Reprinted from

Catherine Goldstein
Editor

Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989

1990

Birkhäuser
Boston · Basel · Berlin

Séminaire de Théorie des Nombres
Paris 1988–89

Le produit de Petersson et de Rankin p-adique

Haruzo HIDA*

0. Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit $\Lambda = \mathcal{O}[[X]]$ où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers p-adiques d'une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$. On fixe un générateur topologique u du groupe multiplicatif $1 + p\mathbb{Z}_p$. Pour chaque couple (F, G) de formes modulaires Λ-adiques ordinaires (voir ci-dessous pour la définition), on a construit dans [H1] un produit de Rankin p-adique $\mathcal{D}_p$, qui interpole p-adiquement les valeurs spéciales du produit de Rankin $D(s, f, g)$ pour deux spécialisations f et g de F et G, et qui est le quotient d'une série de trois variables $\Phi(X, Y, Z)$ par une série d'une variable $H(X)$, avec la propriété d'interpolation pour tout triplet critique d'entiers (k, ℓ, m) :

$$\mathcal{D}_p(u^k - 1, u^\ell - 1, u^m - 1) = \frac{\Phi(u^k - 1, u^\ell - 1, u^m - 1)}{H(u^k - 1)} = * \frac{D(m, f_k, g_\ell|\omega^{-m})}{(f_k, f_k)},$$

où " $*$ " est une constante canonique (voir Théorème 2 ci-dessous), et f_k (resp. g_ℓ) est la spécialisation de F (resp. G) au poids k (resp. ℓ), et $g_\ell|\omega^{-m}$ est la torsion de g_ℓ par une puissance ω^{-m} du caractère de Teichmüller ω. L'utilité de cette série est déjà évidente d'après les travaux de Perrin-Riou et Tilouine (par exemple, [P-R] et [T]) dans lesquels l'existence de cette série joue un rôle important. D'autre part, la construction de $\mathcal{D}_p$ donnée dans [H1] n'est pas si facile à comprendre parce que l'idée simple est en fait cachée par la complexité inéluctable dans le traitement du cas général des formes modulaires I-adiques pour toute extension finie I de Λ. Dans cette petite note, en se restreignant au cas des formes modulaires Λ-adiques avec *"Neben-typus"* primitif et en se concentrant sur seulement deux variables relatives à F et G, on se propose de construire $\mathcal{D}_p$ assez simplement.

1. On commence par une forme modulaire parabolique $g \in S_\ell(SL_2(\mathbb{Z}))$ avec son développement de Fourier :

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,g)q^n \qquad (q = \exp(2\pi i z)).$$

Considérons d'autre part la série d'Eisenstein :

$$E_\kappa(z) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2-(0))/\{\pm 1\}} (mz+n)^{-\kappa} \; (\kappa > 2).$$

Si g est une forme parabolique de poids ℓ, la série gE_κ est une forme parabolique de poids $k = \kappa + \ell$. Notons que $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ a une base $B = \{f\}$ consistant en des formes propres pour tout opérateur de Hecke. On veut regarder le coefficient $c(f)$ dans la décomposition :

$$gE_\kappa = \sum_f c(f)f.$$

Sous le produit de Petersson $(f,h) = \int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H} \overline{f} g y^{k-2} dxdy$, la base B est orthogonale parce que $(f|T(n),h) = (f,h|T(n))$ pour tout opérateur de Hecke. Donc, par la formule de Shimura [Sh1, §2], on a

$$c(f) = \frac{(f, gE_\kappa)}{(f,f)} = \frac{2\Gamma(k-1)D(k-1,f,g)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)},$$

où $D(k-1,f,g) = \zeta(2s+2-k-\ell)\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a(n,f)}a(n,g)n^{-s}$.

Pour étudier le nombre $c(f)$, on peut changer le produit scalaire (,) en gardant la propriété $(f|T(n),h) = (f,h|T(n))$. Donc on veut définir un nouveau produit bilinéaire (algébrique) sur l'espace des formes modulaires. On va faire une telle construction un peu plus généralement en incluant le cas de *Neben-Typus* non-trivial. Soit N un entier premier à p et soit ψ un caractère de Dirichlet modulo Np. On suppose que le conducteur de ψ est divisible par N. On note $M_k(\Gamma_0(Np),\psi)$ l'espace des formes modulaires holomorphes avec caractères ψ. Alors, pour chaque sous-anneau A de $\mathbb{C}$ contenant les valeurs de ψ, on définit $M(A) = M_k(\Gamma_0(Np),\psi;A)$ comme le sous-espace des formes modulaires f avec coefficients $a(n,f)$ dans A. On note $S(A) = S_k(\Gamma_0(Np),\psi;A)$ le sous-espace des formes paraboliques dans $M_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$. L'effet de l'opérateur de Hecke $T(n)$ sur $M_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ est donné sur les coefficients de Fourier par

$$a(m, f|T(n)) = \sum_{0<d|(m,n)} d^{k-1}\psi(d)a(\frac{mn}{d^2}, f).$$

Ici on a suivi la convention que $\psi(m) = 0$ si m a un diviseur commun non trivial avec Np. On écrit $h(A) = h_k(Np, \psi; A)$ l'algèbre engendrée par $T(n)$ sur A dans $\mathrm{End}_A(S(A))$. Alors il est connu que $h_k(Np, \psi; A)$ est commutative avec l'identité $T(1)$ et $S_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ est le A-dual de $h_k(\Gamma_0(Np), \psi; A)$ pour l'accouplement (e.g. [H1, II, Prop. 1.2]) :

