Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Advances in Mathematics 209 (2007) 749–822
ADVANCES IN Mathematics
www.elsevier.com/locate/aim

Cohomologie des variétés de Deligne–Lusztig

François Digne [a], Jean Michel [a,b], Raphaël Rouquier [b,*]

[a] *LAMFA, Université de Picardie, 33 Rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France*
[b] *Institut de Mathématiques de Jussieu, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France*

Reçu le 10 février 2005 ; accepté le 1er juin 2006

Disponible sur Internet le 27 septembre 2006

Communiqué par les éditeurs en chèf

Abstract

We study the cohomology of Deligne–Lusztig varieties with aim the construction of actions of Hecke algebras on such cohomologies, as predicted by the conjectures of Broué, Malle and Michel ultimately aimed at providing an explicit version of the abelian defect conjecture. We develop the theory for varieties associated to elements of the braid monoid and partial compactifications of them. We are able to compute the cohomology of varieties associated to (possibly twisted) rank 2 groups and powers of the longest element w_0 (some indeterminacies remain for G_2). We use this to construct Hecke algebra actions on the cohomology of varieties associated to w_0 or its square, for groups of arbitrary rank. In the subsequent work [F. Digne, J. Michel, Endomorphisms of Deligne–Lusztig varieties, Nagoya J. Math. 183 (2006)], we construct actions associated to more general regular elements and we study their traces on cohomology.

Mots-clés : Finite Chevalley groups ; Representations ; Deligne–Lusztig varieties ; Broue conjectures ; Hecke algebras ; Braid monoid

Table des matières

* Autheur correspondant.
Adresses e-mail : digne@u-picardie.fr (F. Digne), jmichel@math.jussieu.fr (J. Michel), rouquier@math.jussieu.fr (R. Rouquier).

0001-8708/$ – see front matter
doi:10.1016/j.aim.2006.06.001

1. Introduction

L'objet de cet article est la construction d'actions d'algèbres d'Iwahori–Hecke sur la cohomologie de certaines variétés de Deligne–Lusztig. L'existence de ces actions fait partie des conjectures précisant, pour les groupes réductifs finis, la conjecture de Broué sur les blocs à défaut abélien des groupes finis.

Dans ce travail, nous établissons des propriétés générales des variétés de Deligne–Lusztig et de leur cohomologie et nous montrons l'existence des représentations d'algèbres de Hecke pour deux types de variétés de Deligne–Lusztig, celles associées à l'élément $\boldsymbol{\pi}$ du monoïde de tresses et à sa racine carrée $\mathbf{w}_0$. Nous y parvenons grâce à un calcul de la cohomologie de certaines variétés pour des groupes de rang 2 (celles associées à des puissances quelconques de $\mathbf{w}_0$).

Rappelons maintenant les conjectures auxquelles nous nous intéressons.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur une clôture algébrique d'un corps fini, muni d'une isogénie F dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius. Nous notons $\mathbf{G}^F$ le groupe (fini) des points fixes de F. Soit W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ et B^+ (respectivement B) le monoïde (respectivement le groupe) de tresses associé à W. Pour $w \in W$, on dispose d'un relevé de longueur minimale $\mathbf{w}$ dans B^+.

Soit $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{w}_0^2$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W. Soit $w \in W$ tel que $\mathbf{w}$ est une « F-racine d-ième de $\boldsymbol{\pi}$ », i.e., $(\mathbf{w}F)^d = \boldsymbol{\pi} F^d$. Dans [5], une action à droite de $C_B(\mathbf{w}F)$ sur $H_c^*(\mathbf{X}(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est construite (déduite d'une action de $C_{B^+}(\mathbf{w}F)$ sur $\mathbf{X}(w)$) et il est conjecturé que

(i) l'action de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell C_B(\mathbf{w}F)$ sur $H_c^*(\mathbf{X}(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ se factorise en une action d'une algèbre de Hecke « cyclotomique » relative à $C_W(wF)$.
(ii) $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F}(H_c^i(\mathbf{X}(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), H_c^j(\mathbf{X}(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = 0$ si $i \neq j$.

On passe de la conjecture générale sur les ℓ-blocs à défaut abélien à cette conjecture en faisant trois restrictions :

– on suppose que le centralisateur d'un groupe de défaut est un tore (son type est alors un élément régulier),
– on étend les scalaires de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$,
– on se restreint aux caractères unipotents.

Les conjectures (i) et (ii) devraient être complétées par une prédiction des paramètres de l'algèbre de Hecke et de sa trace sur la cohomologie.

Les parties §2 et §3 développent des propriétés générales des variétés de Deligne–Lusztig généralisées et de leur cohomologie. Nous reprenons et complétons des résultats de Deligne–Lusztig et Lusztig.

Dans §2, nous présentons la construction, suivant Deligne, de variétés associées à des éléments du monoïde de tresses. Plus généralement, nous introduisons des compactifications partielles de ces variétés, associées à des éléments d'un monoïde « complété ». Nous établissons en particulier une relation avec des variétés pour des sous-groupes de Levi (proposition 2.3.13).

Dans §3.2, nous développons différentes techniques reliant la cohomologie de la variété $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ à celle de variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w}')$ pour des éléments $\mathbf{w}'$ plus courts que $\mathbf{w}$. Les techniques utilisées reposent sur l'étude de décompositions des variétés, de certains morphismes propres et de situations de lissité rationnelle.

Nous étudions la structure comme $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F)$-module de la cohomologie des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ dans la partie §3.3. Nous étudions les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius. Nous décrivons la partie de la cohomologie où le groupe agit trivialement ou par la représentation de Steinberg. Nous étudions les éléments $\mathbf{w}$ de longueur minimale tels qu'une représentation irréductible donnée apparaît dans $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Nous étudions les propriétés de rationalité des caractères des $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans la partie §3.4.

Dans la partie §4, nous déterminons la structure comme $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F)$-module de la cohomologie des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0^n)$ pour des groupes de type A_2, ${}^2A_2$, B_2, ${}^2B_2$ et ${}^2G_2$ (nous obtenons aussi des résultats partiels pour G_2). Nous procédons par récurrence et nous devons calculer pour cela la cohomologie de certaines variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w}\mathbf{w}_0^{2m})$. À décalage et twist de Tate près (qui ne dépendent que de la famille de la représentation irréductible concernée), le résultat ne dépend pas de m et nous conjecturons (*cf.* §3.3.23) que de tels phénomènes de périodicité sont généraux. Ces calculs sont rendus possibles par les outils développés au §3.

La dernière partie §5 est consacrée à l'étude de certains endomorphismes des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w})$. Elle généralise des résultats de [24] et [5]. Nous expliquons comment l'étude d'endomorphismes associés à des éléments contenus dans un sous-groupe parabolique se ramène au cas de variétés associées au sous-groupe de Levi correspondant. Nous utilisons ceci pour démontrer que certains endomorphismes des variétés $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0)$ vérifient des relations quadratiques et nous en déduisons l'action d'algèbres de Hecke sur la cohomologie (conformément à la conjecture (i)).

Dans une suite de ce travail [12], la conjecture (i) est établie pour diverses classes d'éléments réguliers et la trace de l'algèbre de Hecke cyclotomique sur la cohomologie est étudiée.

2. Variétés de Deligne–Lusztig et groupes de tresses

2.1. Groupes de tresses

2.1.1. Soit (W, S) un système de Coxeter fini, c'est-à-dire, un groupe fini W et une partie génératrice S de W telle que, si $m_{ss'}$ est l'ordre de ss' pour $s, s' \in S$, alors W admet comme présentation

$$\big\langle s\in S \mid s^2=1, \underbrace{ss'\cdots}_{m_{ss'}}=\underbrace{s's\cdots}_{m_{ss'}}\big\rangle.$$

Soit $\mathbf{W}$ un ensemble muni d'une bijection $W\xrightarrow{\sim}\mathbf{W}$, $w\mapsto\mathbf{w}$ et soit l la longueur sur W définie par l'ensemble de générateurs S. Nous définissons le *monoïde de tresses* d'Artin–Tits B^+ associé à W par la présentation

$$\big\langle \mathbf{w}\in\mathbf{W} \mid \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2=\mathbf{w}' \text{ lorsque } w_1w_2=w' \text{ et } l(w_1)+l(w_2)=l(w')\big\rangle.$$

L'application $\mathbf{w}\mapsto w$ induit un morphisme de monoïdes $\beta:B^+\to W$. Notons $\mathbf{S}$ le sous-ensemble de $\mathbf{W}$ en bijection avec S. La présentation précédente est équivalente (*cf. e.g.* [28, proposition 1.1]) à la présentation « classique »

$$\big\langle \mathbf{s}\in\mathbf{S} \mid \underbrace{\mathbf{s}\mathbf{s}'\cdots}_{m_{ss'}}=\underbrace{\mathbf{s}'\mathbf{s}\cdots}_{m_{ss'}}\big\rangle.$$

Nous notons aussi l la longueur sur B^+ définie par $\mathbf{S}$. Alors, $\mathbf{W}=\{\mathbf{w}\in B^+ \mid l(\mathbf{w})=l(\beta(\mathbf{w}))\}$.

On note B le groupe de même présentation que B^+ : c'est le *groupe de tresses* d'Artin–Tits. L'application canonique $B^+\to B$ est injective (*cf. e.g.* [28, corollaire 3.2]). L'identité de $\mathbf{S}$ s'étend uniquement en un anti-automorphisme de B^+, appelé *retournement*.

Nous notons « $\leqslant$ » l'ordre de Bruhat sur W. Pour $w\in W$, nous appelons *support* de w l'ensemble $\{s\in S\mid s\leqslant w\}$.

Pour $I\subset S$, nous notons W_I le sous-groupe de W engendré par I. On a $w\in W_I$ où I est le support de w. On note w_0^I l'élément de plus grande longueur de W_I et on pose $w_0=w_0^S$. Nous dirons que $w\in W$ est *I-réduit* (respectivement *réduit-I*) si pour tout $s\in I$ on a $sw>w$ (respectivement $ws>w$). Notons que $w\in W$ est I-réduit (respectivement réduit-I) si et seulement si pour tout $v\in W_I$, on a $l(v)+l(w)=l(vw)$ (respectivement $l(w)+l(v)=l(wv)$).

Soit $\boldsymbol{\pi}=\mathbf{w}_0^2$; c'est un élément central de B (lorsque W est irréductible, c'est le générateur positif du centre du groupe des tresses pures, noyau de $\beta:B\to W$).

2.1.2. Il nous sera commode de travailler avec une version enrichie de B^+.

Soit $\underline{W}$ un ensemble muni d'une bijection $W\xrightarrow{\sim}\underline{W}$, $w\mapsto\underline{w}$. Le *monoïde de tresses complété* $\underline{B}^+$ a pour ensemble de générateurs $\{y(w),y(\underline{w}')\}_{w\in W,\underline{w}'\in\underline{W}}$ et pour relations

- $y(1)=y(\underline{1})=1$,
- $y(w_1)y(w_2)=y(w_1w_2)$ pour $l(w_1w_2)=l(w_1)+l(w_2)$,
- $y(\underline{w})y(\underline{w}')=y(\underline{ww'})$ lorsque w et w' ont des supports disjoints,
- $y(w)y(\underline{w}')=y(\underline{w}')y(w)$ lorsque $wv=vw$ et $l(wv)=l(w)+l(v)$ pour tout $v\leqslant w'$.

On a une injection $B^+\to\underline{B}^+$ induite par $\mathbf{w}\mapsto y(w)$ qui nous permet d'identifier B^+ avec le sous-monoïde de $\underline{B}^+$ engendré par les $y(w)$. On note $\underline{\mathbf{w}}=y(\underline{w})$ et on pose $\underline{\mathbf{W}}=\{\underline{\mathbf{w}}\}_{w\in W}$. On munit $\underline{B}^+$ d'une fonction longueur : c'est le morphisme de monoïdes $l:\underline{B}^+\to\mathbb{N}$ donné par $l(\mathbf{w})=l(\underline{\mathbf{w}})=l(w)$.

On dispose d'un morphisme $\rho:\underline{B}^+\to B^+$ donné par $y(w)\mapsto\mathbf{w}$ et $y(\underline{w})\mapsto\mathbf{w}$. C'est une section de l'injection canonique.

Remarque 2.1.3. Une propriété remarquable de $\underline{B}^+$ est l'existence d'un morphisme de monoïdes $\underline{B}^+ \to \mathbb{Z}B^+$ donné par $y(w) \mapsto \mathbf{w}$ et $y(\underline{w}) \mapsto \sum_{v \leqslant w} \mathbf{v}$. Si ce morphisme s'avérait ne pas être injectif, il y aurait lieu d'étudier si les relations supplémentaires donnent lieu à des relations entre variétés correspondantes (*cf.* §2.2.14).

2.1.4. Nous rappelons maintenant la construction et les propriétés des formes normales des éléments de B^+.

Nous notons $\preccurlyeq$ la divisibilité à gauche dans B^+, i.e., $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ s'il existe $\mathbf{z} \in B^+$ tel que $\mathbf{xz} = \mathbf{y}$. Le monoïde B^+ étant simplifiable, la relation $\preccurlyeq$ est un ordre partiel. Nous notons B_I^+ (respectivement B_I) le sous-monoïde de B^+ (respectivement le sous-groupe de B) engendré par $\mathbf{I}$, où $I \subset S$ (B_I^+ s'identifie au monoïde des tresses du sous-groupe W_I de W engendré par I). De même, nous notons $\underline{B}_I^+$ le sous-monoïde de $\underline{B}^+$ engendré par $\mathbf{I} \cup \underline{\mathbf{W}}_I$.

Lemme-Définition 2.1.5. *Soit* $\mathbf{w} \in B^+$. *Alors*

(i) *Il existe un unique diviseur à gauche maximal de* $\mathbf{w}$ *dans* $\mathbf{W}$. *Nous le notons* $\alpha(\mathbf{w})$, *et nous posons* $\omega(\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{w})^{-1}\mathbf{w}$.
(ii) *Il existe un unique diviseur à gauche maximal de* $\mathbf{w}$ *dans* B_I^+. *Nous le notons* $\alpha_I(\mathbf{w})$ *et nous posons* $\omega_I(\mathbf{w}) = \alpha_I(\mathbf{w})^{-1}\mathbf{w}$.

Preuve. (i) est, par exemple, [28, proposition 2.1]. (ii) résulte immédiatement de [28, lemme 1.4] car l'ensemble des $\mathbf{x} \in B_I^+$ tel que $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$ vérifie les hypothèses de *loc. cit.* □

Nous dirons qu'une décomposition $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ est la *forme normale* de $\mathbf{w}$ si pour tout i on a $\mathbf{w}_i = \alpha(\mathbf{w}_i \mathbf{w}_{i+1} \cdots \mathbf{w}_k)$. Le monoïde B^+ étant simplifiable, tout $\mathbf{w}$ possède une unique forme normale, qui en donne une décomposition canonique en produit d'éléments de $\mathbf{W}$.

Le résultat suivant est classique (*cf.* par exemple [28, corollaire 4.4]).

Proposition 2.1.6. *Soit* σ *un automorphisme du système de Coxeter* (W, S).

(i) $(W^\sigma, \{t_I\}_{I \in S/\sigma})$ *est un système de Coxeter, où* $t_I = w_0^I$ *et* I *décrit l'ensemble des orbites de* σ *dans* S. *De plus, les longueurs dans ce système de Coxeter s'ajoutent si et seulement si elles s'ajoutent dans* W.
(ii) *On a un isomorphisme* $B_{W^\sigma}^+ \xrightarrow{\sim} C_{B^+}(\sigma)$, $\mathbf{t}_I \mapsto \mathbf{w}_0^I$.

2.2. *Variétés « classiques »*

2.2.1. Nous rappelons ici quelques résultats géométriques qui nous seront utiles par la suite.

Soit k un corps algébriquement clos. On appelle variété sur k un schéma quasi-projectif sur k.

Soit $\{Z_i\}$ une famille finie de sous-variétés localement fermées d'une variété X. Nous notons $\bigcup Z_i$ l'union de ces sous-variétés—ce sera une sous-variété localement fermée lorsque nous utiliserons cette notation. Nous notons aussi $\coprod Z_i$ cette union lorsque $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

On utilisera le résultat suivant, pour montrer que certains morphismes de variétés sont des isomorphismes [2, proposition II.6.6 et corollaire de 6.1].

Théorème 2.2.2. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme bijectif. On suppose que les composantes irréductibles de X sont ses composantes connexes et que Y est normal. Si f est séparable* (*par exemple birationnel*)*, alors c'est un isomorphisme.*

Proposition 2.2.3. *Soit $f : X \to Y$ une fibration localement triviale de fibre normale* (*respectivement lisse*)*. Alors, X est normale* (*respectivement lisse*) *si et seulement si Y est normale* (*respectivement lisse*)*.*

Preuve. En effet, localement pour la topologie de Zariski, on a un produit cartésien. Dans le cas d'un produit cartésien, l'assertion sur la lissité est établie dans [6, VI, III, théorème 2] et celle sur la normalité dans [6, V, I, proposition 3]. □

Nous aurons aussi besoin de comparer des propriétés à travers un revêtement étale [29, I, remarque 2.24 et proposition 3.17].

Proposition 2.2.4. *Soit $f : X \to Y$ un revêtement étale fini. Alors, X est lisse* (*respectivement normale*) *si et seulement si Y est lisse* (*respectivement normale*)*.*

Définition 2.2.5. Nous dirons qu'un endomorphisme fini ϕ d'une variété $\mathbf{X}$ « vérifie la formule des traces » si $\sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}(\phi \mid H^i_c(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = |\mathbf{X}^\phi|$.

Rappelons la formule des traces de Lefschetz « classique » [29, théorème 12.3].

Théorème 2.2.6. *Si $\mathbf{X}$ est une variété projective lisse et si le graphe de ϕ est transverse à la diagonale, alors, ϕ vérifie la formule des traces.*

Le théorème suivant (conjecture de Deligne) est dû à Fujiwara [13] :

Théorème 2.2.7. *Soit $\mathbf{X}$ une variété sur la clôture algébrique d'un corps fini, munie d'un endomorphisme de Frobenius F et soit ϕ un endomorphisme fini de $\mathbf{X}$. Alors pour n entier suffisamment grand et tel que F^n commute à ϕ, l'endomorphisme ϕF^n vérifie la formule des traces. En particulier, pour un tel n on a*

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}\bigl(\phi \mid H^i_c(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr) = -\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \bigl|\mathbf{X}^{\phi F^{nk}}\bigr| t^k.$$

2.2.8. Dans cet article nous utiliserons les notations suivantes : p est un nombre premier, $\overline{\mathbb{F}}_p$ est une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$, $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'une isogénie F dont une puissance est l'endomorphisme de Frobenius attaché à une structure rationnelle de $\mathbf{G}$ sur un corps fini. Nous notons $\mathbf{G}^F$ le groupe (fini) des points fixes de $\mathbf{G}$ sous F. Nous notons δ le plus petit entier tel que F^δ soit un endomorphisme de Frobenius munissant $\mathbf{G}$ d'une structure rationnelle déployée sur le sous-corps $\mathbb{F}_{q^\delta}$ à q^δ éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$, où q est un nombre réel positif défini par cette condition (q^δ est une puissance entière de p).

Nous notons $\mathcal{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}$ et W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$: ses éléments correspondent aux orbites de $\mathbf{G}$ dans son action diagonale sur $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Muni de l'ensemble S de générateurs correspondant aux orbites de dimension 1, W est un groupe de

Coxeter. Pour $w \in W$, nous notons $\mathcal{O}(w)$ l'orbite correspondante. On a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(w) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}(w') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(ww')$ donné par la première et la dernière projection lorsque $l(ww') = l(w) + l(w')$.

On dit que $\mathbf{B}_1$ est en *position relative* w avec $\mathbf{B}_2$ (et on note $\mathbf{B}_1 \xrightarrow{w} \mathbf{B}_2$) lorsque $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) \in \mathcal{O}(w)$.

L'action de F sur W stabilise S. L'application correspondante $\mathbf{S} \to \mathbf{S}$ s'étend de manière unique en un automorphisme $B \to B$. On a obtenu ainsi une action de F sur B compatible (via β) avec l'action sur W. On définit de même une action de F sur $\underline{B}^+$ par $F(y(w)) = y(F(w))$ et $F(y(\underline{w})) = y(\underline{F(w)})$. L'ordre de cette action est δ.

On fixe dans toute la suite un couple F-stable $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ formé d'un tore maximal de $\mathbf{G}$ et d'un sous-groupe de Borel le contenant. La variété $\mathcal{B}$ s'identifie à $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ par l'isomorphisme ${}^g\mathbf{B} \mapsto g\mathbf{B}$. On identifie le groupe de Weyl à $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, en associant l'orbite de $(\mathbf{B}, {}^w\mathbf{B})$ à $w \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$; avec l'identification ci-dessus, on a

$$\mathcal{O}(w) \xrightarrow{\sim} \left\{(g_1\mathbf{B}, g_2\mathbf{B}) \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\right\}.$$

La géométrie des orbites $\mathcal{O}(w)$ est liée à celle des *cellules de Bruhat* $\mathcal{B}(w) = \{\mathbf{B}' \in \mathcal{B} \mid \mathbf{B} \xrightarrow{w} \mathbf{B}'\}$, qui sont des espaces affines de dimension $l(w)$. L'adhérence de $\mathcal{B}(w)$ dans $\mathcal{B}$ est la *variété de Schubert* $\overline{\mathcal{B}(w)} = \coprod_{w' \leqslant w} \mathcal{B}(w')$.

