יציבות וקטגוריות במרחבים מטריים שלמים

חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה

מאת אלכסנדר אוסוויצוב

הוגש לסנט האוניברסיטה העברית בירושלים

נובמבר 2005

יציבות וקטגוריות במרחבים מטריים שלמים

חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה

מאת אלכסנדר אוסוויצוב

הוגש לסנט האוניברסיטה העברית בירושלים

נובמבר 2005

עבודה זו נעשתה בהדרכתו של

פרופסור שהרן שלח

תקציר

עבודה זו חוקרת מחלקות של מרחבים מטריים שלמים מבחינה תורת מודלים. המשפט העיקרי של העבודה הוא התוצאה המקבילה למשפט מורלי על קשת הקטגוריות של תורות מסדר ראשון בנות מניה (במילים אחרות, הוכחת השערת ווש בהקשר הזה). בדרך להוכחת המשפט מפותחות שיטות טיפול במושגים כמו יציבות טופולוגית בתורת מודלים, טיפוסים מבודדים בחזק וכו'.

תוכן העניינים

1 מבוא

העבודה הזו חוקרת מחלקות של מרחבים מטריים שלמים מבחינה תורת מודלית ומפתחת בהקשר הזה חלק מתורת היציבות במטרה להוכיח את משפט הקטגוריות הלא מניה לשפות מניות (המוכר כ-"משפט מורלי" בלוגיקה קלאסית).

משפט מורלי (משנת 1965) אומר כי תורה בת מניה מסדר ראשון קטגורית בעוצמה לא מניה אחת λ (= יש לה מודל אחד ויחיד מעוצמה λ עד כדי איזומורפיזם) אם ורק אם היא קטגורית בכל עוצמה לא מניה. משפט זה (שאימת את השערתו של ווש) פתח כיווני מחקר רבים בתורת המודלים הטהורה. רוב העבודה התרכזה בתורות מסדר ראשון, אך אנשי תורת מודלים אחדים, ביניהם קיזלר, מורלי, ובעקבותיהם גם המנחה של המחבר, שהרן שלח, התחילו להתעניין במחלקות מודלים שאינן אלמנטריות (מחלקה אלמנטרית היא מחלקת מודלים של תורה מסדר ראשון). כך בעבודות של קיזלר נולדה תורת מודלים הומוגנית, חקר מחלקות של תת מודלים מסוג מסוים של מודל הומוגני גדול (ההגדרות המדויקות בהמשך) שנחקרה אחר כך רבות ע"י שלח ואחרים (ביניהם גרוסברג, לסמן, הוטטינן). השאלות שנשאלו בהקשרים החדשים האלה (שרובם כלליים יותר מהלוגיקה מסדר ראשון) היו מקבילות לשאלות המקוריות שלעתים קרובות תשובות עליהן בהקשר הקלאסי היו כבר ידועות. אחת השאלות הראשונות והבסיסיות נוגעת בהשערת ווש: האם קיים משפט המקביל לזה של מורלי? בעבודה הזו נענה חיובית על השאלה הזו לגבי הקשר מאוד מסוים.

אף על פי שרוב תורת המודלים באופן מסורתי מרוכזת בחקר מחלקות אלגבריות (שהרבה מהן אלמנטריות), עבודה לא מבוטלת נעשתה כדי למצוא את המסגרת הנכונה בה כדאי להסתכל על מרחבים טופולוגיים מבחינה תורת מודלית וכן ניתן לפתח בה תורה מקבילה ללוגיקה הקלאסית. נסיונות אחדים משאירים אותנו בלוגיקה מסדר ראשון ("אנליזה לא סטנדרטית" של רובינסון), המחיר שיש לשלם הוא הופעת סביבות טופולוגיות "לא סטנדרטיות", אינפיניטסימליות במודלים קצת רווים. אנו בעבודה הזאת ננקוט בגישה אחרת (נתאר בהמשך בקצרה את ההיסטוריה שלה) הלא מאפשרת מודלים לא תקניים. המחיר שנשלם הוא יציאה מהמסגרת הקלאסית ומעבר לתורת מודלים הומוגנית.

בעיה נוספת שנצטרך להתמודד איתה היא איך לקחת את הטופולוגיה בחשבון. ננקוט בגישה האומרת שאין הבדל ממשי בין קבוצה לבין תת קבוצה צפופה שלה. למשל, היינו רוצים "לזהות" שני מבנים שונים ששניהם צפופים באותו מרחב מטרי שלם (ולמעשה לחקור רק את ההשלמה). יש מספר סיבות לכך שהגישה הזו נראית לנו נכונה. מצד אחד, לא היינו רוצים להתייחס לקבוצה שאינה סגורה טופולוגית (כאשר הטופולוגיה גדירה בשפה) בתור קבוצה סגורה בגדירות (כי גבול של סדרה גדיר מעל הסדרה), לכן לא נרצה להתעניין במבנים מטריים לא שלמים. מצד שני, ברור שתת קבוצה צפופה של מרחב מטרי שלם נושאת בתוכה את "רוב" המידע עליו. לכן נחליף את מושג העוצמה במושג הצפיפות, נתאים את מושג התת-מודל לפילוסופיה שלנו, נצטרך להגדיר יציבות בהתאם, וכו'. כאן למעשה החידוש העיקרי של העבודה הנוכחית (משפטי קטגוריות רבים הוכחו בעבר בתורת מודלים הומוגנית ללא טופולוגיה ע"י קיזלר, שלח, לסמן ואחרים). אנו מודעים לעבודה של איתי בן יעקב בהקשר טופולוגי גם כן (אם כי פחות כללי, הסבר יבוא) שנעשתה במקביל, ראה $[Ben:3]$.

שיטות תורת מודליות הושמו למחלקות של מרחבי בנך (כלומר, מרחבים נורמיים שלמים, מחלקות ללא מודלים לא תקניים) בשנות ה-1970 ע"י קריווין, מוריי, שטרן ואחרים. הגישה המקובלת ביותר לתורת מודלים של מרחבי בנך היא גישתו של וורד הנסון. הנסון הציע לוגיקה מיוחדת לתיאור של מחלקות של מרחבים נורמיים וקרא לה "לוגיקה חיובית חסומה". לוגיקה זו קומפקטית, ולכן לכל תורה חיובית-חסומה יש "מודל מפלצת" - מודל כולל (משכן את כל המודלים התקניים של התורה) והומוגני, קומפקטי לנוסחות בלוגיקה של הנסון. הנסון גם הציע לשנות את המושג של סיפוק ל-"סיפוק מקורב" ואת המושג של תת מודל אלמנטרי ל- "כמעט אלמנטרי". אחת הסיבות לשינויים אלה היא בדיוק הרצון לא להבחין בין מבנה נורמי להשלמתו.

המטרה המקורית של העבודה הזו היתה הוכחת השערה המקבילה להשערת ווש עבור תורות חיוביות-חסומות (שאלה שבניסוח הזה נשאלה ע"י הנסון). שיטות ההוכחה הובילו לתוצאה כללית יותר. המשפטים שנציג מדברים על "מפלצת מטרית קופקטית" ותת מודלים שלמים "כמעט אלמנטריים" שלה. במילים אחרות, אנו מכלילים את הלוגיקה של הנסון בשני כיוונים: ראשית, נדבר על מרחבים מטריים שלמים כללי-

ים ולא מרחבי בנך. שנית, המפלצות שלנו, אשר נקרא להן בשם החיבה "מטרצות" (="מיטרצות"), מלשון "מטרי" ו-"מפלצת", לא בהכרח "באות" מתורה חיובית-חסומה, הן רק מודלים הומוגניים-קומפקטיים ("מפלצות הומוגניות מסוג III" בטרמינולוגיה של שלח, ראה $[Sh:54]$, "חתולים" במונחים של בן יעקב, ראה $[Ben:1]$, $[Ben:3]$). כיוון שנעבוד בהקשר הכללי הזה ולא נתייחס במפורש ללוגיקה של הנסון, לא נרחיב עליה עוד כאן. ניתן למצוא סקירה מפורטת ב-$[HenIov]$. הקורא שמתעניין בשאלה המקורית של הנסון בקלות ישים לב שמפלצת של תורה חיובית-חסומה היא מקרה פרטי של מטרצת.

כפי שהוזכר לעיל, מפלצות הומוגניות קומפקטיות כבר נחקרו במספר לא מבוטל של עבודות, בפרט ע"י שלח ב- $[Sh:54]$ ובן יעקב במאמריו. למעשה, שניהם הוכיחו גרסאות של משפט מורלי. שלח הראה ב- $[Sh:54]$ שהמשפט נכון למודלים סגורים ישית בהקשר הזה. אולם "המפלצות" ב- $[Sh:54]$ אינן מטריות, כלומר, אין התי-יחסות מיוחדת לטופולוגיה על המודלים, ולכן שלח חוקר קטגוריות אמיתית (ולא עד כדי השלמה מטרית = סגור טופולוגי). ההקשר המטרי קשה יותר. למשל, מחלקות קטגוריות ב- $[Sh:54]$ יוצאות $\aleph_0$-יציבות, ואילו אנחנו נצטרך להסתפק ב- $\aleph_0$-יציבות עד כדי סגור טופולוגי, מה שיקשה על החיים בצורה ניכרת.

בן יעקב, לעומת זאת, חקר ב- $[Ben:3]$ חתולים מטריים, כלומר מפלצות הומוגניות קומפקטיות עם מטריקה, והוכיח את הגירסה שלו של משפט מורלי למושג הטופולוגי של קטגוריות. ההבדל בין ההקשר שלו להקשר שלנו הוא בכך שהוא התעניין ב-"חתולים האוסדורף", כלומר חתולים שמרחב הטיפוסים שלהם הוא האוסדורף (ראה $[Ben:1]$). לא ניכנס כאן לפרטים טכניים, רק נציין שההקשר של בן יעקב קרוב יותר ל- "מפלצות מסוג II" של $[Sh:54]$ = "תורות רובינסון" כפי שקרא להן אודי הר-ושובסקי ב- $[Hr]$. מה שמבדיל בין "סוג II" ו- "סוג III" ב- $[Sh:54]$ הוא שבמפלצות מסוג II קבוצת הנוסחות עבורן יש קומפקטיות סגורה לשלילה, מה שמקרב הקשר זה לסדר ראשון בצורה ניכרת. בדומה לזה, בחתולים האוסדורף קיים מושג של "שלילה חלשה" שמאפשר למשל לפתח את תורת אי התלות המבוססת על אי התחלקות (כמו בלוגיקה הקלאסית) במלואה עבור חתולים האוסדורף יציבים ואפילו פשוטים (כפי

שנעשה ב- $[Ben : 2]$). לא כך בהקשר שלנו שבו אין שלילות חלשות, ולכן ניאלץ להסתפק בכלים פחות מספקים של תורת מודלים הומוגנית כגון אי-התפצלות ומודלי ארנפויכט-מוסטובסקי.

יש לציין שגישה אחרת לחקר מחלקות של מרחבים טופולוגיים מהיבט תורת מודלי הוצעה ב-1966 ע"י צ'אנג וקיזלר בספרם על לוגיקות רציפות $[ChKe]$. גישה זו הוחייתה לאחרונה ע"י איתי בן יעקב והמחבר ב- $[BenUs]$. בין היתר מוכח במאמר הזה שלוגיקה רציפה שקולה להכללה הטבעית של הלוגיקה של הנסון למרחבים מטריים. מכאן שתוצאות המוצגות בעבודה הנוכחית תופסות לגבי תורות רציפות כפי שמוגדרות ב- $[BenUs]$.

הגיע הזמן להציג את ההקשר שלנו:

הגדרה 1.1 מילון τ ייקרא *מטרי* אם לכל $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq 1$ רציונליים קיים סימן יחס P_{q_1,q_2} ב-τ. אוסף סימני היחס הזה ייקרא *סכימת מטריקה*.

הגדרה 1.2 מבנה M במילון מטרי τ ייקרא מבנה (או מודל) *מטרי* אם

1. M הוא מרחב מטרי שלם עם מטריקה $\mathbf{d} = \mathbf{d}(x, y)$.
1. המטריקה גדירה ע"י סכימת המטריקה של τ, כלומר לכל $a, b \in M$ מתקיים $\mathbf{d}(a, b) \in [q_1, q_2] \Longleftrightarrow P^M_{q_1,q_2}(a, b)$.
2. כל סימן יחס של τ מתפרש כקבוצה סגורה ביחס ל-$\mathbf{d}$.
3. כל סימן פונקציה של τ מתפרש כפונקציה רציפה ביחס ל-$\mathbf{d}$ מחזקה מתאימה של M ל-M.

הערה 1.3 בדרך כלל נשכח את סימני היחס של סכימת המטריקה ונכתוב פשוט $M \models \mathbf{d}(a, b) \in [q_1, q_2]$, $M \models \mathbf{d}(a, b) \leq q$ וכו'.

הגדרה 1.4 יהי $(X, \mathbf{d})$ מרחב מטרי. נרחיב את המטריקה לסדרות וקבוצות:

1. לשתי סדרות סופיות באותו אורך $\bar{a} = \langle a_i : i < n \rangle$, $\bar{b} = \langle b_i : i < n \rangle$ נגדיר $\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{b}) = max\{\mathbf{d}(a_i, b_i) : i < n\}$.

2. לשתי קבוצות A ו-B נגדיר $\mathbf{d}_1(A,B)=inf\{\mathbf{d}(a,b):a\in A,b\in B\}$.

הגדרה 1.5 1. נגדיר נוסחות חיוביות באינדוקציה.

(א) נוסחה אטומית היא חיובית

(ב) אם φ,ψ חיוביות, אז

i. $\varphi\wedge\psi$ חיובית

ii. $\varphi\vee\psi$ חיובית

iii. $\forall x\varphi$ חיובית

iv. $\exists^* x\varphi$ חיובית

2. נוסחות חיוביות ישיות מוגדרות כנ"ל ללא סעיף (iii).

נסביר את הסמנטיקה. פירוש ערכי האמת ברור פרט לכמת החדש $\exists^*$. זהו כמת מיוחד למבנים מטריים והוא כמת של "קיום מקורב". נגדיר את ערך האמת שלו בצורה פורמלית (כמובן, ההגדרה היא באינדוקציה, ואנו מניחים שערך האמת של φ כבר מוגדר). שימו לב שההגדרה היא לנוסחות עם פרמטרים.

הגדרה 1.6 יהי $(M,\mathbf{d})$ מבנה מטרי. נאמר ש-M מקיים את הנוסחה $\exists^* x\varphi(x,\bar{a})$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיימים $b',\bar{a}'$ כך ש-M מקיים את $\varphi(b',\bar{a}')$ ו-$\mathbf{d}(\bar{a},\bar{a}')\leq\varepsilon$.

מטרת ההסתכלות על נוסחות חיוביות היא הטענה הברורה הבאה:

טענה 1.7 יהי $(M,\mathbf{d})$ מבנה מטרי ותהי $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ נוסחה חיובית עם פרמטרים ב-M. אז φ^M, קבוצת הפתרונות של φ ב-M, היא קבוצה סגורה ביחס למטריקה $\mathbf{d}$.

הוכחה: לנוסחות אטומיות הטענה נובעת מההגדרה של מבנה מטרי, לגימום ואיווי היא ברורה. אם $\bar{b}_n\to\bar{b}$ ומתקיים $\forall x\psi(x,\bar{b}_n,\bar{a})$ לכל n, אז הנדרש נובע מהנחת האינדוקציה על ψ. לכן נותר לטפל בכמת הקיום המקורב.

