GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Variétés riemanniennes à tenseur* **C** *non négatif*. Note (*) de M. **André Lichnerowicz**, Membre de l'Académie.

Précision d'un théorème de [1] et extensions de résultats de Cheeger et Gromoll concernant les variétés à courbure de Ricci non négative [2]. Cas des variétés kählériennes.

1. Soit (W, g) une variété riemannienne complète, de dimension n, de tenseur métrique g, de tenseur de Ricci **R**, d'opérateur de dérivation covariante ∇. En coordonnées locales $\mathbf{R} = (R_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Nous considérons ici les variétés admettant un scalaire $f > 0$ pour lequel le tenseur **C** associé défini par

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \log f \tag{1.1}$$

est *non négatif*. Nous supposons de plus $|\log f|$ *borné sur* W.

2. Soit δ_f l'opérateur sur les r-formes défini par $\delta_f : \alpha \to f^{-1}\delta(f\alpha)$, où δ est l'opérateur de codifférentiation. Nous posons $\Delta_f = d\delta_f + \delta_f d$. Si ξ est une 1-forme, on lui associe le 2-tenseur symétrique $b(\xi)$ donné par

$$b(\xi)_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i.$$

Avec les notations de [1], un calcul local donne

$$(\Delta_f \xi - Q(\mathbf{C})\xi + d\delta_f \xi, f\xi) = -\nabla^j \{ f\xi^i b(\xi)_{ij} \} + (b(\xi), f b(\xi)). \tag{2.1}$$

On déduit de [1] le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit* (W, g) *une variété riemannienne compacte, orientée, telle qu'il existe sur* W *un scalaire* $f > 0$ *pour lequel le tenseur* **C** *associé par* (1.1) *est non négatif*. Soit (V, γ) *un revêtement fini de* (W, g) *dont le premier nombre de Betti* $h (\leq n)$ *est égal au maximum des premiers nombres de Betti des revêtements finis de* W. *La variété* (V, γ) *est fibrée différentiablement sur le tore canonique* B(V), *de dimension* h, *en variétés compactes, connexes, vérifiant la même hypothèse que* (W, g) *et à premier nombre de Betti nul.*

3. Soit (W, g) une variété riemannienne complète. On appelle *rayon* (resp. *droite*) de la variété une géodésique (rapportée au paramètre naturel t) $\sigma : [0, \infty) \to W$ [resp. $\sigma : (-\infty, +\infty) \to W$] dont chaque arc est minimal. On note $d(.,.)$ la distance de deux points (W, g). A tout rayon σ et à toute valeur $t \geq 0$ du paramètre, on associe la fonction $x \to g_t(x) = d(\sigma(t), x) - t$. On sait que, quand $t \to \infty$, g_t converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue g_σ.

Il est possible d'étendre des résultats importants de Cheeger et Gromoll [2] à partir de différents lemmes. Si y est un point fixe de W, nous désignons par ρ_y la fonction $x \in W \to d(y, x)$. On a :

Lemme 1. — *Sous les hypothèses du paragraphe* 1, *il existe une constante positive* K^2 *telle que*

$$(\Delta_f \rho_y)(x) \geqq -\frac{K^2}{\rho_y(x)},$$

où x n'appartient pas au « cut locus » de y.

Supposons $n > 2$ et introduisons sur W la métrique $\bar{g} = \varphi g$, où $\varphi = f^{2/(n-2)}$. Si u est un scalaire de W, le laplacien $\bar{\Delta} u$ correspondant à $\bar{g}$ peut s'écrire

$$\bar{\Delta} u = \varphi^{-1} \Delta_f u.$$

Nous dirons que la fonction u est f-surharmonique, si elle est surharmonique au sens de $\bar{g}$. Du lemme 1, on peut déduire :

Lemme 2. — Si σ *est un rayon d'une variété de dimension* $n > 2$ *satisfaisant aux hypothèses du paragraphe* 1, *la fonction* g_σ *associée est f-surharmonique.*