Lemme 2.2.9. *Soit $\overline{\mathcal{O}(w)}$ l'adhérence de $\mathcal{O}(w)$ dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

(i) *On a $\overline{\mathcal{O}(w)} = \coprod_{w' \leqslant w} \mathcal{O}(w')$.*
(ii) *La variété $\overline{\mathcal{O}(w)}$ est lisse si et seulement si $\overline{\mathcal{B}(w)}$ est lisse.*

Preuve. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \times \mathcal{B} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ \mathbf{G} & \xrightarrow[r]{} & \mathcal{B} \end{array}$$

où les flèches sont données par $q(g_1, g_2) = ({}^{g_1}\mathbf{B}, {}^{g_2}\mathbf{B})$, $p(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2$ et $r(g) = {}^g\mathbf{B}$. Les morphismes p, q, r sont ouverts. On a $r^{-1}(\mathcal{B}(w)) = \mathbf{B}w\mathbf{B}$. On en déduit que l'adhérence de $\mathbf{B}w\mathbf{B}$ est égale à $r^{-1}(\overline{\mathcal{B}(w)}) = \coprod_{w' \leqslant w} \mathbf{B}w'\mathbf{B}$, car cette dernière variété est une union de fibres de r. De même, l'adhérence dans $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ de $p^{-1}(\mathbf{B}w\mathbf{B}) = \{(g_1, g_2) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} \mid g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}$ est $\{(g_1, g_2) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} \mid g_1^{-1}g_2 \in \coprod_{w' \leqslant w} \mathbf{B}w'\mathbf{B}\}$; enfin ces deux dernières variétés étant unions de fibres de q et ayant pour images par q respectivement $\mathcal{O}(w)$ et $\coprod_{w' \leqslant w} \mathcal{O}(w')$, on en déduit le (i) du lemme.

Le (ii) se déduit (*cf.* proposition 2.2.3) du fait que dans le diagramme ci-dessus q et r sont des fibrations localement triviales de fibre $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$ respectivement et que p est une fibration triviale de fibre $\mathbf{G}$. $\square$

Corollaire 2.2.10. *Soit $I \subset S$. Alors, les variétés $\overline{\mathcal{B}(w_0^I)}$ et $\overline{\mathcal{O}(w_0^I)}$ sont lisses.*

Preuve. On a $\overline{\mathcal{B}(w_0^I)} \simeq \mathbf{B}W_I\mathbf{B}/\mathbf{B}$ où $\mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$, donc $\overline{\mathcal{B}(w_0^I)}$ est une variété lisse. Par conséquent, $\overline{\mathcal{O}(w_0^I)}$ est lisse d'après le lemme 2.2.9. □

2.2.11. Pour $w \in W$, nous posons $\mathcal{O}(\underline{w}) = \overline{\mathcal{O}(w)}$, $\mathcal{B}(\underline{w}) = \overline{\mathcal{B}(w)}$, $\mathbf{B}\underline{w}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}w\mathbf{B}}$ et nous écrirons $\mathbf{B}_1 \xrightarrow{\underline{w}} \mathbf{B}_2$ la propriété « $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) \in \mathcal{O}(\underline{w})$ ».

Avec ces notations, nous avons la

Définition 2.2.12. Pour $t_1, \dots, t_k \in W \cup \underline{W}$, nous posons

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(t_1, \dots, t_k) &= \mathcal{O}(t_1) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}(t_2) \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}(t_k)\\ &= \{(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{k+1}) \in \mathcal{B}^{k+1} \mid \mathbf{B}_i \xrightarrow{t_i} \mathbf{B}_{i+1}\}\\ &\xrightarrow{\sim} \{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_{k+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{k+1} \mid g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{B}t_i\mathbf{B}\}.\end{aligned}$$

Nous notons $p' : \mathcal{O}(t_1, \dots, t_k) \to \mathcal{B}$, $(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{k+1}) \mapsto \mathbf{B}_1$ la première projection et $p'' : (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{k+1}) \mapsto \mathbf{B}_{k+1}$ la dernière projection.

Lemme 2.2.13. *Soient $t_1, \dots, t_k \in W \cup \underline{W}$. Alors, la variété $\mathcal{O}(t_1, \dots, t_k)$ est normale. Si la variété $\mathcal{O}(t_i)$ est lisse pour tout i, alors la variété $\mathcal{O}(t_1, \dots, t_k)$ est lisse.*

Preuve. Notons q_k' (respectivement q_k'') l'oubli du premier (respectivement du dernier) sous-groupe de Borel ; nous allons démontrer par récurrence sur k que ces applications définissent des fibrations localement triviales $\mathcal{O}(t_1, \dots, t_k) \to \mathcal{O}(t_2, \dots, t_k)$ (respectivement $\mathcal{O}(t_1, \dots, t_k) \to \mathcal{O}(t_1, \dots, t_{k-1})$), de fibres isomorphes à $\mathcal{B}(t_1)$ (respectivement $\mathcal{B}(t_k)$).

Démontrons tout d'abord le résultat pour $k = 1$. On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{O}(t_1) \arrow[d, "p'=q_1''"] \\ \mathbf{G} \arrow[r, "r"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

où $Z = \{(g, \mathbf{B}') \in \mathbf{G} \times \mathcal{B} \mid ({}^g\mathbf{B}, \mathbf{B}') \in \mathcal{O}(t_1)\}$, $r(g) = {}^g\mathbf{B}$, $s(g, \mathbf{B}') = ({}^g\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ et p est la première projection. On a un isomorphisme $\mathbf{G} \times \mathcal{B}(t_1) \xrightarrow{\sim} Z$, $(g, \mathbf{B}') \mapsto (g, {}^g\mathbf{B}')$, donc p est une fibration triviale de fibre $\mathcal{B}(t_1)$. Puisque r est une fibration localement triviale de fibre $\mathbf{B}$, on en déduit que p' est une fibration localement triviale de fibre $\mathcal{B}(t_1)$ (localement, on a un produit direct).

Le cas de la seconde projection $p'' = q_1'$ se traite de manière symétrique.

Nous traitons maintenant le cas général par récurrence sur k. On considère le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(t_1, \dots, t_k) \arrow[r, "q_k'"] \arrow[d, "q_k''"'] & \mathcal{O}(t_2, \dots, t_k) \arrow[d, "q_{k-1}''"] \\ \mathcal{O}(t_1, \dots, t_{k-1}) \arrow[r, "q_{k-1}'"'] & \mathcal{O}(t_2, \dots, t_{k-1}). \end{tikzcd}$$

Par récurrence, q'_{k-1} est une fibration localement triviale de fibre $\mathcal{B}(t_1)$ et q''_{k-1} est une fibration localement triviale de fibre $\mathcal{B}(t_k)$. Par conséquent, q''_k et q'_k sont des fibrations localement triviales de fibres $\mathcal{B}(t_k)$ et $\mathcal{B}(t_1)$ respectivement (localement on a des produits cartésiens au-dessus d'un ouvert de $\mathcal{O}(t_2, \ldots, t_{k-1})$).

On déduit alors par récurrence que $\mathcal{O}(t_1, \ldots, t_k)$ est normale (proposition 2.2.3) car les variétés de Schubert $\mathcal{B}(t_i)$ sont normales [30, théorème 3].

Si les variétés $\mathcal{O}(t_i)$ sont lisses, les variétés $\mathcal{B}(t_i)$ le sont aussi d'après le lemme 2.2.9 et on déduit par récurrence que $\mathcal{O}(t_1, \ldots, t_k)$ est lisse (proposition 2.2.3). □

2.2.14. Nous allons maintenant généraliser l'idée de [5,8] consistant à associer une variété à un élément de B^+ au cas d'éléments de $\underline{B}^+$. Nous allons voir que la construction de [8] se recolle convenablement.

Pour $t_1, \ldots, t_k \in W \cup \underline{W}$ et $t'_1, \ldots, t'_k \in W$, nous écrirons $(t'_1, \ldots, t'_k) \subset (t_1, \ldots, t_k)$ si pour tout i, on a $t'_i = t_i$ ou $t_i = \underline{w} \in \underline{W}$ et $t'_i \leqslant w$. On a une décomposition en union de sous-variétés localement fermées

$$\mathcal{O}(t_1, \ldots, t_k) = \coprod_{(t'_1, \ldots, t'_k) \subset (t_1, \ldots, t_k)} \mathcal{O}\big(t'_1, \ldots, t'_k\big). \tag{2.2.15}$$

Proposition 2.2.16. *Soient $w, w' \in W$.*

(i) *On a une immersion ouverte canonique $\mathcal{O}(w) \to \mathcal{O}(\underline{w})$.*
(ii) *Si $w \leqslant w'$, alors on a une immersion fermée canonique $\mathcal{O}(\underline{w}) \to \mathcal{O}(\underline{w'})$.*
(iii) *Si $l(ww') = l(w) + l(w')$, alors (p', p'') induit un morphisme canonique $\mathcal{O}(\underline{w}, \underline{w'}) \to \mathcal{O}(\underline{ww'})$ qui se restreint en un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(w, w') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(ww')$.*
(iv) *Si w et w' ont des supports disjoints, alors le morphisme canonique*

$$(p', p'') : \mathcal{O}(\underline{w}, \underline{w'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\underline{ww'})$$

est un isomorphisme.
(v) *Si $l(wv) = l(w) + l(v)$ pour tout $v \leqslant w'$, alors (p', p'') induit un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(w, \underline{w'}) \xrightarrow{\sim} \coprod_{v \leqslant w'} \mathcal{O}(wv)$. De même, si $l(vw') = l(v) + l(w')$ pour tout $v \leqslant w$, alors (p', p'') induit un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(\underline{w}, w') \xrightarrow{\sim} \coprod_{v \leqslant w} \mathcal{O}(vw')$.*
(vi) *Si $wv = vw \geqslant w$ pour tout $v \leqslant w'$, alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{O}(w, \underline{w'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\underline{w'}, w)$$

caractérisé par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(w, \underline{w'}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "(p', p'')"'] & & \mathcal{O}(\underline{w'}, w) \arrow[dl, "(p', p'')"] \\
& \mathcal{O}(\underline{ww'}). &
\end{tikzcd}$$

Preuve. (i), (ii), (iii) sont conséquences immédiates des définitions ou sont des propriétés classiques de l'ordre de Bruhat.

Démontrons (iv). La caractérisation de l'ordre de Bruhat par les suites extraites d'une décomposition réduite montre que $\{v \mid v \leqslant ww'\} = \{v_1v_2 \mid (v_1, v_2) \subset (\underline{w}, \underline{w}')\}$. Comme de tels v_1, v_2 vérifient les hypothèses de (iii), le morphisme est un isomorphisme entre les termes de la décomposition (2.2.15), il est donc bijectif. Il se restreint en un isomorphisme entre les ouverts denses $\mathcal{O}(w, w') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(ww')$, donc il est birationnel. Puisque les variétés considérées sont normales (lemme 2.2.13), c'est un isomorphisme (théorème 2.2.2).

Pour démontrer (v), nous commençons par un lemme.

Lemme 2.2.17. *Soit I un sous-ensemble de S, soit $w \in W$ un élément réduit-I, soit $w' \in W_I$ et soit $v \leqslant ww'$.*

Si $v \geqslant w$, alors $v = ww'_1$ où $w'_1 \leqslant w'$. Sinon, $v = w_1w'_1$ où $w_1 < w$, $w'_1 \leqslant w'$ et $l(w_1w'_1) = l(w_1) + l(w'_1)$.

Preuve. Puisque $v \leqslant ww'$, il existe $v_1 \leqslant w$ et $v'_1 \leqslant w'$ tels que $v = v_1v'_1$. D'après le lemme d'échange, il existe $w_1 \leqslant v_1$ et $w'_1 \leqslant v'_1$ tels que $v = w_1w'_1$ et $l(v) = l(w_1) + l(w'_1)$.

Si $v \ngeqslant w$, alors $w_1 \neq w$, donc $w_1 < w$, d'où la conclusion de l'énoncé dans ce cas.

Supposons maintenant $v \geqslant w$. Comme précédemment, il existe $w_2 \leqslant w_1$ et $w'_2 \leqslant w'_1$ tels que $w = w_2w'_2$ et $l(w) = l(w_2) + l(w'_2)$. Puisque $w'_2 \in W_I$ et w est réduit-I, on a $w'_2 = 1$, donc $w \leqslant w_1$ et finalement $w = w_1$. □

Supposons $l(wv) = l(w) + l(v)$ pour tout $v \leqslant w'$. Alors, w est réduit-I, pour I le support de w'. Il résulte du lemme 2.2.17 que le complémentaire de $\coprod_{w'_1 \leqslant w'} \mathcal{O}(ww'_1)$ dans $\mathcal{O}(\underline{ww'})$ est l'union des $\mathcal{O}(w_1w'_1)$ où $w_1 < w$, $w'_1 \leqslant w'$ et $l(w_1w'_1) = l(w_1) + l(w'_1)$. Comme les longueurs s'ajoutent, si $w_2 \leqslant w_1$ et $w'_2 \leqslant w'_1$ alors $w_2w'_2 \leqslant w_1w'_1$ donc cette union est une sous-variété fermée. Par conséquent, $\coprod_{w'_1 \leqslant w'} \mathcal{O}(ww'_1)$ est une sous-variété ouverte de la variété normale $\mathcal{O}(\underline{ww}')$, donc c'est une variété normale. On conclut comme précédemment que $(p', p'') : \mathcal{O}(w, \underline{w}') \to \coprod_{w'_1 \leqslant w'} \mathcal{O}(ww'_1)$ est un isomorphisme.

La seconde partie de (v) se démontre de la même manière.

L'hypothèse de (vi) montre que w est réduit-I et I-réduit, où I est le support de w'. L'assertion (vi) est alors conséquence immédiate de (v). □

La proposition 2.2.16 fournit, par produits fibrés, des morphismes canoniques pour les variétés associées à des suites. Par exemple, (vi) fournit un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}\big(t_1, \ldots, t_r, w, \underline{w}', t_{r+1}, \ldots, t_k\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\big(t_1, \ldots, t_r, \underline{w}', w, t_{r+1}, \ldots, t_k\big)$$

pour $t_1, \ldots, t_k \in W \cup \underline{W}$. Les isomorphismes donnés par les (iii), (iv) et (vi) de la proposition 2.2.16 sont associés à chacun des trois types de relations de $\underline{B}^+$: en composant ces isomorphismes on dispose donc d'isomorphismes entre deux variétés $\mathcal{O}(t_1, \ldots, t_k)$ et $\mathcal{O}(t'_1, \ldots, t'_k)$ lorsque $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k$ et $\mathbf{t}' = \mathbf{t}'_1 \cdots \mathbf{t}'_{k'}$ sont égaux dans $\underline{B}^+$.

Proposition-Définition 2.2.18. *Soit $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$. Le système d'isomorphismes entre variétés $\mathcal{O}(t'_1, \ldots, t'_k)$ telles que $\mathbf{t}'_1 \cdots \mathbf{t}'_k = \mathbf{t}$ est transitif et on note $\mathcal{O}(\mathbf{t})$ la limite projective du système. Elle est munie d'une application (première et dernière projections, que nous notons (p', p'')) vers $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Preuve. Lorsque $\mathbf{t} \in B^+$, le résultat est dû à Deligne [8, application 2].

Dans le cas général, les items (iv) et (vi) de la proposition 2.2.16 montrent que les isomorphismes entre variétés $\mathcal{O}(t_1,\dots,t_k)$ correspondant à une relation de $\underline{B}^+$ sont déterminés par des isomorphismes correspondants donnés par la proposition 2.2.16(iii) entre les termes de la décomposition (2.2.15) de ces variétés, c'est-à-dire des isomorphismes dont la transitivité a été démontrée par Deligne. On en déduit donc la transitivité du système d'isomorphismes en général. $\square$

Chaque décomposition $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_k$ avec $\mathbf{t}_i\in\mathbf{W}\cup\underline{\mathbf{W}}$ fournit un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(\mathbf{t})\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(t_1,\dots,t_k)$.

L'action de F sur $\mathcal{B}$ induit un morphisme $\mathcal{O}(t_1,\dots,t_k)\to\mathcal{O}(F(t_1),\dots,F(t_k))$. Ces morphismes sont compatibles aux isomorphismes canoniques de la proposition 2.2.16. Par conséquent, F induit un morphisme $\mathcal{O}(\mathbf{t})\to\mathcal{O}(F(\mathbf{t}))$, pour tout $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$.

2.3. *Variétés de Deligne–Lusztig généralisées*

2.3.1. Nous allons maintenant introduire les variétés de Deligne–Lusztig attachées aux éléments du monoïde de tresses et des compactifications partielles de ces variétés associées aux éléments du monoïde de tresses complété. Ces variétés sont l'objet principal d'étude de cet article.

Définition 2.3.2. Soit $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$ et soit $\Gamma\subseteq\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ le graphe de F. Nous appelons « variété de Deligne–Lusztig » attachée à $\mathbf{t}$ la variété

$$\mathbf{X}(\mathbf{t})=\mathcal{O}(\mathbf{t})\times_{(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}\Gamma=\bigl\{x\in\mathcal{O}(\mathbf{t})\mid p''(x)=F\bigl(p'(x)\bigr)\bigr\}.$$

De même, pour $t_1,\dots,t_k\in W\cup\underline{W}$, nous posons

$$\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)=\bigl\{(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k)\mid\bigl(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k,F(\mathbf{B}_1)\bigr)\in\mathcal{O}(t_1,\dots,t_k)\bigr\}.$$

Nous noterons parfois $\mathbf{X}_{\mathbf{G}}(\mathbf{t})$ (respectivement $\mathbf{X}(\mathbf{t},F)$, respectivement $\mathbf{X}_{\mathbf{G}}(\mathbf{t},F)$) pour préciser le groupe (respectivement l'isogénie, respectivement le groupe et l'isogénie) utilisé dans la définition de la variété.

Les variétés de Deligne–Lusztig sont munies d'une action de $\mathbf{G}^F$: l'action diagonale de $\mathbf{G}$ sur $\mathcal{B}^{k+1}$ se restreint en une action de $\mathbf{G}^F$ sur $\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)$.

L'endomorphisme F induit un morphisme $\mathbf{X}(\mathbf{t})\to\mathbf{X}(F(\mathbf{t}))$ pour tout $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$. En particulier, les variétés de Deligne–Lusztig sont munies d'une action de F^δ. Si $\mathbf{t}\in(\underline{B}^+)^F$, alors $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ est munie d'une action de F.

Notons que, de même que pour les variétés $\mathcal{O}(\mathbf{t})$, chaque décomposition $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_k$ avec $\mathbf{t}_i\in\mathbf{W}\cup\underline{\mathbf{W}}$ fournit un isomorphisme canonique

$$\mathbf{X}(\mathbf{t})\xrightarrow{\sim}\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k).$$

Par composition, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)\xrightarrow{\sim}\mathbf{X}\bigl(t'_1,\dots,t'_{k'}\bigr)$$

pour $t'_1,\dots,t'_{k'}\in W\cup\underline{W}$ tels que $\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_k=\mathbf{t}'_1\cdots\mathbf{t}'_{k'}$.

Pour $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, la variété $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ est isomorphe à la variété de Deligne–Lusztig « ordinaire » [9, définition 1.4]

$$\mathbf{X}(\mathbf{w}) \underset{p'}{\xrightarrow{\sim}} \mathbf{X}(w) = \{\mathbf{B}' \in \mathcal{B} \mid \mathbf{B}' \xrightarrow{w} F(\mathbf{B}')\} \xrightarrow{\sim} \{g\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Plus généralement, nous pouvons identifier les variétés de Deligne–Lusztig associées à des éléments du monoïde de tresses à des variétés de Deligne–Lusztig ordinaires pour un autre groupe et une autre isogénie en appliquant la proposition suivante dans le cas où les $\mathbf{t}_i$ sont dans $\mathbf{W}$ (*cf.* [23, §1.18]).

Proposition 2.3.3. *Soit F_1 l'isogénie de $\mathbf{G}^k$ définie par*

$$F_1(g_1, \ldots, g_k) = (g_2, \ldots, g_k, F(g_1)).$$

Soit $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k \in \underline{B}^+$. Alors, on a un isomorphisme entre $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ et la variété $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^k}(\mathbf{t}', F_1)$ attachée à l'élément $\mathbf{t}' = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_k)$ du monoïde de tresses complété $(\underline{B}^+)^k$ du groupe de Weyl de $\mathbf{G}^k$. L'action de F^δ correspond par cet isomorphisme à l'action de $F_1^{k\delta}$ et l'action de $\mathbf{G}^F$ à celle de $(\mathbf{G}^k)^{F_1}$.

Preuve. Notons $\mathcal{O}_{\mathbf{G}^k}(\mathbf{t}')$ la variété associée à $\mathbf{t}'$ dans le groupe $\mathbf{G}^k$. Soit $\mathbf{t}' = \mathbf{t}'_1 \cdots \mathbf{t}'_l$ une décomposition en éléments de $\mathbf{W}^k \cup \underline{\mathbf{W}}^k$ avec $\mathbf{t}'_i = (\mathbf{t}'_{i,1}, \ldots, \mathbf{t}'_{i,k})$ et $\mathbf{t}'_{i,j} \in \mathbf{W} \cup \underline{\mathbf{W}}$. On a un isomorphisme de la variété

$$\begin{aligned}&\{(x_1, \ldots, x_{l+1}) \in \mathcal{O}_{\mathbf{G}^k}(t'_1, \ldots, t'_l)\\ &\quad \mid x_1 = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k),\ x_{l+1} = (\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_k, \mathbf{B}_{k+1})\}\ ;\end{aligned}$$

vers $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(t'_{1,1}, \ldots, t'_{l,k})$ donné par

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_{l+1})\\ &\quad \mapsto (p_1(x_1), \ldots, p_1(x_{l+1}) = p_2(x_1), \ldots, p_2(x_{l+1}), \ldots, p_k(x_1), \ldots, p_k(x_{l+1}))\end{aligned}$$

où $p_i : \mathbf{G}^k \to \mathbf{G}$ est la i-ème projection.

