

# ПЕРИОДЫ ГЛАВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

А. С. МЕРКУРЬЕВ

Аннотация. Общим торсером алгебраического тора  $S$  над полем  $F$  является общий слой  $S$ -торсера  $P \rightarrow T$ , где  $P$  - квазиразложимый тор, содержащий  $S$  в качестве подгруппы, и  $T = P/S$ . Период общего  $S$ -торсера над расширением полей  $K/F$ , т.е. порядок класса торсера в группе  $H^1(K, S)$ , не зависит от выбора общего торсера. В этой статье вычисляется период общего торсера тора  $S$  в терминах решетки характеров тора  $S$ .

*Анатолию Владимировичу Яковлеву*

Пусть  $T$  - алгебраический тор, определенный над полем  $F$  (см. [2] и [3]) и  $T^*$  - решетка характеров тора  $T$  над сепарабельным замыканием  $F_{\text{sep}}$  поля  $F$ . Непрерывное действие абсолютной группы Галуа  $\Gamma_F$  поля  $F$  на решетке  $T^*$  факторизуется через конечную группу  $G$ , называемую *группой разложения* тора  $T$ . Тор  $P$  называется *квазиразложимым*, если решетка  $P^*$  *пермутационная*, т.е. найдется  $\mathbb{Z}$ -базис решетки  $P^*$  инвариантный относительно  $G$ .

Пусть  $T$  - тор с группой разложения  $G$ . *Резольвентой* тора  $T$  называется точная последовательность торов

$$(1) \quad 1 \rightarrow T \rightarrow P \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow 1$$

с группой разложения  $G$  и квазиразложимым тором  $P$ . *Классом резольвенты* (1) назовем элемент группы  $\text{Ext}_G^1(T^*, S^*)$ , соответствующий точной последовательности  $G$ -решеток характеров

$$0 \rightarrow S^* \rightarrow P^* \rightarrow T^* \rightarrow 0$$

(см. [1, Гл. XIV, §1]).

Пусть  $K/F$ - расширение полей. Мы рассматривает  $T$ -торсеры (главные однородные пространства) над полем  $K$ . Имеется биективное соответствие между множеством классов изоморфизмов таких торсеров и первой группой когомологий Галуа  $H^1(K, T) := H^1(\Gamma_K, T(K_{\text{sep}}))$ . *Период* торсера - это порядок соответствующего элемента в этой группе. В настоящей работе вычисляются периоды общих торсеров в терминах решеток характеров.

## 1. ОБЩИЕ ТОРСЕРЫ

Пусть  $T$  - тор над полем  $F$ . Выберем резольвенту (1) тора  $T$ . Для любого расширения полей  $K/F$  и любой точки  $s \in S(K)$  прообраз  $\varphi^{-1}(s)$  является  $T$ -торсером над  $K$ . Обратно, для любого  $T$ -торсера  $E$  над  $K$  найдется точка  $s \in S(K)$  такая что  $E \simeq \varphi^{-1}(s)$ . Действительно, правая группа в точной последовательности

$$S(K) \rightarrow H^1(K, T) \rightarrow H^1(K, P)$$

тривиальна, так как  $P$  - квазиразложимый тор. Общий слой морфизма  $\varphi$ , являющийся  $T$ -торсером над полем функций  $F(S)$  тора  $S$ , называется *общим  $T$ -торсером*.

**Предложение 1.1.** *Для любого тора  $T$  период общего  $T$ -торсера делится на период любого  $T$ -торсера над любым расширением поля  $F$ .*

*Доказательство.* Так как естественное отображение  $H^1(F, T) \rightarrow H^1(F(t), T)$  инъективно, заменив  $F$  полем  $F(t)$ , мы можем считать, что поле  $F$  бесконечно. Пусть  $a$  - класс  $T$ -торсера (1) над  $S$  в группе  $H_{\text{ét}}^1(S, T)$ . Тогда класс общего торсера в  $H^1(F(S), T)$  равен обратному образу элемента  $a$  относительно морфизма общей точки  $\text{Spec } F(S) \rightarrow S$ . Так как группа  $H^1(F(S), T)$  равна прямому пределу групп  $H_{\text{ét}}^1(U, T)$  по всем открытым подмножествам  $U \subset S$ , найдется непустое открытое подмножество  $U$  в  $S$ , такое что период обратного образа  $a|_U$  элемента  $a$  в  $H_{\text{ét}}^1(U, T)$  совпадает с периодом общего  $T$ -торсера.