Décomposons une droite de (W, g) en deux rayons opposés auxquels sont associés respectivement les fonctions g_+ et g_-. Du lemme 2, on déduit :

Lemme 3. — *Étant donnée une variété riemannienne de dimension* $n > 2$ *satisfaisant aux hypothèses du paragraphe* 1, *les deux fonctions* g_+ *et* g_- *associées aux deux rayons opposés d'une droite de la variété sont f-harmoniques et les carrés* (dg_+, dg_+) *et* (dg_-, dg_-) *de leurs différentielles sont égaux à* 1.

Dans (2.1), prenons pour ξ la différentielle dg_+ de l'une des deux fonctions; d'après le lemme 3, on a $\delta_f \xi = 0$, $d\xi = 0$, $(\xi, \xi) = 1$ et (2.1) se réduit à

$$-(Q(\mathbf{C})\xi, f\xi) = (b(\xi), f b(\xi)),$$

où les deux membres sont de signes opposés donc nuls; ξ est à dérivée covariante nulle. On en déduit :

Proposition. — *Si une variété riemannienne* (W, g), *de dimension* $n > 2$, *satisfait aux hypothèses du paragraphe* 1 *et admet une droite,* (W, g) *est le produit riemannien d'une variété* (W′, g′) *satisfaisant aux mêmes hypothèses et d'une droite* R *munie de sa métrique naturelle.*

Par induction, on voit que (W, g) est le produit riemannien de R^k et d'une variété $(\overline{W}, \bar{g})$ satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 1 et qui ou bien est dépourvue de droite, ou bien est de dimension 2 et admet une droite. Pour réduire ce dernier cas, il suffit de raisonner sur la variété $(\hat{W}, \hat{g})$ de dimension 3, produit riemannien de $(\overline{W}, \bar{g})$ par le cercle S^1. On a :

Théorème 2. — *Soit* (W, g) *une variété riemannienne complète admettant un scalaire* $f > 0$ *tel que :*

1° *le tenseur* **C** *associé par* (1.1) *est* $\geqq 0$;

2° $|\log f|$ *est borné sur* W.

Alors (W, g) *est le produit riemannien de* R^k *muni de sa métrique naturelle et d'une variété riemannienne complète* $(\overline{W}, \bar{g})$ *vérifiant les mêmes hypothèses et dépourvue de droites.*

4. Soit (W, g) une variété riemannienne *compacte* admettant un scalaire f par lequel le tenseur $\mathbf{C}$ associé est $\geqq 0$. Le revêtement universel $(\tilde{W}, \tilde{g})$ de cette variété satisfait aux hypothèses du théorème 2. D'un raisonnement de Cheeger et Gromoll [2], on déduit :

THÉORÈME 3. — *Si* (W, g) *est une variété riemannienne compacte admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geqq 0$, *le revêtement universel* $(\tilde{W}, \tilde{g})$ *de cette variété est le produit riemannien de* R^k *muni de sa métrique naturelle (facteur euclidien maximal) et d'une variété riemannienne compacte* $(\overline{W}, \overline{g})$.

Il en résulte que *le groupe d'holonomie* Φ *de* (W, g) *est compact*. En utilisant ce fait et le théorème 1, on obtient une interprétation de la dimension k du facteur euclidien maximal de $(\tilde{W}, \tilde{g})$.

THÉORÈME 4. — *Si* (W, g) *est une variété riemannienne compacte (orientée) admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geqq 0$, *la dimension du facteur euclidien maximal du revêtement universel* $(\tilde{W}, \tilde{g})$ *est égale au maximum des premiers nombres de Betti des revêtements finis de* W.

Ce théorème entraîne comme corollaire une généralisation directe du théorème de Myers [3].