Comme $\mathbf{t} = \mathbf{t}'_{1,1} \cdots \mathbf{t}'_{l,k}$, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}(t'_{1,1}, \ldots, t'_{l,k}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\mathbf{t})$. La variété $X(\mathbf{t})$ étant la sous-variété de $\mathcal{O}(\mathbf{t})$ définie par $p''(x) = F(p'(x))$, on obtient l'isomorphisme annoncé.

Par cette identification, l'action de $F_1^{k\delta}$ correspond bien à celle de F^δ et celle de $(\mathbf{G}^k)^{F_1}$ à celle de $\mathbf{G}^F$. □

2.3.4. La proposition suivante montre que pour $\mathbf{b} \in B^+$, les variétés $\mathbf{X}(\mathbf{b})$ sont lisses et montre aussi que si $\mathbf{b} = \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ est une décomposition en produit d'éléments de $\mathbf{W}$ d'un élément de B^+ telle que $\mathcal{O}(\underline{w}_i)$ est lisse pour chaque i, alors $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{w}}_1 \cdots \underline{\mathbf{w}}_k)$ est une compactification lisse de $\mathbf{X}(\mathbf{b})$.

Proposition 2.3.5. *Soit $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$; alors, la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ est normale. De plus, si pour tout élément $\underline{\mathbf{w}}$ de $\underline{\mathbf{W}}$ qui intervient dans une décomposition de $\mathbf{t}$, la variété $\mathcal{O}(\underline{w})$ est lisse, alors, la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ est lisse.*

Preuve. En considérant les éléments $(1, \ldots, 1, \mathbf{t}_i, 1, \ldots, 1) \in (\underline{B}^+)^k$, la proposition 2.3.3 ramène la preuve au cas où on a $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k$ avec $t_i \in W \cup \underline{W}$ tel que pour tout $(t'_1, \ldots, t'_k) \subset (t_1, \ldots, t_k)$ avec $t'_1, \ldots, t'_k \in W$, on a $l(t'_1 \cdots t'_k) = \sum_i l(t'_i)$.

On note $\mathbf{BtB} = \coprod_{(t'_1,\ldots,t'_k)} \mathbf{B}t'_1 \cdots t'_k\mathbf{B}$ et $\mathcal{B}(\mathbf{t}) = \coprod_{(t'_1,\ldots,t'_k)} \mathcal{B}(t'_1, \ldots, t'_k)$, où $(t'_1, \ldots, t'_k) \subset (t_1, \ldots, t_k)$ et $t'_1, \ldots, t'_k \in W$. On suit la preuve de [25, lemme 4.3]. Soit $\mathcal{L} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $g \mapsto g^{-1}F(g)$ l'application de Lang : c'est l'application quotient par $\mathbf{G}^F$, pour son action par multiplication à gauche. C'est donc un revêtement étale de groupe de Galois $\mathbf{G}^F$. Soit $r : \mathbf{G} \to \mathcal{B}$, $g \mapsto {}^g\mathbf{B}$. On a $r^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{t})) = \mathbf{BtB}$ et $r^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{t})) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{BtB})$, où on a identifié $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ à une sous-variété de $\mathcal{B}$ via p'.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{BtB}) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "r"'] & \mathbf{BtB} \arrow[d, "r"'] \\ \mathbf{X}(\mathbf{t}) & \mathcal{B}(\mathbf{t}). \end{tikzcd}$$

Rappelons que r est une fibration localement triviale de fibre $\mathbf{B}$ (*cf.* preuve du lemme 2.2.9). Par conséquent, la normalité ou la lissité de $\mathcal{B}(\mathbf{t})$ est équivalente à celle de $\mathbf{BtB}$ (proposition 2.2.3). Il en est de même pour $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ et $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{BtB})$ (proposition 2.2.4). La proposition résulte alors de [30, théorème 3] et du lemme 2.2.9. □

Notons que, puisque $\mathcal{O}(\underline{s})$ est lisse lorsque $s \in S$ (*cf.* corollaire 2.2.10), l'hypothèse de la proposition 2.3.5 sera vérifiée si les seuls éléments de $\underline{\mathbf{W}}$ qui interviennent dans $\mathbf{t}$ sont de la forme $\underline{\mathbf{s}}$ où $s \in S$.

Proposition 2.3.6. *Soit* $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$.

(i) *La variété* $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ *est de dimension* $l(\mathbf{t})$ *et ses composantes connexes sont irréductibles.*
(ii) *Si* $\mathbf{t} \in B^+$, *alors* $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ *est quasi-affine.*
(iii) *Si* $\mathbf{t} \in B^+$ *et* $q \geqslant h$ *où* h *est le nombre de Coxeter de* $\mathbf{G}$, *alors* $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ *est affine.*
(iv) *Si* $\mathbf{t}$ *est un produit d'éléments de* $\underline{\mathbf{W}}$, *alors* $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ *est projective.*

Preuve. Soit $\mathbf{b}$ l'élément du monoïde de tresses produit des éléments obtenus en remplaçant dans $\mathbf{t}$ chaque élément $\underline{\mathbf{w}}$ par $\mathbf{w}$. Alors, $\mathbf{X}(\mathbf{b})$ est un ouvert dense de $\mathbf{X}(\mathbf{t})$; d'autre part, la dimension de $\mathcal{O}(\mathbf{b})$ est $l(\mathbf{b}) + \dim \mathcal{B}$ et on conclut que $\dim \mathbf{X}(\mathbf{t}) = l(\mathbf{t})$ en utilisant que l'intersection de Γ (qui est de dimension $\dim \mathcal{B}$) avec $\mathcal{O}(\mathbf{b})$ est transverse.

La proposition 2.3.3 ramène (ii) au cas d'une variété de Deligne–Lusztig ordinaire et le résultat est alors [19, théorème 2.3]. De même, (iii) se déduit du cas des variétés ordinaires [9, théorème 9.7], le nombre de Coxeter de $\mathbf{G}^k$ étant le même que celui de $\mathbf{G}$.

Le point (iv) est immédiat, puisque $\mathcal{O}(\mathbf{t})$ est projective dans ce cas. □

2.3.7. La proposition suivante (*cf.* [22, Lemma 3]) décrit les variétés associées à une suite d'éléments contenus dans un sous-groupe parabolique F-stable du groupe de Weyl comme induites à partir de variétés associées à un sous-groupe de Levi. Pour $I \subset S$, on note $\mathbf{P}_I$ le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}W_I\mathbf{B}$, on note $\mathbf{U}_I$ son radical unipotent, on note $\mathbf{L}_I$ le complément de Levi contenant $\mathbf{T}$ et on note $\mathbf{B}_I$ le sous-groupe de Borel $\mathbf{B} \cap \mathbf{L}_I$ de $\mathbf{L}_I$. Rappelons que si $\mathbf{B}_1$

est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}_I$, alors $\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$. On note $p_{\mathbf{L}_I}$ la projection de $\mathbf{P}_I$ sur $\mathbf{L}_I \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_I/\mathbf{U}_I$.

Proposition 2.3.8. *Soit $I \subset S$ une partie F-stable et soient $t_1, \ldots, t_k \in W_I \cup \underline{W}_I$. Alors, l'application*

$$\mathbf{G}^F/\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(t_1, \ldots, t_k) \to \mathbf{X}_{\mathbf{G}}(t_1, \ldots, t_k),$$
$$x\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k) \mapsto \left({}^x(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I), \ldots, {}^x(\mathbf{B}_k\mathbf{U}_I)\right)$$

définit un isomorphisme de variétés compatible avec l'action de $\mathbf{G}^F \times F^m$ pour tout m tel que F^m fixe $(t_1, \ldots, t_k)$.

Preuve. Le morphisme γ de l'énoncé est compatible à l'action de $\mathbf{G}^F \times F^m$ pour m comme ci-dessus. Soit $l_i \in \mathbf{L}_I$ tel que $\mathbf{B}_i = {}^{l_i}\mathbf{B}_I$. Le morphisme peut alors se réécrire :

$$x\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} \left({}^{l_1}\mathbf{B}_I, \ldots, {}^{l_k}\mathbf{B}_I\right) \mapsto \left({}^{xl_1}\mathbf{B}, \ldots, {}^{xl_k}\mathbf{B}\right).$$

Nous allons montrer que γ est bijectif. Considérons l'application

$$\left\{(g_1, \ldots, g_k) \in \mathbf{G}^k \mid g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{B}t_i\mathbf{B},\ i \neq k;\ g_k^{-1}F(g_1) \in \mathbf{B}t_k\mathbf{B}\right\}$$
$$\to \mathbf{G}^F/\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} \left\{(l_1, \ldots, l_k) \in \mathbf{L}_I^k \mid l_i^{-1}l_{i+1} \in \mathbf{B}_I t_i \mathbf{B}_I,\ i \neq k;\ l_k^{-1}F(l_1) \in \mathbf{B}_I t_k \mathbf{B}_I\right\},$$

donnée par

$$(g_1, \ldots, g_k) \mapsto x\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} (l_1, \ldots, l_k),$$

où $l_1^{-1}F(l_1) = p_{\mathbf{L}_I}(g_1^{-1}F(g_1))$, $l_i = l_{i-1}p_{\mathbf{L}_I}(g_{i-1}^{-1}g_i)$ pour $i = 2, \ldots, k$ et $x\mathbf{U}_I^F = \mathbf{G}^F \cap g_1 l_1^{-1}\mathbf{U}_I$.

On a $g_1^{-1}F(g_1) = g_1^{-1}g_2g_2^{-1}\cdots g_k^{-1}F(g_1) \in \mathbf{L}_I\mathbf{U}_I$ et $g_1 l_1^{-1} \in \mathbf{G}^F\mathbf{U}_I$, donc l'application est bien définie : l_1 est défini à multiplication par $l \in \mathbf{L}_I^F$ à gauche près. Mais alors, tous les l_i sont multipliés par l à gauche et donc x par l^{-1} à droite.

L'action de $\mathbf{B}$ par multiplication à droite sur les g_i est transportée par cette application sur l'action de $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}/\mathbf{U}_I$ par multiplication à droite sur les l_i. On a donc une application induite

$$f : \mathbf{X}_{\mathbf{G}}(t_1, \ldots, t_k) \to \mathbf{G}^F/\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(t_1, \ldots, t_k)$$

qui est un inverse à gauche de γ. Puisque $xl_1 \in g_1\mathbf{B}$ et $g_i l_i^{-1}\mathbf{U}_I = g_{i-1}l_{i-1}^{-1}\mathbf{U}_I$ pour $i \geqslant 2$, on a $xl_i \in g_i\mathbf{B}$ pour tout i. Par conséquent, f est inverse à droite de γ.

Le morphisme produit $(x, l_1, \ldots, l_k) \mapsto (xl_1, \ldots, xl_k) : \mathbf{G}^F \times \mathbf{G}^k \to \mathbf{G}^k$ est séparable. Il le reste après passage au quotient par $\mathbf{U}_I^F \times \mathbf{B}_I^k$ puis par $\mathbf{L}_I^F$ et enfin par $\mathbf{U}_I^k$ à l'arrivée. Par restriction à la sous-variété fermée $\mathbf{X}_{\mathbf{G}}(t_1, \ldots, t_k)$ et à son image inverse $\mathbf{G}^F/\mathbf{U}_I^F \times_{\mathbf{L}_I^F} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(t_1, \ldots, t_k)$, le morphisme reste séparable.

Le morphisme γ étant bijectif, séparable et la variété d'arrivée étant normale (proposition 2.3.5), c'est bien un isomorphisme (théorème 2.2.2). $\square$

Nous allons maintenant introduire une technique (proposition 2.3.13) qui nous permettra d'étudier par récurrence les variétés de Deligne–Lusztig (généralisées) et qui généralise le cas particulier de l'énoncé précédent où tous les t_i sont dans $\mathbf{W}_I$.

Pour cela nous avons besoin de deux lemmes sur le monoïde de tresses.

Lemme 2.3.9. *Soient* $\mathbf{w} \in B^+$ *et* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *tels que* ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{s} \in B^+$ *et soit* $\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ *la forme normale de* $\mathbf{w}$. *Alors, pour tout* i*, on a* ${}^{\mathbf{w}_i \cdots \mathbf{w}_k}\mathbf{s} \in \mathbf{S}$.

Preuve. Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur k. L'élément ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{s} \in B^+$ est de longueur 1, donc ${}^{\mathbf{w}}\mathbf{s} = \mathbf{t} \in \mathbf{S}$. On a $\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k\mathbf{s} = \mathbf{t}\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$. Par [28, lemme 4.6], il existe $\mathbf{w}'_1 \preccurlyeq \mathbf{w}_1$ tel que $\alpha(\mathbf{t}\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k) = \mathbf{t}\mathbf{w}'_1$. L'égalité précédente montre que $\mathbf{w}_1 \preccurlyeq \alpha(\mathbf{t}\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k) = \mathbf{t}\mathbf{w}'_1 \preccurlyeq \mathbf{t}\mathbf{w}_1$. Il y a donc deux possibilités :

(i) $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$ et alors $\mathbf{t}\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1\mathbf{s}_1$ pour un certain $\mathbf{s}_1 \in \mathbf{S}$. Alors $\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k\mathbf{s} = \mathbf{s}_1\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k$ et on conclut par récurrence.
(ii) Il existe $\mathbf{s}_1 \in \mathbf{S}$ tel que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{t}\mathbf{w}'_1$. Ici encore on en déduit que $\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k\mathbf{s} = \mathbf{s}_1\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k$ et on conclut de même. □

Lemme 2.3.10. *Soient* $\mathbf{w} \in B^+$ *et* $I, J \subset S$ *tels que* ${}^{\mathbf{w}}B_I \subset B_J$. *Alors,* ${}^{\omega_J(\mathbf{w})}\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$ *et l'image* $\beta(\omega_J(\mathbf{w}))$ *dans* W *est* J*-réduite.*

Preuve. De l'hypothèse il résulte que si $\mathbf{s} \in \mathbf{I}$, alors ${}^{\omega_J(\mathbf{w})}\mathbf{s} \in B_J$. Posons ${}^{\omega_J(\mathbf{w})}\mathbf{s} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B_J^+$ n'ont pas de diviseur à gauche commun (non trivial) (ce qui est toujours possible par [28, corollaire 3.2]). On a $\alpha_J(\mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w})) = \mathbf{b}$, car, si on écrit $\mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w}) = \mathbf{bxy}$ où $\mathbf{bx} = \alpha_J(\mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w}))$, en simplifiant on a $\mathbf{x} \preccurlyeq \omega_J(\mathbf{w})$ ce qui implique $\mathbf{x} = 1$ puisque par définition aucun élément de B_J^+ ne divise $\omega_J(\mathbf{w})$. Donc tout élément $\mathbf{t}$ de $\mathbf{J}$ qui divise $\mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w})$ divise $\mathbf{b}$. Mais comme on a $\mathbf{a}\omega_J(\mathbf{w})\mathbf{s} = \mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w})$, tout $\mathbf{t} \in \mathbf{J}$ qui divise $\mathbf{a}$ divise $\mathbf{b}\omega_J(\mathbf{w})$; le fait que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ n'aient pas de diviseur commun implique alors que $\mathbf{a} = 1$. Alors, $l(\mathbf{b}) = 1$, donc $\mathbf{b} \in \mathbf{J}$ et ${}^{\omega_J(\mathbf{w})}\mathbf{s} \in \mathbf{J}$, ce qui démontre la première assertion.

Nous démontrons la deuxième par récurrence sur le nombre de termes de la forme normale de $\omega_J(\mathbf{w})$, l'assertion étant claire si cette forme n'a qu'un terme. Notons $\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ cette forme normale. Par le lemme 2.3.9, $\mathbf{J}_1 = {}^{\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k}\mathbf{I}$ est inclus dans $\mathbf{S}$. La première partie du lemme montre que ${}^{\omega_{J_1}(\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k)}\mathbf{I} \subset \mathbf{J}_1$, donc $\omega_{J_1}(\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k) = \mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k$. On en déduit que $\beta(\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_k)$ est J_1-réduit par l'hypothèse de récurrence. On est ramené à prouver le résultat dans le cas où la forme normale a deux termes, c'est-à-dire à prouver que si $v_1 \in W$ est un élément J-réduit qui conjugue J_1 sur J et $v_2 \in W$ un élément J_1-réduit qui conjugue I sur J_1 alors v_1v_2 est J-réduit. Un élément s de J ne divise pas v_1, donc divise v_1v_2 si et seulement s'il existe un élément de S qui divise v_2 et dont le conjugué par v_1 vaut s. Ceci est impossible car ${}^{v_1^{-1}}s \in J_1$ et aucun élément de J_1 ne divise v_2. □

Définition 2.3.11. Soit $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{U}$) un complément de Levi (respectivement le radical unipotent) d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $n \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{L}$ est nF-stable. On pose

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{L},\mathbf{U}}(n) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}nF(\mathbf{U})\}$$

(nous noterons $\tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{L},\mathbf{U}}(n, F)$ cette variété quand nous voudrons préciser $\mathbf{G}$ et F). Sur cette variété les groupes $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{L}^{nF}$ agissent respectivement par multiplication à gauche et à droite.

Définition 2.3.12. Soient $\mathbf{w} \in B^+$ et $I \subset S$ tels que ${}^{\mathbf{w}}F(B_I) = B_I$. On pose $\mathbf{z} = \omega_I(\mathbf{w})$, on note $\mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_k$ la forme normale de $\mathbf{z}$ et on pose $\mathbf{I}_j = {}^{\mathbf{z}_j \cdots \mathbf{z}_k}F(\mathbf{I})$ (on a $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$ et $\mathbf{I}_j \subseteq \mathbf{S}$ par les lemmes 2.3.9 et 2.3.10). Soient $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k$ des relevés dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ de $z_1, \dots, z_k$; on note $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k)$ la variété

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{G}^k}^{\mathbf{L}_{I_1 \times \cdots \times I_k}, \mathbf{U}_{I_1 \times \cdots \times I_k}}\big((\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k), F_1\big)$$

où $F_1(g_1, \dots, g_k) = (g_2, \dots, g_k, F(g_1))$.

Autrement dit,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k) = \big\{&(g_1\mathbf{U}_{I_1}, \dots, g_k\mathbf{U}_{I_k}) \\ &\mid g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{U}_{I_i}\dot{z}_i\mathbf{U}_{I_{i+1}} \text{ pour } i < k \text{ et } g_k^{-1}F(g_1) \in \mathbf{U}_{I_k}\dot{z}_k F(\mathbf{U}_{I_1})\big\}.\end{aligned}$$

Le groupe $\mathbf{G}^F \simeq (\mathbf{G}^k)^{F_1}$ (*cf.* proposition 2.3.3) agit par multiplication à gauche sur cette variété. Soit $\dot{z} = \dot{z}_1 \cdots \dot{z}_k$. La première projection induit un isomorphisme $\mathbf{L}_{I_1 \times \cdots \times I_k}^{(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k)F_1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}_I^{\dot{z}F}$. Ceci fournit une action à droite de $\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}$ sur $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k)$.

Proposition 2.3.13. *Sous les hypothèses et avec les notations de la définition* 2.3.12*, soit* $\mathbf{y} = \alpha_I(\mathbf{w})$ *et soit* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_h$ *une décomposition de* $\mathbf{y}$ *en éléments de* $\mathbf{W}$*. Alors, l'application*

$$\begin{aligned}&\big((g_1\mathbf{U}_{I_1}, \dots, g_k\mathbf{U}_{I_k}), (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_h)\big) \mapsto \big({}^{g_1}(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I), {}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I), \dots, {}^{g_1}(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I), \\ &\quad {}^{g_1}\big({}^{z}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_1}\big), {}^{g_2}\big({}^{z_2 \cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_2}\big), \dots, {}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_k}\big)\big)\end{aligned}$$

définit un isomorphisme

$$\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k) \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y_1, \dots, y_h, \dot{z}F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(y_1, \dots, y_h, z_1, \dots, z_k).$$

Via les isomorphismes canoniques, on en déduit un isomorphisme

$$\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k) \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y}, \dot{z}F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(\mathbf{w})$$

qui ne dépend pas de la décomposition choisie de $\mathbf{y}$ *et qui est compatible avec les actions de* $\mathbf{G}^F$ *et de* F^n *pour tout* n *tel que* I, $\mathbf{y}$ *et* $(\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k)$ *soient* F^n*-stables.*

Preuve. Nous pouvons simplifier la formule du morphisme en introduisant $l \in \mathbf{L}_I$ tel que $\mathbf{B}_1 = {}^l\mathbf{B}_I$ et en posant $l_i = {}^{\dot{z}_i \cdots \dot{z}_k}F(l) \in \mathbf{L}_{I_i}$. On a alors ${}^{z_i \cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_i} = {}^{l_i}\mathbf{B}$ car $\mathbf{B}_{I_i}\mathbf{U}_{I_i} = \mathbf{B}$ et ${}^{z_i \cdots z_k}F(\mathbf{B}_1) = {}^{l_i}({}^{z_i \cdots z_k}F(\mathbf{B}_I)) = {}^{l_i}\mathbf{B}_{I_i}$. Le morphisme s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\big((g_1\mathbf{U}_{I_1}, \dots, g_k\mathbf{U}_{I_k}), (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_h)\big) \\ &\quad \mapsto \big({}^{g_1}(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I), {}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I), \dots, {}^{g_1}(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I), {}^{g_1l_1}\mathbf{B}, {}^{g_2l_2}\mathbf{B}, \dots, {}^{g_kl_k}\mathbf{B}\big).\end{aligned} \tag{$*$}$$

Sous cette forme on vérifie qu'il est à valeurs dans $\mathbf{X}(y_1,\dots,y_h,z_1,\dots,z_k)$; par exemple, en écrivant que $g_i^{-1}g_{i+1}\in \mathbf{U}_{I_i}\dot z_i\mathbf{U}_{I_{i+1}}$ on trouve que

$$(g_il_i)^{-1}(g_{i+1}l_{i+1})\in \mathbf{U}_{I_i}l_i^{-1}\dot z_il_{i+1}\mathbf{U}_{I_{i+1}}\subset \mathbf{B}z_i\mathbf{B}\quad \bigl(\text{car } l_i^{-1}\dot z_il_{i+1}=\dot z_i\bigr),$$

donc $({}^{g_il_i}\mathbf{B},{}^{g_{i+1}l_{i+1}}\mathbf{B})$ est bien dans $\mathcal{O}(z_i)$.