נניח $\bar{b}_n\to\bar{b}$ ולכל n מתקיים $\exists^* x\psi(x,\bar{b}_n,\bar{a})$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\bar{b}_n$ הקרוב ל-$\bar{b}$ עד כדי $\frac{\varepsilon}{2}$ ונשתמש בהגדרת $\exists^* x\psi(x,\bar{b}_n,\bar{a})$ עבור $\frac{\varepsilon}{2}$, זה ייתן את הנדרש בהגדרת $\exists^* x\psi(x,\bar{b},\bar{a})$. ■

הגדרה 1.8 יהי M מבנה מטרי. נאמר ששתי נוסחות חיוביות $\varphi(\bar{x})$ ו-$\psi(\bar{x})$ *סותרות* או מהוות *זוג סותר* ב-M אם קבוצות הפתרונות שלהן ב-M זרות. לנוסחה חיובית ישית φ נסמן ב-$Neg(\varphi)$ את קבוצת הנוסחות החיוביות הישיות הסותרות את φ (המבנה תמיד יהיה ברור מההקשר).

הגדרה 1.9 מודל מטרי $\mathfrak{C}$ מעצמה "גדולה מאוד" (כמקובל בתחום, נשאיר את המושג של "גדולה" מעורפל במקצת) במילון (מטרי) τ ייקרא *מטרצת* (מנוקד כמו המילה "מפלצת") אם

1. קבוצת הנוסחות החיוביות הישיות שלמה (מפרידה טיפוסים) ב-$\mathfrak{C}$, כלומר לכל $\bar{a}, \bar{b} \subseteq \mathfrak{C}$ בעלי τ-טיפוסים שונים ב-$\mathfrak{C}$, קיים זוג סותר של נוסחות חיוביות ישיות המפריד ביניהם.

2. $\mathfrak{C}$ קומפקטי לקבוצת הנוסחות החיוביות, כלומר כל קבוצת נוסחות חיוביות ישיות עם פרמטרים מ-$\mathfrak{C}$ מעצמה קטנה מ-$|\mathfrak{C}|$ שהיא ספיקה סופית ב-$\mathfrak{C}$, מתגשמת ב-$\mathfrak{C}$.

הערה 1.10 דרך אחרת לנסח את ההגדרה היא: מטרצת היא מבנה מטרי המהווה תחום כולל של חתול (ראה $[Ben:1]$).

טענה 1.11 תהי $\mathfrak{C}$ מטרצת.

1. טיפוסים ב-$\mathfrak{C}$ נקבעים ע"י טיפוסים חיוביים.

2. לכל $\bar{a} \subseteq \mathfrak{C}$ ולכל $\varphi(\bar{x})$ חיובית ישית, אם $\neg\varphi(\bar{a})$ מתקיים ב-$\mathfrak{C}$, אז קיימת $\psi(\bar{x}) \in Neg(\varphi(\bar{x}))$ כך ש- $\psi(\bar{a})$ מתקיים ב-$\mathfrak{C}$.

3. בהינתן טיפוס $p \in S(A)$ ונוסחה $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ מעל A שאינה ב-p, קיימת נוסחה $\psi \in Neg(\varphi)$, כך ש- $\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$.

4. $\mathfrak{C}$ הומוגנית בחזק, כלומר כל פונקציה אלמנטרית חלקית מתת קבוצה $A \subseteq \mathfrak{C}$ "קטנה" (מעצמה קטנה מעצמת $\mathfrak{C}$) ל- $\mathfrak{C}$ ניתנת להרחבה לאוטומורפיזם של $\mathfrak{C}$.

5. לכל $A \subseteq \mathfrak{C}$ "קטנה" ולכל $\bar{a}, \bar{b} \subseteq \mathfrak{C}$, $tp(\bar{a}, A, \mathfrak{C}) = tp(\bar{b}, A, \mathfrak{C})$ אםם יש אוטומור-פיזם של $\mathfrak{C}$ מעל A הלוקח את $\bar{a}$ ל-$\bar{b}$.

הוכחה: (1)-(3) נובעים מכך שקבוצת הטיפוסים הנוסחות החיוביות הישיות שלמה. (4) נובע מקומפקטיות לנוסחות חיוביות ישיות והעובדה שהקבוצה הזו שלמה. (5) נובע מ-(4). ■

נשים לב שכאשר מדובר בספיקות של נוסחות ב- $\mathfrak{C}$, כמת הקיום המקורב שקול לכמת הישי הרגיל (ולכן לרוב לא נשתמש בכמת החדש). למעשה, $\aleph_1$-קומפקטיות, מה ששקול בהקשר שלנו ל-$(D, \aleph_1)$-הומוגניות של מודל (ההגדרות תוזכרנה בהמשך) מספיקה לטענה הבאה.

הבחנה 1.12 לנוסחה חיובית ישית $\varphi(x, \bar{a})$, $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ אם ורק אם $\mathfrak{C} \models \exists^* x \varphi(x, \bar{a})$

הוכחה: הכיוון מימין לשמאל ברור. נניח $\mathfrak{C} \models \exists^* x \varphi(x, \bar{a})$. אז הקבוצה הבאה ספיקה סופית ב-$\mathfrak{C}$:

$$\{\varphi(x, \bar{y})\} \cup \{\mathbf{d}(\bar{y}, \bar{a}) \leq \varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$$

לכן היא ספיקה ב- $\mathfrak{C}$ (מקומפקטיות), כלומר קיימים b, $\bar{a}'$ כך ש- $\mathfrak{C} \models \varphi(b, \bar{a}')$ ו-$\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{a}') \leq \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$, לכן $\bar{a} = \bar{a}'$, כנדרש. ■

ניזכר כעת במושגים בסיסיים של תורת מודלים הומוגנית. הקורא מוזמן לעיין ב-$[Sh:3]$.

הגדרה 1.13 למבנה M במילון τ נגדיר

$$D(M) \quad = \quad \{tp(\bar{a}, \emptyset, M) : a \subseteq M, len(\bar{a}) < \omega\}$$

, כלומר זהו אוסף כל הטיפוסים (τ-טיפוסים) הטהורים (מעל $\emptyset$) המוגשמים ב-M. $D(M)$ תיקרא הדיאגרמה הסופית (או פשוט הדיאגרמה) של M.

הגדרה 1.14 בהינתן מילון τ, אוסף של τ-טיפוסים טהורים (כעצמים תחביריים) ייקרא דיאגרמה סופית (או פשוט דיאגרמה). בהינתן דיאגרמה סופית D, מבנה M במילון τ

ייקרא D-מבנה (D-מודל) אם $D(M) \subseteq D$. טיפוס (אולי מעל קבוצת פרמטרים) ייקרא D-טיפוס אם הוא מוגשם ב- D-מבנה כלשהו.

הערה 1.15 בהינתן דיאגרמה D, ניתן לשחזר ממנה את המילון τ, ולכן כאשר נדבר על D-מודלים, לא תמיד נציין את τ במפורש.

ההגדרה הבאה הינה ההגדרה המרכזית בתורת מודלים הומוגנית:

הגדרה 1.16 בהינתן דיאגרמה סופית D, מבנה M ייקרא (D, λ)-הומוגני אם $D(M) = D$(כלומר, D היא הדיאגרמה של M) ו-M λ-הומוגני בחזק.

הערה 1.17 שימו לב ש- $D(M) = D$ היא דרך לאמר ש-M מודל כולל ל-D-מודלים.

הגדרה 1.18 דיאגרמה D תיקרא טובה אם קיים מודל (D, λ)-הומוגני ל-λ גדול כרצוננו.

נשים לב שבהקשר שלנו כיוון שהתחלנו מקיום מודל מפלצת, נקבל

הערה 1.19 למטרצת $\mathfrak{C}$, $D(\mathfrak{C})$ היא דיאגרמה טובה.

תורה של דיאגרמות טובות פותחה ע"י שלח ב-$[Sh:3]$ ועבודה רבה נוספת נעשתה ע"י שלח, גרוסברג, לסמן,הוטטינן ואחרים; לא ניכנס כאן לפרטים, אך לעיתים נצטט ונשתמש בתוצאות מ-$[Sh:3]$. העובדה הבאה (שלמעשה אומרת שגם בהקשר הזה רוויה שקולה לכוללות והומוגניות) מוכחת ב-$[Sh:3]$, הוכחה מפורטת יותר נמצאת ב-$[GrLes]$:

טענה 1.20 מודל M הינו (D, λ)-הומוגני אםם כל D-טיפוס מעל תת קבוצה של M בעצמה קטנה מ-λ מוגשם ב-M.

אנו נשתמש במשפט הזה בחופשיות (כלומר, נדבר על מודלים (D, λ)-הומוגניים ונשתמש בעובדה שהם λ-רווים ל-D-טיפוסים, או, מה ששקול, λ-רווים לטיפוסים חיוביים ישי-ים (השקילות נובעת מכך שטיפוס במטרצת נקבע ע"י הנוסחות החיוביות הישיות).

ההגדרה הבאה מציגה את מחלקת המודלים בה נתעניין. הגדרה זו מכלילה את המושג של הנסון של מחלקת תת מודלים אלמנטריים בקירוב של מפלצת של תורה חיובית-חסומה (=מחלקת מודלים מקורבים של תורה חיובית-חסומה) בו דן $[HenIov]$.

הגדרה 1.21 תהי $\mathfrak{C}$ מטרצת.

1. $K_1(\mathfrak{C})$ היא מחלקת תת המבנים M של $\mathfrak{C}$ המקיימים: לכל נוסחה חיובית $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ מעל M (כלומר, $\bar{a} \in M$), אם קיים $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ המקיים $\varphi(\bar{b}, \bar{a})$, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\bar{a}', \bar{b}' \in \mathfrak{C}$ כך ש-
   (א) $\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{a}') \leq \varepsilon$, $\mathbf{d}_1(\bar{b}', M) \leq \varepsilon$ (ראה 1.4(2)).
   (ב) $\mathfrak{C} \models \varphi(\bar{b}', \bar{a}')$.
2. לעיתים נכתוב $\mathfrak{C} \prec_1 M$ במקום $M \in K_1(\mathfrak{C})$.
3. $K_1^c(\mathfrak{C})$ היא מחלקת איברי $K_1(\mathfrak{C})$ השלמים כמרחבים מטריים (=תת קבוצות סגורות טופולוגית של $\mathfrak{C}$).

אנו נתעניין במחלקה $K_1^c(\mathfrak{C})$. מעניין לשים לב שהיא כוללת מודלים מספיק הומוגניים (מספיק רווים):

הערה 1.22 יהי $M \in K_1(\mathfrak{C})$ (D, λ)-הומוגני, $\lambda > \aleph_0$, אז $M \in K_1^c(\mathfrak{C})$.

הוכחה: גבול של סדרת קושי הוא הגשמה (למעשה, ההגשמה היחידה) של טיפוס מעל הסדרה, ונזכור את הטענה 1.20. ■

הגיע הזמן להציג את מטרתנו העיקרית.

הגדרה 1.23 מטרצת $\mathfrak{C}$ תירקא קטגורית ב-λ (λ מונה אינסופי) אם קיים $M \in K_1^c(\mathfrak{C})$ יחיד מצפיפות λ עד כדי איזומורפיזם.

לפעמים נשתמש לשם פשטות במושג הבא, לא כל כך מקובל בתחום (אם כי מוצדק בסוף במידה מסוימת ע"י המשפט העיקרי):

הגדרה 1.24 נאמר כי $\mathfrak{C}$ קטגורית אם היא קטגורית ב-λ לא מני כלשהו.

עבודה זו מוקדשת להוכחת ההשערה הבאה:

השערה 1.25 מטרצת $\mathfrak{C}$ בעלת מילון מני קטגורית אסם היא קטגורית בכל λ לא מני.

נציין את סימונים בהם נשתמש.

סימונים ומוסכמות:

1. נקבע מטרצת $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ בעלת מילון בן-מניה τ.
2. נסמן ב- D את הדיאגרמה של $\mathfrak{C}$, $D = D(\mathfrak{C})$.
3. נסמן ב-Δ את קבוצת הנוסחות החיוביות.
4. $S_D(A)$ תסמן את קבוצת ה-D-טיפוסים (באופן שקול בהקשר שלנו: Δ-טיפוסים), $S_D^m(A)$ - את קבוצת הטיפוסים ב-m משתנים. לפעמים נשמיט את D.
5. כאשר נאמר "נוסחה", נתכוון לנוסחה חיובית (אם כי ננסה לאמר "Δ-נוסחה"). כאשר נאמר "טיפוס", נתכוון ל-D-טיפוסים חיוביים (אם כי ננסה לציין זאת במפורש).
6. כיוון שקבענו את $\mathfrak{C}$, נשמיט אותה מסימונים, למשל K_1 תסמן $K_1(\mathfrak{C})$.
7. M, N יסמנו איברי K_1. A, B, C יסמנו תת קבוצות של $\mathfrak{C}$.
8. ל- $A \subseteq \mathfrak{C}$ נסמן ב- $ch(A)$ או $dens(A)$ את הצפיפות של A.
9. ל- $A \subseteq \mathfrak{C}$ נסמן ב- $mcl(A)$ או ב- $\bar{A}$ את הסגור המטרי (הטופולוגי) של A.
10. φ, ψ, χ, ϑ יסמנו נוסחות. p, q, r יסמנו טיפוסים.
11. ε, δ יסמנו מספרים רציונליים אי-שליליים.
12. α, β, γ יסמנו סודרים. δ יסמן סודר גבולי.
13. λ, μ, χ, θ יסמנו מונים אינסופיים.

14. $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ יסמנו קבוצות אי-בחינים.

15. I,J יסמנו סדרים קוויים.

16. φ^M, ψ^M יסמנו את קבוצות הפתרונות של הנוסחות φ, ψ במודל M, כנ"ל גם $\varphi(M)$, $\psi(M)$. לפעמים נשמיט את M כשהוא ברור מההקשר, למשל נכתוב $\mathbf{d}_1(\varphi,\psi)$ וכו'.

2 קירובים לנוסחות וטיפוסים

למושגים הבאים של ε-קירוב לנוסחה חשיבות רבה. ניתן שתי הגדרות ונשתמש בשתי-הן למטרות שונות. הגדרה 2.1 מדברת על סביבות טופולוגיות של נוסחה עם פרמטרים נתונה, ואילו 2.2 מרשה לנוסחה להשתנות ע"י הזזה של הפרמטרים שלה.

הגדרה 2.1 1. לנוסחה (אולי עם פרמטרים) $\varphi(\bar{x})$, נגדיר

$\varphi^{[\varepsilon]}(\bar{x}) = \exists\bar{x}'(\varphi(\bar{x}') \wedge \mathbf{d}(\bar{x},\bar{x}') \leq \varepsilon)$.

אז $\varphi^{[\varepsilon]}(\bar{x},\bar{a}) = (\exists\bar{x}')[\mathbf{d}(\bar{x},\bar{x}') \leq \varepsilon \wedge \varphi(\bar{x}',\bar{a})]$.

2. לטיפוס p, נגדיר

$p^{[\varepsilon]} = \{(\bigwedge_{\ell<n}\varphi_\ell)^{[\varepsilon]} : n < \omega \ \&\ \varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1} \in p\}$.

הגדרה 2.2 1. לנוסחה $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ נגדיר

$\varphi^{<\varepsilon>}(\bar{x},\bar{a}) = (\exists\bar{x}',\bar{y})(\varphi(\bar{x}',\bar{y}') \wedge \mathbf{d}(\bar{x}',\bar{x}) \leq \varepsilon \wedge \mathbf{d}(\bar{y}',\bar{a}) \leq \varepsilon)$.

2. לטיפוס p נגדיר

$p^{<\varepsilon>}(\bar{x}) = \{(\bigwedge_{\ell<n}\varphi_\ell(\bar{x},\bar{a}_\ell))^{<\varepsilon>} : n < \omega \ \&\ \varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1} \in p\}$.