COROLLAIRE. — *Si* (W, g) *est une variété riemannienne compacte admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geqq 0$ *et si tout revêtement fini de* W *est à premier nombre de Betti nul, le groupe fondamental* $\pi_1(W)$ *de* W *est fini. Il en est ainsi en particulier si le tenseur* $\mathbf{C} \geqq 0$ *est défini positif en un point.*

En effet, sous l'hypothèse faite, $k = 0$ et $\tilde{W} = \overline{W}$ est compact.

5. Prenons pour (W, g) une variété *kählérienne* compacte à tenseur $\mathbf{C}$ non négatif. En prenant la partie de type (1, 1) de $\mathbf{C}$, on obtient à partir de (1.1), le tenseur hermitien

$$C_{\alpha\overline{\beta}} = R_{\alpha\overline{\beta}} - \partial_\alpha \partial_{\overline{\beta}} \log f \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n, i, j = 1, \ldots, 2n).$$

Ce tenseur étant $\geqq 0$, il en est de même de la première classe de Chern $C_1(W)$ de la variété, au sens de [1]. En appliquant à (W, g) les conclusions précédentes et celles de [1], on a :

THÉORÈME 5. — Soit (W, g) *une variété kählérienne compacte admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geqq 0$. *Pour cette variété à* $C_1(W) \geqq 0$:

1° *L'application de Jacobi* J *définit* W *comme fibré holomorphe sur le tore complexe* A(W) *à groupe structural abélien discret. La fibre-type est une variété kählérienne* (W′, g′) *compacte, connexe vérifiant la même hypothèse que* (W, g) *pour un tenseur* $\mathbf{C}'$ *défini par la restriction de* $\mathbf{C}$ *à une fibre.*

2° *Soit* (V, γ) *un revêtement fini de* (W, g) *dont l'irrégularité* h *est égale au maximum des irrégularités des revêtements finis de* W; V *est fibrée holomorphiquement sur la variété d'Albanese* A(V) *(de dimension complexe* h) *en fibres à irrégularité nulle.*

6. Si W est une *variété de Hodge*, nous notons $\chi(W)$ son genre arithmétique. On déduit de [1] et d'un résultat de Kobayashi [4] :

PROPOSITION. — *Si* W *est une variété de Hodge à* $C_1(W) \geqq 0$ *et localement définie positive :*

1° W *n'admet pas de r-formes holomorphes non nulles et* $\chi(W) = 1$;

2° W *n'admet aucun revêtement fini propre.*

Cela posé, supposons que W admette un scalaire f tel que le tenseur $\mathbf{C}$ défini par (1.1) soit $\geqq 0$ et ait une partie de type (1, 1) localement définie positive. D'après la proposition précédente, W satisfait aux hypothèses du corollaire du théorème 4 et admet par suite un groupe fondamental fini, donc réduit à l'identité, toujours d'après la même proposition.

THÉORÈME 6. — *S'il existe sur la variété de Hodge* W *un scalaire* $f > 0$ *pour lequel :*

1° *le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (1.1) est $\geqq 0$;

2° *la partie de type* (1, 1) de $\mathbf{C}$ *est localement définie positive,*

la variété W *est simplement connexe.*

Il en est, *a fortiori*, ainsi si $\mathbf{C} \geqq 0$ est lui-même localement défini positif. On obtient ainsi une extension d'un résultat de Kobayashi (4) et Thierry Aubin.

(*) Séance du 28 septembre 1970.

(1) A. LICHNEROWICZ, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 876; *J. Diff. Geom.*, 1, 1967, p. 195-224.

(2) J. CHEEGER et D. GROMOLL, *The splitting theorem for manifolds of non negative Ricci curvature* (*J. Diff. Geom*; sous presse).

(3) S. B. MYERS, *Duke Math. J.*, 8, 1941, p. 401-404.

(4) S. S. KOBAYASHI, *Ann. Math.*, 74, 1961, p. 570-573.

(6, *avenue Paul-Appell*, 75-*Paris*, 14e.)