Пусть  $K$  - расширение поля  $F$  и  $E$  -  $T$ -торсер над  $K$ . Выберем точку  $s : \text{Spec}(K) \rightarrow S$  в  $S(K)$ , такую что класс  $E$  в  $H^1(K, T)$  является обратным образом элемента  $a$  относительно  $s$ . Поскольку поле  $K$  бесконечно, множество  $P(K)$  плотно в  $P$ . Так как  $\varphi$  сюръективно, то  $\varphi(P(K))$  плотно в  $S$ , следовательно найдется точка  $s'$  в пересечении  $\varphi(P(K))$  и  $U$ . Заменив  $s$  на  $s'$ , мы можем считать, что  $s \in U(K)$ , то есть  $s$  является морфизмом  $\text{Spec}(K)$  в  $U$ . Класс  $E$  в  $H^1(K, T)$  является обратным образом элемента  $a|_U$  относительно  $s$ . Следовательно, период торсера  $E$  делит период торсера  $a|_U$ , совпадающий с периодом общего  $T$ -торсера.  $\square$

Из Предложения 1.1 следует, что период  $e(T)$  общего  $T$ -торсера не зависит от выбора резольвенты (1). По Предложению 1.1,  $e(T)$  делится на период любого  $T$ -торсера над любым расширением поля  $F$ .

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДА ОБЩЕГО ТОРСЕРА

Пусть

$$(2) \quad 1 \rightarrow T \rightarrow R \xrightarrow{f} S \rightarrow 1$$

точная последовательность торов с группой разложения  $G$ . Для любой подгруппы  $H \subset G$  рассмотрим спаривание, индуцированное умножением в когомологиях:

$$(3) \quad \widehat{H}^0(H, T_*) \otimes H^1(H, S^*) \rightarrow \text{Ext}_H^1(T^*, S^*) \xrightarrow{\text{cor}_{G/H}} \text{Ext}_G^1(T^*, S^*),$$

где  $T_*$  - группа кохарактеров тора  $T$ , и  $\text{co}_G/H$  - гомоморфизм коограничения.

**Предложение 2.1.** *Следующие условия эквивалентны:*

- (1) Для любого расширения полей  $K/F$  гомоморфизм  $f_K : R(K) \rightarrow S(K)$  сюръективен.
- (2) Общая точка тора  $S$  в  $S(F(S))$  принадлежит образу отображения  $f_{F(S)}$ .
- (3) Точная последовательность (2) имеет рациональное ращепление.
- (4) Существует коммутативная диаграмма гомоморфизмов алгебраических торов с группой разложения  $G$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ & & & & & & & & \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & R & \xrightarrow{f} & S & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

с точными строками и квазиразложимым тором  $P$ .

- (5) Класс точной последовательности (2) в  $\text{Ext}_G^1(T^*, S^*)$  принадлежит образу отображения

$$\coprod_{H \subset G} \hat{H}^0(H, T_*) \otimes H^1(H, S^*) \rightarrow \text{Ext}_G^1(T^*, S^*),$$

индуцированного спариванием (3), где прямая сумма берется по всем подгруппам  $H$  в группе  $G$ .

*Доказательство.* (1)  $\Rightarrow$  (2) тривиально.

(2)  $\Rightarrow$  (3): По предположению имеется точка  $x \in R(F(S))$ , такая что образ  $x$  в  $S(F(S))$  совпадает с общей точкой. Точка  $x$  индуцирует рациональный морфизм  $g : S \dashrightarrow R$ , такой что композиция  $S \dashrightarrow R \xrightarrow{f} S$  тождественна.