הערה 2.3 1. $\varphi^{[\varepsilon]}(\bar{x},\bar{a})$ שקולה ל- $\varphi_1^{[\varepsilon]}(\bar{x})$, כאשר אנו מעשירים את $\mathfrak{C}$ ע"י קבועים אישיים עבור $\bar{a}$ ומסמנים $\varphi_1(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{a})$.

2. $\varphi^{<\varepsilon>} \models \varphi^{[\varepsilon]}$ לכל φ.

3. לנוסחה ללא פרמטרים φ, $\varphi^{[\varepsilon]} = \varphi^{<\varepsilon>}$

4. ל- $0 \leq \varepsilon \leq \zeta$, $\varphi^{[\varepsilon]} \models \varphi^{[\zeta]}$, $\varphi^{<\varepsilon>} \models \varphi^{<\zeta>}$.

הבחנה 2.4 1. לנוסחה φ עם פרמטרים, $\varphi \equiv \bigwedge_{\varepsilon>0}\varphi^{[\varepsilon]}$.

2. לנוסחה φ עם פרמטרים, $\varphi \equiv \bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{\zeta\in(0,\varepsilon)} \varphi^{[\zeta]}$.

3. כנ"ל ל- $\varphi^{<\varepsilon>}$.

הוכחה:

1. $[\bar{a} \models \varphi \Longrightarrow \bar{a} \models \bigwedge\{\varphi^{[\varepsilon]} : \varepsilon > 0\}]$ ברור.

נניח $\bar{a} \models \varphi^{[\varepsilon]}$ לכל ε, אז לכל n קיים $\bar{a}_n$ כך ש- $\mathfrak{C} \models \varphi[\bar{a}_n]$ ו- $\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{a}_n) \leq \frac{1}{n}$. אז $\langle \bar{a}_n : n \in \omega\rangle$ מתכנסת ל- $\bar{a}$, וכן $\bar{a} \models \varphi$, כיוון ש- $\varphi^{\mathfrak{C}}$ קבוצה סגורה.

2. דומה.

3. ראה (2).

■

הבחנה 2.5 1. $(\theta^{<\zeta_1>}(\bar{x}, \bar{b}))^{<\zeta_2>} \equiv \theta^{<\zeta_1+\zeta_2>}(\bar{x}, \bar{b})$.

2. $(p^{<\zeta_1>}(\bar{x}))^{<\zeta_2>} \equiv p^{<\zeta_1+\zeta_2>}$.

3. אם $\mathbf{d}(\bar{b}, \bar{b}') \leq \zeta_1 - \zeta_2$, אז $\theta^{<\zeta_2>}(\bar{x}, \bar{b}') \models \theta^{<\zeta_1>}(\bar{x}, \bar{b})$.

המושג השני של קירוב לנוסחות נותן דרך אלגנטית להגדיר את המחלקה K_1:

הבחנה 2.6 יהי M תת מבנה של $\mathfrak{C}$, אז $M \in K_1$ אםם לכל $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ מעל M מתקיים: אם $\mathfrak{C} \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\bar{b}_\varepsilon \in M$ כך ש- $\mathfrak{C} \models \varphi^{<\varepsilon>}(\bar{b}_\varepsilon, \bar{a})$.

הוכחה: לפי ההגדרות. ■

טענה 2.7 1. זוג נוסחות $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{a})$,$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{b})$ סותר (ראה הגדרה 1.8) אםם $\mathbf{d}_1(\varphi^{\mathfrak{C}}, \psi^{\mathfrak{C}}) > 0$.

2. הזוג $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{a})$,$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{b})$ סותר אםם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $(\varphi^{[\varepsilon]})^{\mathfrak{C}} \cap (\psi^{[\varepsilon]})^{\mathfrak{C}} = \emptyset$.

3. הזוג $\varphi=\varphi(\bar{x},\bar{a})$, $\psi=\psi(\bar{x},\bar{b})$ סותר אםם קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $(\varphi^{<\varepsilon>})^{\mathfrak{C}}\cap(\psi^{<\varepsilon>})^{\mathfrak{C}}=\emptyset$.

הוכחה:

1. הכיוון מימין לשמאל(אם $\mathbf{d}_1(\varphi,\psi)>0$ סותר, אז...) ברור. מאידך, נניח $\mathbf{d}_1(\varphi,\psi)=0$. אז לכל $n>0$ קיימים $\bar{a}_n,\bar{b}_n$ כך ש- $\mathbf{d}(\bar{a}_n,\bar{b}_n)\leq\frac{1}{n}$ ו- $\varphi(\bar{a}_n,\bar{a})$, $\psi(\bar{b}_n,\bar{b})$ נכונות ב-$\mathfrak{C}$. לכן הקבוצה הבאה ספיקה סופית:

$$\{\varphi(\bar{x},\bar{a}),\psi(\bar{y},\bar{b})\}\bigcup\{\mathbf{d}(\bar{x},\bar{y})\leq\tfrac{1}{n}\colon n=1,2,\ldots\}.$$

מקומפקטיות נקבל $\bar{a}^*,\bar{b}^*$ המגשימים אותה (כאשר מציבים את $\bar{a}^*$ במקום $\bar{x}$, $\bar{b}^*$ במקום $\bar{y}$). אבל בהכרח $\mathbf{d}(\bar{a}^*,\bar{b}^*)=0$, לכן $\bar{a}^*=\bar{b}^*$ מגשים גם את $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ וגם את $\psi(\bar{x},\bar{b})$, כנדרש.

2. מיידי מ-(1), וגם נובע מ-(3) בגלל 2.3(2).

3. נניח $\varphi^{<\varepsilon>\mathfrak{C}}\cap\psi^{<\varepsilon>\mathfrak{C}}=\emptyset$ לכל $\varepsilon>0$, אז הקבוצה $\{\varphi^{<\varepsilon>}\wedge\psi^{<\varepsilon>}\colon\varepsilon>0\}$ ספיקה סופית (לפי 2.3(4)), ולכן מוגשמת ב- $\mathfrak{C}$, כעת לפי 2.4(3), $\varphi^{\mathfrak{C}}\cap\psi^{\mathfrak{C}}\neq\emptyset$, לכן הן אינן סותרות.

הכיוון השני ברור.

■

בעקבות 2.7 נתן את ההגדרה הטבעית הבאה:

הגדרה 2.8 נאמר שזוג נוסחות (φ,ψ) הוא ε-סותר או סותר ב- ε אם $\mathbf{d}_1(\varphi,\psi)>\varepsilon$.

ב- 2.7 הראינו בין היתר

הערה 2.9 זוג נוסחות (φ,ψ) סותר אםם קיים $\varepsilon>0$ כך ש- (φ,ψ) הוא ε-סותר.

טענה 2.10 יהי p טיפוס מעל קבוצה A. אז $\bar{a}\in\mathfrak{C}$ מגשים את $p^{[\varepsilon]}$ אםם קיים $\bar{a}'\in\mathfrak{C}$ המגשים את p, $\mathbf{d}(\bar{a},\bar{a}')\leq\varepsilon$ (במילים אחרות, $p^{[\varepsilon]}$ הוא ε-סביבה של p).

הוכחה: נניח $\bar{a} \models p^{[\varepsilon]}$, אז לפי הגדרת $p^{[\varepsilon]}$ בה"כ p סגור לגימומים ו- $[\varphi(\bar{a})]^{[\varepsilon]}$ מתקיימת לכל $\varphi \in p$, אבל אין $\bar{a}' \models p$ כך ש- $\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{a}') \leq \varepsilon$. אז הקבוצה

$$\{\mathbf{d}(\bar{x}', a') \leq \varepsilon\} \cup \{\varphi(\bar{x}') : \varphi \in p\}$$

לא ספיקה (כי Δ מפרידה טיפוסים ב- $\mathfrak{C}$), ומקומפקטיות נקבל סתירה (כי סגרנו את p לגימומים). ■

הגדרה 2.11 נאמר כי טיפוס $p \in S(A)$ <u>כמעט מוגשם</u> בקבוצה B (או B כמעט מגשימה את p) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $b_\varepsilon \in B$, $b_\varepsilon \models p^{[\varepsilon]}$.

טענה 2.12 יהי $M \in K_1^c$ כך שכל טיפוס מעל כל תת קבוצה של M מעוצמה קטנה מ- λ כמעט מוגשם ב- M (λ אינסופי). אז M (D, λ)-הומוגני.

הוכחה: יהי $p \in S_D^m(A)$, $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$.

נבחר באינדוקציה $\bar{b}_n \models p^{[\frac{1}{2^n}]}$, $\bar{b}_n \in M$, $\mathbf{d}(\bar{b}_{n+1}, \bar{b}_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

למה זה אפשרי? יהי $q_n = p(\bar{x}) \cup \{\mathbf{d}(\bar{x}, \bar{b}_n) \leq \frac{1}{2^n}\}$. כיוון ש- $\bar{b}_n \models p^{[\frac{1}{2^n}]}$, קיים $\bar{b}^* \in \mathfrak{C}$ המגשים את q_n (ראה 2.10), ויהי $q_n^* = tp_D(\bar{b}^*/A \cup \{\bar{b}_n\})$, אז $q_n^* \in S_D^m(A \cup \{\bar{b}_n\})$, ולפי ההנחה יש $\bar{b}_{n+1} \in M$ המגשים $(q_n^*)^{[\frac{1}{2^{n+1}}]}$.

אז $\bar{b}_{n+1} \models p^{[\frac{1}{2^{n+1}}]}$, $\mathbf{d}(\bar{b}_{n+1}, \bar{b}_n) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, כנדרש.

כעת, $\langle \bar{b}_n : n < \omega \rangle$ סדרת קושי, יהי $\bar{b} \in M$ גבולה ($M \in K_1^c$ ולכן שלם). $\bar{b} \models p^{[\varepsilon]}$ לכל $\varepsilon > 0$, לכן $\bar{b} \models p$ (ראה 2.4(1)), וגמרנו. ■

מסקנה 2.13 יהי $M \in K_1^c$ לא (D, λ)-הומוגני. אז קיימת $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, $p \in S_D(A)$ ו- $\varepsilon > 0$ כך ש- $p^{[\varepsilon]}$ מושמט ב- M.

הוכחה: זוהי טענה 2.12 מנוסחת מחדש. ■

טענה 2.14 אם $A \subseteq \mathfrak{C}$, $p \in \mathbf{S}_D(mcl(A))$ ו- $\bar{c} \in \mathfrak{C}$ מגשים את $A \restriction p$ <u>אז</u> הוא מגשים את p.

הוכחה: אם $\varphi(\bar{x}, a_1, \ldots, a_m) \in p$, אז לכל $n < \omega$ נבחר $b^n_\ell \in A$ (עבור $\ell = 1, \ldots, m$) כך ש- $\mathbf{d}(a_\ell, b^n_\ell) < \frac{1}{n+2}$. אז $\varphi(\bar{x}, b^n_1, \ldots, b^n_m)^{<1/n+2>}$ שייכת ל- p משום שהיא נובעת מ- $\varphi(\bar{x}, a_1, \ldots, a_m)$, לכן שייכת ל- $A \restriction p$.

כעת, אם $\bar{c} \in \mathfrak{C}$ מגשים את $A \restriction p$, אז $\models \varphi(\bar{c}, b^n_1, \ldots, b^n_m)^{<1/n+2>}$ לכל n. אם $\mathfrak{C} \models \neg\varphi[\bar{c}, a_1, \ldots, a_m]$ אז קיים $\psi = \psi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m) \in \Delta$,$\psi$ כך ש-$\varphi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_n)$, $\psi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m)$ סותרות ו-$\mathfrak{C} \models \psi[\bar{c}, a_1, \ldots, a_n]$. מכאן שלכל n, הסדרה $(\bar{c}, b^n_1, \ldots, b^n_m)$ נמצאת ב-$\varphi^{<\frac{1}{n+1}>}$ וגם ב-$\psi^{<\frac{1}{n+1}>}$, ולכן $\varphi^{<\varepsilon>} \cap \psi^{<\varepsilon>} \neq \emptyset$ לכל $\varepsilon > 0$, סתירה לכך ש-(φ, ψ) זוג סותר, ראה 2.7(3).

■

3 יציבות, אי-התפצלות ואי-בחינים

בסעיף הזה נחקור כמה מושגים הקרובים ל- λ-יציבות ולעל-יציבות. הרעיון מאחורי ההגדרות הוא "יציבות עד כדי לקיחת סגור טופולוגי".

הגדרה 3.1 תהי $\mathfrak{C}$ מטרצת.

$\mathfrak{C}$ תיקרא 0^+-יציבה ב-λ (λ-0^+-יציבה) אם לכל $A \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ קיימת $B \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ כך שכל טיפוס מעל A מוגשם בסגור הטופולוגי של B.

נשתמש בחופשיות במשפט הבא המראה שקילות של מספר ניסוחים דומים ליציבות הטופולוגית.

משפט 3.2 תהי $\mathfrak{C}$ מטרצת. התנאים הבאים שקולים

(א) $\mathfrak{C}$ λ-0^+-יציבה

(ב) לכל $A \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ, קיימת $B \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ כך שכל טיפוס מעל A כמעט מוגשם ב- B, ראה הגדרה 2.11.

(ג) אין $A \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ, $\varepsilon > 0$, n וקבוצת טיפוסים$\langle p_i : i < \lambda^+ \rangle$ ב-n משתנים מעל A זרים ב-ε, כלומר $\mathbf{d}_1(p_i, p_j) > \varepsilon$ לכל $i \neq j$.

(ד) לכל $A \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ, $\varepsilon > 0$ ו-n, קיימת $\langle p_i : i < \lambda \rangle$ ε-צפופה בקבוצת הטיפוסים ב-n משתנים מעל A (כלומר, לכל p מעל A ב-n משתנים, קיים $i < \lambda$ כך ש- $\mathbf{d}_1(p, p_i) \leq \varepsilon$)

הוכחה: (א) ←(ב) ברור.

(ב) ←(ג). נניח $\langle p_i : i < \lambda^+ \rangle$ קבוצה של טיפוסים הסותרת את (ג). תהי Bכמו ב-(ב), אז כל p_i מוגשם בה עד כדי $\frac{\varepsilon}{3}$ על ידי $\bar{b}_i$. כעת כיוון שמרחק בין $\bar{b}_i$ ו- $\bar{b}_j$ ל- $i \neq j$ גדול מ-ε (p_i-ים זרים ב-ε), כל ה$\bar{b}_i$-ים זרים, ולכן עוצמת B היא לפחות λ^+, סתירה.

(ג) ←(ד) קל.

(ד) ←(א). תהי $A \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה λ, נגדיר A_n באינדוקציה: $A_0 = A$, A_{n+1} מעוצמה λ מגשימה לכל $i \leq n+1$ קבוצה $\frac{1}{2^{n+2}}$- צפופה במרחב הטיפוסים ב-i משתנים מעל

A (אפשרי לפי (ד)). יהי $B = \bigcup A_n$. שימו לב ש-B בבירור כנדרש ב-(ב), אך אנו רוצים להוכיח יותר. יהי p טיפוס מעל A. נבחר $\langle \bar{b}_n : n < \omega \rangle$ באינדוקציה: $\bar{b}_n \in A_{n+1}$ יגשים את הטיפוס הבא מעל A_n עד כדי $\frac{1}{2^{n+2}}$: $p(\bar{x}) \cup \{\mathbf{d}(\bar{x}, \bar{b}_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n}\}$ (כאשר $\bar{b}_{-1}$ הוא סדרה כלשהי ב-A מאורך מתאים). כעת הסדרה $\langle \bar{b}_n : n < \omega \rangle \subseteq B$ קושי, לכן מתכנסת, וגבולה $\bar{b} \in mcl(B)$ מגשים את p, כנדרש. ■

ניזכר בהגדרה הקלאסית של λ-יציבות ($[Sh:3]$).