$$< h, f >= a(1, f|h).$$

Ici, on va démontrer ce fait dans le cas où A est un corps K : On voit par la formule de $T(n)$ que $< T(n), f >= a(n, f)$. Alors si $< h(K), f >= 0$, $a(n, f) =< T(n), f >= 0$ pour tout n et donc $f = 0$. Si $< h, S(K) >= 0$, alors

$$a(n, f|h) =< T(n), f|h >= a(1, f|T(n)h) =< h, f|T(n) >= 0.$$

Donc $f|h = 0$ pour tout $f \in S(K)$. Donc l'accouplement est non dégénéré des deux côtés, et on a le résultat parce que $S(K)$ est de dimension finie.

Supposons pour le moment que le conducteur de ψ est égal à Np. Par la théorie des formes nouvelles (e.g. [M, § 4.6]), on sait que $S(K)$ est engendré par des formes propres pour tout opérateur de Hecke, et en particulier, $h(K)$ est semi-simple. Donc on a un produit non-dégénéré sur $h(K)$

$$(h, g) = Tr_{h(K)/K}(hg).$$

Cela donne un morphisme injectif $h(K)$-linéaire $i : h(K) \longrightarrow h(K)^*$. Alors on a $i^{-i} : h(K)^* \longrightarrow h(K)$. Par dualité, on a

$$\hat{\imath} : S(K) \longrightarrow S(K)^*$$

Alors $\hat{\imath}$ induit un produit

$$(1a) \qquad (f, g)_a = \hat{\imath}(f)(g) \quad \text{sur} \quad S(K)$$

qui satisfait $(f|h, g)_a = (f, g|h)_a$ pour tout $h \in h(K)$. Ce produit est donc un analogue du produit de Petersson modifié : $(f, g)' = (f^c|\tau, g)_{Np}$, où

$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np & 0 \end{pmatrix}$ et f^c désigne la conjugaison complexe de f, qui satisfait aussi que $(f|h,g)' = (f,g|h)'$ pour tout $h \in h(K)$ ([M, Th. 4.5.4-5]). Donc on a

$$\text{(1}b\text{)} \qquad \frac{(f,g)_a}{(f,f)_a} = \frac{(f,g)'}{(f,f)'} \text{ si } f \textit{ est une forme propre pour tout } h \in h(K).$$

Comme ψ est primitif modulo $Np, f^c|\tau = W(f^c)f$ pour une constante $W(f^c) \neq 0$ si f est une forme propre pour tout $h \in h(K)$; donc, on a

$$\text{(1}c\text{)} \qquad \frac{(f,g)_a}{(f,f)_a} = \frac{(f,g)}{(f,f)} \textit{ si } f \textit{ est une forme propre pour tout } h \in h(K) \textit{ et si } \psi \textit{ est primitif modulo } Np.$$

Si le conducteur de ψ est égal à N, on se restreint à la partie ordinaire $S^{ord}(K)$ et $h^{ord}(K)$ (voir la définition dans le paragraphe 3). On sait que $h^{ord}(K)$ est semi-simple ([H1, I, Prop. 4.4]) et s'identifie au K-dual de $S^{ord}(K)$. Alors on définit le produit $(,)_a : S^{ord}(K) \times S^{ord}(K) \longrightarrow K$ de la même façon que ci-dessus en remplaçant $h(K)$ par $h^{ord}(K)$. Dans ce cas, on a l'égalité $(1b)$ pour la forme ordinaire f, mais l'égalité $(1c)$ n'est pas nécessairement vraie.

Pour chaque caractère de Dirichlet ξ et on définit la somme de Gauss par

$$G(\xi) = \sum_{r=1}^{C} \xi^0(r) \exp(\frac{2\pi i r}{C}) \text{ pour le conducteur } C \text{ de } \xi.$$

Si K est un corps de nombres contenant $\psi(n)$ et $\varphi(n)$ pour tout n, alors il est bien connu (e.g. [M, Th. 7.1.3, 7.2.12-13]) que

$$E_{k-\ell}(\varphi^{-1}\psi) \in \frac{(-2\pi i)^{k-\ell} G(\varphi^{-1}\psi)}{(Np)^{k-\ell}\Gamma(k-\ell)} M_{k-\ell}(\Gamma_0(Np), \varphi^{-1}\psi; K),$$

où $E_\kappa(\xi)(z) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2-(0))/\{\pm 1\}} \xi^{-1}(n)(mNpz+n)^{-\kappa}|(mNpz+n)|^{-2s}|_{s=0}$. Donc si $g \in S_\ell(\Gamma_0(Np), \varphi; K)$,

$$\text{(2}a\text{)} \qquad gE_{k-\ell}(\varphi^{-1}\psi) \in \frac{(-2\pi i)^{k-\ell} G(\varphi^{-1}\psi)}{\Gamma(k-\ell)} S_k(\Gamma_0(Np), \psi; K).$$

En fait, quand ξ est primitif modulo Np, on peut écrire le q-développement de $E_\kappa(\xi)$ assez facilement [M, Th. 7.1.3, Th 7.2.12-13] :

$$\text{(2}b\text{)} \qquad E_\kappa(\xi) = \frac{(-2\pi i)^\kappa G(\xi^{-1})}{(Np)^\kappa(\kappa-1)!}\Big\{2^{-1}L(1-\kappa,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0<d|n} \xi(d)d^{\kappa-1}q^n\Big\}.$$