Remarquons maintenant qu'on peut se ramener au cas $k=1$. En effet par la proposition 2.3.3, on a un isomorphisme $\mathbf{X}(\mathbf{w})\xrightarrow{\sim}\mathbf{X}_{\mathbf{G}^k}((\mathbf{y}\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\dots,\mathbf{z}_k),F_1)$ où $(\mathbf{y}\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\dots,\mathbf{z}_k)\in(\mathbf{B}^+)^k$ est un élément dont le $\omega_{I_1\times\cdots\times I_k}$ est $(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\dots,\mathbf{z}_k)\in\mathbf{W}^k$; l'image de $(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_{h+k})\in\mathbf{X}(y_1,\dots,y_h,z_1,\dots,z_k)$ par cet isomorphisme est l'élément de $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^k}((y_1,1,\dots,1),\dots,(y_h,1,\dots,1),(z_1,\dots,z_k),F_1)$ donné par

$$\bigl((\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_{h+2},\dots,\mathbf{B}_{h+k}),(\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_{h+2},\dots,\mathbf{B}_{h+k}),\dots(\mathbf{B}_{h+1},\mathbf{B}_{h+2},\dots,\mathbf{B}_{h+k})\bigr),$$

et on vérifie que cet isomorphisme est compatible avec la formule $(*)$.

Nous sommes donc ramenés au cas où $\mathbf{w}=\mathbf{y}\mathbf{z}$ avec $\mathbf{z}\in\mathbf{W}$, ${}^{\mathbf{z}}\mathbf{I}=\mathbf{I}$; on a $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)=\{g\mathbf{U}_I\mid g^{-1}F(g)\in\mathbf{U}_I\dot zF(\mathbf{U}_I)\}$ et le morphisme qui va de $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)\times_{\mathbf{L}_I^{\dot zF}}\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y_1,\dots,y_h,\dot zF)$ vers $\mathbf{X}(y_1,\dots,y_h,z)$ est donné par

$$\bigl(g\mathbf{U}_I,(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_h)\bigr)\mapsto\bigl({}^g(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I),{}^g(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I),\dots,{}^g(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I),{}^g\bigl({}^zF(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_I\bigr)\bigr).\qquad(**)$$

On se ramène alors au cas $h=1$ en utilisant l'isomorphisme donné par la proposition 2.3.3,

$$\mathbf{X}(\mathbf{w})\xrightarrow{\sim}\mathbf{X}_{\mathbf{G}^h}\bigl((\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_{h-1},\mathbf{y}_h\mathbf{z}),F_1\bigr)$$

(notons que $\mathbf{y}_h\mathbf{z}\in\mathbf{W}$ d'après le lemme 2.3.10) ; on vérifie que cet isomorphisme est compatible avec $(**)$.

Nous sommes donc ramenés au cas $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$, où comme expliqué après la définition 2.3.2, on a $\mathbf{X}(w)\xrightarrow{\sim}\{h\mathbf{B}\mid h^{-1}F(h)\in\mathbf{B}w\mathbf{B}\}$ et $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y,\dot zF)\xrightarrow{\sim}\{l\mathbf{B}_I\mid l^{-1}{}^{\dot z}F(l)\in\mathbf{B}_Iy\mathbf{B}_I\}$. Il s'agit alors de montrer que le morphisme j_w donné par $(g\mathbf{U}_I,l\mathbf{B}_I)\mapsto gl\mathbf{B}$ réalise un isomorphisme $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)\times_{\mathbf{L}_I^{\dot zF}}\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y,\dot zF)\xrightarrow{j_w}\mathbf{X}(w)$.

Or le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}/\mathbf{U}_I\times_{\mathbf{L}_I}\mathbf{L}_I/\mathbf{B}_I \arrow[r, "j"] & \mathbf{G}/\mathbf{B} \\
\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)\times_{\mathbf{L}_I^{\dot zF}}\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y,\dot zF) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j_w"'] & \mathbf{X}(w) \arrow[u, "i_w"']
\end{tikzcd}$$

où i_w est l'inclusion canonique, i l'application induite par les deux inclusions canoniques $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)\hookrightarrow\mathbf{G}/\mathbf{U}_I$ et $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(y,\dot zF)\hookrightarrow\mathbf{L}_I/\mathbf{B}_I$ et où j, donné par la même formule que j_w, est un isomorphisme (il admet comme inverse $g\mathbf{B}\mapsto(g\mathbf{U}_I,\mathbf{B}_I)$). Montrons que i est injectif : si $(h\mathbf{U}_I,l\mathbf{B}_I)$ et $(hl'\mathbf{U}_I,l'l\mathbf{B}_I)$ sont tous deux dans $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z)\times_{\mathbf{L}_I^{\dot zF}}\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y},\dot zF)$ avec $l'\in\mathbf{L}_I$ alors $h^{-1}F(h)$ et $(hl')^{-1}F(hl')$ sont dans $\mathbf{U}_I\dot zF(\mathbf{U}_I)$ et l'intersection $(\mathbf{U}_I{}^{\dot z}F(\mathbf{U}_I))\cap(\mathbf{U}_Il'{}^{\dot z}F(l'^{-1}){}^{\dot z}F(\mathbf{U}_I))$ n'est pas vide, puisqu'elle contient $h^{-1}F(h)\dot z^{-1}$. Or $\mathbf{L}_I\xrightarrow{\sim}\mathbf{U}_I\setminus\mathbf{P}_I{}^zF(\mathbf{P}_I)/{}^{\dot z}F(\mathbf{U}_I)$, donc $l'\in\mathbf{L}_I^{\dot zF}$. Par conséquent, i est une immersion fermée.

Montrons maintenant que j_w est surjectif. Soit $h \in \mathbf{G}$ tel que $h^{-1}F(h) \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$. On a $\mathbf{B}w\mathbf{B} = \mathbf{U}_I\mathbf{B}_I yzF(\mathbf{B}_I)F(\mathbf{U}_I) = \mathbf{U}_I\mathbf{B}_I y\mathbf{B}_I zF(\mathbf{U}_I)$ car ${}^zF(\mathbf{B}_I) = \mathbf{B}_I$. Soit $l' \in \mathbf{B}_I y\mathbf{B}_I$ tel que $h^{-1}F(h) \in \mathbf{U}_I l'\dot{z}F(\mathbf{U}_I)$. Puisque ${}^{\dot{z}}F(\mathbf{L}_I) = \mathbf{L}_I$, il existe $l \in \mathbf{L}_I$ tel que $l^{-1}{}^{\dot{z}}F(l) = l'$. On a alors $h^{-1}F(h) \in l^{-1}\mathbf{U}_I\dot{z}F(\mathbf{U}_I)F(l)$. Soit $g = hl^{-1}$. On a $g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}_I\dot{z}F(\mathbf{U}_I)$, donc $(g,l) \in \tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}) \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y}, \dot{z}F)$. On a donc montré que j_w est surjectif.

On en déduit que j_w s'obtient à partir de j par changement de base, donc c'est un isomorphisme. $\square$

3. Cohomologie

On fixe un nombre premier ℓ différent de p. Pour la commodité de l'exposition, on fixe un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Pour tout $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$, la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ est munie d'actions de $\mathbf{G}^F$ et de F^δ qui commutent. Ces actions sont données par des morphismes propres. Elles induisent donc des actions qui commutent sur les groupes de cohomologie ℓ-adique à support propre $H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Puisque l'endomorphisme F^δ induit une équivalence de sites étales, il agit par un endomorphisme inversible sur la cohomologie. Nous avons donc une représentation du groupe $\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta\rangle$ sur la cohomologie. Nous nous intéressons dans cette partie au $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta\rangle)$-module gradué $H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Nous omettrons dans la suite les coefficients quand ils sont égaux à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et écrirons simplement $H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$.

3.1. Constructions

3.1.1. Pour $\sigma : A \to B$ un morphisme d'algèbres, nous notons σ^* le foncteur de restriction à travers σ de la catégorie des B-modules vers celle des A-modules.

Pour C un complexe et $i \in \mathbb{Z}$, nous notons $C[i]$ le complexe décalé de i crans vers la gauche. Pour k un anneau commutatif et M un $k\langle F^\delta\rangle$-module, nous notons $M(i)$ le $k\langle F^\delta\rangle$-module σ^*M, où $\sigma : k\langle F^\delta\rangle \to k\langle F^\delta\rangle$ est l'automorphisme qui envoie F^δ sur $q^{-i\delta}F^\delta$.

3.1.2. Nous allons passer en revue un certain nombre de propriétés des $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta\rangle)$-modules $H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$.

La proposition 2.3.8 admet le corollaire suivant (la cohomologie « s'induit » d'un sous-groupe de Levi au groupe).

Corollaire 3.1.3. *Soit I une partie F-stable de S. Alors, pour toute suite $t_1, \ldots, t_k$ d'éléments de $W_I \cup \underline{W}_I$, on a isomorphisme de $(\mathbf{G}^F \times F^\delta)$-modules gradués*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I}\big(H^*_c\big(\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(t_1, \ldots, t_k)\big)\big) \xrightarrow{\sim} H^*_c\big(\mathbf{X}_{\mathbf{G}}(t_1, \ldots, t_k)\big).$$

Nous avons noté $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I}$ l'induction de Harish-Chandra définie sur les $\mathbf{L}_I^F$-modules par $\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}_I^F} \circ p^*_{\mathbf{L}_I^F}$ où $p_{\mathbf{L}_I^F}$ est la restriction de $p_{\mathbf{L}_I}$ en un morphisme de groupes $\mathbf{P}_I^F \to \mathbf{L}_I^F$.

3.1.4. Nous généralisons maintenant une partie de [9, théorème 1.6]. Pour $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in \underline{B}^+$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}'\mathbf{t}'') \xrightarrow{\sim} \big\{(a,b) \in \mathcal{O}(\mathbf{t}') \times \mathcal{O}(\mathbf{t}'') \mid p''(b) = F\big(p'(a)\big) \text{ et } p''(a) = p'(b)\big\}.$$

Définition 3.1.5. Pour $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in \underline{B}^+$, nous définissons le morphisme $D_{\mathbf{t}'} : \mathbf{X}(\mathbf{t}'\mathbf{t}'') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}''F(\mathbf{t}'))$ comme la restriction du morphisme $\mathcal{O}(\mathbf{t}') \times \mathcal{O}(\mathbf{t}'') \to \mathcal{O}(\mathbf{t}'') \times \mathcal{O}(F(\mathbf{t}'))$, $(a, b) \mapsto (b, F(a))$.

Choisissons des décompositions $\mathbf{t}' = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k$ et $\mathbf{t}'' = \mathbf{t}_{k+1} \cdots \mathbf{t}_n$ avec $t_i \in W \cup \underline{W}$. Alors, le morphisme $D_{\mathbf{t}'} : \mathbf{X}(t_1, \dots, t_n) \to \mathbf{X}(t_{k+1}, \dots, t_n, F(t_1), \dots, F(t_k))$ est donné par $D_{\mathbf{t}'}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n) = (\mathbf{B}_{k+1}, \dots, \mathbf{B}_n, F(\mathbf{B}_1), \dots, F(\mathbf{B}_k))$.

Proposition 3.1.6. *Soient $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in \underline{B}^+$. Alors, le morphisme $D_{\mathbf{t}'}$ induit une équivalence de sites étales $\mathbf{X}(\mathbf{t}'\mathbf{t}'') \xrightarrow{D_{\mathbf{t}'}} \mathbf{X}(\mathbf{t}''F(\mathbf{t}'))$. Il induit donc un isomorphisme de $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$-modules gradués $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}'\mathbf{t}'')) \xrightarrow{\sim} H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}''F(\mathbf{t}')))$.*

Preuve. La démonstration de [9, theorem 1.6 (case 1)] s'applique ici. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}(\mathbf{t}'\mathbf{t}'') \arrow[rr, "D_{\mathbf{t}'}"] \arrow[d, "F"'] & & \mathbf{X}(\mathbf{t}''F(\mathbf{t}')) \arrow[d, "F"] \arrow[dll, "D_{\mathbf{t}''}"'] \\
\mathbf{X}(F(\mathbf{t}')F(\mathbf{t}'')) \arrow[rr, "D_{F(\mathbf{t}')}"'] & & \mathbf{X}(F(\mathbf{t}'')F^2(\mathbf{t}')).
\end{tikzcd}$$

Puisque F^δ est une équivalence de sites étales, F aussi en est une ; les flèches verticales sont donc des équivalences de sites étales, il en est alors de même des flèches horizontales. □

Deux éléments $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$ de B sont *F-conjugués* s'il existe $\mathbf{w} \in B$ tel que $\mathbf{t}' = \mathbf{w}^{-1}\mathbf{t}F(\mathbf{w})$. La proposition 3.1.6 montre l'invariance de la cohomologie $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ pour une forme particulière de F-conjugaison.

Conjecture 3.1.7. *La classe d'isomorphisme du $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$-module gradué $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ ne dépend que de la F-classe de conjugaison de $\mathbf{t} \in B^+$.*

Nous le prouverons pour $\mathbf{G}$ de type A_2, *cf.* corollaire 4.2.6.

Proposition 3.1.8. *Soit σ une isogénie sur $\mathbf{G}$ commutant à F. Notons encore σ l'automorphisme correspondant de S et celui qui s'en déduit sur $\underline{B}^+$. Alors, pour tout $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$, l'isogénie σ induit un isomorphisme de $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$-modules gradués $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t})) \xrightarrow{\sim} \sigma^* H_c^*(\mathbf{X}(\sigma(\mathbf{t})))$.*

Preuve. La proposition se déduit du fait qu'une isogénie induit une équivalence de sites étales. □

3.2. Dévissages

3.2.1. Pour $j : \mathbf{U} \to \mathbf{X}$ l'inclusion d'une sous-variété localement fermée, on notera $\Lambda_\mathbf{U}$ le faisceau sur $\mathbf{X}$ donné par $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Si j est une immersion ouverte et $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ est l'immersion fermée complémentaire, on a une suite exacte de faisceaux sur $\mathbf{X}$

$$0 \to \Lambda_\mathbf{U} \to \Lambda_\mathbf{X} \to \Lambda_\mathbf{Z} \to 0,$$

donc une suite exacte longue

$$\cdots \to H_c^i(\mathbf{U}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H_c^i(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H_c^i(\mathbf{Z}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H_c^{i+1}(\mathbf{U}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \cdots.$$

Par faisceau sur une variété $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ nous entendrons un faisceau $\mathbf{G}^F$-équivariant et il en sera de même pour les morphismes.

Proposition 3.2.2. *Soient $w \in W$ et $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$. Alors la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ admet une filtration par des sous-variétés fermées $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{X}_{l(w)} = \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ où $\mathbf{X}_i = \coprod_{v \leqslant w,\, l(v) \leqslant i} \mathbf{X}(\mathbf{t}\mathbf{v}\mathbf{t}')$. De plus $\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1} = \coprod_{v \leqslant w,\, l(v)=i} \mathbf{X}(\mathbf{t}\mathbf{v}\mathbf{t}')$ est une décomposition en union de composantes connexes. On en déduit une filtration du faisceau constant $\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}$ dont les quotients successifs sont*

$$\Lambda_{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}} = \bigoplus_{v \leqslant w,\, l(v)=i} \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\mathbf{v}\mathbf{t}')}.$$

Preuve. On obtient la filtration de $\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}$ à partir des suites exactes associées aux décompositions « ouvert-fermé » provenant de la stratification en sous-variétés fermées. □

Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $ws < w$. Alors, le morphisme $(p', p''): \mathcal{O}(\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}) \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ se factorise par l'immersion fermée $\mathcal{O}(\underline{\mathbf{w}}) \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Par produit fibré et restriction, on en déduit un morphisme canonique $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ pour $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$.

Proposition 3.2.3. *Soient $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$, $w \in W$ et $s \in S$ tels que $ws < w$.*

(i) *Soit $\pi: \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ l'application canonique. Alors,*

$$R\pi_! \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')} \simeq \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}[-2](-1).$$

En particulier, pour tout i, on a un isomorphisme de $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$-modules :

$$H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')\big) \simeq H_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')\big)(-1).$$

(ii) *Soit $\pi': \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ l'application canonique. Alors,*

$$R\pi'_! \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \simeq \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}[-2](-1) \oplus \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}.$$

En particulier, pour tout i, on a un isomorphisme de $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$-modules :

$$H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')\big) \simeq H_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')\big)(-1) \oplus H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')\big).$$

Preuve. L'application π provient par changement de base par $\Gamma \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ (*cf.* définition 2.3.2) de l'application canonique analogue $\tilde{\pi}: \mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}') \to \mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$. La deuxième projection $\mathcal{O}(\mathbf{s}) \xrightarrow{p''} \mathcal{B}$ est une fibration en droites affines. On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}') \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \mathcal{O}(\mathbf{s}) \arrow[d, "p''"] \\ \mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}') \arrow[r] & \mathcal{B}. \end{tikzcd}$$

Par conséquent, le morphisme $\tilde{\pi}$ est une fibration en droites affines. Par changement de base, on déduit (i).

De même l'application π' provient par changement de base d'une application analogue $\tilde{\pi}'$. La restriction de $\tilde{\pi}'$ au fermé $\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ est un isomorphisme et la restriction à $\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{s}\mathbf{t}')$ est $\tilde{\pi}$. La suite exacte « ouvert-fermé »

$$0 \to \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{s}\mathbf{t}')} \to \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \to \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')} \to 0$$

devient donc, par application de $R\tilde{\pi}'_!$, un triangle distingué

$$\Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}[-2](-1) \to R\tilde{\pi}'_! \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \to \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')} \rightsquigarrow .$$

Le morphisme associé $\Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')} \to \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}[-1](-1)$ est nul (il correspond à un élément de $\operatorname{Ext}^{-1}(\Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}, \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}(-1)))$, d'où

$$R\tilde{\pi}'_! \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \simeq \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}[-2](-1) \oplus \Lambda_{\mathcal{O}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')}$$

et (ii) s'en déduit par changement de base. $\square$

Lorsque $sw < w$, on a une proposition analogue pour les applications canoniques $\mathbf{X}(\mathbf{t}\mathbf{s}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$ et $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{s}}\ \underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}')$.

3.2.4. Soit $a : \mathbf{X} \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ une variété sur $\mathbb{F}_q$ de dimension n. Suivant Deligne [7, §3.3.11], nous dirons que la variété $\mathbf{X}$ est rationnellement lisse si le morphisme $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_X(n)[2n] \to Ra^! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ adjoint du morphisme trace est un isomorphisme. En particulier, une variété lisse est rationnellement lisse. Les conjectures de Weil sur les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius s'appliquent aux variétés rationnellement lisses.

La variété $\mathbf{X}$ est rationnellement lisse si pour tout point fermé $i_x : \{x\} \to \mathbf{X}$, le morphisme canonique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(n)[2n] \to Ri_x^! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est un isomorphisme, i.e., si $H^i_{\langle x \rangle}(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = 0$ pour $i \neq n$ et $H^{2n}_{\langle x \rangle}(\mathbf{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-n)$ [20, définition A1.a]. Cela implique que le faisceau constant décalé $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[n]$ est pervers [1, §4.0].

Proposition 3.2.5. *Soit $w \in W$. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *$\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse.*
(ii) *$\mathbf{X}(\underline{w})$ est rationnellement lisse.*
(iii) *Pour tout $y \leqslant w$ le polynôme de Kazhdan–Lusztig $P_{y,w}$ vaut* 1.
(iv) *Le polynôme de Kazhdan–Lusztig $P_{1,w}$ vaut* 1.
(v) *La variété de Schubert $\overline{\mathcal{B}(w)}$ est rationnellement lisse.*

Preuve. Montrons d'abord que (i) et (v) sont équivalents.

Restreignons le diagramme de la preuve du lemme 2.2.9. On obtient

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(\mathcal{O}(\underline{w})) & \xrightarrow{q} & \mathcal{O}(\underline{w}) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ r^{-1}(\overline{\mathcal{B}(w)}) & \xrightarrow{r} & \overline{\mathcal{B}(w)} \end{array}$$

où les morphismes p, q, r sont des fibrations localement triviales, de fibres respectives $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$. Par conséquent la lissité rationnelle de $\mathcal{O}(\underline{w})$ est équivalente à celle de $\overline{\mathcal{B}(w)}$ (localement, on compare la lissité rationnelle d'une variété et celle du produit de cette variété par une variété lisse).