הערה 3.3 נזכור שדיאגרמה D נקראת λ-יציבה אם לכל D-מודל M ולכל תת-קבוצה A של M בעוצמה λ, עוצמת קבוצת ה-D-טיפוסים השלמים מעל A היא λ. D נקראת יציבה אם היא λ-יציבה לאיזשהו λ.

הערה 3.4
1. אם $\mathfrak{C}$ λ-יציבה (במובן של D, ראה 3.3), אז היא 0^+-λ-יציבה.
2. אם $\mathfrak{C}$ 0^+-λ-יציבה ו- $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$, אז $\mathfrak{C}$ λ-יציבה במובן של D.

הוכחה:

1. מידי.
2. נזכור: $|mcl(B)| = |B|^{\aleph_0}$.

■

סימון 3.5 נכתוב $\bar{b} \equiv_A \bar{a}$ עבור $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$.

אחד הכלים החשובים ביותר בתורת המודלים ההומוגנית הוא אי-התפצלות שאחת ממטרותיה היא לתפוס את מושג הגדירות של טיפוס מעל קבוצה קטנה. אף שאין לאי-התפצלות כל התכונות היפות של יחס אי-תלות (בניגוד לקרובת משפחתה אי-התפלגות בתורת היציבות הקלאסית), נראה בהמשך שיש למושג הזה חשיבות רבה.

נזכיר את ההגדרה:

הגדרה 3.6 נאמר כי טיפוס $p \in S_D(B)$ לא מתפצל מעל קבוצה A אם לכל $\bar{b}$,$\bar{a}$ ב-B שווי טיפוס מעל A ולכל $\bar{c} \models p$, מתקיים $\bar{c}\bar{a} \equiv_A \bar{c}\bar{b}$.

נשתמש בחופשיות בשקילות הברורה הבאה:

הערה 3.7 p מתפצל מעל A אםם קיים זוג של נוסחות סותרות $(\varphi(\bar{x},\bar{y}),\psi(\bar{x},\bar{y}))$ ו-$\bar{a},\bar{b}$ מאורך $len(\bar{y})$ שווי טיפוס מעל A כך ש- $\varphi(\bar{x},\bar{a}),\psi(\bar{x},\bar{b}) \in p$.

בעקבות ההערה 3.7 נגדיר:

הגדרה 3.8 p ε-מתפצל מעל A אם קיימים (φ,ψ) ו-$\bar{a},\bar{b}$ כמו ב-3.7 כך שהזוג (φ,ψ) סותר ב-ε, ראה הגדרה 2.8.

הערה 3.9 $p \in S_D(B)$ ε-מתפצל מעל A אםם $p^{[\frac{\varepsilon}{2}]}$ מתפצל מעל A.

הוכחה: p מתפצל מעל A אםם יש $\varphi^{[\frac{\varepsilon}{2}]}(x,a),\psi^{[\frac{\varepsilon}{2}]}(x,b)$ כמו ב-3.7 ב-$p^{[\frac{\varepsilon}{2}]}$ אםם יש $\varphi(x,a),\psi(x,b) \in p$ זרים ב-ε. ■

הערה 3.10 טיפוס p מתפצל מעל A אםם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-p ε-מתפצל מעל A.

הוכחה: לפי 3.7. ■

הטענה הבאה בעלת יותר תוכן מההערות הקודמות ותהיה שימושית מאוד בהמשך.

טענה 3.11 אם $\mathfrak{C}$ 0^+-$\aleph_0$-יציבה, $p \in S(B)$ טיפוס מעל תת קבוצה Bשל $\mathfrak{C}$, ו-$\varepsilon > 0$, אז קיימת תת-קבוצה סופית Aשל Bכך ש- $p^{[\varepsilon]}$ לא מתפצל מעל A.

הוכחה: נניח בשלילה $p^{[\varepsilon]}$ מתפצל מעל כל תת קבוצה סופית של התחום שלו (B). נבנה קבוצות סופיות A_n ל- $n < \omega$ והעתקות אלמנטריות F_η ל- $\eta \in {}^{\omega>}2$ כדלקמן:

$(*)$ $A_0 = \emptyset$

$(*)$ $A_{n+1} = A_n \cup \{\bar{a}_n,\bar{b}_n\}$, כאשר קיימות $\psi_n(\bar{x},\bar{y})$,$\varphi_n(\bar{x},\bar{y})$ סותרות כך ש-
$\psi_n(\bar{x},\bar{b}_n)$,$\varphi_n(\bar{x},\bar{a}_n)$ מדגימים התפצלות של $p^{[\varepsilon]}$ מעל A_n, כלומר $\bar{a}_n \equiv_{A_n} \bar{b}_n$,
$\varphi_n(\bar{x},\bar{a}_n),\psi_n(\bar{x},\bar{b}_n) \in p^{[\varepsilon]}$ ו- $\varphi_n^{[\varepsilon]}(\mathfrak{C},\bar{a}_n) \cap \psi_n^{[\varepsilon]}(\mathfrak{C},\bar{b}_n) = \emptyset$

(*) ל- $\eta \in {}^n2$, $F_\eta : A_n \to \mathfrak{C}$ העתקה אלמנטרית

(*) ל- $\eta \in {}^n2$, $F_{\eta^\frown\langle 1\rangle}(\bar{b}_n) = F_{\eta^\frown\langle 0\rangle}(\bar{a}_n)$ ו- $F_{\eta^\frown\langle 0\rangle}$, $F_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$ מרחיבות את F_η.

הבניה ישירה. כעת נסמן עבור $\eta \in {}^\omega 2$, $F_\eta = \bigcup_{n<\omega} F_{\eta\restriction n}$, $p^*_\eta = F_\eta(p)$, $A = \cup\{Rang(F_\eta) : \eta \in {}^{\omega>}2\}$, אז A בת מניה. נבחר p_η המרחיב את p^*_η, $p_\eta \in \mathbf{S}_D(A)$. בבירור $\eta \neq \nu \in {}^\omega 2 \Rightarrow p^{[\varepsilon]}_\eta \cap p^{[\varepsilon]}_\nu = \emptyset$, בסתירה ל- $\aleph_0$-0^+-יציבות לפי 3.2. ■

טענה 3.12 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה. אז

(a) אם $p \in \mathbf{S}_D(A)$ אז קיימת $B \subseteq A$ בת מניה מעליה p לא מתפצל.

(b) D יציבה (במובן של $[Sh:3]$, ראה 3.3)

הוכחה:

(a) לפי 3.11, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $B_\varepsilon \subseteq A$ סופית מעליה p לא ε-מתפצל.

תהי $B = \cup\{B_{1/(n+1)} : n < \omega\}$, אז B היא תת-קבוצה בת מניה של A ולפי 3.10 ומונוטוניות של אי-ε-התפצלות, p לא מתפצל מעל B.

(b) לפי (a) וספירה קלה נקבל $\lambda^{\aleph_0} + \beth_2$ טיפוסים מעל קבוצה בעוצמה λ ($\beth_2 = 2^{2^{\aleph_0}}$ טיפוסים שאינם מתפצלים מעל תת-קבוצה B בת מניה נתונה, $\lambda^{\aleph_0}$ B-ים שונים).

מכאן ש- D λ-יציבה לכל $\lambda = \lambda^{\aleph_0} + \beth_2$, ולכן יציבה.

■

מסקנה 3.13 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה. אז כל סדרת אי-בחינים היא קבוצת אי-בחינים.

הוכחה: לפי יציבות של D. ■

המושג הבא, שהוא מושג הממוצע של סדרת אי-בחינים הוא מרכזי בהקשר שלנו. כמובן, יש דמיון עם טיפוסי ממוצע בתורת מודלים קלאסית, אך שימו לב להבדל חשוב: ייתכנו $\aleph_0$ יוצאי דופן.

הגדרה 3.14 בהינתן סדרת אי-בחינים $\mathbf{I}$ וקבוצה A, טיפוס p ייקרא <u>טיפוס הממוצע</u> של $\mathbf{I}$ מעל A (יסומן ב- $Av(\mathbf{I}, A)$) אם לכל $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$ ו- $\bar{a} \in {}^{\ell g(\bar{y})}A$, מתקיים:
$\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p \Leftrightarrow (\exists^{\aleph_0} \bar{c} \in \mathbf{I})(\mathfrak{C} \models \varphi(\bar{c}, \bar{a})) \Leftrightarrow (|\{\bar{c} \in \mathbf{I} : \mathfrak{C} \models \neg\varphi(\bar{c}, \bar{a})\}| \leq \aleph_0)$.

כמובן, תחת ההנחה של יציבות מתאימה, לזוג סותר נתון ייתכנו רק מספר סופי של יוצאי דופן:

הערה 3.15 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה, יהי $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ זוג של נוסחות סותרות ותהי $\mathbf{I}$ קבוצת אי-בחינים. אזי לכל $\bar{a} \in \mathfrak{C}$ אחת הקבוצות הבאות סופית:

$$\{\bar{c} \in \mathbf{I} \colon \mathfrak{C} \models \varphi(\bar{c}, \bar{a})\} \ (*)$$

או

$$\{\bar{c} \in \mathbf{I} \colon \mathfrak{C} \models \psi(\bar{c}, \bar{a})\} \ (*)$$

הוכחה: בה"כ $\mathbf{I}$ בת מניה.

אם שתי הקבוצות הנ"ל אינסופיות, נוכל ע"י שימוש באי-בחינות ובקומפקטיות למצוא לכל חלוקה של $\mathbf{I}$ לשתי תת קבוצות אינסופיות זרות I_1, I_2 סדרה של פרמטרים $\bar{a}_{I_1, I_2}$ כך ש-

$$\{\bar{c} \in \mathbf{I} \colon \mathfrak{C} \models \varphi(\bar{c}, \bar{a}_{I_1, I_2})\} = I_1 \ (*)$$

וגם

$$\{\bar{c} \in \mathbf{I} \colon \mathfrak{C} \models \psi(\bar{c}, \bar{a}_{I_1, I_2})\} = I_2 \ (*)$$

וכך נקבל רצף של טיפוסים ε-זרים מעל $\mathbf{I}$ כאשר $\varepsilon = \mathbf{d}_1(\varphi, \psi)$, סתירה ל- $\aleph_0$-0^+-יציבות. ■

ניזכר בדרך הקלאסית הבאה לבנות סדרות אי-בחינים

עובדה 3.16 תהי B קבוצה, $\mathbf{I} = \langle \bar{a}_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle$ סדרה המקיימת

1. $tp(\bar{a}_\alpha, B \cup \bigcup_{\beta < \alpha} \bar{a}_\beta)$ לא מתפצל מעל B

2. $tp(\bar{a}_\alpha, B \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \bar{a}_\beta)$ מרחיב את $tp(\bar{a}_\gamma, B \cup \bigcup_{\beta<\gamma} \bar{a}_\beta)$ ל-$\gamma < \alpha$

<u>אזי</u> $\mathbf{I}$ סדרת אי-בחינים מעל B.

טענה 3.17 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ 0^+-$\aleph_0$-יציבה. אז

(a) אם $\mathbf{I}$ קבוצת אי-בחינים לא מניה, $\mathbf{I} \subseteq M$, אז $Av(\mathbf{I}, M) \in \mathbf{S}_D(M)$ מוגדר היטב (כלומר, אוסף הנוסחות המקיימות את הגדרת טיפוס הממוצע הוא טיפוס שלם).

(b) אם M $(D, \aleph_1)$-הומוגני, $p \in \mathbf{S}^m(M)$, אז יש קבוצת אי-בחינים לא מניה $\mathbf{I} \subseteq {}^m M$, כך ש- $p = Av(\mathbf{I}, M)$.

הוכחה:

(a) לזוג סותר נתון (φ, ψ) ייתכנו רק מספר סופי של יוצאי דופן (לפי 3.15). כעת נקח איחוד על מספר מני של זוגות סותרים ונקבל לכל נוסחה מספר בן מניה של יוצאי דופן, כנדרש.

(b) תהי B כמו ב-$3.12(a)$. נבחר $\bar{a}_\alpha \in M$ המגשימים את $p \restriction B \cup \{\bar{a}_\beta : \beta < \alpha\}$ באינדוקציה על $\alpha < \omega_1$. כעת $\mathbf{I} = \langle \bar{a}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ היא סדרת אי-בחינים מעל B לפי 3.16, ולכן קבוצת אי-בחינים לפי 3.13.

נניח $q = Av(\mathbf{I}, M) \neq p$.

עדיין $q \in \mathbf{S}_D(M)$ (לפי (a)). נוכל למצוא $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$, $\psi(\bar{x}, \bar{b}) \in p$ סותרות. אז $u = \{\alpha < \omega_1 : \mathfrak{C} \models \varphi[\bar{a}_\alpha, \bar{b}]\}$ אינסופית, תהי $v \subseteq u$ מעוצמה $\aleph_0$, יהי $\alpha(*)$ כך ש- $v \subseteq \alpha(*) < \omega_1$ ונבחר $\bar{a}'_\beta \in M (\beta \in [\alpha(*), \omega_1)$ המגשימים את

$p \restriction (B \cup \{\bar{a}_i : i < \alpha(*)\} \cup \bar{b} \cup \{\bar{a}'_\gamma : \gamma \in (\alpha(*), \beta)\}$.

נקבל (כמו קודם) סדרת אי-בחינים חדשה

$$\mathbf{I}' = \langle \bar{a}_\beta : \beta < \alpha(*) \rangle \frown \langle \bar{a}'_\beta \in M : \beta \in [\alpha(*), \omega_1) \rangle$$

שאינסוף מאיבריה (הרישא) מקיימים $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ ואילו הסיפא (גם אינסוף איברים) מקיימים $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ (כי בחרנו את $\bar{a}'_\beta$ כך שבפרט יקיימו את הצימצום של p ל-$\bar{b}$), סתירה ל-3.15.

$\blacksquare$

דיון 3.18 : למה לא מספר סופי של יוצאי דופן כמו בלוגיקה מסדר ראשון? אפילו אם הרוב מקיים $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, לכל ε ייתכנו מספר סופי של α-ים כך ש- $\mathfrak{C} \models \psi(\bar{a}_\alpha, \bar{a})$ ו- (φ, ψ) זוג ε-סותר, והמספר הסופי הזה עלול לגדול כאשר ε מתקרב ל- 0.

טענה 3.19 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה. יהי p טיפוס מעל A בת מניה, $A \subseteq B$. אז קיימת A' בת מניה, $A \subseteq A'$ וטיפוס q מעל A' המרחיב את p שיש לו הרחבה יחידה לטיפוס מעל B.

הוכחה: בהינתן $\varepsilon > 0$ ננסה לבנות עץ $\langle p_\eta : \eta \in {}^{\omega}2 \rangle$ של טיפוסים ε-זרים מעל תת-קבוצות בנות מניה של B, $p_{<>} = p$. בגלל $\aleph_0$-0^+-יציבות ניתקע בשלב מסוים, כלומר נקבל טיפוס p_1 מעל קבוצה בת מניה שמרחיב את p ולא ניתן לפצל אותו מעל B לשני טיפוסים ε-זרים. נחזור על הבניה עם p_1 ו- $\frac{\varepsilon}{2}$, נקבל p_2, וכך הלאה. בסוף $p_\omega = \bigcup p_i$ כנדרש (מקומפקטיות, זהו טיפוס). $\blacksquare$

ההגדרה הבאה מכלילה אחד מהאספקטים של על-יציבות קלאסית (איחוד של סדרה עולה של מודלים μ-רווים הוא גם μ-רווי) להקשר הטופולוגי. תכונה זו היא בדיוק מה שנצטרך כדי להראות קיום של מודלים הומוגניים בכל עוצמה לא בת מניה.