Alors on a, pour une forme propre pour tout opérateur de Hecke $f \in S_k(\Gamma_0(Np), \psi; K)$

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\frac{(-2\pi i)^{k-\ell} G(\varphi^{-1}\psi)}{\Gamma(k-\ell)} K \ni c(f) &= \frac{(f, gE_{k-\ell}(\varphi^{-1}\psi))_a}{(f,f)_a} \\
&= \frac{(f, gE_{k-\ell}(\varphi^{-1}\psi))'}{(f,f)'} = * \frac{\Gamma(k-1)D(k-1,f,g)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)},
\end{aligned}
$$

où $\kappa = k-\ell$, $D(s,f,g) = L_{Np}(2s+2-k-\ell, \psi^{-1}\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a(nf)} a(n,g) n^{-s}$ et "$*$" est une constante non nulle dans K (qui va être précisée plus tard). C'est une partie du théorème d'algébricité de Shimura [Sh1, Th.3]. En fait, une assertion similaire est vraie pour $D(m,f,g)$ pour tout entier m avec $\ell \leq m < k$.

2. On suppose dorénavant que ψ et φ sont des caractères de Dirichlet modulo Np, N est premier à p, $p \geq 5$, et

(4a) $\qquad k > \ell \geq 2;$

(4b) *les conducteurs de* ψ, φ *et* $\psi\varphi^{-1}$ *sont divisibles par* N;

(4c) f *et* g *sont ordinaires au sens de* [H1, I, § 3].

On écrit $\mathcal{D}(s,f,g)$ pour le produit de Rankin primitif; i.e., la fonction $\mathcal{D}(s,f,g)$ coïncide avec $L\left(s - \frac{k+\ell}{2} + 1, \widetilde{\pi} \times \pi'\right)$, où la fonction $L(s, \widetilde{\pi} \times \pi')$ est la fonction L de $GL(2) \times GL(2)$ des représentations automorphes $\widetilde{\pi}$ et π' engendrées par f^c et g respectivement (voir [J]). Soit f^0 (resp. g^0) la forme primitive associée à f (resp. g). Alors on peut écrire, si $f \neq f^0$,

$$f(z) = f^0(z) - \alpha' f^0(pz) \text{ pour une constante } \alpha'.$$

Soit $C(f)$ le plus petit niveau possible de f^0 (i.e. le conducteur de f^0). On définit une constante (le *"facteur ε"* de f) $W(f)$ par $f^0|\tau = W(f) f^{0c}$ pour $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ C(f) & 0 \end{pmatrix}$. On considère

$$
\begin{aligned}
E &= c_0^{-1}\{E_{k-\ell}((\psi\varphi^{-1})^0)(z) - (\psi\varphi^{-1})^0(p)p^{k-1}E_{k-\ell}((\psi\varphi^{-1})^0)(pz)\} \\
&= 2^{-1}L(1-\kappa, \psi\varphi^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0<d|n,(p,d)=1} \psi\varphi^{-1}(d) d^{k-1} q^n
\end{aligned}
$$

pour $c_0 = \dfrac{(-2\pi i)^{k-\ell} G(\psi^{-1}\varphi)}{C(\psi\varphi^{-1})^{k-\ell}\Gamma(k-\ell)}$ et on écrit

$$gE = c(f)f + f^{\perp},$$

où $f^{\perp}$ est un élément orthogonal à f pour le produit $(,)'$. Par définition, E coïncide essentiellement avec $E_{k-\ell}(\psi\varphi^{-1})$ si $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np, mais sinon il y a une petite différence. Pour relier (f, gE) et $\mathcal{D}(s, f, g)$, on divise l'argument selon les six cas suivants :

Cas A : $f = f^0$ et $g = g^0$ et $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np;
Cas B : $f = f^0$ et $g = g^0$ et $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo N;
Cas C : $f = f^0$ et $g \neq g^0$ ($\Rightarrow \psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np);
Cas D : $f \neq f^0$ et $g = g^0$ et $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np);
Cas D' : $f \neq f^0$ et $g = g^0$ et $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo N ($\Rightarrow \ell = 2$);
Cas E : $f \neq f^0$ et $g \neq g^0$ et $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo N.

Ecrivons

$$E_\kappa(\xi)(z;s) = Im(z)^s \sum_{(m,n)\in(\mathbb{Z}^2-(0))/\{\pm 1\}} \xi^{-1}(n)(mNpz+n)^{-\kappa}|mNpz+n|^{-2s}.$$

Alors on a

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s,f,g) = (f, gE_{\kappa-\ell}(\psi\varphi^{-1})(z; s+1-k)) \qquad ([\text{Sh1, (2.4)}]).$$