(3)  $\Rightarrow$  (4): Пусть  $L/F$  - поле разложения торов с группой Галуа  $G$ . По предположению существует рациональное ращепление  $g : S \dashrightarrow R$  отображения  $f$ . Пусть  $U \subset S$  - область определения отображения  $g$ . Решетка характеров  $S^*$  отождествляется с фактор группой  $L[S]^\times/L^\times$ . Кроме того,  $S^*$  является подрешеткой в  $\Lambda := L[U]^\times/L^\times$  и фактор решетка  $\Lambda/S^*$  является пермутационной (см. доказательство [3, Prop. 5]). Пусть  $M$  и  $P$  - торы с решетками характеров  $\Lambda$  и  $\Lambda/S^*$  соответственно. Морфизм  $U \rightarrow R$  индуцирует гомоморфизм  $G$ -решеток  $R^* \rightarrow \Lambda$  и, следовательно, гомоморфизм торов  $M \rightarrow R$ . По построению, композиция  $M \rightarrow R \rightarrow S$  совпадает с отображением  $M \rightarrow S$ , индуцированным вложением  $S^*$  в  $\Lambda$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1): Пусть  $K/F$  - расширение полей. Тривиальность группы  $H^1(K, P)$  означает, что отображение  $M(K) \rightarrow S(K)$  сюръективно. Следовательно,  $f_K$  также сюръективно.

(4)  $\Leftrightarrow$  (5): Диаграмма в пункте (4) существует тогда и только когда найдется квазиразложимый тор  $P$  и  $G$ -гомоморфизм  $\alpha : T^* \rightarrow P^*$ , такие



*Доказательство.* Как в доказательстве Теоремы 2.2, число  $e(T)$  совпадает с порядком класса резольвенты в коядре спаривания из Предложения 2.1(5). Так как  $H^1(H, S'^*) = 0$  для любой подгруппы  $H \subset G$ , коядро совпадает с  $\text{Ext}_G^1(T^*, S'^*)$ .  $\square$

Число  $e(T)$  также можно вычислять при помощи плоской резольвенты тора  $T$ .

**Теорема 3.2.** *Пусть (5) - плоская резольвента тора  $T$ . Тогда период  $e(T)$  общего  $T$ -торсера равен порядку класса резольвенты (5) в группе  $\text{Ext}_G^1(S^*, T^*)$ .*

*Доказательство.* По Теореме 3.1 достаточно показать, что порядки классов  $r \in \text{Ext}_G^1(S^*, T^*)$  и  $r' \in \text{Ext}_G^1(T^*, S'^*)$  плоской и копоской резольвент соответственно, совпадают. Рассмотрим диаграмму с точными строкой и столбцом:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{Ext}_G^1(S^*, P'^*) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & \text{Hom}_G(T^*, T^*) & \xrightarrow{\beta} & \text{Ext}_G^1(S^*, T^*) \\
 & & \beta' \downarrow & & \alpha \downarrow \\
 \text{Ext}_G^1(P^*, S'^*) & \longrightarrow & \text{Ext}_G^1(T^*, S'^*) & \xrightarrow{\alpha'} & \text{Ext}_G^2(S^*, S'^*)
 \end{array}$$

Согласно [3, §1] группы  $\text{Ext}_G^1(P^*, S'^*)$  и  $\text{Ext}_G^1(S^*, P'^*)$  тривиальны, следовательно, гомоморфизмы  $\alpha$  и  $\alpha'$  инъективны. Так как  $r = -\beta(1_{T^*})$  и  $r' = \beta'(1_{T^*})$  согласно [1, Гл. XIV, §1], а также квадрат в диаграмме антикоммутирует ввиду [1, Гл. V, Предл. 4.1], то  $\alpha(r) = \alpha'(r')$ , т.е. элементы  $r$  и  $r'$  имеют одинаковые порядки.  $\square$

#### 4. ПРИМЕРЫ

**4.1. Относительная группа Брауэра.** Пусть  $L/F$  - конечное сепарабельное расширение полей,  $G$  - группа Галуа нормального замыкания  $L'$  поля  $L$  и  $C = \text{Gal}(L'/L)$ . Рассмотрим тор  $T = R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L})/\mathbb{G}_m$  (см. [2, Гл. III, §5]). Точная последовательность торов

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L}) \rightarrow T \rightarrow 1,$$

являющаяся плоской резольвентой тора  $T$ , приводит к точной последовательности

$$H^1(K, R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L})) \rightarrow H^1(K, T) \rightarrow H^2(K, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(K, R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L}))$$

для любого расширения полей  $K/F$ . Имеем  $H^2(K, \mathbb{G}_m) = \text{Br}(K)$  - группа Брауэра поля  $K$ . По теореме Гильберта 90 и лемме Фаддеева-Шапиро,  $H^1(K, R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L})) = 0$  и

$$H^2(K, R_{L/F}(\mathbb{G}_{m,L})) = H^2(KL, \mathbb{G}_m) = \text{Br}(KL),$$

где  $KL = K \otimes_F L$ . Следовательно,

$$H^1(K, T) = \text{Br}(KL/K) := \text{Ker}(\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(KL))$$

- относительная группа Брауэра расширения  $KL/K$ .