הגדרה 3.20 $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ תיקרא $(\mu, *)$-על-יציבה אם בהינתן $\langle M_i : i < \omega \rangle$ סדרה עולה של מודלים (D, μ)-הומוגניים ($M_i \in K_1^c$, כמובן) אז $mcl(\bigcup_{i<\omega} M_i)$ גם (D, μ)-הומוגני.

כמו בתורת מודלים קלאסית, גם כאן על-יציבות נובעת מ-$\aleph_0$-יציבות, אך ההוכחה תצטרך להתחשב בעובדה שאין לנו אי-התפצלות אמיתית של טיפוסים מעל קבוצות סופיות. לכן נשלב בין אי-התפצלות מעל קבוצה בת מניה ואי-התפצלות "עד כדי ε".

משפט 3.21 נניח $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה. אז $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $(\mu^+, *)$-על-יציבה לכל $\mu \geq \aleph_0$.

הוכחה: תהי $\langle M_n : n < \omega \rangle$ סדרה עולה של מודלים (D, μ^+)-הומוגניים.

נניח $p \in \mathbf{S}(A)$, $A \subseteq \overline{\bigcup_{n<\omega} M_n}$ מעוצמה $\leq \mu$, p לא מוגשם ב- $M_\omega = \overline{\bigcup M_n}$.

על ידי הגדלת A ותוך שימוש ב- $\aleph_0$-0^+-יציבות בה"כ ל-p הרחבה יחידה ב- $\mathbf{S}_D(M_\omega)$, נקרא לה q (ראה 3.19).

לפי 2.13 בה"כ יש $\varepsilon > 0$, $p^{[\varepsilon]}$ מושמט ב-M_ω. כמו כן בה"כ $A \subseteq mcl(A \cap \bigcup_{n<\omega} M_n)$, לכן לפי 2.14 בה"כ $A \subseteq \bigcup_{i<\omega} M_n$ [כי p נקבע ע"י צימצומו ל-$A \cap (\bigcup_{i<\omega} M_n)$].

כעת לפי 3.11 יש $B \subseteq A$ סופית שמעליה $q \restriction \cup\{M_n : n < \omega\}$ לא $(\varepsilon/5)$-מתפצל.

יהי $n < \omega$ כך ש- $B \subseteq M_n$. בה"כ $q \restriction M_n$ לא מתפצל מעל $A \cap M_n$ (ע"י הגדלת A ו- 3.12(a)).

יהי $q_n = q \restriction M_n$ ו- $A_n = M_n \cap A$. משום ש- M_n (D, μ^+)-הומוגני, יש סדרת אי-בחינים לא מניה $\mathbf{I}_n$ ב- M_n המקיימת $Av(\mathbf{I}_n, M_n) = q_n$, כל זה לפי 3.17; בה"כ $|\mathbf{I}_n| = \mu^+$, ו- $\mathbf{I}_n$ אי-בחינה מעל A (לא רק A_n!), ניתן להניח זאת כי קיימת תת קבוצה בת מניה $\mathbf{I}_n^0$ של $\mathbf{I}_n$ כך שלכל $\bar{a} \in A$, $tp(\bar{a}, \mathbf{I}_n)$ לא מתפצל מעל $\mathbf{I}_n^0$, וכעת $\mathbf{I}_n \setminus \mathbf{I}_n^0$ אי בחינה מעל A, כנדרש. כעת, כיוון שאיברי $\mathbf{I}_n$ לא מגשימים את $p^{[\varepsilon]}$, קיימת נוסחה $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ (למעשה $\bar{x}$ הוא יחידון) וקיימת $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ כך ש- $\mathbf{d}_1(\varphi, \psi) > \varepsilon$ ו- $\forall \bar{c} \in \mathbf{I}_n, \psi(\bar{c}, \bar{a})$.

ל- $k < \omega$ יהיו $\bar{c}_k \in \mathbf{I}_n$ שונים. נמצא $\bar{a}' \in M_n$ שמגשים $tp(\bar{a}, A_n \cup B \cup \cup\{\bar{c}_k : k < \omega\})$. אז לפי סעיף (a) של 3.17 אנו יודעים שלכל פרט למספר בן מניה של $\bar{c} \in \mathbf{I}_n$ מתקיים $\mathfrak{C} \models \psi[\bar{c}, \bar{a}']$ (כי זה קורה ל- $\{\bar{c}_k : k < \omega\} \subseteq I_n$), לכן $\psi(\bar{x}, \bar{a}') \in q_n \subseteq q$.

כעת נקבל: קיים $m > n$, $\bar{a} \in M_m$, לכן $(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), \psi(\bar{x}, \bar{a}'))$ מעידים על כך ש- $q \restriction \cup\{M_\ell : \ell < \omega\}$ ε-מתפצל מעל B, לכן כך גם q, וזו סתירה לבחירת B.

■

4 צפיפות של טיפוסים מבודדים בחזק

בסעיף הזה נטפל בגרסאות טופולוגיות של בידוד של טיפוסים ונוכיח שבהקשר ה-0^+-$\aleph_0$-יציב, הטיפוסים המבודדים בחזק (שזהו המושג הנכון של טיפוס מבודד שלוקח בחשבון את הטופולוגיה) צפופים.

הגדרה 4.1 נאמר כי $M \in K_1$ $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$, טיפוס מעל $A \subseteq M$, אם לא קיימים $\zeta < \varepsilon$ ו-$\bar{b} \in M$ כך ש- $\bar{b}$ מגשים את $p^{[\zeta]}$. נאמר כי M $(<\varepsilon)$-מגשים את p אם הוא לא $(<\varepsilon)$-משמיט אותו, כלומר ε-סביבה פתוחה של p חותכת את M.

הגדרה 4.2 1. נאמר כי נוסחה $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ מעין (ξ_1, ξ_2)-מבודדת טיפוס $p(\bar{x})$ אם $\psi^{<\xi_2>}(\bar{x}, \bar{b}) \models p^{[\xi_1]}(\bar{x})$ (שימו לב למושגים שונים של קירוב בשני הצדדים!).

2. נאמר כי קבוצה A היא מעין $(<\varepsilon)$-תומך עבור $p(\bar{x})$ (או A מעין $(<\varepsilon)$-תומכת ב-$p(\bar{x})$) אם קיימת $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ ספיקה, $\bar{b} \subseteq A$ ו-ζ_1, ζ_2 חיוביים כך ש- $\psi^{<\zeta_1>}(\bar{x}, \bar{b}) \models p^{[\varepsilon-\zeta_2]}(\bar{x})$, כלומר $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ מעין $(\varepsilon - \zeta_2, \zeta_1)$-מבודדת את $p(\bar{x})$.

3. נאמר כי קבוצה A ממש $(<\varepsilon)$-משמיטה את $p(\bar{x})$ אם היא לא מעין $(<\varepsilon)$-תומכת ב- $p(\bar{x})$.

טענה 4.3 1. אם $M \in K_1^c$ $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$, $p(\bar{x}) \in \mathbf{S}^m(A)$, $A \subseteq M$, אז M ממש $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$.

2. אם $p(\bar{x})$ טיפוס מעל M ו-M ממש $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$, אז M $(<\varepsilon)$-משמיט את p.

הוכחה:

1. נניח M $(<\varepsilon)$-תומך ב- $p(\bar{x})$, כלומר קיימים $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ מעל M ו- $\zeta_1, \zeta_2 > 0$ כך ש- $\psi^{<\zeta_1>}(\bar{x}, \bar{b}) \models p^{[\varepsilon-\zeta_2]}(\bar{x})$. $\mathfrak{C} \models \exists x \psi(\bar{x}, \bar{b})$, $M \in K_1^c$, לכן יש $\bar{a} \in M$, $\mathfrak{C} \models \psi^{<\zeta_1>}(\bar{a}, \bar{b})$ (ראה 2.6), לכן $p^{[\varepsilon-\zeta_2]}(\bar{a})$ מתקיים, ונקבל p $(<\varepsilon)$-מוגשם ב- M.

2. קל: נניח $\bar a \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar x)$ ל- $\zeta > 0$, $\bar a \in M$. אז הנוסחה "$\bar x = \bar a$" היא מעל M ומעין $(\varepsilon-\zeta_2,\zeta_1)$-מבודדת את $p(\bar x)$ ל- $\zeta_2=\zeta_1=\frac{\zeta}{3}$.

■

הגדרה 4.4 1. נאמר כי נוסחה $\varphi(\bar x,\bar b)$ (ε,ζ)-מבודדת בחזק מעל A אם

(a) $\bar b \subseteq A$

(b) אם $\varphi(\bar x,\bar b)\in p\in \mathbf{S}_D^{\ell g(\bar x)}(A)$ אז $\varphi(\bar x,\bar b)$ מעין מבודדת את p.

2. נאמר כי $\varphi(\bar x,\bar b)$ (ε,ζ)-מבודדת בחזק טיפוס p אם סעיף (b) לעיל מתקיים ל- φ ו- p (כלומר, $\varphi(\bar x,\bar b)\in p$ ו- $\varphi(\bar x,\bar b)$ מעין מבודדת את p).

3. נאמר כי $p\in S_D^m(A)$ הוא (ε,ζ)-מבודד בחזק אם קיימת φ ש- (ε,ζ)-מבודדת אותו בחזק.

4. ε-מבודד בחזק פירושו (ε,ζ)-מבודד בחזק ל-$0<\zeta$ כלשהו.

5. נאמר כי $p\in \mathbf{S}_D^m(A)$ מבודד בחזק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\varphi(\bar x,\bar a)\in p$ וקיים $0<\zeta$ כך ש- $\varphi(\bar x,\bar a)$ (ε,ζ)-מבודדת p בחזק (כלומר, p ε-מבודד בחזק לכל $\varepsilon>0$).

טענה 4.5 נניח

(a) $p\in \mathbf{S}_D^m(A)$ או רק p הוא m-טיפוס סגור תחת גימום.

(b) $\psi(\bar x,\bar b)\in p$.

(c) $\varepsilon>0$ ו- $\zeta\geq 0$.

<u>אז</u> אחד מהדברים הבאים קורה:

(α) קיים זוג $(\psi_1(\bar{x},\bar{y}),\psi_2(\bar{x},\bar{y}))$ של נוסחות וסדרה $\bar{b}^*$ מ- A כך ש- $\bar{b}\triangleleft\bar{b}^*$, $\ell g(\bar{b}^*)=\ell g(\bar{y})$ כך ש- $\psi(\bar{x},\bar{b})\wedge\psi_1(x,\bar{b}^*)$,$\psi^{<\zeta>}(\bar{x},\bar{b})\wedge\psi_2(\bar{x},\bar{b}^*)$ ε-סותרות (ושתיהן ספיקות, כמובן), לכן אין $\bar{a}$ כך ש- $\mathfrak{C}\models(\exists\bar{x})(\mathbf{d}(\bar{x},\bar{a})\leq\varepsilon/2\wedge\psi(\bar{x},\bar{b})\wedge\psi_1(\bar{x},\bar{b}^*))$ ו- $\mathfrak{C}\models(\exists\bar{x})[\mathbf{d}(\bar{x},\bar{a})\leq\varepsilon/2\wedge\psi^{<\zeta>}(\bar{x},\bar{b})\wedge\psi_2(\bar{x},\bar{b}^*)]$

(β) לכל $\bar{a}'$ כך ש- $\mathfrak{C}\models\psi^{<\zeta>}[\bar{a}',\bar{b}]$ יש סדרה $\bar{a}''$ המגשימה את p כך ש- $\mathbf{d}(\bar{a}',\bar{a}'')\leq\varepsilon$ (כלומר $\psi(x,\bar{b})$ (ε,ζ)-מבודדת בחזק את p, ראה הגדרה 4.4).

הוכחה: נניח ש-(β) נכשל, $\bar{a}'$ מדגים זאת. אז לכל $\bar{a}''$ המגשים את p מתקיים $\mathbf{d}(\bar{a}'',\bar{a}')>\varepsilon$.

יהי $q(\bar{y})=tp(\bar{a}',A)$, אז $\psi^{<\zeta>}(\bar{y},\bar{b})\in q$ (כי $\mathfrak{C}\models\psi^{<\zeta>}(\bar{a}',\bar{b})$).

יהי $r(\bar{x},\bar{y})=p(\bar{x})\cup q(\bar{y})\cup\{\mathbf{d}(\bar{x},\bar{y})\leq\varepsilon\}$. אם $r(\bar{x},\bar{y})$ ספיק, כך גם $r(\bar{x},\bar{a}')$, וכל $\bar{a}''$ המגשים את $r(\bar{x},\bar{a}')$ הוא כנדרש ב- (β), בסתירה להנחתנו.

לכן $r(\bar{x},\bar{y})$ לא ספיק. כיוון ש- $(\mathfrak{C},\mathbf{d})$ קומפקטית ו- $p(\bar{x})$, $q(\bar{y})$ סגורים תחת גימום, $\psi(\bar{x},\bar{b})\in p(\bar{x})$,$\psi^{<\zeta>}(\bar{y},\bar{b})\in q(\bar{y})$, ע"י הוספת משתני סרק, יש $\bar{b}^*\subseteq A$, $\bar{b}\triangleleft\bar{b}^*$ ו- $\psi_1(\bar{x},\bar{b}^*)\in p(\bar{x})$, $\psi_2(\bar{y},\bar{b}^*)\in q(\bar{y})$ כך שהקבוצה הבאה אינה ספיקה:

$\{\psi(\bar{x},\bar{b})\wedge\psi_1(\bar{x},\bar{b}^*),\psi^{<\zeta>}(\bar{y},\bar{b})\wedge\psi_2(\bar{y},\bar{b}^*),\mathbf{d}(\bar{x},\bar{y})\leq\varepsilon\}$.

קיבלנו את (α), כנדרש. ∎

משפטון 4.6 (למת הבידוד) [$(\mathfrak{C},\mathbf{d})$ $\aleph_0$-0^+-יציבה]

1. אם $A\subseteq\bar{a}$, $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ ספיקה ו- $\varepsilon>0$ <u>אז</u> ניתן למצוא $\varphi_1(\bar{x},\bar{a}_1)$ ו- $\zeta>0$ כך ש- $\bar{a}_1\subseteq A$ ו- $\varphi(\bar{x},\bar{a})\wedge\varphi_1(\bar{x},\bar{a}_1)$ (ε,ζ)-מבודדת בחזק מעל A, ראה הגדרה 4.4.

2. כנ"ל אם נשמיט את ζ ונקבל ε-מבודדת בחזק.

3. קבוצת הטיפוסים $p\in S^m_D(A)$ המבודדים בחזק צפופה.

הוכחה: חלק (2) הוא חזרה על חלק (1). חלק (3) נובע מ- (1) ע"י בחירת $\varphi_n(\bar{x},\bar{a}_n)$ כך ש- $\varphi(\bar{x},\bar{a})\wedge\varphi_1(\bar{x},\bar{a}_1)\wedge\ldots\wedge\varphi_n(\bar{x},\bar{a}_n)$ היא $\frac{1}{n+1}$-מבודדת בחזק מעל A (הפעלה חוזרת של (2)) וקומפקטיות של $\mathfrak{C}$. לכן נתרכז בהוכחת (1) .