Il est bien connu que $E_\kappa(\xi)(z; 1-\kappa)$ est aussi holomorphe et, pour $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np & 0 \end{pmatrix}$

$$c_1 E_\kappa(\psi^{-1}\varphi)(z; 1-\kappa)|\tau = E \qquad (\text{e.g. [H1, II, Cor. 6.3]}),$$

où $c_1 = \pi^{-1} i^\kappa 2^{-\kappa}(Np)^{1-(\kappa/2)}$ pour $\kappa = k - \ell$. Donc on voit, si ψ est primitif,

$$\text{(5a)} \qquad c(f) = \frac{(f, gE)_a}{(f,f)_a} = \frac{(f, gE)}{(f,f)} = c_0^{-1}\frac{\Gamma(k-1)D(k-1,f,g)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)}$$

si $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np (i.e., dans le cas A) et

$$\text{(5b)} \qquad c(f) = \frac{(f|\tau, g|\tau E|\tau)}{(f,f)} = c_2 \frac{D(\ell, f|\tau, g|\tau)}{(f,f)}$$

dans les cas B et C où $c_2 = (4\pi)^{-\ell}\Gamma(\ell)\pi^{-1}(-i)^{k-\ell}2^{\ell-k}(Np)^{1-(k-\ell)/2}$ (parce que $E_\kappa|\tau^2 = (-1)^\kappa E_\kappa$). On décompose $W(f) = W'(f)W_p(f)$ pour la p-partie $W_p(f)$ définie dans [H1, II, p. 38]. Par l'équation fonctionnelle [J, Th. 19.14, Th. 15.1] (voir aussi [H1, I, Th. 9.1, II, (5.3)]), on a, dans le cas B,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-2\ell}\Gamma(\ell)\mathcal{D}(\ell, f^c, g^c) &= -N^{3(k-\ell-1)/2}p^{k\ell-1}\psi\varphi^{-1}(p)\\ \times W'(f)W'(g)^c G(\psi\varphi^{-1})N^{-1/2}&(2\pi)^{-2(k-1)}\Gamma(k-1)\Gamma(k-\ell)\mathcal{D}(k-1, f, g).\end{aligned} \tag{6}$$

Alors on a la formule suivante :

Cas A : Directement par ($5a$), on a

$$c(f) = (-Np)^{k-\ell}\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f,f)}. \tag{7a}$$

Alors on pose $E_p(f,g) = p^{k-\ell}$.

Cas B : On va faire le calcul comme suit : Par ($5b$), on a

$$\begin{aligned}c(f) &= c_2\frac{D(\ell, f|\tau, g|\tau)}{(f,f)}\\ &= c_2 W(f)^c W(g)(1-\psi^{-1}\varphi(p)a(p,f)^c a(p,g)p^{-\ell})\frac{\mathcal{D}(\ell, f^c, g^c)}{(f,f)}\\ &= (-Np)^{k-\ell}p^{-1}\psi^{-1}\varphi(p)\\ &\quad\times(1-\psi\varphi^{-1}(p)a(p,f)^c p^{2-k})\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f,f)}.\end{aligned}$$

Ici on a utilisé ($6a$) et les faits que $W(f)^c W'(f) = W_p(f)^c$, $W(g)W'(g)^c = W_p(g)$, $G(\psi\varphi^{-1}G(\psi^{-1}\varphi) = (-1)^{k-\ell}$ et $|a(p,f)| = p^{(k-1)/2}$, $|a(p,g)| = p^{(\ell-1)/2}$. Dans ce cas, on définit le facteur d'Euler supplémentaire en p par

$$\begin{aligned}E_p(f,g) &= p^{k-\ell-1}\psi^{-1}\varphi(p)(1-\psi\varphi^{-1}(p)a(p,f)a(p,g)^c p^{2-k})\\ &= -a(p,f)a(p,g)^{-1}(1-\psi^{-1}\varphi(p)a(p,f)^c a(p,g)p^{-\ell}).\end{aligned}$$

Cas C : On peut écrire $g(z) = g^0(z) - \beta' g^0(pz)$. Alors par ($5a$), on a

$$c(f) = (-Np)^{k-\ell}(1-a(p,f)^c\beta' p^{1-k})\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f,f)}. \tag{7c}$$

On pose alors

$$E_p(f,g) = p^{k-\ell}(1 - a(p,f)^c\beta' p^{1-k}) = p^{k-\ell}(1 - a(p,f)^{-1}\beta').$$

Maintenant, on suppose que f n'est pas primitive (mais son conducteur est divisible par N). Alors on peut écrire $f(z) = f^0(z) - \alpha' f^0(pz)$ pour une unique forme primitive f^0 de niveau N, et on voit

$$f^c|\tau(z) = -\alpha'^c p^{-k/2} W(f^c)(f^0 - \alpha'^{-c} p^k f^0(pz)) \quad \text{(e.g. [H1, II, p. 47])}.$$

On a

$$c(f) = \frac{(f, gE)_a}{(f,f)_a} = \frac{(f,gE)'}{(f,f)'} = c_0^{-1} \frac{\Gamma(k-1)D(k-1, f^c|\tau, g)}{(4\pi)^{k-1}(f^c|\tau, f)} \tag{8a}$$

si $\psi\varphi^{-1}$ est primitif modulo Np (i.e., dans les cas D et F) et

$$(-1)^k c(f) = \frac{(f^c, g|\tau E|\tau)}{(f^c|\tau, f)} = c_2 \frac{D(\ell, f^c, g|\tau)}{(f^c|\tau, f)} \tag{8b}$$

dans les cas D' et E où $c_2 = (4\pi)^{-\ell}\Gamma(\ell)\pi^{-1}(-i)^{k-\ell}2^{\ell-k}(Np)^{1-(k-\ell)/2}$. Par [H1, II, (9.5)], on sait

$$(f^c|\tau, f)_{Np} = (-1)^k W(f) p^{1-(k/2)} a(p,f) S(f) (f^0, f^0)_N, \tag{8c}$$

où

$$S(f) = \Big(1 - \frac{\psi^0(p)p^{k-1}}{a(p,f)^2}\Big)\Big(1 - \frac{\psi^0(p)p^{k-2}}{a(p,f)^2}\Big).$$

