. Or, $(\Sigma_2)^{\varphi(\Sigma_1)} = Z(\Sigma_2) = A$, d'où $\varphi(\Sigma_1) = \Sigma_2$, i.e., φ est un isomorphisme. ∎

Un cas particulier du théorème précédent est le résultat suivant, qui répond à une question de J.-P. Serre et est dû (sous une forme non constructive) à L. Nyssen [Ny]:

COROLLAIRE 5.2. *Supposons A hensélien local de corps résiduel k et soit f un pseudo-caractère de R tel que le pseudo-caractère résiduel $\bar{f}$ de $R \otimes k$ est le caractère d'une représentation absolument irréductible $\bar{\rho}$ de $R \otimes k$ dans une algèbre de matrices sur k. Alors, l'algèbre $R/\ker \hat{f}$ est isomorphe à une algèbre de matrices sur A et la représentation $R \to R/\ker \hat{f}$ est de caractère f et relève la représentation $\bar{\rho}$.*

On retrouve alors les résultats suivants [Se, théorèmes 1 et 4]:

Soit ρ une représentation absolument irréductible (i.e. surjective) de R dans une A-algèbre d'Azumaya Σ de rang n^2.

Corollaire 5.3. *Soit ρ' une représentation de R dans une algèbre d'Azumaya Σ' de rang n^2. Si ρ et ρ' ont même trace réduite, alors il existe un isomorphisme de Σ sur Σ' qui envoie ρ sur ρ'.*

Corollaire 5.4. *Soit A' un sous-anneau de A tel que tout idéal maximal de A' est de la forme $\mathfrak{m} \cap A'$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A. Soit R' une A'-sous-algèbre de R telle que $R = AR'$. Si $\mathrm{Trd}(\rho)(x) \in A'$ pour tout $x \in R'$, alors la restriction de ρ à R' est une représentation absolument irréductible de R' dans une A'-algèbre d'Azumaya Σ' de rang n^2, telle que $\Sigma' \otimes_{A'} A \simeq \Sigma$.*

6. DÉFORMATIONS

Nous prouvons ici l'existence de déformations universelles de pseudo-caractères absolument irréductibles. On en déduit l'existence de déformations universelles de représentations absolument irréductibles.

Lorsque k est un corps fini et R l'algèbre de groupe d'un groupe profini — avec une condition de finitude Φ_p—, B. Mazur a prouvé, à l'aide du critère de (pro-)représentabilité de Schlessinger [Sch, theorem 2.11], l'existence de telles déformations, dans la catégorie des anneaux locaux noethériens complets de corps résiduel k [Ma, proposition 1]. En outre, il est prouvé l'existence de déformations formelles pour des représentations non absolument irréductibles.

Soit n un entier. Soit T_n la A-algèbre $A[X_r \mid r \in R]/I$ où I est l'idéal engendré par $X_r + X_s - X_{r+s}$, $X_a X_r - X_{ar}$, pour $r, s \in R$ et $a \in A$ et par

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) X_{a_{1_1} \ldots a_{1_{n_1}}} \cdots X_{a_{r_1} \ldots a_{r_{n_r}}}$$

pour $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ et où $\sigma = (1_1, \ldots, 1_{n_1}) \cdots (r_1, \ldots, r_{n_r})$ est décomposé en produit de cycles disjoints.

On note $Y_n = \operatorname{Spec} T_n$. La surjection canonique $T_{n+1} \to T_n$ (cf. proposition 2.3) induit un plongement $Y_n \to Y_{n+1}$.

Supposons A local de corps résiduel k. La donnée d'un pseudo-caractère de $R \otimes k$ dans k de dimension au plus n correspond bijectivement à la donnée d'un point k-rationnel de Y_n.

Soit $\tilde{f}$ un pseudo-caractère absolument irréductible de dimension n de $R \otimes k$ dans k et x le point k-rationnel de Y_n associé. Soit $A_{\tilde{f}} = \mathscr{O}_{Y_n, x}$ l'anneau local en x et f le pseudo-caractère $R \otimes A_{\tilde{f}} \to A_{\tilde{f}}$ associé. Notons que le pseudo-caractère résiduel $\bar{f}: R \otimes k \to k$ donné par f est égal à $\tilde{f}$.