נבחר $\zeta_n > 0$ ל- $n < \omega$ כך ש- $\Sigma\{\zeta_n : n < \omega\} \le \varepsilon/5$

נניח $\psi(\bar{x},\bar{b})$, $\bar{b} \subseteq A$ דוגמה נגדית ל- (1). נבחר $\langle \psi_\eta(\bar{x},\bar{a}_\eta) : \eta \in {}^n2\rangle$ באינדוקציה על n כך ש-

$\boxtimes$

(a) $\bar{a}_\eta \subseteq A$

(b) $\psi_\eta(\bar{x},\bar{a}_\eta)$ ספיקה

(c) $\psi_{<>}(\bar{x},\bar{a}_{<>}) = \psi(\bar{x},\bar{b})$

(d) אם $\nu^\frown\langle 0\rangle, \nu^\frown\langle 1\rangle \in {}^n2$ אז $\psi_{\nu^\frown\langle 0\rangle}(\bar{x},\bar{a}_{\nu^\frown\langle 0\rangle})$, $\psi_{\nu^\frown\langle 1\rangle}(\bar{x},\bar{a}_{\nu^\frown\langle 1\rangle})$ הן ε-סותרות.

(e) אם $\eta = \nu^\frown\langle 0\rangle \in {}^n2$ אז $\psi_\eta(\bar{x},\bar{a}_\eta) \models \psi_\nu(\bar{x},\bar{a}_\nu)$

(f) אם $\eta = \nu^\frown\langle 1\rangle \in {}^n2$ אז $\psi_\eta(\bar{x},\bar{a}_\eta) \models \psi_\nu^{<\zeta_n>}(\bar{x},\bar{a}_\nu)$.

לפי 4.5 אין בעיה לבצע את הבחירה, כלומר בהינתן $\psi_\nu(\bar{x},\bar{a}_\nu)$, סעיף (β) של 4.5 לא יכול להתקיים (עם $\psi_\nu, \bar{a}_\nu$ כאן במקום $\psi, \bar{b}$ שם), כיוון ש- $\psi(\bar{x},\bar{a})$ היא דוגמה נג-דית למסקנה של המשפטון. לכן סעיף (α) של 4.5 מתקיים, מה שמאפשר לבחור $\psi_{\nu^\frown<\ell>}(\bar{x},\bar{a}_{\nu^\frown<\ell>})$ ל- $\ell = 0,1$.

כעת יהיו $\xi_n = \Sigma\{\zeta_m : m \in [n,\omega)\}$, אז

$(*)$ אם $n(1) < n(2) < \omega$ ו- $\eta_\ell \in {}^{n(\ell)}2$ ל- $\ell = 1,2$ ו- $\eta_1 \triangleleft \eta_2$ אז $\psi_{\eta_2}^{<\xi_{n(2)}>}(\bar{x},\bar{a}_{\eta_2}) \models \psi_{\eta_1}^{<\xi_{n(1)}>}(\bar{x},\bar{a}_{\eta_1})$ [למה? מ- 2.5 ו-(e) + (f) של $\boxtimes$ נק-בל $\psi_{\eta_2} \models \psi_{\eta_1}^{<\xi_{n(1),n(2)}>}$, כאשר $\xi_{n(1),n(2)} = \Sigma\{\zeta_m \colon m \in [n(1),n(2))\}$ ונשתמש שוב ב-2.5.]

כעת תהי $C = \cup\{\bar{a}_\eta : \eta \in {}^{\omega>}2\}$.

$(*)$ ל- $\eta \in {}^\omega 2$, הקבוצה

$$\{\psi_{\eta\restriction n}^{<\xi_n>}(\bar{x},\bar{a}_{\eta\restriction n}) : n < \omega\}$$

ספיקה, לכן ניתנת להרחבה לאיזשהו $p_\eta \in \mathbf{S}(C)$

(*) **אם** ${}^{\omega}2 \in \eta_\ell \vartriangleleft \nu^\frown\langle\ell\rangle$ **ל-** $\ell = 0,1$, **אז** $p^{[\varepsilon/5]}_{\eta_1}(\bar{x}) \cup p^{[\varepsilon/5]}_{\eta_2}(\bar{x})$ **ספיקה ולפי** $(d)\boxtimes$
ובחירת ζ_n, **סתירה ל-** 0^+-$\aleph_0$-**יציבות**.

$\blacksquare$

5 מודלים של ארנפויכט-מוסטובסקי

בסעיף הזה נתאים את שיטת הבניה של מודלים ארנפויכט-מוסטובסקי להקשר שלנו. ניזכר: מתחילים מ- $\mathfrak{C}$ בעל מילון τ, מעשירים את השפה ע"י פונקציות סקולם, מקבלים מבנה $\mathfrak{C}'$ בעל מילון τ'. בהינתן סדרת אי-בחינים $\mathbf{I} = \langle a_i : i < \lambda \rangle$ ב-$\mathfrak{C}'$, ניתן להתבונן ב- $N' = EM(\mathbf{I})$, מודל ארנפויכט-מוסטובסקי עם שלד $\mathbf{I}$, שזהו פשוט סגור סקולם של $\mathbf{I}$ בתוך $\mathfrak{C}'$. כעת $N = EM_\tau(\mathbf{I})$ שהוא הצימצום של N' ל-τ, הינו תת מודל אלמנטרי של $\mathfrak{C}$ (כי N' אלמנטרי ב- $\mathfrak{C}'$ בגלל פונקציות סקולם).

$\mathbf{I}$ אי בחינה, לכן במקום לדבר על $\mathbf{I}$ מספיק "לזכור" רק את הטיפוס, או את הדיאגרמה שלה.

הגדרה 5.1 1. בהינתן סדרת אי-בחינים $\mathbf{I}$, הדיאגרמה שלה $\Phi(\mathbf{I})$ היא אוסף של כל הטיפוסים של סדרות עולות סופיות של איברים מתוכה, כלומר

$\Phi(\mathbf{I}) = \{tp(a_0...a_{m-1}) : m > 0\}$ (ומאי-בחינות אלה כל ה-m-טיפוסים).

2. נקרא לאוסף טיפוסים Φ דיאגרמה (Φ מעל $\emptyset$), $\Phi = \{p_1, ..., p_m, ...\}$, p_m טיפוס ב-m משתנים) אם לכל $m_1 < m_2$, צמצומו של p_{m_2} לכל תת סדרה (עולה) של משתנים באורך m_1, נותן את p_{m_1} (כלומר, יש התאמה בין ה-p_m-ים).

3. נאמר שדיאגרמה Φ נאותה ל- $\mathfrak{C}$ או ל- K_1^c אם קיימת ב- $\mathfrak{C}$ סדרת אי-בחינים $\mathbf{I}$ בעלת דיאגרמה Φ.

למילון τ^* עם פונקציות סקולם ו- τ^*-דיאגרמה של אי-בחינים Φ, נסמן לכל טיפוס סדר I, את מודל ארנפויכט-מוסטובסקי המתאים, EM-מודל בעל שלד מטיפוס סדר I שהדיאגרמה שלו היא Φ (τ^*-סגור סקולם של סדרה $\langle a_i : i \in I\rangle$) ע"י $EM(I, \Phi)$. (כמובן, יחיד עד כדי איזומורפיזם). נסמן ב- $EM_{\tau_0}(I, \Phi)$ את הצימצום של $EM(I, \Phi)$ למילון. $\tau_0 \subseteq \tau^*$.

לכל τ^* עם פונקציות סקולם המרחיב את τ, לכל Φ,τ^*-דיאגרמה של אי-בחינים (ב $\mathfrak{C}$ מועשר ל- τ^*), ולכל סדר I, ניתן לחשוב על $EM_\tau(I, \Phi)$ בתור תת מודל אלמנטרי של $\mathfrak{C}$, כלומר $\mathfrak{C}$ $EM_\tau(I, \Phi) \prec_{\mathbb{L}(\tau(\mathfrak{C}))}$, ולכן $\overline{EM_\tau(I, \Phi)} \in K_1^c$.

טענה 5.2 תהי $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ מטרצת, τ המילון של $\mathfrak{C}$,$|\tau| \leq \aleph_0$,$\tau' \supseteq \tau$,τ' עם פונקציות סקולם.

(1) קיים τ^* המרחיב את τ',$|\tau^*| = 2^{\aleph_0}$ וקיימת τ^*-תבנית Φ^* כך שלכל סדר סופי J, $EM_\tau(J, \Phi^*)$ הוא $(D, \aleph_1)$-הומוגני.

(2) אם $\mathfrak{C}$ $(\aleph_1, *)$-על-יציבה, אז Φ^* כמו ב- (1) עובדת לכל סדר טוב J לאחר לקיחת הסגור הטופולוגי, כלומר לכל מונה λ, $mcl(EM_\tau(\lambda, \Phi^*))$ שהוא ב-K_1^c הינו $(D, \aleph_1)$-הומוגני.

(3) אם $\mathfrak{C}$ ω-0^+-יציבה, אז ניתן לבחור τ^* ב- (1) ו- (2) מעוצמה $\aleph_1$.

הוכחה:

(1) נבחר ל-$i < \aleph_1$, τ_i ו- Φ_i,סדרות עולות ורציפות, $|\tau_i| = 2^{\aleph_0}$ עם פונקציות סקולם המרחיב את τ' , כך שלכל τ_i-טיפוס p מעל תת-קבוצה סופית של השלד של EM-מודל בעל תבנית Φ_i, נאמר $a_1, \ldots, a_n$, יש סימן פונקציה f_p ב- τ_{i+1} כך ש- $f_p(a_1, \ldots, a_n)$ מגשים את p.

כעת תהי $\Phi^* = \bigcup_{i<\aleph_1} \Phi_i$ ונסמן $M = EM_\tau(J, \Phi^*)$ לאיזשהו J סופי. נבחר $A \subseteq M$ מניה, $p \in S(A)$. כיוון ש- A מניה, ניתן לראות אותה כתת-קבוצה של $EM(J, \Phi_i)$ ל- i מסוים. p טיפוס מעל שלד סופי, ולכן מוגשם ב- $EM(J, \Phi_{i+1})$, לכן ב- M, כנדרש.

(2) באינדוקציה על $\lambda = |J|$.

ראשית נשים לב:

$(*)$ לסדרה עולה של סדרים קוויים J_i,$\bigcup_i EM(J_i, \Phi)$ שווה ל- $EM(\bigcup_i J_i, \Phi)$ (לאיברי $EM(J, \Phi)$ אופי סופי, כלומר כל איבר כנ"ל משתמש במספר סופי של איברי השלד J).

כעת נשתמש בהנחת האינדוקציה. תהי $\lambda = \bigcup_{i<cf(\lambda)} \lambda_i$ כאשר $\lambda_i < \lambda$. אם $cf(\lambda) > \aleph_0$, אין מה להוכיח (בגלל $(*)$ ו-2.14). אחרת (אם $cf(\lambda) = \aleph_0$), נשתמש בהנחת האינדוקציה והגדרת על-יציבות טופולוגית.

(3) יהי J_n סדר חלקי עם n איברים. יהי τ^* כמו ב-(1). נבחר באינדוקציה על $i < \omega_1$ $\tau_i \subseteq \tau^*$ סדרה עולה ורציפה של מילונים בני מניה סגורים תחת פונקציות סקולם,

וסדרה עולה ורציפה של תבניות Φ_i כך שכל טיפוס מעל $EM(J_n, \Phi_i)$ כמעט מוגשם ב-$EM(J_n, \Phi_{i+1})$: נבחר קבוצה בת מניה B שכמעט מגשימה כל טיפוס מעל $EM(J_n, \Phi_i)$, ולכל p כנ"ל ולכל κ קיימת $f_{p,\kappa} \in \Phi_{i+1}$ כך ש- $f_{p,\kappa}(\bar{a})$ $\frac{1}{k}$-קרוב להגשמת φ לכל $\varphi \in p$.

■

נקשר בין קטגוריות למושג החדש של $\aleph_0$-יציבות. הוכחת המשפט הבא סטנדרטית כפי שמופיעה בכל ספר על יציבות (למעשה, על פי השיטה של מורלי):

משפט 5.3 אם $\mathfrak{C}$ קטגורית ב-λ ל-$\aleph_0 < \lambda$, אז $\mathfrak{C}$ $\aleph_0$-0^+-יציבה.

הוכחה: יהי $\tau = \tau(K)$, ונסמן ב-τ' את τ מועשר ע"י פונקציות סקולם. תהי Φ תבנית ארנפויכט-מוסטובסקי נאותה עבור $\mathfrak{K}$. כמובן, τ' מני.

לפני שניגש להוכחת המשפט, נוכיח את הטענה הבאה:

טענה 5.4 תחת ההנחות הנ"ל, תהי I קבוצה סדורה היטב, $M_0 = \overline{EM_\tau(I, \Phi)}$, $A \subseteq M_0$ בת מניה, $\varepsilon > 0$. אזי כל קבוצה ε-זרה $\mathcal{P}$ של טיפוסים מ-$\mathbf{S}_D(A)$, אם $\mathcal{P}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-מוגשמת ב-M_0 אז היא בת מניה (נבהיר: ההנחה היא ש- $p_1^{[\varepsilon]} \cup p_2^{[\varepsilon]} \Leftarrow p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ בעלת סתירה, ולכל $p \in \mathcal{P}$, $p^{[\frac{\varepsilon}{2}]}$ מוגשם ב- M_0, והמסקנה היא ש- $\mathcal{P}$ בת מניה).

הוכחה: אם לא, יהיו $\langle p_i : i < \omega_1 \rangle$ טיפוסים ε-זרים מעל A, $p_i^{[\frac{\varepsilon}{2}]}$ מוגשם ב- M_0 ע"י $\bar{b}_i$. נבחר $\bar{b}_i^0 \in EM(I, \Phi)$, $\mathbf{d}(\bar{b}_i^0, \bar{b}_i) \leq \frac{\varepsilon}{100}$. בה"כ $A = EM(J, \Phi)$ עבור $J \subseteq I$, $|J| \leq \aleph_0$. כיוון ש- J סדורה היטב, לפי הטיעון הסטנדרטי, יש מספר לא מני של b_i^0-ים המגשימים אותו טיפוס מעל A, אבל $b_i^0 \models p_i^{[\varepsilon]}$ ו- $p_i^{[\varepsilon]}, p_j^{[\varepsilon]}$ סותרים עבור $i \neq j$, סתירה. ■

נחזור להוכחת המשפט (5.3). נניח $\mathfrak{C}$ אינה ω-0^+-יציבה. אז קיימת $A \subseteq \mathfrak{C}$ מניה ו- $\langle p_i : i < \omega_1 \rangle$, טיפוסים ε-זרים מעל A לאיזשהו $\varepsilon > 0$ (ראה 3.2). יהי λ לא מני כך ש- $\mathfrak{C}$ קטגורי ב-λ. כעת נפעיל את הטיעון הרגיל: נבחר $M_1 \in K_1^c$ מצפיפות λ שמכיל את A ו- $\langle b_i : i < \omega_1 \rangle$ הגשמות של $\langle p_i : i < \omega_1 \rangle$, ומאידך נתבונן ב-$M_0 = \overline{EM(\lambda, \Phi)}$. נפעיל $f : M_1 \to M_0$ איזומורפיזם, נקבל ש-$\langle f(b_i) : i < \omega_1 \rangle$ סותרים את 5.4. ■

מסקנה 5.5 תהי $\mathfrak{C}$ קטגורית. אז ב-K_1^c יש מודל $(D, \aleph_1)$-הומוגני מצפיפות λ לכל $\lambda > \aleph_0$.

הוכחה: לפי 5.3, $\mathfrak{C}$ $\aleph_0$-0^+-יציבה, ולכן גם $(\aleph_1, *)$-יציבה לפי 3.21. כעת נפעיל את 5.2(2) ו-(3). ■

6 חד מימדיות

המושג הבא נחקר ב- $[Sh:3]$, אך לא הוגדר שם במפורש:

הגדרה 6.1 דיאגרמה סופית (טובה) D תיקרא <u>חד-מימדית</u> אם קיים λ סדיר ואין מודל (D,λ)-הומוגני ב-K שאינו λ^+-הומוגני מעוצמה $\geq \lambda^+$.