Par l'équation fonctionnelle de $\mathcal{D}$ [J] (voir aussi [H1, I, TH. 9.1]), on a, dans le cas E,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-2\ell}\Gamma(\ell)\mathcal{D}(\ell, f^c, g^c) &= N^{3(k-\ell-1)/2} W(f) W(g)^c G(\psi\varphi^{-1}) N^{-1/2} \\ &\quad \times (2\pi)^{-2(k-1)}\Gamma(k-1)\Gamma(k-\ell)\mathcal{D}(k-1, f, g),\end{aligned} \tag{8d}$$

et dans le cas D',

$$(2\pi)^{-2\ell}\Gamma(\ell)\mathcal{D}(\ell, f^c, g^c) = -N^{3(k-\ell-1)/2} p^{k-\ell-1} \tag{8e}$$

$$\times W(f) W'(g)^c \psi\varphi^{-1}(p) G(\psi\varphi^{-1}) N^{-1/2} (2\pi)^{-2(k-1)}\Gamma(k-1)\Gamma(k-\ell)\mathcal{D}(k-1, f, g),$$

Alors on a les formules suivantes :

Cas D :

$$c(f) = (-Np)^{k-\ell} a(p,g)a(p,f)^{-1}$$

(9a)
$$\times S(f)^{-1}(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f^0,f^0)}.$$

Alors on pose

$$E_p(f,g) = p^{k-\ell}a(p,g)a(p,f)^{-1}(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell}).$$

Cas D' :

$$c(f) = c_2(-1)^k W(g)(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})\frac{\mathcal{D}(\ell,f^c,g^c)}{(f^c|\tau,f)}$$

(9b)
$$= (-Np)^{k-\ell}\psi\varphi^{-1}(p)a(p,g)a(p,f)^{-1}S(f)^{-1}$$
$$\times (1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f^0,f^0)}.$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé la formule (8e). On pose

$$E_p(f,g) = p^{k-\ell}\varphi^{-1}\psi(p)a(p,g)a(p,f)^{-1}(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})$$
$$= p^{-1}\alpha' a(p,g)^c a(p,f)^{-1}(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell}).$$

Cas E : On écrit $f(z) = f^0(z) - \alpha' f^0(pz)$ et $g(z) = g^0(z) - \beta' g^0(pz)$ $(g|\tau(z) = -\beta' p^{-\kappa/2}W(g)(g^{0_c} - \beta'^{-1}p^\ell g^{0_c}(pz)))$. Alors, on a

$$D(\ell, f^c, g|\tau) = \beta' p^{-1/2}W(g)$$
$$\times(1-\beta'^{-1}a(p,f))(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})(1-\alpha'\beta'^c p^{-\ell})\mathcal{D}(\ell,f^c,g^c).$$

Donc, en utilisant (8d), on a

(9c)
$$c(f) = c_2(-1)^k\beta' p^{-\ell/2}W(g)$$
$$\times(1-\beta'^{-1}a(p,f))(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})(1-\alpha'\beta'^c p^{-\ell})\frac{\mathcal{D}(\ell,f^c,g^c)}{(f^c|\tau,f)}$$
$$= (-N)^{k-\ell}S(f)^{-1}\beta' a(p,f)^{-1}(1-\beta'^{-1}a(p,f))(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})(1-\alpha'\beta'^c p^{-\ell})$$
$$\times\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)\mathcal{D}(k-1,f,g)}{(2\pi i)^{k-\ell}G(\psi^{-1}\varphi)(4\pi)^{k-1}(f^0,f^0)}.$$

On pose

$$E_p(f,g) = \beta' a(p,f)^{-1}(1-\beta'^{-1}a(p,f))(1-\alpha' a(p,g)^c p^{-\ell})(1-\alpha'\beta'^c p^{-\ell}).$$

Finalement on pose $S(f) = 1$ dans les cas A, B et C.

3. Maintenant on veut interpoler p-adiquement la valeur ci-dessus en variant g et f le long des formes modulaires Λ-adiques F et G et en gardant les hypothèses $(4a, b, c)$: Pour simplifier, on suppose toujours que $p \geq 5$. On fixe un plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$.

On commence par la définition des formes modulaires Λ-adiques. Posons $M_k(\psi, \overline{\mathbb{Q}}) = M_k(\Gamma_0(Np), \psi; \overline{\mathbb{Q}})$ et prenons une base $B = \{f\}$ de cet espace. On prend une combinaison linéaire

$$M_k(\psi; \overline{\mathbb{Q}}_p) = \sum_{f\in B} \overline{\mathbb{Q}}_p f \cong M_k(\psi; \overline{\mathbb{Q}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ dans } \overline{\mathbb{Q}}_p[[q]].$$