D'après [20, théorème A2], la variété $\overline{\mathcal{B}(w)}$ est rationnellement lisse au point $b \in \mathcal{B}(y) \subset \overline{\mathcal{B}(w)}$ si et seulement si $P_{y,w} = 1$. La sous-variété fermée $\mathcal{S}$ des points non rationnellement lisses de $\overline{\mathcal{B}(w)}$ est donc l'union des $\mathcal{B}(y)$ tels que $P_{y,w} \neq 1$. L'équivalence de (v), (iii) et (iv) en résulte, car $\mathcal{S}$ étant fermée, on a $\mathcal{B}(1) \subset \mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{S}$ est non vide.

Les fibrations de la preuve de la proposition 2.3.5 montrent que (ii) et (v) sont équivalents (*cf.* [25, preuve du lemme 4.3]). □

Si x est une indéterminée ou un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, nous notons $\mathcal{H}_x(W)$ l'algèbre de Hecke de W avec paramètre x, i.e., le quotient de l'algèbre du groupe de tresses B sur $\mathbb{Z}[x^{1/2}, x^{-1/2}]$ par l'idéal bilatère engendré par les $(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}-x)$ pour $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$. On note $T_{\mathbf{w}}$ (ou simplement T_w) l'image de $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ dans $\mathcal{H}_x(W)$. On pose $T_{\underline{w}} = \sum_{w' \leqslant w} T_{w'}$ pour $w \in W$.

Lemme 3.2.6. *Le morphisme canonique $\mathbb{Z}[x^{1/2}, x^{-1/2}]B^+ \to \mathcal{H}_x(W)$ s'étend en un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z}[x^{1/2}, x^{-1/2}]\underline{B}^+ \to \mathcal{H}_x(W)$ donné par $\underline{\mathbf{w}} \mapsto T_{\underline{w}}$ pour $w \in W$.*

Preuve. La vérification que les relations qui définissent $\underline{B}^+$ sont vérifiées dans $\mathcal{H}_x(W)$ se fait par un calcul immédiat dans l'algèbre de Hecke. □

Nous notons $T_{\mathbf{t}}$ l'image de $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$ par ce morphisme.

Nous étudions maintenant la lissité rationnelle de $\mathcal{O}(\underline{ws})$ sous l'hypothèse que $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse.

Lemme 3.2.7. *Soit $w \in W$ tel que $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse et soit $s \in S$. Alors, une des assertions suivantes est vraie* :

(i) *$ws < w$. Alors, $T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = (x+1) T_{\underline{w}}$.*
(ii) *$s \nleqslant w$. Alors, $T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = T_{\underline{ws}}$ et $\mathcal{O}(\underline{ws})$ est rationnellement lisse.*
(iii) *$s < w$, $ws > w$ et il existe $y \in W$ tel que $ys < y < w$ et $l(y) = l(w) - 1$. Alors, y est l'unique élément maximal de $\{v \in W \mid vs < v < w\}$, les variétés $\mathcal{O}(\underline{ws})$ et $\mathcal{O}(\underline{y})$ sont rationnellement lisses et $T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = T_{\underline{ws}} + x T_{\underline{y}}$.*
(iv) *$s < w$, $ws > w$ et il n'existe aucun $y \in W$ tel que $ys < y < w$ et $l(y) = l(w) - 1$. Alors, $\mathcal{O}(\underline{ws})$ n'est pas rationnellement lisse.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse si et seulement si $T_{\underline{w}} = D_w$ (où C'_w est la base de Kazhdan–Lusztig [26, §5.1] et $D_w = x^{l(w)/2} C'_w$). En effet, on a

$D_w = \sum_{y \leqslant w} P_{y,w} T_y$, et $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse si et seulement si $P_{y,w} = 1$ pour tout $y \leqslant w$. Selon la proposition 3.2.5, la variété $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse si et seulement si le coefficient de D_w sur T_1 vaut 1 (si ce coefficient ne vaut pas 1, c'est un polynôme à coefficients positifs, de terme constant 1 et de degré strictement plus grand que 1). La formule de multiplication pour les D_w s'écrit (*cf.* [26, §5.1.15]) :

$$D_w D_s = \begin{cases} (x+1)D_w, & \text{si } ws < w, \\ D_{ws} + \sum_{\substack{y<w,\, ys<y \\ l(y)\not\equiv l(w) \bmod 2}} \mu(y,w) x^{\frac{l(ws)-l(y)}{2}} \cdot D_y, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas $ws < w$ donne l'assertion (i) du lemme.

L'entier $\mu(y,w)$ est le coefficient de $x^{(l(w)-l(y)-1)/2}$ dans $P_{y,w}$. Puisque $\mathcal{O}(\underline{w})$ est rationnellement lisse, on a $\mu(y,w) = 0$ sauf si $l(y) = l(w) - 1$ et on a alors $\mu(y,w) = 1$.

Supposons $ws > w$ et $\mathcal{O}(\underline{w})$ rationnellement lisse. Alors la formule ci-dessus donne :

$$T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = D_{ws} + \sum_{\substack{y<w,\, ys<y \\ l(y)=l(w)-1}} x D_y. \tag{1}$$

D'autre part, un calcul direct donne :

$$T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = T_{\underline{ws}} + x\left(\sum_{v<w,\, vs<v} (T_v + T_{vs})\right). \tag{2}$$

Si $s \nleqslant w$ on a donc $T_{\underline{w}} T_{\underline{s}} = T_{\underline{ws}} = D_{ws}$ d'où le (ii) du lemme.

Supposons maintenant $s < w$. L'égalité (2) montre que le coefficient de $T_{\underline{w}} T_{\underline{s}}$ sur T_1 vaut $x + 1$. Il en résulte que dans (1), il y a au plus un y. S'il n'existe aucun y, alors $D_{ws} = T_{\underline{ws}} + x(\sum_{v<w,\, vs<v}(T_v + T_{vs}))$ a un coefficient $x + 1$ sur T_1 donc $\mathcal{O}(\underline{ws})$ n'est pas rationnellement lisse d'où l'assertion (iv).

S'il existe un y, alors les coefficients de T_1 dans D_y et dans D_{ws} doivent être égaux à 1, sinon le coefficient de T_1 dans le membre de droite de (1) excéderait $x + 1$. Par conséquent, $\mathcal{O}(\underline{ws})$ et $\mathcal{O}(\underline{y})$ sont rationnellement lisses, donc $T_{\underline{y}} = D_y$ et $T_{\underline{ws}} = D_{\underline{ws}}$. La comparaison des égalités (1) et (2) montre alors que $T_{\underline{y}} = \sum_{v<w,\, vs<v}(T_v + T_{vs})$ et on déduit l'assertion (iii). $\square$

3.2.8. Nous étudions maintenant le lien entre variétés $\mathbf{X}$ après oubli d'un sous-groupe de Borel.

Proposition 3.2.9. *Soient $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$, $w \in W$ et $s \in S$ tels que $s < w$ et $ws > w$. Alors, on a un triangle distingué de complexes de faisceaux sur $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')$:*

$$\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')} \to R\pi_! \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\,\underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \to \Lambda_{\mathbf{Y}}[-2](-1) \rightsquigarrow$$

où $\pi : \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\,\underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}') \to \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')$ est la projection canonique et $\mathbf{Y}$ est la sous-variété fermée $\bigcup_{v \in W,\, vs<v<w} \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{v}}\mathbf{t}')$ de $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')$.

En outre, le faisceau $\Lambda_{\mathbf{Y}}$ est dans la sous-catégorie triangulée pleine de la catégorie $D^b(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}'))$ engendrée par les $\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{v}}\mathbf{t}')}$, $v \in W$, $vs < v < w$.

On suppose maintenant que $\mathcal{O}(\underline{w})$ et $\mathcal{O}(\underline{ws})$ sont rationnellement lisses. Alors, il existe un unique élément $y \in W$ tel que $ys < y < w$ et $l(y) = l(w) - 1$. On a $\mathbf{Y} = \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{y}}\mathbf{t}')$ et le triangle distingué est scindé, i.e.,

$$R\pi_! \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\ \underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}')} \simeq \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{ws}}\mathbf{t}')} \oplus \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{y}}\mathbf{t}')}[-2](-1).$$

Preuve. L'ensemble des éléments $v \in W$ tels que $v < w$ et $vs < w$ est clos inférieurement pour l'ordre de Bruhat. Soit $\tilde{\mathbf{V}} = \coprod_{y\in W,\, y\leqslant w,\, ys\nless w} \mathcal{O}(y, \underline{s})$ l'ouvert de $\mathcal{O}(\underline{w}, \underline{s})$ complémentaire de

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \coprod_{x\in W,\, x<w,\, xs<w} \mathcal{O}(x, \underline{s}) = \bigcup_{v\in W,\, vs<v<w} \mathcal{O}(\underline{v}, \underline{s}).$$

Soit maintenant $\mathbf{V} = \coprod_{y\in W,\, y\leqslant w,\, ys\nless w} (\mathcal{O}(ys) \amalg \mathcal{O}(y))$ l'ouvert de $\mathcal{O}(\underline{ws})$ complémentaire de

$$\mathbf{Z} = \coprod_{x\in W,\, x<w,\, xs<w} \mathcal{O}(x) = \bigcup_{v\in W,\, vs<v<w} \mathcal{O}(\underline{v}).$$

Alors, on prouve par la proposition 2.2.16(v) appliquée avec $w' = s$ que le morphisme $p = (p', p'') : \mathcal{O}(\underline{w}, \underline{s}) \to \mathcal{O}(\underline{ws})$ se restreint en un isomorphisme $r : \tilde{\mathbf{V}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}$ et en un morphisme $q : \tilde{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}$. On a alors un diagramme commutatif, où les deux carrés sont cartésiens et les flèches verticales propres :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{V}} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "r"'] & \mathcal{O}(\underline{w}, \underline{s}) \arrow[d, "p"] & \tilde{\mathbf{Z}} \arrow[l, hook', "i'"'] \arrow[d, "q"] \\
\mathbf{V} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{O}(\underline{ws}) & \mathbf{Z}. \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}$$

Par changement de base, on a $j^* Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \simeq Rr_* j'^* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \simeq \Lambda_{\mathbf{V}}$. Par conséquent, j^* étant exact, on a $0 = \tau_{\geqslant 1} j^* Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} = j^* \tau_{\geqslant 1} Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}$, i.e., $\tau_{\geqslant 1} Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}$ est supporté par $\mathbf{Z}$. Puisque i^* est exact, on a

$$\begin{aligned}
\tau_{\geqslant 1} Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} &\simeq i_* i^* \tau_{\geqslant 1} Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \simeq i_* \tau_{\geqslant 1} i^* Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \\
&\simeq i_* \tau_{\geqslant 1} Rq_* i'^* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \simeq i_* \tau_{\geqslant 1} Rq_* \Lambda_{\tilde{\mathbf{Z}}}.
\end{aligned}$$

On vérifie, comme dans la preuve de la proposition 3.2.3(ii), que

$$Rq_* \Lambda_{\tilde{\mathbf{Z}}} \simeq \Lambda_{\mathbf{Z}} \oplus \Lambda_{\mathbf{Z}}[-2](-1).$$

Par conséquent, on a $\tau_{\geqslant 1} Rq_* \Lambda_{\tilde{\mathbf{Z}}} \simeq \Lambda_{\mathbf{Z}}[-2](-1)$. Puisque les fibres de p sont connexes, on a $p_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \simeq \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}$ et le triangle distingué

$$p_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \to Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \to \tau_{\geqslant 1} Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \rightsquigarrow$$

fournit le triangle distingué

$$\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})} \to Rp_* \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})} \to \Lambda_{\mathbf{Z}}[-2](-1) \rightsquigarrow .$$

Comme $\mathbf{Y} = (\mathcal{O}(\mathbf{t}) \times_{\mathcal{B}} \mathbf{Z} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}(\mathbf{t}')) \times_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}} \Gamma$, nous déduisons par changement de base le triangle distingué voulu pour les variétés de Deligne–Lusztig.

Montrons maintenant l'affirmation sur $\Lambda_{\mathbf{Y}}$. Soient $v, v' \in W$ distincts avec $vs < v < w$ et $v's < v' < w$. L'ensemble $\{x \in W \mid x < v,\ x < v'\}$ est réunion des intervalles $I_z = \{x \in W,\ x \leqslant z\}$, où $zs < z$, $z < v$ et $z < v'$. Par conséquent, $\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{v}}\mathbf{t}') \cap \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{v}}'\mathbf{t}') = \bigcup_z \mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{\mathbf{z}}\mathbf{t}')$ où z décrit les éléments de W tels que $z < v$, $z < v'$ et $zs < z$. On en déduit le résultat sur $\Lambda_{\mathbf{Y}}$ par application itérée de la suite exacte de Mayer–Vietoris.

Nous allons maintenant utiliser le lemme 3.2.7 pour établir la dernière partie de la proposition. Puisque $\mathcal{O}(\underline{w})$ et $\mathcal{O}(\underline{ws})$ sont rationnellement lisses, l'égalité du lemme 3.2.7(iii) peut se récrire $(T_{\underline{w}} - T_{\underline{y}})T_{\underline{s}} = T_{\underline{ws}} - T_{\underline{y}}$, car $T_{\underline{y}}T_{\underline{s}} = (x+1)T_{\underline{y}}$ d'après le lemme 3.2.7(i). Dans la preuve du lemme 3.2.7(iii), nous avons montré que $T_{\underline{y}} = \sum_{v<w,\ vs<v}(T_v + T_{vs})$, ce équivaut à l'égalité : $\{v \mid vs < v < w\} = \{v \mid vs < v \leqslant y\}$. On a donc $\mathbf{Z} = \mathcal{O}(\underline{y})$ et on a un triangle distingué

$$\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}[d] \to Rp_*\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}[d] \to \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{y})}[d-2](-1) \rightsquigarrow .$$

La variété $\mathcal{O}(\underline{ws})$ est rationnellement lisse, donc $\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}[d]$ est un faisceau pervers pur de poids d sur $\mathcal{O}(\underline{ws})$, où $d = l(w) + 1$. Puisque la variété $\mathcal{O}(\underline{y})$ est rationnellement lisse (lemme 3.2.7(iii)), le complexe $\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{y})}[d-2](-1)$ est un faisceau pervers pur de poids d. On a donc une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}[d] \to Rp_*\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}[d] \to \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{y})}[d-2](-1) \to 0.$$

Puisque $\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}[d]$ et $\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{y})}[d-2](-1)$ sont purs de même poids, le faisceau pervers $Rp_!\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}[d]$ est pur, donc la suite exacte se scinde d'après le théorème de décomposition [1, théorème 5.3.8], i.e.,

$$Rp_*\Lambda_{\mathcal{O}(\underline{w},\underline{s})}[d] \simeq \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{ws})}[d] \oplus \Lambda_{\mathcal{O}(\underline{y})}[d-2](-1).$$

Par changement de base, on déduit une décomposition analogue au niveau des variétés de Deligne–Lusztig. $\square$

Nous généralisons maintenant [9, theorem 1.6 (case 2)]. Noter que ce résultat, contrairement aux précédents, ne provient pas directement par changement de base d'un résultat sur les variétés $\mathcal{O}$. Nous remercions George Lusztig de nous avoir communiqué le principe de la démonstration de la remarque de [9, §1.6.3] que les morphismes « ∂ » sont nuls.

Proposition 3.2.10. *Soient* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *et* $\mathbf{b} \in B^+$. *Soit* $\rho : \mathbf{X}(\mathbf{ssb}) \to \mathbf{X}(\underline{\mathbf{s}}\mathbf{b})$ *déduit par changement de base de* $(p', p'') : \mathcal{O}(s, s) \to \mathcal{O}(\underline{s})$. *Alors, on a un triangle distingué de complexes de faisceaux sur* $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{s}}\mathbf{b})$:

$$\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-2](-1) \oplus \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-1] \to R\rho_!\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{ssb})} \to \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{b})}[-2](-1) \rightsquigarrow .$$

En particulier, on a une suite exacte longue de $(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta \rangle)$*-modules* :

$$\begin{aligned}\cdots \to H_c^{i-3}\big(\mathbf{X}(\mathbf{b})\big)(-1) &\to H_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{sb})\big)(-1) \oplus H_c^{i-1}\big(\mathbf{X}(\mathbf{sb})\big) \to H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{ssb})\big)\\ &\to H_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{b})\big)(-1) \to \cdots.\end{aligned}$$

Preuve. Choisissons une décomposition $\mathbf{b} = \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ avec $w_i \in W$. Soit $\mathbf{X}_1$ la sous-variété fermée $\{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_{k+2}) \in \mathbf{X}(s, s, w_1, \ldots, w_k) \mid \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3\}$ et soit $\mathbf{X}_2$ l'ouvert complémentaire dans $\mathbf{X}(s, s, w_1, \ldots, w_k)$. L'application

$$(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \ldots, \mathbf{B}_{k+2}) \mapsto (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_4, \ldots, \mathbf{B}_{k+2})$$

fait de $\mathbf{X}_1$ un fibré en droites affines au-dessus de $\mathbf{X}(w_1, \ldots, w_k)$, donc

$$H^i_c(\mathbf{X}_1) \simeq H^{i-2}_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{b})\big)(-1).$$

La variété $\mathbf{X}_2$ est un ouvert de la variété

$$\mathbf{Y} = \big\{(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{k+2}) \mid (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_{k+2}) \in \mathbf{X}(s, w_1, \ldots, w_k),\ \mathbf{B}_1 \xrightarrow{s} \mathbf{B}_2\big\}.$$

La restriction $\pi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}(s, w_1, \ldots, w_k)$ de ρ est une fibration en droites affines et π restreint à $\mathbf{Y} - \mathbf{X}_2$ est un isomorphisme. On déduit alors de la suite exacte $0 \to \Lambda_{\mathbf{X}_2} \to \Lambda_{\mathbf{Y}} \to \Lambda_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}_2} \to 0$ un triangle distingué

$$R\pi_! \Lambda_{\mathbf{X}_2} \to \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-2](-1) \xrightarrow{\partial} \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})} \rightsquigarrow$$

où

$$\partial \in \operatorname{Hom}\big(\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-2](-1), \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}\big) = \operatorname{Ext}^2\big(\Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}, \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}(1)\big) = H^2\big(\mathbf{X}(\mathbf{sb})\big)(1).$$

Toutes les flèches étant $\mathbf{G}^F$-équivariantes, on a $\partial \in H^2(\mathbf{X}(\mathbf{sb}))^{\mathbf{G}^F}$. Puisque $\mathbf{sb} \in B^+$, on déduit de la proposition 3.3.14 à venir (mais dont la preuve n'utilise que des résultats déjà prouvés) que $H^{2l(\mathbf{sb})-2}_c(\mathbf{X}(\mathbf{sb}))^{\mathbf{G}^F} = 0$. La variété $\mathbf{X}(\mathbf{sb})$ est lisse, donc on obtient par dualité $H^2(\mathbf{X}(\mathbf{sb}))^{\mathbf{G}^F} = 0$, donc $\partial = 0$. Par conséquent, le triangle distingué donne un isomorphisme $R\pi_! \Lambda_{\mathbf{X}_2} \simeq \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-2](-1) \oplus \Lambda_{\mathbf{X}(\mathbf{sb})}[-1]$ d'où $H^i_c(\mathbf{X}_2) \simeq H^{i-2}_c(\mathbf{X}(\mathbf{sb}))(-1) \oplus H^{i-1}_c(\mathbf{X}(\mathbf{sb}))$. On conclut en utilisant la suite exacte associée à la décomposition ouvert-fermé $\mathbf{X}(\mathbf{ssb}) = \mathbf{X}_2 \amalg \mathbf{X}_1$. $\square$

3.3. Représentations unipotentes

3.3.1. Nous allons généraliser [24, théorème 3.8].
On dira que $w, w' \in W$ sont *F-conjugués* s'il existe $v \in W$ tel que $w' = vwF(v)^{-1}$.

Proposition 3.3.2. *Pour* $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B^+$, *on a*

(i) $(H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H^{i'}_c(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F} = 0$ *pour* $i + i' < l(\mathbf{b}) + l(\mathbf{b}')$.

(ii) *Les valeurs propres de* F^δ *sur* $(H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H^{i'}_c(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F}$ *sont des puissances entières de* q^δ.

(iii) *Si* $i + i' = l(\mathbf{b}) + l(\mathbf{b}')$, *les valeurs propres de* F^δ *sur* $(H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H^{i'}_c(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F}$ *sont des puissances de* q^δ *inférieures à* $q^{\delta(l(\mathbf{b})+l(\mathbf{b}'))/2}$ *et cette valeur ne peut être atteinte que si* $\beta(\mathbf{b})$ *est F-conjugué à* $\beta(\mathbf{b}')$.

Preuve. Par le théorème de Künneth, $(H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H_c^{i'}(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F}$ est un facteur direct de $H_c^{i+i'}(\mathbf{G}^F \backslash (\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')))$. On est donc ramené à prouver les propriétés ci-dessus pour cette cohomologie.

Soient $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(x'_1, \ldots, x'_k)$ deux suites d'éléments de W telles que $\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$ et $\mathbf{b}' = \mathbf{x}'_1 \cdots \mathbf{x}'_k$ respectivement. Identifions $\mathbf{X}(\mathbf{b})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{b}')$, comme dans la proposition 2.3.3, aux variétés de Deligne–Lusztig ordinaires du groupe $\mathbf{G}^k$, pour l'isogénie F_1, associées aux éléments $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(x'_1, \ldots, x'_k)$ respectivement. La variété $\mathbf{G}^F \backslash (\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'))$ est alors identifiée à la variété $(\mathbf{G}^k)^{F_1} \backslash (\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_k) \times \mathbf{X}(x'_1, \ldots, x'_k))$. D'autre part si les éléments $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(x'_1, \ldots, x'_k)$ sont F_1-conjugués par $(v_1, \ldots, v_k)$, alors les éléments $\beta(\mathbf{b}) = x_1 \cdots x_k$ et $\beta(\mathbf{b}') = x'_1 \cdots x'_k$ sont F-conjugués par v_1. On est donc ramené à démontrer la proposition pour des variétés de Deligne–Lusztig ordinaires. Nous supposons donc dans la suite que $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ sont dans $\mathbf{W}$.