שלח למעשה מוכיח ב- $[Sh:3]$ (ראה סעיף 6 של $[Sh:3]$) את המשפט הבא:

משפט 6.2 נניח D יציבה. אז התנאים הבאים שקולים:

1. D אינה חד-מימדית.
2. יש מונה λ ומודל M מעצמה $\leq \lambda$, M $(D,\aleph_1)$-הומוגני אך לא (D,λ)-הומוגני.
3. יש λ סדיר כך שיש מודלים (D,λ)-הומוגניים לא (D,λ^+)-הומוגניים מעצמות גדולות כרצוננו.
4. לכל $\mu > \lambda$ סדירים גדולים מספיק, יש מודל (D,λ)-הומוגני M ו-
$\langle a_i : i < \mu\rangle$,$\langle b_i : i < \lambda\rangle$ קבוצות אי-בחינים הדדית ב-M כך ש- $\langle b_i : i < \lambda\rangle$ היא קבוצת אי-בחינים מירבית ב-M, כלומר לא ניתנת להרחבה ב-M.

הערה 6.3 1. נזכור (ראה 3.14): לקבוצת אי-בחינים $\mathbf{I} \subseteq \mathfrak{C}$ מעוצמה $\aleph_0 + |\tau_{\mathfrak{C}}| <$ וקבוצה $A \subseteq \mathfrak{C}$, מגדירים

$$Av(\mathbf{I},A) = \{\varphi(\bar{x},\bar{a}) : \quad \bar{a} \in A, \exists^{\aleph_0}\bar{b} \in \mathbf{I}\ \varphi(\bar{b},\bar{a})\}.$$

וזהו <u>טיפוס הממוצע</u> של $\mathbf{I}$ מעל A.

2. ל-$\mathfrak{C}$ $\aleph_0$-0^+-יציבה, לכל $\mathbf{I}$ אי-בחינה, $|\mathbf{I}| > \aleph_0$ וקבוצה A, $Av(\mathbf{I},A)$ הוא טיפוס שלם (ראה 3.17).

3. תהי $\mathbf{I} = \langle \bar{a}_i : i < \alpha \rangle$, כאשר $\langle \bar{a}_i : i \leq \alpha \rangle$ קבוצת אי-בחינים. אז $\bar{a}_\alpha \models Av(\mathbf{I}, \cup\mathbf{I})$.

4. תהי $\mathbf{I}$ אי-בחינה, $\langle \bar{a}_i : i < \alpha \rangle = \mathbf{I}$ ויהי $\bar{a}_\alpha \models Av(\mathbf{I}, \cup\mathbf{I})$. אז $\langle \bar{a}_i : i \leq \alpha \rangle$ אי-בחינה.

5. נובע מ- $(3) + (4)$ כי $\mathbf{I} = \langle \bar{a}_i : i < \alpha \rangle \subseteq M$ קבוצת אי-בחינים מירבית ב- M אםם $Av(\mathbf{I}, \cup\mathbf{I})$ מושמט ב- M.

6. $\varphi(x, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_n}) \in Av(\mathbf{I}, \cup\mathbf{I})$ עבור $\mathbf{I} = \langle \bar{a}_i : i < \delta \rangle$ (δ-סודר גבולי) אםם $\bar{a}_j \models \varphi(x, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_n})$ לכל/לאיזשהו $j \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$.

הגדרה 6.4 כמובן, נאמר שמטרצת $\mathfrak{C}$ היא חד-מימדית אם הדיאגרמה שלה D חד-מימדית.

משפט 6.5 תהי $(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ מטרצת , $\tau(\mathfrak{C})$ בן מניה, $\mathfrak{C}$ קטגורית ב- $\lambda > \aleph_0, \lambda$. אז $\mathfrak{C}$ חד-מימדית.

הוכחה: אם לא, לפי המשפט 6.2 נוכל לבחור מונים סדירים $0 < \theta_1 << \theta_2$ ו-M, $M \in K_1^c$, $|M| = \theta_2$, M (D, θ_1)-הומוגני, $\langle a_i : i < \theta_2 \rangle, \langle b_i : i < \theta_1 \rangle$ אי-בחינות הדדית, $\langle a_i : i < \theta_1 \rangle$ לא ניתנת להרחבה ב-M, לכן (נסמן $\mathbf{I} = \langle a_i : i < \theta_2 \rangle$, $\mathbf{J} = \langle b_i : i < \theta_1 \rangle$) $Av(\mathbf{J}, \cup\mathbf{J})$ מושמט ב-M.

נעשיר את השפה ע"י סימן יחס P עבור $\mathbf{J}^M$ ופונקציות סקולם, נקרא למילון החדש τ'. תהי $T' = Th_{\tau'}(M')$ (כאשר M' הוא M בשפה המורחבת).

נשים לב:

$\circledast_0$ T' גוררת "P היא τ-קבוצת אי-בחינים", כלומר לכל τ-נוסחה, T' גוררת שכל שתי סדרות מ- P מתנהגות בצורה זהה.

הטיפוס $p = Av_\tau(\mathbf{J}, \cup\mathbf{J})$ מושמט ב- M. לפי 2.13 בה"כ יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $p^{[\varepsilon]}$ מושמט.

אם בחרנו מלכתחילה θ_1, θ_2 בצורה מספיק זהירה (θ_2 מספיק גדול מ- θ_1), אז לפי משפט ארדש-רדו (כמו בהוכחת $[Sh : c][VIII, 5.3]$), נוכל לבחור תבנית אי-בחינים (תבנית ארנפויכט-מוסטובסקי) Φ במילון τ' כך שלכל μ, אם נסמן את השלד של $M_0' = EM(\mu, \Phi)$ ע"י $\mathbf{I}' = \langle a_i' : i < \mu\rangle$, נקבל

$\circledast_1$ $\mathbf{I}'$ היא קבוצת τ'-אי-בחינים , יתר על כן, היא τ'-אי-בחינה מעל $P^{M_0'}$

$\circledast_2$ לכל $n < \omega$, קיימים $i_1, \ldots, i_n < \theta_2$, ל-$a_0', \ldots, a_{n-1}'$ אותו τ'-טיפוס כמו ל-$a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$.

נסמן $M_0 = EM_\tau(\mu, \Phi)$. כעת:

$\circledast_3$ $M_0 \prec \mathfrak{C}$, לכן $mcl(M_0) \in K_1^c$ (כיוון ש- τ' מילון עם פונקציות סקולם)

$\circledast_4$ $M_0' \models T'$ (פונקציות סקולם, לכן $M_0' \equiv M'$)

$\circledast_5$ $P^{M_0'}$ היא קבוצת τ-אי-בחינים (לפי $\circledast_4$ ו- $\circledast_0$)

$\circledast_6$ $P^{M_0'}$ בת מניה. למה? כל $b \in P^{M_0'}$ הוא מהצורה $\sigma(a_{i_1}', \ldots, a_{i_n}')$ לאיזשהו τ'-שם עצם σ. אך כיוון ש- $\mathbf{I}'$ τ'-אי-בחינה מעל$P^{M_0'}$, כל b כזה תלוי רק ב-σ, ויש מספר מני של τ'-שמות עצם

נסמן $\mathbf{J}' = P^{M_0'}$, זוהי τ-קבוצת אי-בחינים. נסמן $p' = Av_\tau(\mathbf{J}', \cup\mathbf{J}')$. אזי

$\circledast_7$ $[p']^{[\varepsilon]}$ מושמט ב-M_0.

ולמה?

נבחר $\sigma(a_{i_j}', \ldots, a_{i_n}') \in M_0'$. יהיו $j_1, \ldots, j_n$ כך ש- $a_{i_1}', \ldots, a_{i_n}' \equiv a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$. $\sigma(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}) \in M'$ לא מגשים את $p^{[\varepsilon]}$, לכן יש $\varphi(x) \in p$, $\mathbf{d}_1(\sigma(\bar{a}_j), \varphi) \geq \varepsilon$. נשים לב: $\varphi(x) = \varphi(x, \bar{c})$, $\bar{c} \in P^{M'}$. נזכור כי $M' \models \varphi(d, \bar{c}) \Leftrightarrow \varphi(x, \bar{c}) \in p$ לכל/איזשהו $d \in P^{M'}$, $d \cap \bar{c} = \emptyset$ (כי $P^{M'} = \mathbf{J}$ קבוצת אי-בחינים). מכאן,

$$M' \models \text{“}\exists \bar{c} \in P\colon\ [\forall d \in P \backslash \bar{c}, \varphi(d, \bar{c})] \& [\mathbf{d}_1(\sigma(\bar{a}_j), \varphi(x, \bar{c})) \geq \varepsilon]\text{”}.$$

לכן M_0' מקיים את אותה הנוסחה עם $\sigma(\bar{a}_i)$, מה שאומר ש-$\sigma(\bar{a}_i')$ לא מגשים את $[p']^{[\varepsilon]}$, כנדרש.]

כעת סיימנו: יהי $\lambda = \mu$, אז ב- $\overline{M_0} = \overline{EM_\tau(\lambda, \Phi)}$ יש קבוצת אי-בחינים בת מניה שטיפוס הממוצע שלה מושמט (כי $(p')^{[\varepsilon]}$ מושמט ב-M_0), לכן $\overline{M_0}$ אינו $(D, \aleph_1)$-הומוגני ב-K_1^c מצפיפות λ, אבל לפי 5.5 יש מודל $(D, \aleph_1)$-הומוגני שצפיפותו $\lambda > \aleph_0$. קיבלנו שקטגוריות ב-λ נכשלת, סתירה. ■

טענה 6.6 תהי $\mathfrak{C}$ מטרצת קטגורית.

1. יש מודל (D, λ)-הומוגני ב-K_1^c לכל $\lambda > \aleph_0$.
2. כל מודל $(D, \aleph_1)$-הומוגני ב-K_1^c מצפיפות λ הוא (D, λ)-הומוגני.
3. המודל בעוצמת הקטגוריות (נסמנה μ) הוא (D, μ)-הומוגני.

הוכחה:

1. לפי 5.5 ו-(2).
2. לפי השקילות 6.2 ומשפט 6.5.
3. לפי (1).

■

7 המשפט העיקרי

משפט 7.1 נניח $\mathfrak{C}$ קטגורית. אז $\mathfrak{C}$ λ-קטגורית לכל $\aleph_0 < \lambda$, יתר על כן, כל מודל של K_1^c מצפיפות $\lambda > \aleph_0$ הוא (D,λ)-הומוגני.

הוכחה: נניח שלא. $\mathfrak{C}$ $(\aleph_1,*)$-על-יציבה, $\aleph_0$-0^+-יציבה, חד-מימדית (לפי 3.21, 5.3, 6.5), ויש $\lambda > \aleph_0$, $M^* \in K_1^c$, $dens(M^*) = \lambda > \aleph_0$, M^* אינו (D,λ)-הומוגני. לפי 6.6(2), M^* אינו $(D,\aleph_1)$-הומוגני. אז קיימת $B \subseteq M^*$, $|B| \le \aleph_0$, $p \in \mathbf{S}_D(B)$, p מושמט ב-M^*. כיוון ש-M^* שלם, זה אומר כי $p^{[2\varepsilon]}$ מושמט ב-M^* לאיזשהו $\varepsilon > 0$ (לפי 2.13). לכן (לפי 4.3) ל-p אין מעין ε-תומך ב-M^*, ראה הגדרה 4.2.

יהי $\mu > \lambda$ גדול מספיק ולשם פשטות $(\forall\alpha < \mu(|\alpha|^{\aleph_0} < \mu)$. נבחר $\bar{a}_\alpha$ באינדוקציה על $\alpha < \mu$ כך ש:

$\circledast$ $A_\alpha = M^* \cup \{\bar{a}_\beta : \beta < \alpha\}$ ממש $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$, ראה הגדרה 4.2.

מקרה (א): אם $A_\alpha =: M^* \cup \{\bar{a}_\beta : \beta < \alpha\}$ אינו ב-K_1.

ראשית נבחר $\varphi(\bar{x},\bar{a})$, $\bar{a} \subseteq A_\alpha$, שמעידה על $A_\alpha \notin K_1$ ושנית נבחר $\bar{a}_\alpha$ המגשים איזשהו $q \in \mathbf{S}_D^{\ell g(\bar{x})}(A_\alpha)$ מבודד בחזק המכיל את $\varphi(\bar{x},\bar{a})$. לפי 7.2, כלומר, הטענה הבאה, זה אפשרי ו-$\circledast$ ממשיך להתקיים.

מקרה (ב): לא (א). נבחר $\bar{a}_\alpha \notin A_\alpha$ כך ש-$\circledast$ מתקיים ע"י שימוש ב-7.3.

לבסוף יהי $M = mcl(A_\mu)$. M שייך ל-K_1^c כי $A_\mu \in K_1$ (למעשה, $A_\mu \prec \mathfrak{C}$ לפי מקרה (א) של הבניה). הוא אינו $(D,\aleph_1)$-הומוגני, כי p $(<\varepsilon)$-מושמט על ידו (p ממש $(<\varepsilon)$-מושמט לפי $\circledast$, וניזכר ב- 4.3(2)).

כיוון שניתן לבחור μ גדול כרצוננו, על ידי טיעון לובנהיים-סקולם נקבל מודל ב-K_1^c לא $(D,\aleph_1)$-הומוגני בעוצמת הקטגוריות (ליתר דיוק, מודל שצפיפותו היא עוצמת הקטגוריות), בסתירה ל-6.6(3). זה גומר את הוכחת המשפט העיקרי בהסתמך על שתי טענות העזר הבאות שניגש להוכחתן כעת.

טענה 7.2 [$(\mathfrak{C},\mathbf{d})$ $\aleph_0 - 0^+$-יציבה]

יהי $B, p \in \mathbf{S}_D(B)$ בת מניה, $A, A \supseteq B$ אינו מעין $(<\varepsilon)$-תומך עבור p, ראה הגדרה 4.2. תהי $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ נוסחה ספיקה מעל A. אז יש $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ כך ש- $\mathfrak{C} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ ו- $A \cup \bar{b}$ אינו מעין $(<\varepsilon)$-תומך עבור p, למעשה, מספיק להניח כי $tp(\bar{b}, A)$ מבודד בחזק.

הוכחה: לפי 4.6(2) קיים $\bar{b} \in \varphi(\mathfrak{C}, \bar{a})$, $tp(\bar{b}, A)$ מבודד בחזק. נניח בשלילה

$(*)_1$ $A \cup \bar{b}$ מעין $(<\varepsilon)$-תומך עבור $p(\bar{x})$.

לכן (לפי הגדרה 4.2) קיימים $\zeta(1), \zeta(2), \vartheta_1(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c})$

$(*)_2$ $\vartheta_1^{<\zeta(1)>}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_1) \models p^{[\varepsilon-\zeta(2)]}(\bar{x})$ ו- $\bar{c}_1 \subseteq A$ ו- $\vartheta_1(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_1)$ ספיקה.

כיון ש- $tp(\bar{b}, A)$ מבודד בחזק (ראה הגדרה 4.4), קיימים $\zeta(3) > 0$ ו- $\psi(\bar{y}, \bar{c}_2)$ כך ש-

$(*)_3$

(i) $\psi(\bar{y}, \bar{c}_2) \in tp(\bar{b}, A)$, לכן $\bar{c}_2 \subseteq A$

(ii) $\psi(\bar{y}, \bar{c}_2)$ מעין $(\frac{\zeta(1)}{3}, \zeta(3))$-מבודדת $tp(\bar{b}, A)$.