Soit K le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Posons $M_k(\psi; K) = K[[q]] \cap M_k(\psi; \overline{\mathbb{Q}}_p)$. On considère l'anneau des séries formelles $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$. Comme on a supposé que $p \geq 5$, $\mathbb{Z}_p^\times = \Gamma \times \mu$ par $z \longmapsto (< z >, \omega(z))$ pour

$$\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad \mu = \{\zeta \in \mathbb{Z}_p^\times | \zeta^{p-1} = 1\}.$$

Alors $\mathbb{Z}_p \cong \Gamma$ par $z \longmapsto u^z$ pour $z \in \mathbb{Z}_p$, et donc, on a un caractère

$$\chi : \Gamma \ni u^z \longmapsto (1+T)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} T^n \in \Lambda^\times.$$

Si on spécialise χ en un point $u^k - 1$, on a $\chi(x)(u^k - 1) = x^k$ et si on considère χ comme un caractère de $\mathbb{Z}_p^\times$, alors $\chi(z)(u^k-1) = < z >^k = \omega^{-k}(z) z^k$. On écrit ce caractère χ_k. Donc, pour n'importe quel entier n premier à p, $\chi(n)$ satisfait que

$$\chi(n)(u^k - 1) = < n >^k .$$

Soit ψ un caractère modulo Np avec $\psi(-1) = 1$. Une série formelle de deux variables $F = F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n; F)(T) q^n \in \Lambda[[q]]$ est dite une forme Λ-adique avec caractère ψ si $F(u^k - 1) \in M_k(\psi\omega^{-k}; K)$ pour tout k assez grand. Alors on peut définir l'action de l'opérateur de Hecke $T(n)$ sur une forme Λ-adique F par la formule

$$A(m, F|T(n)) = \sum_{0<d|(m,n)} d^{-1}\psi\chi(d)A\Big(\frac{mn}{d^2}, F\Big).$$

Par définition, $F|T(n)(u^k-1) = F(u^k-1)|T(n)$ pour tout n et donc $F|T(n)$ est de nouveau une forme modulaire Λ-adique. Il y a beaucoup d'exemples de formes Λ-adiques. Si on pose

$$E(\psi) = A(\psi)(T) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sum_{0<d|n,(p,n)=1} \psi\chi(d)d^{-1}\Big\}q^n,$$

où $A(\psi)$ est la série d'Iwasawa associée à la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt; i.e., $A(\psi)(u^k-1) = (1-\psi\omega^{-k}(p)p^{k-1})L(1-k, \psi\omega^{-k})$, alors

$$E(\psi)(u^k-1) = c_k^{-1}\{E_k(\psi\omega^{-k})(z) - \psi\omega^{-k}(p)p^{k-1}E_k(\psi\omega^{-k})(pz)\}$$

où $c_k = \dfrac{(-2\pi i)^k G(\psi^{-1}\omega^k)}{\Gamma(k)}$. Ici on a posé $\psi\omega^{-k}(p) = 0$ si $\psi\omega^{-k}$ est primitif modulo Np et $\psi\omega^{-k}(p)$ est la valeur du caractère primitif associé à $\psi\omega^{-k}$ si $\psi\omega^{-k}$ a conducteur N. Si ψ est non-trivial, alors $A(\psi) \in \Lambda$ et donc $E(\psi)$ est une forme Λ-adique. Si $\psi = id$ (et $N = 1$), alors $A(\psi) \in T^{-1}\Lambda$ et donc $TE(\psi)$ est une forme Λ-adique.

Pour une forme modulaire $g \in S_\ell(\varphi, \mathcal{O})$, prenons le produit $gE(\psi)$ dans $\Lambda[[q]]$ et après, faisons le changement de variable : $T \longmapsto u^{-\ell}T + u^{-\ell} - 1$:

$$g * E(\psi)(T) = gE(\psi)(u^{-\ell}T + u^{-\ell} - 1) \in \Lambda[[q]].$$

Alors, si $k > \ell$,

$$\begin{aligned} g * E(\psi)(u^k-1) &= gE(\psi)(u^{-\ell}(u^k-1) + u^{-\ell} - 1) \\ &= gE(\psi)(u^{k-\ell}-1) \in S_k(\varphi\psi\omega^{-k}; K). \end{aligned}$$

Donc $g * E(\psi)$ ou $g * TE(\psi)$ est une forme Λ-adique.

Notons $S(\psi;\Lambda)$ l'espace des formes modulaires Λ-adiques avec caractère ψ. Par la théorie de l'algèbre de Hecke p-adique [H2] (voir aussi [W, Prop. 1.2.1]), il existe un unique facteur direct $S^{ord}(\psi;\Lambda)$ tel que

$$S(\psi;\Lambda) = S^{ord}(\psi;\Lambda) \oplus S^{ss}(\psi;\Lambda)$$

où $T(p)$ est inversible sur $S^{ord}(\psi;\Lambda)$ et topologiquement nilpotent sur $S^{ss}(\psi;\Lambda)$. De plus, $S^{ord}(\psi;\Lambda)$ est libre de rang fini sur Λ. On note e la projection sur $S^{ord}(\psi;\Lambda)$. Donc on peut considérer l'algèbre de Hecke $h^{ord}(\psi;\Lambda)$ sur Λ qui est Λ-dual de $S^{ord}(\psi : \Lambda)$. Similairement, on peut décomposer

$$S_k(\psi;\mathcal{O}) = S_k^{ord}(\psi;\mathcal{O}) \oplus S_k^{ss}(\psi;\mathcal{O}).$$