Nous pouvons alors appliquer les résultats de Lusztig [24, proposition 3.4 et lemme 3.5] : la variété $\mathbf{G}^F \backslash (\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'))$ admet une stratification par l'union, quand w_1 parcourt W, des variétés

$$\mathbf{Y}\big(\mathbf{b}, \mathbf{b}', w_1\big) = \mathbf{G}^F \big\backslash \big\{\big(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}'_1\big) \in \mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}') \mid \mathbf{B}_1 \xrightarrow{w_1} \mathbf{B}'_1\big\}.$$

On note $\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)$ la fibre de $(\mathbf{B}, {}^{w_1}\mathbf{B})$ par $(p', p'') : \mathcal{O}(\mathbf{v}) \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, pour $\mathbf{v} \in B^+$ et $w_1 \in W$. Si $\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_k$ est une décomposition avec $s_i \in S$, alors on a un isomorphisme

$$\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1) \simeq \big\{(\mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_k) \in \mathcal{B}^{k+1} \mid \mathbf{B}_{i-1} \xrightarrow{s_i} \mathbf{B}_i,\ (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_k) = \big(\mathbf{B}, {}^{w_1}\mathbf{B}\big)\big\}.$$

Prenons $\mathbf{v} = \mathbf{b}F(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{b}}'$ où $\tilde{\mathbf{b}}'$ est le retourné du mot $\mathbf{b}'$. Alors, on a un isomorphisme de F^δ-modules (*cf.* [24, lemme 3.5] où la variété $\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)$ est notée $\mathbf{Z}_{b,b',w_1}$)

$$H_c^i\big(\mathbf{Y}\big(\mathbf{b}, \mathbf{b}', w_1\big)\big) \simeq H_c^i\big(\mathbf{Z}\big(\mathbf{b}F(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{b}}', w_1\big)\big).$$

La démonstration donnée par Lusztig s'étend du cas où F est un endomorphisme de Frobenius au cas où F est une isogénie dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius, la seule propriété de F utilisée étant le théorème de Lang.

Énonçons maintenant le lemme clef :

Lemme 3.3.3. (i) *On a* $H_c^i(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)) = 0$ *pour* $i < l(\mathbf{v}) - l(w_1)$.

(ii) *Les valeurs propres de* F^δ *sur* $H_c^k(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1))$ *sont des puissances de* q^δ.

(iii) *De plus si* $k = l(\mathbf{v}) - l(w_1)$, *les valeurs propres de* F^δ *sont inférieures à* $q^{\delta(l(\mathbf{v})-l(w_1))/2}$, *cette valeur ne pouvant être atteinte que si* $\beta(\mathbf{v}) = w_1$.

Preuve. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur $l(\mathbf{v})$. Si la variété $\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)$ est non vide, alors une décomposition réduite de w_1 peut être extraite de $\mathbf{v}$. Cette variété est donc vide si $l(\mathbf{v}) < l(w_1)$ ou si $l(\mathbf{v}) = l(w_1)$ et $\beta(\mathbf{v}) \neq w_1$. Si $l(\mathbf{v}) = l(w_1)$ et $\beta(\mathbf{v}) = w_1$ la variété est réduite à un point : ceci démontre le lemme pour $l(\mathbf{v}) = l(w_1)$. C'est le point de départ de la récurrence.

Supposons $l(\mathbf{v}) > l(w_1)$. Si $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, alors la variété est vide et l'énoncé est vrai. Nous pouvons donc supposer que $\mathbf{v} \notin \mathbf{W}$, i.e., que $\mathbf{v} = \mathbf{attb}$ où $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B^+$. Soient $\mathbf{a} = \mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_i$ et $\mathbf{b} = \mathbf{s}_{i+3} \cdots \mathbf{s}_k$ des décompositions avec $s_i \in S$. On a alors la décomposition $\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 \cdots \mathbf{s}_i \mathbf{tts}_{i+3} \cdots \mathbf{s}_k$. Soit $\mathbf{F}$ le fermé de $\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)$ formé des $(\mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{i+1}, \mathbf{B}_{i+2}, \ldots, \mathbf{B}_k)$ tels que $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{i+2}$ et soit $\mathbf{O}$ l'ouvert complémentaire. Alors, $\mathbf{F}$ est un fibré en droites sur $\mathbf{Z}(\mathbf{ab}, w_1)$, donc $H_c^i(\mathbf{F}) \simeq$

$H_c^{i-2}(\mathbf{Z}(\mathbf{ab}, w_1))(-1)$. Quant à $\mathbf{O}$, il est isomorphe au complément de la section nulle d'un fibré en droites sur $\mathbf{Z}(\mathbf{atb}, w_1)$. On a une suite exacte longue de cohomologie associée à la fibration

$$\begin{aligned}\cdots \to H_c^{i-2}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{atb}, w_1)\big)(-1) \to H_c^{i}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{atb}, w_1)\big)\\ \to H_c^{i+1}(\mathbf{O}) \to H_c^{i-1}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{atb}, w_1)\big)(-1) \to \cdots.\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence montre alors que $H_c^i(\mathbf{F}) = 0$ et $H_c^i(\mathbf{O}) = 0$ pour $i < l(\mathbf{v}) - l(w_1)$ et que

$$\begin{aligned}&H_c^{l(\mathbf{v})-l(w_1)}(\mathbf{F}) \simeq H_c^{l(\mathbf{ab})-l(w_1)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{ab}, w_1)\big)(-1) \quad \text{et}\\ &H_c^{l(\mathbf{v})-l(w_1)}(\mathbf{O}) \simeq H_c^{l(\mathbf{atb})-l(w_1)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{atb}, w_1)\big).\end{aligned}$$

La suite exacte longue associée à la décomposition « ouvert-fermé »

$$\cdots \to H_c^i(\mathbf{O}) \to H_c^i\big(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)\big) \to H_c^i(\mathbf{F}) \to H_c^{i+1}(\mathbf{O}) \to \cdots$$

montre que $H_c^i(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1)) = 0$ pour $i < l(\mathbf{v}) - l(w_1)$, et que pour tout i, les valeurs propres de F^δ sur $H_c^i(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1))$ sont des puissances de q^δ. Elle montre aussi que les valeurs propres de F^δ sur $H_c^{l(\mathbf{v})-l(w_1)}(\mathbf{Z}(\mathbf{v}, w_1))$ sont des puissances de q^δ inférieures à $q^{\delta(l(\mathbf{v})-l(w_1))/2}$. De plus, cette valeur ne peut être atteinte que si F^δ a une valeur propre $q^{\delta(l(\mathbf{ab})-l(w_1))/2}$ sur $H_c^{l(\mathbf{ab})-l(w_1)}(\mathbf{Z}(\mathbf{ab}, w_1))$. Par l'hypothèse de récurrence, il faut donc que $w_1 = \beta(\mathbf{ab}) = \beta(\mathbf{attb}) = \beta(\mathbf{v})$, d'où le lemme. $\square$

De ce lemme nous déduisons maintenant facilement la proposition : aucune des strates $\mathbf{Y}(\mathbf{b}, \mathbf{b}', w_1)$ n'ayant de cohomologie en degré strictement inférieur à $l(\mathbf{b}F(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{b}}') - l(w_1) = l(\mathbf{b}) + l(\mathbf{b}')$, les suites exactes longues « ouvert-fermé » données par la stratification montrent qu'il en est de même pour $\mathbf{G}^F\backslash(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'))$; de même, les valeurs propres de F^δ sur la cohomologie de toute strate étant des puissances de q^δ, les suites exactes longues « ouvert-fermé » donnent la même propriété pour $H_c^k(\mathbf{G}^F\backslash(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')))$. Elles montrent aussi que $H_c^{l(\mathbf{b})+l(\mathbf{b}')}(\mathbf{G}^F\backslash(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')))$ est isomorphe à un sous-espace de

$$\bigoplus_{w_1} H_c^{l(\mathbf{b})+l(\mathbf{b}')}\big(\mathbf{Z}\big(\mathbf{b}F(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{b}}', w_1\big)\big).$$

Les valeurs propres de F^δ sur $H_c^{l(\mathbf{b})+l(\mathbf{b}')}(\mathbf{G}^F\backslash(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')))$ sont donc des puissances de q^δ inférieures à $q^{\delta(l(\mathbf{b})+l(\mathbf{b}'))/2}$ et cette valeur ne peut être atteinte que s'il existe w_1 tel que $\beta(\mathbf{b}F(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{b}}') = w_1$, i.e., si $\beta(\mathbf{b})$ est F-conjugué à $\beta(\mathbf{b}')$. $\square$

Le corollaire suivant est une généralisation des résultats de [24, corollaire 3.9] et de [10, III, théorème 2.3].

Corollaire 3.3.4. (i) *Les valeurs propres de F^δ sur un sous-$\mathbf{G}^F$-module irréductible ρ de $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ (pour $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$) sont dans $q^{\delta\mathbb{N}}\lambda_\rho\omega_\rho$, où λ_ρ est une racine de l'unité et $\omega_\rho \in \{1, q^{\delta/2}\}$, tous deux indépendants de i et de $\mathbf{t}$.*

(ii) *Pour tous* $\mathbf{b}$ *et* $\mathbf{b}'$ *dans* $\underline{B}^+$, *les valeurs propres de* F^δ *sur* $(H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H^{i'}_c(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F}$ *sont des puissances entières de* q^δ.

Preuve. Montrons d'abord la propriété (i) pour $\mathbf{t} \in B^+$. Dans ce cas, nous pouvons suivre telle quelle la preuve de [24, corollaire 3.9] en remplaçant [24, théorème 3.8] par le (ii) de notre proposition 3.3.2 qui en est la généralisation pour les éléments du monoïde de tresses. On obtient alors que les valeurs propres de F^δ sur les sous-$\mathbf{G}^F$-modules irréductibles de même type dans les $H^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{b})$ diffèrent par des puissances de q^δ. On voit que ces valeurs propres sont des racines de l'unité à une puissance de $q^{\delta/2}$ près en prenant un $\mathbf{b} \in \mathbf{W}$ dans la cohomologie duquel ρ intervient : dans ce cas on a une variété de Deligne–Lusztig ordinaire pour laquelle on connaît le résultat.

En général, on raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de $\underline{\mathbf{W}}$ dans une décomposition de $\mathbf{t}$. Si $\mathbf{t} = \mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}'$ avec $\underline{\mathbf{w}} \in \underline{\mathbf{W}}$ et $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$, alors dans la stratification de la proposition 3.2.2, les variétés $\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}$ vérifient la conclusion du théorème (par récurrence). En considérant les suites exactes longues de cohomologie associées à cette stratification, on voit qu'il en est de même pour $\mathbf{X}(\mathbf{t})$, d'où (i).

Montrons (ii). Par (i), les valeurs propres de F^δ dans $(H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H^{i'}_c(\mathbf{X}(\mathbf{b}')))^{\mathbf{G}^F}$ sont de la forme $\lambda_\rho \lambda_{\rho'} \omega_\rho \omega_{\rho'} q^{k\delta}$ avec $k \in \mathbb{N}$, où ρ et ρ' sont des représentations contragrédientes l'une de l'autre. Si on prend $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ dans B^+ on sait qu'on doit avoir une puissance entière de q^δ. Donc $\omega_\rho = \omega_{\rho'}$ et $\lambda_\rho = \lambda_{\rho'}^{-1}$. On en déduit le résultat. □

3.3.5. Pour H un groupe, on note $\mathrm{Irr}(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell H$-modules simples de dimension finie. Nous notons $\mathcal{R}(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell H$-modules de dimension finie et $\mathcal{R}^+(H)$ le sous-monoïde donné par les classes des modules. On note $[V]$ l'image dans $\mathcal{R}(H)$ d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell H$-module V. Par abus de notation, on note simplement ρ l'image d'un élément $\rho \in \mathrm{Irr}(H)$. On pose $V_\rho = \langle V, \rho\rangle \rho$.

Soit L le sous-groupe du groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\mathbf{G}^F \times \langle F^\delta\rangle)$-modules gradués de dimension finie, engendré par les classes des représentations où les valeurs propres de F^δ sont de la forme $\zeta q^{\delta j}$ avec ζ une racine de l'unité et $j \in \mathbb{N}/2$. On définit un morphisme $L \to \mathbb{Z}[t^{1/2}, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$ comme suit. Soit ρ une représentation irréductible de $\mathbf{G}^F$ et λ une représentation de $\langle F^\delta\rangle$ donnée par $\lambda(F^\delta) = \zeta q^{\delta j}$. Alors, on envoie la classe de la représentation $\rho \otimes \lambda$, placée en degré i, sur $h^i t^j \rho$.

D'après le corollaire 3.3.4, la classe $[H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))]$ de $H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ est dans L et le sous-groupe de L engendré par les classes de telles représentations s'envoie injectivement dans $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$. Dans la suite du texte nous identifierons $[H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))]$ à un élément de $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$, et pour $\rho \in \mathrm{Irr}(\mathbf{G}^F)$, nous considérerons $\langle H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{t})), \rho\rangle$ comme un élément de $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h]$. Dans de nombreux cas, nous pourrons décrire cet élément en termes de caractères de l'algèbre de Hecke.

On sait que $\mathcal{H}_x(W) \otimes \mathbb{Q}(x^{1/2})$ est absolument semi-simple [16, théorème 9.3.5] et qu'après spécialisation des scalaires à $\mathbb{Q}$ à travers l'homomorphisme $f : \sqrt{x} \mapsto 1$, on a $\mathcal{H}_x(W) \otimes_f \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[W]$. On a donc une bijection (« spécialisation ») de l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathcal{H}_x(W) \otimes \mathbb{Q}(x^{1/2})$ vers l'ensemble des caractères irréductibles de W. Si χ est un caractère de W, on note χ_x le caractère de $\mathcal{H}_x(W)$ qui se spécialise en χ ; on a $\chi(w) = f(\chi_x(T_w))$ pour tout $w \in W$.

Pour $\psi \in \mathcal{R}(W \rtimes \langle F\rangle) \otimes \mathbb{Q}$, on note R_ψ le « caractère fantôme », élément de $\mathcal{R}(\mathbf{G}^F) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ donné par

$$R_\psi = |W|^{-1} \sum_{i \geqslant 0,\, w \in W} \psi(wF)(-1)^i \bigl[\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F} H_c^i\bigl(\mathbf{X}(w)\bigr)\bigr]$$

(ici la notation $\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}$ signifie que nous oublions l'action de $\langle F^\delta\rangle$). On note $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ l'ensemble des caractères unipotents irréductibles de $\mathbf{G}^F$.

Pour tout caractère F-stable χ de W, nous choisissons une extension $\tilde{\chi}$ de χ à $W \rtimes \langle F\rangle$ triviale sur F^δ et rationnelle. Si W est irréductible, il y a une unique telle extension rationnelle, sauf si $\delta = 2$, auquel cas une telle extension est unique au signe près [26, proposition 3.2]. Soit m un entier multiple de δ. Nous notons $\mathcal{H}_{q^m}(W)$ l'algèbre de Hecke spécialisée en $\sqrt{x} \mapsto q^{m/2} \in \mathbb{R}$. Nous notons $\tilde{\chi}_{q^m}$ le caractère de $\mathcal{H}_{q^m}(W) \rtimes \langle F\rangle$ qui se spécialise en $\tilde{\chi}$ (c'est une extension du caractère χ_{q^m} de $\mathcal{H}_{q^m}(W)$).

3.3.6. Nous allons maintenant étendre et généraliser des résultats de [10].

Proposition 3.3.7. *Pour tous $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$, $g \in \mathbf{G}^F$ et pour tout entier positif m multiple de δ, le nombre de points fixes sous gF^m de $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ est*

$$\bigl|\mathbf{X}(\mathbf{t})^{gF^m}\bigr| = \sum_{\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)} \lambda_\rho^{m/\delta} \rho(g) \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(W)^F} \langle \rho, R_{\tilde{\chi}}\rangle \cdot \tilde{\chi}_{q^m}(T_{\mathbf{t}} F).$$

Preuve. Fixons une décomposition $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k$ avec $t_i \in W \cup \underline{W}$. Comme en (2.2.15), on a

$$\mathbf{X}(t_1, \ldots, t_k) = \coprod_{(t_1', \ldots, t_k') \subset (t_1, \ldots, t_k)} \mathbf{X}\bigl(t_1', \ldots, t_k'\bigr)$$

et $T_{\mathbf{t}} = \sum_{(t_1', \ldots, t_k') \subset (t_1, \ldots, t_k),\, t_i' \in W} T_{\mathbf{t}_1' \cdots \mathbf{t}_k'}$. Les deux membres de la proposition étant additifs, il suffit donc de démontrer la proposition pour $\mathbf{t} \in B^+$. La propriété résulte alors de [10, III, proposition 1.2, théorèmes 1.3 et 2.3] appliqués à la variété $\mathbf{X}_{\mathbf{G}^k}(t_1, \ldots, t_k, F_1)$ isomorphe à $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ (*cf.* proposition 2.3.3). $\square$

Corollaire 3.3.8. *Soit $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$. On a*

(i)
$$\begin{aligned}\bigl[H_c^*\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr]_{h=-1} &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(W)^F} R_{\tilde{\chi}} \cdot \tilde{\chi}_t(T_{\mathbf{t}} F) \\ &= \sum_{\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)} \rho \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(W)^F} \langle \rho, R_{\tilde{\chi}}\rangle \cdot \tilde{\chi}_t(T_{\mathbf{t}} F).\end{aligned}$$

(ii) *Si de plus $\mathbf{t}$ est un produit d'éléments $\underline{\mathbf{w}}$ de $\underline{\mathbf{W}}$ tels que $\mathbf{X}(\underline{w})$ est rationnellement lisse, alors,*

$$\begin{aligned}\bigl[H_c^*\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr] &= \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(W)^F} R_{\tilde{\chi}} \cdot \tilde{\chi}_{h^2 t}(T_{\mathbf{t}} F) \\ &= \sum_{\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)} \rho \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(W)^F} \langle \rho, R_{\tilde{\chi}}\rangle \cdot \tilde{\chi}_{h^2 t}(T_{\mathbf{t}} F).\end{aligned}$$

Preuve. D'après le corollaire 3.3.4 et la convention 3.3.5, si m est tel que $\lambda_\rho^{m/\delta}=1$ pour tout ρ, on a

$$\sum_i(-1)^i \operatorname{Trace}\bigl(gF^m \mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr)=\operatorname{Trace}\bigl(g \mid \bigl[H_c^*\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr]_{h=-1,\,t=q^m}\bigr).$$

Par la formule des traces de Lefschetz, le premier membre est égal à $|\mathbf{X}(\mathbf{t})^{gF^m}|$. On obtient donc pour, tout m suffisamment divisible,

$$\bigl[H_c^*\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr]_{h=-1,\,t=q^m}=\sum_{\rho\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1)}\rho\sum_{\chi\in\operatorname{Irr}(W)^F}\langle\rho, R_{\tilde\chi}\rangle\cdot\tilde\chi_{q^m}(T_{\mathbf{t}}F),$$

ce qui montre (i), les deux membres étant des polynômes égaux pour une infinité de valeurs de t.

Démontrons (ii). La proposition 2.3.3 permet de nous ramener au cas où la suite $\mathbf{t}$ est réduite à un seul terme $\underline{w}$. Puisque $\mathbf{X}(\underline{w})$ est rationnellement lisse, les conjectures de Weil sur les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius montrent que

$$\operatorname{Trace}\bigl(gF^m \mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr)=\sum_\rho\lambda_\rho^{m/\delta}q^{im/2}\rho(g)\bigl\langle\rho, H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr\rangle.$$

Jointe à la proposition 3.3.7, la formule des traces de Lefschetz fournit alors l'égalité

$$\sum_i(-1)^iq^{im/2}\bigl\langle\rho, H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr\rangle=\sum_\chi\langle\rho, R_{\tilde\chi}\rangle\tilde\chi_{q^m}(T_{\mathbf{t}}F)$$

pour tout m. On en déduit (ii). La proposition s'en déduit. □

3.3.9. Nous étudions maintenant les propriétés de rationalité des caractères des groupes de cohomologie.

Proposition 3.3.10. (i) *Pour tout $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$ et pour tout i, le groupe $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ est unipotent comme $\mathbf{G}^F$-module, et les valeurs propres de F^δ dans $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ sont de module inférieur ou égal à $q^{\delta i/2}$.*

(ii) *Si de plus $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$ est un produit d'éléments $\underline{\mathbf{w}}$ tels que $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{w}})$ est rationnellement lisse, alors pour tout i le groupe $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ a un caractère rationnel comme $(\mathbf{G}^F\times\langle F^\delta\rangle)$-module.*

Preuve. Supposons pour commencer que $\mathbf{t}$ est comme dans (ii). Le corollaire 3.3.8(ii) montre que $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ est unipotent et pour tout entier strictement positif m, on a :

$$\begin{aligned}\bigl|\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr|^{gF^{\delta m}}&=\sum_i(-1)^i\operatorname{Trace}\bigl(gF^{\delta m}\mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)\bigr)\\&=\sum_i(-1)^i\sum_{\rho\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1)}\bigl(\lambda_\rho q^{\delta i/2}\bigr)^m\operatorname{Trace}\bigl(g\mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)_\rho\bigr).\end{aligned}$$

Soit $[\lambda]$ le caractère de $\langle F^\delta\rangle$ défini par $F^\delta\mapsto\lambda$. On pose $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))_\lambda=\bigoplus_{\{\rho\mid\lambda_\rho=\lambda\}}H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))_\rho$. Alors, pour tout g, l'élément

$$\sum_{i,\lambda}(-1)^i\bigl[\lambda q^{\delta i/2}\bigr]\operatorname{Trace}\bigl(g\mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)_\lambda\bigr)$$

de $\mathcal{R}(\langle F^\delta\rangle)$ ne prend que des valeurs entières sur les puissances strictement positives de F^δ, donc est stable par tout $\sigma\in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Comme $\sigma([\lambda q^{\delta i/2}])=[\sigma(\lambda)q^{\delta i/2}]$ et que les caractères $[\lambda q^{\delta i/2}]$ sont tous distincts quand i décrit $\mathbb{Z}$ et λ décrit les racines de l'unité, on en déduit que $\sigma(\mathrm{Trace}(g\mid H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))_\lambda))=\mathrm{Trace}(g\mid H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))_{\sigma(\lambda)})$. Par conséquent, le caractère du $(\mathbf{G}^F\times\langle F^\delta\rangle)$-module $H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ est σ-stable, donc rationnel. On a prouvé (ii) ainsi que le cas particulier de (i) où t est comme dans (ii).