תהי

$(*)_4$ $\vartheta_2(\bar{x}, \bar{c}_1, \bar{c}_2) = (\exists^* \bar{y})[\psi(\bar{y}, \bar{c}_2) \wedge \vartheta_1(\bar{x}, \bar{y}, c_1)]$.

בבירור

$(*)_5$ $\vartheta_2(\bar{x}, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ ספיקה.

נבחר $\zeta(4)$ כך ש-

$(*)_6$ $0 < \zeta(4) < \frac{\zeta(3)}{2}$ ו- $\zeta(4) < \frac{\zeta(1)}{2}$.

נראה כעת כי $\vartheta_2(x, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ מעין $(\varepsilon - \zeta(2), \zeta(4))$-מבודדת את p (והיא מעל A), כלומר

$\boxtimes$ $\vartheta_2^{<\zeta(4)>}(\bar{x}, \bar{c}_1, \bar{c}_2) \models p^{[\varepsilon-\zeta(2)]}(\bar{x})$.

זה יביא לסתירה להנחה ש- A אינו מעין $(<\varepsilon)$-תומך עבור p. נניח אם כן

$(*)_7$ $\mathfrak{C} \models \vartheta_2^{<\zeta(4)>}[\bar{a}, \bar{c}_1, \bar{c}_2]$.

לפי ההגדרה של $\vartheta_2^{<\zeta(4)>}$, יש $\bar{a}', \bar{c}_1', \bar{c}_2'$ כך ש-

$(*)_8$

$\mathfrak{C} \models \vartheta_2[\bar{a}', \bar{c}_1', \bar{c}_2']$ (i)

$\mathbf{d}(\bar{a}', \bar{a}) \leq \zeta(4) \leq \frac{\zeta(1)}{2}$ (ii)

$\mathbf{d}(\bar{c}_1', \bar{c}_1) \leq \zeta(4) \leq \frac{\zeta(1)}{2}$ (iii)

$\mathbf{d}(\bar{c}_2', \bar{c}_2') \leq \zeta(4) \leq \frac{\zeta(3)}{2}$ (iv) .

לפי הבחירה של ϑ_2 קיים $\bar{b}'$ שעבורו

$(*)_9$

$\mathfrak{C} \models \psi^{<\zeta(4)>}[\bar{b}', \bar{c}_2']$ (i)

$\mathfrak{C} \models \vartheta_1^{<\zeta(4)>}[\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}_1']$ (ii) .

לפי הבחירה של $\psi(\bar{y}, \bar{c}_2)$, כלומר, $(ii)(*)_3$ (נשים לב שכיוון ש- $0 < \zeta(4) \leq \frac{\zeta(3)}{2}$, מתקיים $\psi^{<\zeta(3)>}(\bar{b}', \bar{c}_2)$) יש $\bar{b}'' \in \mathfrak{C}$ כך ש-

$(*)_{10}$

$\bar{b}''$ מגשים את $tp(\bar{b}, A)$ (i)

$\mathbf{d}(\bar{b}'', \bar{b}') \leq \frac{\zeta(1)}{3}$ (ii) .

לכן $\mathbf{d}(\bar{a}, \bar{a}') \leq \zeta(4) \leq \frac{\zeta(1)}{2}$, $\mathbf{d}(\bar{b}', \bar{b}'') \leq \frac{\zeta(1)}{3}$ ו- $\mathbf{d}(\bar{c}_1, \bar{c}_1') \leq \zeta(4) \leq \frac{\zeta(1)}{2}$. לפי $(ii)(*)_9$ נקבל

$(*)_{11}$ $\mathfrak{C} \models \vartheta_1^{<\zeta(1)>}[\bar{a}, \bar{b}'', \bar{c}_1]$.

מכאן, לפי $(*)_2$, (אם נחליף את $\bar{b}$ ב- $\bar{b}''$ בעל אותו טיפוס מעל A)

$(*)_{12}$ $\bar{a}$ מגשים $p^{[\varepsilon-\zeta(2)]}$

סיימנו את הוכחת ⊠ ולכן קיבלנו את הסתירה המבוקשת. ■

טענה 7.3 [$(\mathfrak{C}, \mathbf{d})$ $\aleph_0 - 0^+$-יציבה, חד-מימדית]

1) נניח

$M = mcl(M) \subseteq \mathfrak{C}$ (a)

$Ch(M) > \aleph_0$ (b)

$B \subseteq M$ (c) בת מניה

$p \in \mathbf{S}^m_D(B)$ (d)

M (e) מעין $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(\bar{x})$, ראה הגדרה 4.2.

אז לאיזשהו $\bar{b} \in \mathfrak{C}\backslash M$, גם $M \cup \{\bar{b}\}$ מעין $(<\varepsilon)$-משמיט את p.

2) נניח סעיפים (a)-(e) ו- $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ $M, \bar{b} \notin$, אז $M \cup \bar{b}$ מעין $(<\varepsilon)$-משמיט את $p(x)$ כאשר: לכל $\bar{c} \in {}^{\omega>}M$ ו- $\zeta > 0$ קיים $\bar{b}'$ המגשים $tp(\bar{b}, B \cup \bar{c})$ כך ש- $\mathbf{d}_1(\bar{b}', M) < \zeta$.

3) ב- (2) מספיק להניח שלכל $\bar{c} \in {}^{\omega>}M$ ולכל $\zeta > 0$ קיימים $\bar{b}', \bar{b}^-$ כך ש- $\mathbf{d}(\bar{b}, \bar{b}^-) < \zeta$, $\mathbf{d}_1(\bar{b}', M) < \zeta$, $\bar{b}' \models tp(\bar{b}^-, B \cup \bar{c})$.

הוכחה: 1) תהי Φ^* כמו ב- 5.2, $\tau(\Phi^*)$ בן מניה (אפשרי לפי $\aleph_0$-0^+-יציבות ו- 5.2(3)).

$(*)$ לכל סדר טוב קווי לא מני I, $M^*_I = mcl(EM_\tau(I, \Phi^*))$ הינו $(D, |I|)$-הומוגני (מחד-מימדיות).

נבחר $\lambda > dens(M)$, ויהי $M^* = M^*_\lambda$.

ובכן, בה"כ $M \subseteq M^*$ (מכוללות של M^*). כיוון ש- $dens(M) > \aleph_0$ נוכל (לפי 7.4 למצוא $\varepsilon > 0$ ו- $a_\alpha \in M$ עבור $\alpha < \omega_1$ כך ש- $\alpha < \beta < \omega_1 \Rightarrow \mathbf{d}(a_\alpha, a_\beta) > \varepsilon$. נאריך את הסדרה כך ש- $\{a_{\omega_1+n} : n < \omega\} \subseteq M$ מכילה את A. כעת לכל $\alpha < \omega_1 + \omega$ ו- $n < \omega$ נוכל למצוא $b_{\alpha,n} \in EM_\tau(I, \Phi^*)$ כך ש- $\mathbf{d}(a_\alpha, b_{\alpha,n}) < 1/(n+1)$. יהי $b_{\alpha,n} = \sigma_{\alpha,n}(a_{t_{\alpha,n,0}}, \ldots, a_{t_{\alpha,n,k(\alpha,n)-1}})$.

נגדיר (עבור $\alpha < \omega_1$)

$$S_\alpha = \{t_{\beta,n,\ell} : (\beta < \alpha) \vee \beta \in [\omega_1, \omega_1 + \omega) \& n < \omega, \ell < k(\beta, n)\} \subseteq \lambda.$$

נגדיר (עבור $\alpha < \omega_1, n < \omega, \ell < k(\alpha, n)$)

$$\gamma_{\alpha,n,\ell} = min\{\gamma \in S_\alpha \cup \{\lambda\} : t_{\alpha,n,\ell} \leq \gamma\}.$$

תהי C תת קבוצה סגורה לא חסומה של ω_1 כך ש-

$(*)$ אם $\delta \in C$ ו- $m < \omega$ אז הקבוצה הבאה היא קבוצת שבת:

$$W_{\delta,m} = \{\alpha \in C : \forall n \le m, \sigma_{\alpha,n} = \sigma_{\delta,n},$$
$$(k(\alpha,n) = k(\delta,n) \text{ לכן })$$
$$\& \, \gamma_{\alpha,n,\ell} = \gamma_{\delta,n,\ell} \, \& (\gamma_{\alpha,n,\ell} \in S_\alpha \equiv \gamma_{\delta,n,\ell} \in S_\delta)$$
$$\ell < k(\delta,n) \text{ עבור } \}.$$

למה סל"ח כזה קיים? תהי לכל n, $f_n : \omega_1 \to \omega_1$ פונקציה כך ש-$f_n(\alpha)$ מקודדת את כל המידע הרלוונטי על הסדרה הסופית $\langle b_{\alpha,m} : m \le n\rangle$: מהם $\sigma_{\alpha,m}$ ומה ה-(β', n', ℓ')-ים המזעריים כך ש- $t_{\beta',n',\ell'} = \gamma_{\alpha,m,\ell}$. פונקציית קידוד זו דוחסת על סל"ח, ולכן לפי הלמה של פודור יש תת סל"ח שלכל δ בו הקבוצה $\{\alpha : f_n(\alpha) = f_n(\delta)\}$ היא קבוצת שבת. כעת נחתוך מספר מני של סל"חים (לכל n יש סל"ח הנגזר מ-f_n) ונקבל את C.

כעת נבחר $\delta(*) \in C$ כך ש- $\forall m < \omega (\exists \delta \in \delta(*) \cap C)(\delta(*) \in W_{\delta,m})$ וסדר קווי $\lambda = I \subseteq J$ ו- $t_{n,\ell} \in I$ כך ש-

$(**)$ לכל $m < \omega$, הטיפוס חסר הכמתים של הסדרה $\langle t_{n,\ell} : n < m, \ell < k(\delta(*), n)\rangle$ בשפה $\{<\}$ (סדר) זהה לטיפוס של $\langle t_{\delta(*),n,\ell} : n < m, \ell < k(\delta(*), n)\rangle$.

יהי $\mathfrak{C} \prec^1_\Delta M^+ = mcl(EM_{\tau(\mathfrak{C})}(J, \Phi^*))$,$M^+$ מרחיב את M^*.

יהי $b^*_n = \sigma_{\delta(*),n}(t_{n,0}, \ldots, t_{n,k(\delta(*),n)-1})$, אז $\langle b^*_n : n < \omega\rangle, b^*_n \in M^+$ סדרת קושי (כי $\langle b_{\delta^*,n} : n < \omega\rangle$ סדרת קושי לפי בחירת b^*_n, $\delta^* \in C$ ואי-בחינות של J) וגבולה $b^* \in M^+ \backslash M$ (כי a_α-ים מהווים ε-רשת, ולכן עבור n גדול מספיק $b_{\alpha,n}$ ו-$b_{\alpha',n}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-רחוקים אחד מהשני ל- α,α' שונים, לכן לפי אי בחינות של J, b^*_n $\frac{\varepsilon}{2}$-רחוק מכל איבר של M), ו- b^* הוא כנדרש ב-(3).

2) נניח לא, אז יש $\zeta > 0$, $\bar{c} \subseteq M$ ונוסחה $\vartheta(\bar{x}, \bar{b}, c)$ כך ש-
$\vartheta^{<\zeta>}(x, \bar{b}, \bar{c}) \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar{x})$.

נבחר $\zeta_1, \zeta_2 > 0$ כך ש- $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta$ ו- $\zeta_1 < \zeta - \zeta_2$. לפי ההנחה יש $\bar{b}', \bar{b}''$ כך ש-

$(*)$

(a) $\bar{b}''$ מגשים $p \restriction (B \cup \bar{c})$

(b) $\bar{b}' \subseteq M$ מאורך $\ell g(\bar{b})$

(c) $\mathbf{d}(\bar{b}', \bar{b}'') < \zeta_1$.

לפי סעיף (a) של $(*)$ כיוון ש- $\theta^{<\zeta>}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}) \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar{x})$, גם $\theta^{<\zeta>}(\bar{x}, \bar{b}'', \bar{c}) \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar{x})$. לכן (ראה 2.5) $\theta^{<\zeta_2>}(\bar{x}, \bar{b}', \bar{c}) \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar{x})$, סתירה.

3) הוכחה דומה ל-(2) תוך שימוש ב-2.5(3) כדי להראות שקיים $\zeta' > 0$ כך ש- $\theta^{<\zeta'>}(\bar{x}, \bar{b}^{-}, \bar{c}) \models p^{[\varepsilon-\zeta]}(\bar{x})$.

■

טענה 7.4 יהי $(X, \mathbf{d})$ מרחב מטרי לא פריד. אז קיימים

$$\langle a_i : i < \omega_1 \rangle \subseteq X \,, \varepsilon^* > 0 \colon\ d(a_i, a_j) \geq \varepsilon^* \, \forall i, j < \omega_1.$$

הוכחה: נבחר באינדוקציה על $i < \omega_1$ a_i, כך ש- $a_i \notin \{a_j : j < i\}$. נסמן $\varepsilon_i = d(a_i, \{a_j : j < i\} > 0$. בה"כ $\varepsilon_i = \varepsilon^*$ לכל i, וסיימנו. ■

■

רשימת מקורות

[$Ben:1$] איתי בן יעקב, "Positive model theory and compact abstract theories"
Journal of Mathematical Logic, 3, (2003), no. 1, 85 – 118.

[$Ben:2$] איתי בן יעקב, "Simplicity in compact abstract theories",
Journal of Mathematical Logic, 3, (2003), no. 2, 163 – 191.

[$Ben:3$] איתי בן יעקב, "Uncountable dense categoricity in cats",
Journal of Symbolic Logic, 70, (2005), no. 3, 829 – 860.

[$BenUs$] איתי בן יעקב, אלכסנדר אוסוויצוב,
"Continuous first order logic and local stability", הוגש לכתב עת.

[$ChKe$] צ'ן צ'ונג צ'אנג, ה. ג'רום קיזלר, Continuous Model Theory,
Princeton Univ. Press (1966).

[$GrLes$] רמי גרוסברג, אוליבייר לסמן,
"Shelah's stability spectrum and homogeneity spectrum in finite diagrams",
Arch. Math. Logic, 41, (2002), no. 1, 1 – 31.

[$HenIov$] צ. וורד הנסון, חוסה יוווינו, "Ultraproducts in Analysis"
חלק I של הספר "Analysis and Logic", המחברים הנסון, יוווינו, קכריס, אודל,
London Mathematical Society Lecture Note Series,
Cambridge University Press, 2003.

[Hr] אהוד הרושובסקי, "Simplicity and the lascar group", 1998.

[$Sh:3$] שהרן שלח, "Finite diagrams stable in power",
Annals Math Logic, **2**, (1970), 69 – 118.

[$Sh:54$] שהרן שלח, "The lazy model-theoretician's guide to stability",
Logique et Analyse, **81**, (1975), 241 – 308.

[$Sh:c$] שהרן שלח,
"Classification theory and the number of nonisomorphic models",
מהדורה שניה, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

CONTENT

ABSTRACT

This work studies classes of complete metric spaces from model theoretic point of view. The main result is an analogue of Morley's theorem on categoricity spectrum of a countable first order theory (in other words, a proof of Ł̀oś conjecture in this context). Tools like basic stability in metric structures, strongly isolated types, etc are developed for this purpose.

This work was carried out under the supervision of

Professor Saharon Shelah.

Stability and Categoricity for Complete Metric Spaces

Thesis Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy

by Alexander Usvyatsov

Submitted to the Senate of the Hebrew University

November 2005

Stability and Categoricity for Complete Metric Spaces

Thesis Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy

by Alexander Usvyatsov

Submitted to the Senate of the Hebrew University

November 2005