Dans ce cas, la projection ordinaire e sur $S_k^{ord}(\psi;\mathcal{O})$ est donnée comme une limite p-adique

$$e = \lim_{n\to\infty} T(p)^{n!} \quad \text{dans} \quad h_k(Np,\psi;\mathcal{O}).$$

Le morphisme d'évaluation $F \longmapsto F(u^k-1)$ est surjectif si $k \geq 2$. C'est une conséquence de la liberté de $h^{ord}(\psi,\Lambda)$ sur Λ [H2, Th. 3.1] et de l'existence d'une forme Λ-adique Θ telle que $\Theta(0) = 1$; par exemple, on peut prendre $TE(id)$ comme Θ à un facteur constant près. Donc par dualité, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres :

$$h(\psi;\Lambda)/P_k h(\psi;\Lambda) \cong e h_k(N,\psi\omega^{-k};\mathcal{O})$$

qui envoie $T(n)$ sur $T(n)$, où $P_k = \{\Phi \in \Lambda | \Phi(u^k-1) = 0\}$. Comme on sait que $eh_k(N,\psi\omega^{-k};\mathcal{O})$ est réduite pour tout $k \geq 2$ et l'ensemble $\{P_k\}_{k\geq 2}$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$, on voit que $h(\psi;\Lambda)\otimes_\Lambda \mathbb{L}$ ($\mathbb{L}$ désignant le corps des fractions de Λ) est semi-simple. On peut donc définir une forme bilinéaire de la même façon que dans le cas déjà traité :

$$(\,,)_a : S(\psi;\mathbb{L}) \times S(\psi;\mathbb{L}) \longrightarrow (S(\psi;\mathbb{L}) = S(\psi;\Lambda)\otimes_\Lambda \mathbb{L}).$$

Soit F une forme propre dans $S^{ord}(\psi;\Lambda)$ pour tout opérateur de Hecke et $g \in S_\ell(\varphi;\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathcal{O})$. On considère $e(g * E(\varphi^{-1}\psi))$ et

$$c(F) = \mathcal{D}_p(T;F,g) = \frac{(F, e(g*E(\varphi^{-1}\psi)))_a}{(F,F)_a} = (F, e(g*E(\varphi^{-1}\psi)))_a \in \mathbb{L}$$

parce que $(F, F)_a = 1$. Notons que

$$e(f * E(\varphi^{-1}\psi)) = c(F)F + X \quad \text{pour} \quad X \in (\mathbb{L}F)^{\perp};$$

alors $g * E(\varphi^{-1}\psi)(u^k - 1) = c(F)(u^k - 1)F(u^k - 1) + X(u^k - 1) + h$, où h est tel que $e(h) = 0$ par construction. Donc on a

Théorème 1. — *Si $g \in S_\ell(\varphi; \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathcal{O})$ est une forme propre ordinaire, il existe un unique élément $\mathcal{D}_p(T; F, g) \in \mathbb{L}$ tel que, pour tout $k > \ell \geq 2$,*

$$\mathcal{D}_p(u^k - 1; F; g) = (-N)^{k-\ell} S(f_k)^{-1} E_p(f_k, g) \frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1, f_k, g)}{(2\pi i)^{k-\ell}(4\pi)^{k-1} G(\varphi\psi^c\omega^{k-\ell})(f_k^0, f_k^0)}$$

où $f_k = F(u^k - 1)$ et E_p et $S(f_k)$ sont les facteurs d'Euler supplémentaires en p définis au paragraphe 2.

Maintenant, on va essayer de faire varier g. Soit G une forme propre dans $S^{ord}(\varphi; \Lambda_S)$, où $\Lambda_S = \mathcal{O}[[S]]$ pour la variable S. On continue de considérer $E(\varphi^{-1}\psi) \in M^{ord}(\varphi; \Lambda_T)$ pour $\Lambda_T = \mathcal{O}[[T]]$. Formons le produit $GE(\varphi^{-1}\psi)$ dans $\mathcal{O}[[T, S]][[q]]$ et posons

$$G * E(\varphi^{-1}\psi)(T, S) = GE(\varphi^{-1}\psi)((1+T)(1+S)^{-1} - 1; S).$$

On a $G * E(\varphi^{-1}\psi)(T, u^\ell - 1) = G(u^\ell - 1) * E(\varphi^{-1}\psi)(T) \in S(\psi; \mathcal{O}[[T]])$ pour tout $\ell \geq 2$.

Si on a une série formelle $H(T, S)(q) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n, H)(T, S)q^n$ telle que $H(T, u^\ell - 1) \in S(\psi; \mathcal{O}[[T]])$ pour tout $\ell \geq 2$, alors $H(T, S) - H(T, u^2 - 1)$ est divisible par $S_1 = S - (u^2 - 1)$ et $H_1 = \dfrac{H(T, S) - H(T, u^2 - 1)}{S_1}$ satisfait la même condition pour tout $\ell \geq 3$, et donc on peut définir $H_2 = \dfrac{H_1(T, S) - H_1(T, u^2 - 1)}{S_2}$ pour $S_2 = S - (u^3 - 1)$. En répétant cette démarche, on voit