On a alors:

Proposition 6.1. *La déformation $f: R \otimes A_{\tilde{f}} \to A_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ est universelle, i.e., pour toute A-algèbre locale B de corps résiduel k, pour tout pseudo-*

caractère g de dimension n de $R \otimes B$ dans B telle que $\bar{g} = \tilde{f}$, il existe un unique morphisme local i: $A_{\tilde{f}} \to B$ de A-algèbres tel que g est obtenu à partir de f en étendant les scalaires à travers i.

Soit $\tilde{\rho}$ une représentation absolument irréductible de R dans une A-algèbre centrale simple, de trace réduite $\tilde{f}$. On note ρ la représentation de $R \otimes A_{\tilde{f}}$ donnée par la surjection canonique $R \otimes A_{\tilde{f}} \to R \otimes A_{\tilde{f}}/\ker \hat{f}$.

Suivant Mazur, on dit que deux représentations ρ_1 et ρ_2 dans une algèbre d'Azumaya Σ sur un anneau local de corps résiduel F sont *strictement équivalentes* si il existe un automorphisme τ de Σ tel que $\rho_2 = \tau\rho_1$ et τ induit l'identité sur l'algèbre $\Sigma \otimes F$.

COROLLAIRE 6.2. *La représentation ρ est une déformation universelle de $\tilde{\rho}$, i.e., pour toute A-algèbre locale B de corps résiduel k, pour toute représentation ρ' de $R \otimes B$ dans une B-algèbre d'Azumaya de rang n^2 telle que $\bar{\rho}' = \tilde{\rho}$, il existe un unique morphisme local i: $A_{\tilde{f}} \to B$ de A-algèbres tel que ρ' est strictement équivalente à la représentation de $R \otimes B$ obtenue à partir de ρ en étendant les scalaires à travers i.*

Supposons A noethérien et soit $\hat{A}_{\tilde{f}}$ la complétion de $A_{\tilde{f}}$. Alors, la représentation $\hat{\rho}$ de $R \otimes \hat{A}_{\tilde{f}}$ est une représentation dans une algèbre de matrices de rang n^2 sur $\hat{A}_{\tilde{f}}$ et $\bar{\hat{\rho}} = \tilde{\rho}$. Ainsi, la représentation $\hat{\rho}$ est une déformation universelle de $\tilde{\rho}$ dans la catégorie des A-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k. Par conséquent, dans la situation étudiée par Mazur (cf. ci-dessus), la représentation $\hat{\rho}$ est canoniquement isomorphe à la déformation universelle de Mazur (car une telle déformation universelle est unique à isomorphisme canonique près, cf. [Ma, proposition 1]).

REFERENCES

[Bki1] N. Bourbaki, "Algèbre," Chapitres I à III, Hermann, Paris, 1970.

[Bki2] N. Bourbaki, "Algèbre," Chapitre VIII, Hermann, Paris, 1958.

[Bki3] N. Bourbaki, "Algèbre commutative," Chapitres I à IV, Masson, Paris, 1985.

[Ca] H. Carayol, Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet, in "Contemporary mathematics," Vol. 165, pp. 213–237, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Fr] G. Frobenius, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, *Sitz. Preuss. Akad. Berlin* (1896), 1343–1382 (Ges. Abh. III, 38–77).

[Kn-Oj] M.-A. Knus et M. Ojanguren, "Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 389, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.

[Lo] J.-L. Loday, "Cyclic Homology," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1992.

[Ma] B. Mazur, Deforming Galois representations, in "Galois groups over **Q**," MSRI Publications, Vol. 16, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.

[Ny] L. Nyssen, Pseudo-représentations, preprint.
[Ray] M. Raynaud, ''Anneaux locaux henséliens,'' Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1970.
[Sch] M. Schlessinger, Functors on Artin rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **130** (1968), 208–222.
[Se] J.-P. Serre, ''Représentations linéaires sur des anneaux locaux, d'après Carayol'' (Séminaire Chevalley, 8 Octobre 1993).
[Tay] R. Taylor, Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight, *Duke Math. J.* **63** (1991), 281–332.
[Wi] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), 529–573.