On suppose maintenant que $\mathbf{t}$ est de la forme $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_n$ avec $t_1,\dots,t_n\in S\cup\underline{S}$. On va établir (i), dans ce cas, par récurrence sur le nombre de i tels que $t_i\in S$. Soit i tel que $t_i\in S$. Alors, la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{i-1}\underline{\mathbf{t}}_i\mathbf{t}_{i+1}\cdots\mathbf{t}_n)$ est union de l'ouvert $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ et du fermé complémentaire $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_{i+1}\cdots\mathbf{t}_n)$. Par récurrence, le (i) de la proposition est établi pour $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{i-1}\underline{\mathbf{t}}_i\mathbf{t}_{i+1}\cdots\mathbf{t}_n)$ et pour $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_{i+1}\cdots\mathbf{t}_n)$. La suite exacte longue associée à la décomposition ouvert-fermé montre le résultat pour $\mathbf{X}(\mathbf{t})$.

Considérons maintenant un élément quelconque $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_n$ de $\underline{B}^+$ (avec $t_i\in W\cup\underline{W}$). Nous allons montrer (i) par récurrence sur le nombre de t_i dans $\underline{W}$. Le résultat est déjà établi pour $\mathbf{t}\in B^+$.

Soit j tel que $t_j=\underline{w}\in\underline{W}$ et considérons la stratification de la proposition 3.2.2, où $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_{j-1}$ et $\mathbf{t}'=\mathbf{t}_{j+1}\cdots\mathbf{t}_n$. Par récurrence, tous les $\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_{i-1}$ vérifient (i). La propriété (i) pour $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ se déduit alors de la suite spectrale associée à la stratification. □

Nous utiliserons parfois le raffinement suivant de la proposition 3.3.10(ii), qui étudie l'action de F. Lorsque F n'est pas un endomorphisme de Frobenius, la formule des traces ne s'applique pas directement et nous contournons le problème en utilisant le théorème 2.2.7 de Fujiwara.

Proposition 3.3.11. *Soit $\mathbf{t}\in\underline{B}^+$ produit d'éléments $\underline{\mathbf{w}}\in\underline{\mathbf{W}}^F$ tels que $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{w}})$ est rationnellement lisse ; alors, pour tout i, le caractère du $(\mathbf{G}^F\rtimes\langle F\rangle)$-module $H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ est rationnel.*

Preuve. Écrivons $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1\cdots\mathbf{t}_k$ avec $\mathbf{t}_i\in\underline{W}^F$ et $\mathbf{X}(\mathbf{t}_i)$ rationnellement lisse. Soit $i\in\{0,\dots,\delta-1\}$ et $(\phi,F_1)=(gF^i,F^\delta)$. Pour $m\equiv i \pmod{\delta}$, on a $gF^m=\phi(F^\delta)^{(m-i)/\delta}$, donc, pour m assez grand, on a (*cf.* théorème 2.2.7) :

$$\bigl|\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)\bigr|^{gF^m}=\sum_i(-1)^i\,\mathrm{Trace}\bigl(gF^m\mid H^i_c\bigl(\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)\bigr)\bigr).$$

Puisque $\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)$ est rationnellement lisse, le corollaire 3.3.4, joint aux conjectures de Weil, montre que les valeurs propres de F sur $H^i_c(\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k))_\rho$ sont de la forme $\mu_\rho q^{i/2}$ où μ_ρ est une racine δ-ième de λ_ρ. Donc, si on note $H^i_c(\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k))_\rho^{\mu_\rho}$ l'espace propre généralisé de F dans $H^i_c(\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k))_\rho$ pour la valeur propre $\mu_\rho q^{i/2}$, on a

$$\bigl|\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)^{gF^m}\bigr|=\sum_i(-1)^i\sum_\rho\sum_{\{\mu_\rho\mid\mu_\rho^\delta=\lambda_\rho\}}\bigl(\mu_\rho q^{i/2}\bigr)^m\,\mathrm{Trace}\bigl(g\mid H^i_c\bigl(\mathbf{X}(t_1,\dots,t_k)\bigr)_\rho^{\mu_\rho}\bigr),$$

et on conclut comme dans la preuve du (ii) de la proposition 3.3.10. □

Remarque 3.3.12. Nous conjecturons que tout élément de $C_{\underline{B}^+}(F)$ est produit d'éléments de $C_{B^+}(F)$ et d'éléments de $\underline{\mathbf{W}}^F$.

3.3.13. Soit Id le caractère identité de $\mathbf{G}^F$. Soit Id_{h^2t} le caractère de $\mathcal{H}_{h^2t}(W)$ qui se spécialise en le caractère trivial de W (il prend la valeur $(h^2t)^{l(w)}$ sur T_w).

Proposition 3.3.14. *Soit* $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$. *La classe de la partie* $\mathbf{G}^F$*-invariante de* $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ *est donnée par* $\langle H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t})), \mathrm{Id}\rangle = \mathrm{Id}_{h^2t}(T_{\mathbf{t}})$.

Preuve. Nous procédons par récurrence sur le nombre d'éléments de $\underline{\mathbf{W}}$ dans une décomposition de $\mathbf{t}$.

Démontrons d'abord le résultat quand $\mathbf{t} \in B^+$. En considérant une décomposition $\mathbf{t} = \mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_k$ où $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}$ et en utilisant la proposition 2.3.3, on se ramène au cas où $\mathbf{t} \in \mathbf{W}$. Soit $\dot{t}$ un élément de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ qui relève t. Soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{B}$.

Soit $\mathbf{Y}(\dot{t}) = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \dot{t}\mathbf{U}\}$. C'est une variété munie d'une action de $\mathbf{G}^F$ par multiplication à gauche et de $\mathbf{T}^{tF}$ par multiplication à droite. On dispose aussi d'une action de $\mathbf{U} \cap {}^{\dot{t}}\mathbf{U}$ par multiplication à droite. On a un isomorphisme de variétés compatible à l'action de $\mathbf{G}^F$ [9, §1.11]

$$g \mapsto {}^g\mathbf{B}, \qquad \big(\mathbf{Y}(\dot{t})/\big(\mathbf{U} \cap {}^{\dot{t}}\mathbf{U}\big)\big)/\mathbf{T}^{tF} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(t).$$

Le morphisme quotient $\pi : \mathbf{Y}(\dot{t}) \to \mathbf{Y}(\dot{t})/(\mathbf{U} \cap {}^{\dot{t}}\mathbf{U})$ est une fibration à fibres des espaces affines de dimension $l(w_0) - l(t)$. Par conséquent, $\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[2(l(t) - l(w_0))](l(t) - l(w_0))$, donc on a un isomorphisme de G^F-modules

$$H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big) \simeq H_c^{*+2(l(w_0)-l(t))}\big(\mathbf{Y}(\dot{t})/\mathbf{T}^{tF}\big)\big(l(w_0) - l(t)\big).$$

La variété $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{t}})/\mathbf{G}^F$ est isomorphe à $\mathbf{U}$ et l'action correspondante de $\mathbf{T}^{tF}$ est l'action par conjugaison. Cette action s'étend en l'action par conjugaison du groupe connexe $\mathbf{T}$. Or, un groupe connexe agit trivialement sur la cohomologie [9, proposition 6.4], donc

$$\begin{aligned} H_c^*(\mathbf{U}) &\simeq H_c^*(\mathbf{U})^{\mathbf{T}^{tF}} \simeq H_c^*\big(\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{t}})/\mathbf{T}^{tF}\big)^{\mathbf{G}^F} \\ &\simeq H_c^{*-2(l(w_0)-l(t))}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)^{\mathbf{G}^F}\big(l(t) - l(w_0)\big). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{U}$ est un espace affine de dimension $l(w_0)$, on en déduit l'égalité $\langle H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t})), \mathrm{Id}\rangle = (h^2t)^{l(\mathbf{t})}$.

Passons maintenant à l'étape générale de la récurrence. Considérons une décomposition $\mathbf{t} = \mathbf{t}\underline{\mathbf{w}}\mathbf{t}'$ avec $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$ et $w \in W$. On considère la stratification correspondante (*cf.* proposition 3.2.2). L'hypothèse de récurrence s'applique aux composantes des variétés $\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}$. En particulier, la partie $\mathbf{G}^F$-invariante de leur cohomologie est en degré pair. Il en résulte que les morphismes de connection des suites exactes longues ouvert-fermé de cohomologie associées à la stratification sont nulles lorsque l'on se restreint à la partie où $\mathbf{G}^F$ agit trivialement. Par conséquent,

$$H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)^{\mathbf{G}^F} = \bigoplus_i H_c^*(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1})^{\mathbf{G}^F},$$

d'où la proposition. □

Soit ε le caractère signe de W et $\tilde{\varepsilon}$ l'extension telle que F agit trivialement. Nous notons St le caractère de Steinberg $R_{\tilde{\varepsilon}}$ de $\mathbf{G}^F$.

Proposition 3.3.15. *Soit* $\mathbf{t} \in \underline{B}^+$. *On a* $\langle H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t})), \mathrm{St}\rangle = \varepsilon_{h^2t}(T_{\mathbf{t}})$. *En d'autres termes :*

(i) *La représentation de Steinberg n'intervient pas dans* $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ *si* $\mathbf{t} \notin B^+$.
(ii) *Pour* $\mathbf{t} \in B^+$, *le seul groupe de cohomologie où la représentation de Steinberg intervient est* $H_c^{l(\mathbf{t})}(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$; *dans celui-ci, elle a multiplicité 1 et est associée à la valeur propre 1 de* F^δ.

Preuve. Lorsque $\mathbf{t}$ est un produit d'éléments de $\underline{\mathbf{S}}$, le résultat est fourni par le corollaire 3.3.8(ii), car $\varepsilon_{th^2}(T_{\underline{\mathbf{s}}}) = 0$ (si $\underline{\mathbf{s}} \in \underline{\mathbf{S}}$) et $\varepsilon_{th^2}(T_1) = 1$.

Soit maintenant $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_n$ avec $t_1, \ldots, t_n \in S \cup \underline{S}$. Soit i tel que $t_i \in S$. Par récurrence sur le cardinal de $\{i \mid t_i \in S\}$, la représentation de Steinberg n'intervient pas dans la cohomologie de la variété $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_{i-1}\underline{\mathbf{t}}_i\mathbf{t}_{i+1} \cdots \mathbf{t}_n)$. La suite exacte associée à la décomposition ouvert-fermé $\mathcal{O}(\underline{\mathbf{t}}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{t}_i) \amalg \mathcal{O}(1)$ montre que $H_c^k(\mathbf{X}(\mathbf{t}))_{\mathrm{St}} = H_c^{k-1}(\mathbf{X}(\mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_{i-1}\mathbf{t}_{i+1} \cdots \mathbf{t}_n))_{\mathrm{St}}$ et la proposition en découle par récurrence.

Soit $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_n$ avec $t_1, \ldots, t_n \in W \cup \underline{W}$. Nous allons procéder par récurrence sur $\sum_i (l(t_i) - 1)$, où i décrit les entiers tels que $t_i \notin W$. La proposition est déjà établie lorsque cet entier est nul. Sinon, il existe i tel que $t_i = \underline{v} \in \underline{W} - \underline{S}$. Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $v = ws$ et $w < v$. Par récurrence, la représentation de Steinberg n'intervient pas dans la cohomologie des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_{i-1}\underline{\mathbf{w}}\,\underline{\mathbf{s}}\mathbf{t}_{i+1} \cdots \mathbf{t}_n)$ et $\mathbf{X}(\mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_{i-1}\underline{\mathbf{w}}'\mathbf{t}_{i+1} \cdots \mathbf{t}_n)$ pour $w' < w$. La proposition 3.2.9 permet alors de déduire la proposition pour $\mathbf{X}(\mathbf{t})$. □

Pour $w \in W$, on pose $R_w = \sum_i (-1)^i [H_c^i(\mathbf{X}(w))] \in \mathcal{R}(G^F)$.

Proposition 3.3.16. *Pour tout* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^F$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\left[H_c^*\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{s}^n\right)\right)\right] = \frac{t^n h^{2n}}{2}(R_1 + R_s) + \frac{h^n}{2}(R_1 - R_s).$$

Preuve. Lorsque le rang de $\mathbf{G}$ est 1, la proposition résulte des propositions 3.3.14 et 3.3.15, car alors $R_1 + R_s = 2[\mathrm{Id}]$ et $R_1 - R_s = 2[\mathrm{St}]$. Le cas général s'en déduit par induction de Harish-Chandra à partir du sous-groupe de Levi défini par s (*cf.* corollaire 3.1.3). □

Proposition 3.3.17. *Soient* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *et* $\mathbf{b} \in B^+$ *tels que* $\mathbf{b}F(\mathbf{s}) = \mathbf{s}\mathbf{b}$. *Alors, il existe* $H_s, H_i \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, h] \otimes \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$ *tels que* $[H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{s}^m\mathbf{b}))] = h^m H_s + (h^2t)^m H_i$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Preuve. Nous appliquons la proposition 2.3.13 avec $I = \{s\}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{s}^m\mathbf{b}$. Soit $\mathbf{z} = \omega_I(\mathbf{b})$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_I(\mathbf{b}) = \mathbf{s}^n$. On a alors $\omega_I(\mathbf{s}^m\mathbf{b}) = \mathbf{z}$ et $\alpha_I(\mathbf{s}^m\mathbf{b}) = \mathbf{s}^{m+n}$. Soit $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_k$ la forme normale de $\mathbf{z}$ et $\dot{z}_i$ un relevé de z_i. On pose $F' = \dot{z}_1 \cdots \dot{z}_k F$. Soit $\mathbf{L} = \mathbf{L}_I$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ de type A_1. On note $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_k)$, variété munie d'une action à droite de $\mathbf{L}^{F'}$ et d'une action à gauche de $\mathbf{G}^F$.

On a $\mathbf{X}(\mathbf{s}^m\mathbf{b}) \simeq \mathbf{Y} \times_{\mathbf{L}^{F'}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}}(\mathbf{s}^{m+n}, F')$. Le groupe $\mathbf{L}^{F'}$ possède deux caractères unipotents, $\mathrm{Id}_{\mathbf{L}}$ et $\mathrm{St}_{\mathbf{L}}$ et la proposition 3.3.16 montre que $[H_c^*(\mathbf{X}_{\mathbf{L}}(\mathbf{s}^{m+n}, F'))] = h^{m+n}\,\mathrm{St}_{\mathbf{L}} + (h^2t)^{m+n}\,\mathrm{Id}_{\mathbf{L}}$. On déduit de la formule de Künneth que

$$\left[H_c^*\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{s}^m\mathbf{b}\right)\right)\right] = h^{m+n}\left[H_c^*(\mathbf{Y})_{\mathrm{St}_{\mathbf{L}}}\right] + (h^2t)^{m+n}\left[H_c^*(\mathbf{Y})_{\mathrm{Id}_{\mathbf{L}}}\right],$$

d'où la proposition avec $H_s = h^n[H_c^*(\mathbf{Y})_{\mathrm{St}_{\mathbf{L}}}]$ et $H_i = (h^2t)^n[H_c^*(\mathbf{Y})_{\mathrm{Id}_{\mathbf{L}}}]$. □

Proposition 3.3.18. *Soit $\tilde\chi \in \mathcal{R}(W \rtimes \langle F\rangle) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $R_{\tilde\chi} \in \mathcal{R}^+(\mathbf{G}^F)$ et soit I une partie F-stable de S. On suppose que $\tilde\chi$ est combinaison linéaire de caractères $\psi \in \operatorname{Irr}(W \rtimes \langle F\rangle)$ tels que $\langle \operatorname{Res}_{W_I}^{W\rtimes\langle F\rangle} \psi, \operatorname{Id}\rangle = 0$.*

Alors, pour tous $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$ et tout caractère unipotent ρ tel que $\langle \rho, R_{\tilde\chi}\rangle \neq 0$, on $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}'))_\rho = 0$.

Preuve. Nous procédons comme dans la preuve de la proposition 3.3.15 pour nous ramener au cas où $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$ sont dans le sous-monoïde engendré par $\underline{S}$.

Puisque $T_{\underline{w}_0^I}$ est un multiple de l'idempotent central de $\mathcal{H}_{h^2t}(W_I)$ associé au caractère trivial Id_{h^2t}, il agit par 0 dans toute représentation V de $\mathcal{H}_{h^2t}(W)$ dont la restriction à W_I ne contient pas le caractère trivial. Par conséquent, pour tout $\psi \in \operatorname{Irr}(W \rtimes \langle F\rangle)$ tel que $\langle \operatorname{Res}_{W_I}^{W\rtimes\langle F\rangle} \psi, \operatorname{Id}\rangle = 0$, on a $\psi_{h^2t}(T_{\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}'}F) = \psi_{h^2t}(T_\mathbf{t} T_{\underline{w}_0^I} T_{\mathbf{t}'}F) = 0$. Par hypothèse, $\tilde\chi$ est combinaison linéaire de caractères ψ ayant cette propriété, donc $\tilde\chi_{h^2t}(T_{\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}'}F) = 0$.

L'orthogonalité des caractères $R_{\tilde\phi}$ [24, §3.19.2] permet de déduire du corollaire 3.3.8(ii) que $\langle H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}')), R_{\tilde\chi}\rangle = \tilde\chi_{h^2t}(T_{\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}'}F) = 0$. Puisque $R_{\tilde\chi} \in \mathcal{R}^+(\mathbf{G}^F)$, on obtient finalement $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{w}_0^I\mathbf{t}'))_\rho = 0$. □

Corollaire 3.3.19. *Pour tous $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \underline{B}^+$ et pour tout caractère unipotent $\rho \neq \operatorname{Id}$, on a $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}\underline{w}_0\mathbf{t}'))_\rho = 0$.*

Preuve. Lusztig [26, §5.10 et theorem 6.17] a montré qu'il existe une famille d'éléments $a_{wF} \in \mathcal{R}(W \rtimes \langle F\rangle) \otimes \mathbb{Q}$, pour $w \in W$, vérifiant les propriétés suivantes (nous suivons les notations de Lusztig au signe près) :

- Pour $w \neq 1$, on a $\langle \operatorname{Res}_W a_{wF}, \operatorname{Id}\rangle = 0$.
- On a $R_{a_{wF}} \in \mathcal{R}^+(\mathbf{G}^F)$.
- Le sous-groupe de $\mathcal{R}(G^F)$ engendré par les $R_{a_{wF}}$, pour $w \neq 1$, coïncide avec le sous-groupe engendré par les $R_{\tilde\phi}$, pour $\phi \neq \operatorname{Id}$.

Le résultat se déduit alors immédiatement de la proposition 3.3.18, appliquée à $\tilde\chi = a_{wF}$ pour $w \in W - \{1\}$. □

3.3.20. Nous généralisons maintenant des résultats de [24].

Proposition 3.3.21. *Soit ρ un caractère unipotent de $\mathbf{G}^F$ et soit $\mathbf{b}_0 \in B^+$ un élément de longueur minimale tel que $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{b}_0))_\rho \neq 0$. Alors*

(i) *$\mathbf{b}_0 \in \mathbf{W}$ et, si ρ^* est le caractère dual de ρ, l'élément $\mathbf{b}_0$ est aussi de longueur minimale pour la propriété $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{b}_0))_{\rho^*} \neq 0$.*
(ii) *On a $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}_0))_\rho = 0$ pour $i \neq l(\mathbf{b}_0)$ et F^δ agit sur $H_c^{l(\mathbf{b}_0)}(\mathbf{X}(\mathbf{b}_0))_\rho$ avec une valeur propre de module $q^{\delta l(\mathbf{b}_0)/2}$.*
(iii) *$\beta(\mathbf{b}_0)$ est de longueur minimale dans sa classe de F-conjugaison et cette classe de F-conjugaison ne dépend que de ρ.*

(iv) *Soit* $\mathbf{b} \in B^+$ *tel que* $H_c^{l(\mathbf{b})}(\mathbf{X}(\mathbf{b}))_\rho \neq 0$. *Alors, les valeurs propres de* F^δ *sur* $H_c^{l(\mathbf{b})}(\mathbf{X}(\mathbf{b}))_\rho$ *sont de module inférieur ou égal à* $q^{\delta l(\mathbf{b})/2}$ *et cette valeur ne peut être atteinte que si* $\beta(\mathbf{b})$ *est* F*-conjugué à* $\beta(\mathbf{b}_0)$.