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(T, u^{n+2} - 1) S_1 \bullet \cdots \bullet S_n$$

où $S_i = S - (u^{i+1} - 1)$ et $H_{n+1} = \dfrac{H_n(T,S) - H_n(T,u^{n+2}-1)}{S_{n+1}}(H_0(T,S) = H(T,S))$. Le développement de H ci-dessus est convergent sous la topologie de l'idéal maximal de $\mathcal{O}[[T,S]]$, et on voit

$$H \in S(\psi; \mathcal{O}[[T]])\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}[[T]]}\mathcal{O}[[T,S]].$$

On peut donc appliquer la projection e à H. En particulier, on a

$$e(G * E(\varphi^{-1}\psi)) \in S^{ord}(\psi; \mathcal{O}[[T]]) \otimes_{\mathcal{O}[[T]]} \mathcal{O}[[T,S]].$$

On peut étendre le produit scalaire $(,)_a$ linéairement sur $S^{ord}(\psi; \mathcal{O}[[T]]) \otimes_{\mathcal{O}[[T]]} \mathcal{O}[[T,S]]$ et de nouveau, on note $(,)_a$ ce produit scalaire à valeurs dans le corps des fractions de $\mathcal{O}[[T,S]]$. Maintenant, on définit, dans le corps des fractions de $\mathcal{O}[[T,S]]$,

$$\mathcal{D}_p(T,S;F,G) = (F, e(G * E(\varphi^{-1}\psi)))_a.$$

On a alors

THÉORÈME 2. — *Il existe une unique fonction $\mathcal{D}_p(T,S;F,G) \in Frac(\mathcal{O}[[T,S]])$ telle que, pour tout $k > \ell \geq 2$,*

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_p(u^k-1, u^\ell-1; F,G)\\&\quad = (-N)^{k-\ell}S(f_k)^{-1}E_p(f_k,g_\ell)\frac{\Gamma(k-\ell)\Gamma(k-1)D(k-1,f_k,g_\ell)}{(2\pi i)^{k-\ell}(4\pi)^{k-1}G(\varphi\psi^c\omega^{k-\ell})(f_k^0,f_k^0)}.\end{aligned}$$

Pour simplifier, on suppose que $N = 1$ et on suppose aussi que $\psi = \varphi$. Alors $(TE(id))(0) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\log(u)$. Donc $e(G*(TE(id)))(T,T) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\log(u)G(T)$. Donc, notant que $(F,F)_a = 1$, on a une formule de résidu.

THÉORÈME 3. — *Si $N = 1$, alors*

$$\{((1+T)(1+S)^{-1}-1)\mathcal{D}_p(T,S;F,G)\}|_{T=S} = \left(1-\frac{1}{p}\right)\log(u)(F,G)_a.$$

C'est un analogue p-adique de la formule de résidu complexe :

$$Res_{s=k}\mathcal{D}(s,f,g) = \Gamma(k)^{-1}2^{-1}(4\pi)^k(f,g) \text{ si } f,g \in S_k(SL_2(\mathbb{Z})).$$

Remarque : On peut définir le module C_0 de congruence de F par $S^{ord}(N;\Lambda)/\{F\Lambda \oplus (F\mathbb{L}^{\perp} \cap S^{ord}(N;\Lambda))\}$, qui est un Λ-module de type fini et de torsion. Ce module C est isomorphe à celui défini dans [H1, II, § 4], et par définition, il existe une série $H \in \mathcal{O}[[T]]$ telle que $C \cong \Lambda/H\Lambda$. Alors, il est facile de vérifier que $H\mathcal{D}_p \in \mathcal{O}[[T,S]]$. Alors que la fonction L p-adique de trois variables est obtenue dans [H1, II] dans un cadre très général, on ne sait pas si le résultat d'holomorphie comme ci-dessus est vrai pour celle qui interpole la fonction L primitive complexe en général sans l'hypothèse (4b). Le théorème 2 donne donc le seul cas connu sous l'hypothèse (4b) pour le problème de l'holomorphie. Si on peut calculer en général les facteurs d'Euler supplémentaires en Np sans utiliser l'équation fonctionnelle, on peut probablement démontrer cette holomorphie en général par la voie employée dans [H3].

Manuscrit reçu le 12 juin 1990

* p. 87 : Supporté partiellement par NSF.

BIBLIOGRAPHIE

[H1] H. Hida. — A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I, II, I, *Invent. Math.* **79**, (1985), 159-195; II : *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **38, 3** (1988), 1-83.

[H2] H. Hida. — Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série* **19**, (1986), 231-273.

[H3] H. Hida. — p-adic L-functions for base change lifts of GL_2 to GL_3, *"Variétés de Shimura, Représentations galoisiennes et fonctions L automorphes"*, Proc. d'une conférence à Ann Arbor, Michigan 1988.

[J] H. Jacquet. — *Automorphic forms on* $GL(2)$, II, Lecture Notes in Math. Springer, **278**, 1972.

[M] T. Miyake. — *Modular forms*, Springer 1989.

[P-R] B. Perrin-Riou. — Dérivée de fonctions L p-adiques et points de Heegner, *Invent. Math.* **89**, (1987), 456-510.

[Sh1] G. Shimura. — The special values of the zeta functions associated with cusp forms, *Comm. Pure Appl. Math.* **29**, (1976), 783-804.

[T] J. Tilouine. — Sur la conjecture principale anticyclotomique, *Duke Math. J.* **59**, (1989), 629-673.

[W] A. Wiles. — On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94**, (1988), 529-573.

H. Hida
Department of Mathematics
University of California, Los Angeles
Los Angeles, Ca. 90024
U.S.A.