Группа характеров тора  $T$  совпадает с ядром аугментации  $\mathbb{Z}[G/C] \rightarrow \mathbb{Z}$ . Из точной последовательности

$$H^0(G, \mathbb{Z}[G/C]) \rightarrow H^0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(G, I) \rightarrow 0$$

находим  $H^1(G, I) = \mathbb{Z}/[L : F]\mathbb{Z}$ , причем каноническая образующая группы  $H^1(G, I)$  совпадает с точностью до знака с классом плоской резольвенты в группе  $\text{Ext}_G^1(\mathbb{Z}, S^*) = H^1(G, I)$ . Следовательно, период общего элемента в группе  $\text{Br}(KL/K)$  для  $K = F(T)$  равен  $[L : F]$ .

**4.2. Элементы нормы 1.** Пусть  $L/F$  - конечное расширение Галуа полей с группой Галуа  $G$ . Рассмотрим тор  $S = R_{L/F}^{(1)}(\mathbb{G}_{m,L})$  элементов нормы 1 в расширении  $L/F$  (см. [2, Гл. VI, §8]). Решетка кохарактеров  $S_*$  изоморфна ядру аугментации  $I := \text{Ker}(\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z})$ . Пусть  $P$  - пермутационный тор с группой кохарактеров  $\mathbb{Z}[G \times G]$  и  $\varphi : P \rightarrow S$  - сюръективный гомоморфизм торов, индуцированный  $G$ -гомоморфизмом решеток  $\mathbb{Z}[G \times G] \rightarrow I$ , переводящий  $(g, g')$  в  $g - g'$ . Положим  $T = \text{Ker}(\varphi)$ . Таким образом, мы имеем резольвенту (1) тора  $T$ . Написав точную последовательность групп когомологий для этой резольвенты получаем, изоморфизм

$$H^1(K, T) \simeq S(K)/RS(K) = \hat{H}^{-1}(K, (KL)^\times)$$

для любого расширения полей  $K/F$ , где  $RS(K)$ - подгруппа группы  $S(K)$  элементов нормы 1 в расширении  $KL/K$ , порожденная элементами вида  $g(x)/x$  для всех  $x \in (KL)^\times$  и  $g \in G$ . Используя точную последовательность для  $T^*$  двойственную (1), получаем изоморфизмы:

$$\hat{H}^0(G, \text{End}(T^*)) \simeq \hat{H}^0(G, \text{End}(\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z})) \simeq \hat{H}^0(G, \text{End}(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}.$$

Для любой подгруппы  $H \subset G$  имеем:

$$\hat{H}^0(H, T_*) = \hat{H}^{-1}(H, I) = \hat{H}^{-2}(H, \mathbb{Z}) = H^{ab} := H/[H, H],$$

$$\hat{H}^0(H, T^*) = H^1(H, \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}) = H^2(H, \mathbb{Z}) = \hat{H} := \text{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Образ отображения спаривания  $H^{ab} \otimes \hat{H} \rightarrow \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$  совпадает с  $k\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$ , где  $k$  - период группы  $H^{ab}$ , т.е. наименьшее натуральное число  $k$ , такое что  $(H^{ab})^k = 1$ . По Теореме 2.2, порядок общего элемента в группе  $\hat{H}^{-1}(K, (KL)^\times)$  для  $K = F(S)$  равен  $|G|/r$ , где  $r$  - наименьшее общее кратное периодов групп  $H^{ab}$  для всех подгрупп  $H \subset G$ . Нетрудно показать, что  $r$  совпадает с произведением максимальных порядков циклических  $p$ -подгрупп в  $G$  по всем простым делителям  $p$  порядка группы  $G$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, Издательство “Иностранная Литература”, Москва, 1960.
- [2] В.Е. Воскресенский, *Алгебраические торы*, Издательство “Наука”, Москва, 1977.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 2, 175–229.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES, CA  
90095-1555, USA

*E-mail address:* merkurev at math.ucla.edu