Preuve. L'assertion que $\mathbf{b}_0$ est dans $\mathbf{W}$ est [24, example 3.10.c]. On pose $\mathbf{w} = \mathbf{b}_0$ et soit $w = s_1 \cdots s_n$ une décomposition réduite de w. Soit $\mathbf{t}' = \underline{s}_1 \cdots \underline{s}_n$. Le complémentaire de l'ouvert $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ de $\mathbf{X}(\mathbf{t}')$ est stratifié par des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{b}')$ avec $\mathbf{b}' \in B^+, l(\mathbf{b}') < l(\mathbf{w})$. Par minimalité de $\mathbf{w}$, les groupes de cohomologie de ces variétés ne font pas intervenir ρ. Les suites exactes longues de cohomologie montrent alors que les composantes de type ρ de $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{w}))$ et de $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}'))$ sont isomorphes. D'après la proposition 3.3.10(ii), on a $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}'))_{\rho*} \neq 0$. En échangeant les rôles de ρ et ρ^* on déduit que ρ^* ne peut pas intervenir dans $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w}'))$ si $l(\mathbf{w}') < l(\mathbf{w})$. La stratification montre donc que $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_{\rho^*} \simeq H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{t}'))_{\rho^*} \neq 0$ et $\mathbf{w}$ est aussi un élément de longueur minimum tel que ρ^* intervient dans la cohomologie de la variété associée, d'où (i).

On déduit de la proposition 3.3.2(i) que si $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_\rho \neq 0$, alors, $i \geqslant l(\mathbf{w})$.

La variété $\mathbf{X}(\mathbf{t}')$ est une variété projective lisse (*cf.* proposition 2.3.5). La dualité de Poincaré montre que si $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_\rho \neq 0$, alors ρ et ρ^* interviennent aussi dans $H^{2l(\mathbf{w})-i}(\mathbf{X}(\mathbf{t}'))$, donc dans $H_c^{2l(\mathbf{w})-i}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))$. On a donc aussi $2l(\mathbf{w}) - i \geqslant l(\mathbf{w})$, d'où $i = l(\mathbf{w})$. D'autre part, les conjectures de Weil montrent que les valeurs propres de F^δ sur $H_c^{l(\mathbf{w})}(\mathbf{X}(\mathbf{t}'))$ sont de module $q^{\delta l(\mathbf{w})/2}$. Il en est donc de même pour de $H_c^{l(\mathbf{w})}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_\rho$ et l'assertion (ii) est établie.

Prouvons (iii). Supposons que w n'est pas de longueur minimale dans sa F-classe de conjugaison. D'après [15, théorème 1.1] et [17, théorème 2.6], il existe $s \in S$ tel que $w = sw'F(s)$ avec $l(w) = l(w') + 2$, i.e., $\mathbf{w} = \mathbf{s}\mathbf{w}'\mathbf{s}$ dans B^+. Alors, les propositions 3.2.10 et 3.1.6 montrent que $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w}'))_\rho \neq 0$ ou $H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{s}\mathbf{w}'))_\rho \neq 0$, ce qui contredit la minimalité de $\mathbf{w}$.

Soit maintenant $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ tel que $l(w') = l(w)$ et tel que $H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}'))_\rho \neq 0$. D'après (ii), les valeurs propres de F^δ sur $H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}'))_\rho$ sont de module $q^{\delta l(w)/2}$, donc F^δ a pour unique valeur propre $q^{\delta l(w)}$ sur le sous-module (non nul) $H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_\rho \otimes H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}'))_{\rho^*}$ de $(H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w})) \otimes H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}')))^{\mathbf{G}^F}$. La proposition 3.3.2 affirme alors que w et w' sont F-conjugués.

Considérons enfin (iv). On a vu dans (i) que $H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))_{\rho^*} \neq 0$ et dans (ii) que F^δ agit sur cet espace avec une valeur propre de module $q^{\delta l(w)/2}$. Le résultat résulte alors de la proposition 3.3.2 appliquée à $(H_c^{l(\mathbf{b})}(\mathbf{X}(\mathbf{b})) \otimes H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(\mathbf{w})))^{\mathbf{G}^F}$. $\square$

Le corollaire suivant résulterait de l'affinité des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{b})$ pour $\mathbf{b} \in B^+$, qui n'est connue que pour q assez grand (proposition 2.3.6(iii)).

Corollaire 3.3.22. *Pour tout* $\mathbf{b} \in B^+$ *et tout* $i < l(\mathbf{b})$ *on a* $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b})) = 0$.

Preuve. Soit $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ et soit $w \in W$ un élément de longueur minimale tel que $H_c^{l(w)}(\mathbf{X}(w))_{\rho^*} \neq 0$ (*cf.* proposition 3.3.21). Soit i tel que $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}))_\rho \neq 0$. On a donc $(H_c^{l(\mathbf{w})}(\mathbf{X}(\mathbf{w})) \otimes H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b})))^{\mathbf{G}^F} \neq 0$. On déduit de la proposition 3.3.2 que $l(\mathbf{w}) + i \geqslant l(\mathbf{w}) + l(\mathbf{b})$, donc que $i \geqslant l(\mathbf{b})$, d'où le corollaire. $\square$

3.3.23. Nous proposons maintenant plusieurs conjectures mettant en évidence des phénomènes de périodicité. Elles sont vérifiées dans les cas des groupes de rang 2 et des éléments pour lesquels nous calculons la cohomologie (théorèmes 4.2.4, 4.2.9, 4.3.4, 4.3.5, 4.4.3 et 4.4.4).

On note $N = l(w_0)$. Pour $\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F$ nous notons A_χ (respectivement a_χ) le degré (respectivement la valuation) du degré générique du caractère $\chi_t \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_t(W))$ correspondant à χ (*cf.* [26, 4.1.1]). Par ailleurs, comme les coefficients $\langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle$ sont indépendants de q (*cf.* [26, theorem 4.23]), et comme $R_{\tilde\chi}(1)$ est la valeur en q d'un polynôme à coefficients indépendants de q (« degré fantôme »), pour tout $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ il existe un polynôme à coefficients indépendants de q dont $\rho(1)$ est la valeur en q (en effet, la partie unipotente de la représentation régulière est donnée par $\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F} R_{\tilde\chi}(1)R_{\tilde\chi}$). Nous définissons A_ρ et a_ρ comme le degré et la valuation de ce polynôme (voir aussi [4, theorem 1.32]).

Conjecture 3.3.24. *Soit* $\mathbf{w} \in \underline{B}^+$. *On a*

$$\left[H_c^*\big(\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}\mathbf{w})\big)_\rho\right] = h^{4N-2A_\rho} t^{2N-a_\rho-A_\rho}\left[H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w})\big)_\rho\right].$$

On note $P \mapsto \overline{P}$ l'involution de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}, h^{\pm 1}]$ donnée par $h \mapsto h^{-1}$ et $t^{1/2} \mapsto t^{-1/2}$.

Conjecture 3.3.25. *Soit* $\mathbf{w} \in B^+$ *tel que* $\mathbf{w} \preccurlyeq \boldsymbol{\pi}^n$. *Alors on a*

$$\left\langle H_c^*\big(\mathbf{X}\big(\mathbf{w}^{-1}\boldsymbol{\pi}^n\big)\big), \rho\right\rangle = \big(h^{4N-2A_\rho} t^{2N-a_\rho-A_\rho}\big)^n \overline{\left\langle H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w})\big), \rho\right\rangle}.$$

Soit E l'involution d'Ennola de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$ (*cf.* [4, theorem 3.3] ; *loc. cit.* considère une permutation avec signes $\sigma_{\mathbb{G}}$ dont l'effet sur les dimensions est de changer q en $-q$; nous considérons ici la permutation sous-jacente ; on a $E(\rho) = (-1)^{A_\rho}\sigma_{\mathbb{G}}(\rho)$).

Conjecture 3.3.26. *Supposons* w_0 *central dans* W. *Soit* $\mathbf{w} \in \underline{B}^+$. *On a*

$$\left\langle H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\mathbf{w})\big), \rho\right\rangle = h^{2N-A_\rho} t^{N-(a_\rho+A_\rho)/2}\left\langle H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w})\big), E(\rho)\right\rangle.$$

Un indice pour ces conjectures est la

Proposition 3.3.27. *Les conjectures* 3.3.24, 3.3.25 *et* 3.3.26 *sont vraies pour* $h = -1$.

Preuve. D'après le corollaire 3.3.8(i), on a

$$\left\langle H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w})\big), \rho\right\rangle_{|h=-1} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F} \langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle \tilde\chi_t(T_{\mathbf{w}}F).$$

En sommant sur $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, 1)$, nous transformons la conjecture 3.3.24 spécialisée en $h = -1$ en l'assertion équivalente

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F}\ \sum_{\rho\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1)} \rho\langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle \tilde\chi_t(T_{\boldsymbol{\pi}} T_{\mathbf{w}}F) \\
&\quad = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F}\ \sum_{\rho\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,1)} \rho t^{2N-a_\rho-A_\rho}\langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle \tilde\chi_t(T_{\mathbf{w}}F).
\end{aligned}$$

Comme A_χ et a_χ sont les mêmes pour tous les χ tels que $\langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle \neq 0$ (*cf.* [26, theorem 4.23]), on a $A_\rho = A_\chi$ et $a_\rho = a_\chi$ lorsque $\langle R_{\tilde\chi}, \rho\rangle \neq 0$; nous pouvons donc réécrire cette égalité

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F} R_{\tilde\chi}\tilde\chi_t(T_{\boldsymbol\pi} T_{\mathbf w} F) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F} t^{2N-a_\chi-A_\chi} R_{\tilde\chi}\tilde\chi_t(T_{\mathbf w} F),$$

ce qui équivaut par indépendance linéaire des $R_{\tilde\chi}$ à l'assertion :

$$\tilde\chi_t(T_{\boldsymbol\pi} T_{\mathbf w} F) = t^{2N-a_\chi-A_\chi}\tilde\chi_t(T_{\mathbf w} F).$$

Soit $\omega(\chi_t)$ le caractère central de χ_t. Puisque $\boldsymbol\pi$ est central, cela revient à voir que $\omega(\chi_t)(T_{\boldsymbol\pi}) = t^{2N-a_\chi-A_\chi}$, égalité bien connue (voir par exemple [26, 5.12.2]).

Par un calcul analogue, la conjecture 3.3.25 se transforme en

$$\tilde\chi_t\big(T_{\mathbf w}^{-1} T_{\boldsymbol\pi}^n F\big) = t^{n(2N-a_\rho-A_\rho)}\overline{\tilde\chi_t(T_{\mathbf w} F)}.$$

Vue la formule ci-dessus pour $\omega(\chi_t)(T_{\boldsymbol\pi})$, ceci équivaut à $\tilde\chi_t(T_{\mathbf w}^{-1} F) = \overline{\tilde\chi_t(T_{\mathbf w} F)}$; ceci résulte de ce que $t \mapsto t^{-1}$, $T_{\mathbf w} \mapsto T_{\mathbf w}^{-1}$, $F \mapsto F$ est un anti-automorphisme semi-linéaire de $\mathcal H_t(W) \rtimes \langle F\rangle$ qui fixe les caractères irréductibles (car il les fixe pour $t = 1$, puisque tous les caractères irréductibles de W sont réels et que nous avons choisi l'extension $\tilde\chi$ rationnelle).

Enfin, par un calcul analogue, la conjecture 3.3.26 se transforme en

$$\sigma_{\mathbb G}(R_{\tilde\chi})\tilde\chi_t(T_{\mathbf w} T_{\mathbf w_0} F) = t^{N-(a_\rho+A_\rho)/2} R_{\tilde\chi}\tilde\chi(T_{\mathbf w} F).$$

Puisque par *loc. cit.* on a $\omega(\chi_t)(T_{\mathbf w_0}) = t^{N-(a_\rho+A_\rho)/2}\omega(\chi)(w_0)$, cela revient à l'égalité $\sigma_{\mathbb G}(R_{\tilde\chi}) = \omega(\chi)(w_0) R_{\tilde\chi}$. Cette égalité est à son tour équivalente à $\sigma_{\mathbb G}(R_w) = R_{ww_0}$. Cette dernière égalité se ramène au cas des groupes quasi-simples ; pour les groupes exceptionnels c'est une vérification d'un nombre fini de cas que nous avons effectuée par ordinateur. Pour les cas des groupes classiques, nous pouvons extraire la preuve de celle de [4, theorem 3.3]. En effet, avec les notations de *loc. cit.*, $\mathbb T^-$ est un tore de type ww_0 si $\mathbb T$ est de type w ; l'énoncé [4, theorem 3.3] suppose le tore d-déployé pour un certain d ; mais la preuve de la commutation de l'induction de Lusztig avec $\sigma_{\mathbb G}$ donnée pages 52–53 de *loc. cit.* n'utilise pas cette hypothèse dans le cas des tores. □

3.4. Indépendance de ℓ

3.4.1. Soit X une variété quasi-projective sur $\overline{\mathbb F}_p$. On note $\mathrm{CH}_r(X, n)$ les groupes de Chow supérieurs de Bloch. On pose $H_r^{\mathrm{mot}}(X, \mathbf Z(n)) = \mathrm{CH}_n(X, r-2n)$ (« homologie de Borel–Moore motivique »). Nous renvoyons à [21, II, §II.2] et [18] pour leurs principales propriétés.

Lorsque X est lisse, on dispose de morphismes « cycle » : $H_r^{\mathrm{mot}}(X, \mathbf Z(n)) \otimes_{\mathbf Z} \mathbb Q_\ell \to H_c^r(X, \mathbb Q_\ell(n))^*$ et en sommant, on obtient

$$c^r(X) : \bigoplus_n H_r^{\mathrm{mot}}\big(X, \mathbf Z(n)\big) \otimes_{\mathbf Z} \mathbb Q_\ell(n) \to H^r(X, \mathbb Q_\ell).$$

Si γ est un endomomorphisme propre de X, alors il induit un endomorphisme de $H_r^{\mathrm{mot}}(X, \mathbf Z(n))$ et $c^r(X)$ est équivariant pour cette action.

Remarque. La construction du morphisme cycle pour des variétés singulières ne semble pas encore exister dans la littérature. Pour l'application que nous en faisons à la cohomologie des variétés de Deligne–Lusztig associées à des groupes de rang 2, le cas des variétés lisses suffit. En effet, dans le lemme 4.3.2, la variété $\mathbf{X}(y)$ est lisse, car $\underline{W}^F = \{1, \underline{w}_0\}$. Dans les autres cas, les variétés concernées sont associées à des éléments de B^+.

Proposition 3.4.2. *Soient* $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \underline{B}^+$. *On considère l'action diagonale de* $\mathbf{G}^F$ *sur* $\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')$. *Alors, pour tout* r, *le morphisme cycle* c^r *induit un isomorphisme*

$$\bigoplus_n H_r^{\mathrm{mot}}\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'), \mathbf{Z}(n)\big)^{\mathbf{G}^F} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}_\ell(n) \xrightarrow{\sim} H^r\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'), \mathbb{Q}_\ell\big)^{\mathbf{G}^F}.$$

Preuve. Commençons par introduire deux définitions. Un morphisme $f: Y \to X$ est un *quasi-fibré vectoriel de rang* r si c'est une fibration localement triviale (pour la topologie de Zariski), de fibres isomorphes à l'espace affine $\mathbb{A}^r$. Le morphisme $f^*: H^r_{\mathrm{mot}}(X, \mathbf{Z}(n)) \to H^r_{\mathrm{mot}}(Y, \mathbf{Z}(n))$ est alors un isomorphisme (*cf.* par exemple [18, §1.2.7]). On introduit une relation d'équivalence sur les variétés comme la clôture de la relation d'être un quasi-fibré vectoriel et on dit qu'une variété est un *quasi espace affine* si elle est dans la classe d'un point. Pour un quasi espace affine X, les morphismes c^r sont donc des isomorphismes.

Soient $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_{n'} \in \underline{S}$. Lusztig [27, §2.6] introduit une stratification par des sous-variétés fermées $(\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle)$-équivariantes

$$0 = Z_{L_0} \subset Z_{L_1} \subset \cdots \subset Z_{L_m} = \mathbf{X}(t_1, \dots, t_n) \times \mathbf{X}\big(t'_1, \dots, t_{n'}\big).$$

On fixe i et on pose $Z = Z_{L_i} - Z_{L_{i-1}}$. Lusztig [27, §3.3 et 3.5] introduit des variétés lisses Z_0 et Z_1 munies de l'action libre d'un groupe fini $\mathcal{T}$ commutant aux actions de $\mathbf{G}^F$ et de F. Il construit un isomorphisme $(\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle)$-équivariant $Z_0/\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} Z$ [27, Lemma 3.4] et un quasi fibré vectoriel $(\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle \times \mathcal{T})$-équivariant $f: Z_1 \to Z_0$. Il montre [27, §3.26] que $\mathbf{G}^F \setminus Z_1$ est un quasi espace affine.

On en déduit que $c(Z_1)^{\mathbf{G}^F}$ est un isomorphisme, donc que $c(Z_0)^{\mathbf{G}^F}$ est un isomorphisme et finalement que $c(Z)^{\mathbf{G}^F}$ est un isomorphisme.

Les suites spectrales qui calculent la comohologie ℓ-adique et la cohomologie motivique de $\mathbf{X}(t_1, \dots, t_n) \times \mathbf{X}(t'_1, \dots, t_{n'})$ à partir de celle des $Z_{L_i} - Z_{L_{i-1}}$ sont compatibles avec les morphismes « cycle ». On déduit que $c(\mathbf{X}(t_1, \dots, t_n) \times \mathbf{X}(t'_1, \dots, t_{n'}))^{\mathbf{G}^F}$ est un isomorphisme.

Soient maintenant $s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_{n'} \in S$. Soient $t_i = \underline{s}_i$ et $t'_i = \underline{s}'_i$. D'après ce qui précède, les morphismes $c^{\mathbf{G}^F}$ sont des isomorphismes pour les variétés $\mathbf{X}(t_{i_1}, \dots, t_{i_r}) \times \mathbf{X}(t'_{i'_1}, \dots, t'_{i'_{r'}})$, où $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ et $1 \leqslant i'_1 < \cdots < i'_{r'} \leqslant n'$. On déduit de la suite spectrale de Mayer–Vietoris qui calcule la cohomologie de $\mathbf{X}(s_1, \dots, s_n) \times \mathbf{X}(s'_1, \dots, s'_{n'})$ à partir de celle des $\mathbf{X}(t_{i_1}, \dots, t_{i_r}) \times \mathbf{X}(t'_{i'_1}, \dots, t'_{i'_{r'}})$ que $c(\mathbf{X}(s_1, \dots, s_n) \times \mathbf{X}(s'_1, \dots, s'_{n'}))^{\mathbf{G}^F}$ est un isomorphisme.

Dans le cas général, on utilise la suite spectrale qui provient de la stratification (2.2.15) de $\mathbf{X}(\mathbf{b})$ dont les pièces sont des $\mathbf{X}(s_1, \dots, s_n)$ avec $s_i \in S$. $\square$

Remarque 3.4.3. Lorsque $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ sont produit d'élements de $\underline{S}$, alors,

$$\mathrm{CH}^r\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'), n\big)^{\mathbf{G}^F} = 0$$

pour $n \neq 0$: parmi les groupes de Chow supérieurs de $\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}')$, seuls les groupes de Chow ordinaires ont des invariants sous $\mathbf{G}^F$.

On déduit de la proposition 3.4.2 le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.4. *Soient* $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \underline{B}^+$*. Alors, pour tout* i*, il existe un* $\mathbb{Q}\langle F\rangle$*-module* L^i *tel que pour tout* $\ell \nmid q$*, on a un isomorphisme de* $\mathbb{Q}_\ell\langle F\rangle$*-modules*

$$\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} L^i \xrightarrow{\sim} H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}'), \mathbb{Q}_\ell\big)^{\mathbf{G}^F}.$$

3.4.5. Pour $\mathbf{b} \in \underline{B}^+$, soit $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell)_j$ la partie de $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell)$ où les valeurs propres de F^δ sont de module $q^{\delta j/2}$. D'après le corollaire 3.4.4, on a, pour $\mathbf{t}, \mathbf{b} \in \underline{B}^+$, en considérant la partie de $H_c^k(\mathbf{G}^F \backslash \mathbf{X}(\mathbf{t}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}))$ où F^δ agit par $q^{\delta k'/2}$, que

$$S_{k,k',\mathbf{t},\mathbf{b}} := \sum_{i,j} \big\langle H_c^{k-i}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbb{Q}_\ell\big)_{k'-j}, H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell\big)_j^*\big\rangle$$

est indépendant de ℓ (où pour une représentation V de $\mathbf{G}^F$ on note V^* la représentation contragrédiente).

Proposition 3.4.6. *Pour tout* $\mathbf{b} \in \underline{B}^+$*, tout* $\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F$ *et tous* i*,* j*, le produit scalaire* $\langle R_{\tilde{\chi}}, H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$ *est indépendant de* ℓ *et est nul si* $a_\chi \not\equiv j \pmod 2$.

Preuve. Si $\mathbf{t}$ est dans le sous-monoïde de $\underline{B}^+$ engendré par $\underline{S}$, on a par le corollaire 3.3.8(ii) :

$$H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbb{Q}_\ell\big) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F} R_{\tilde{\chi}} \tilde{\chi}_{h^2t}(T_{\mathbf{t}}F).$$

En tenant compte de cette formule on a

$$S_{k,k',\mathbf{t},\mathbf{b}} = \sum_i \big\langle H_c^{k-i}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbb{Q}_\ell\big)_{k-i}, H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell\big)_{i+k'-k}^*\big\rangle\,;$$

et comme les valeurs propres de F^δ sur $H_c^k(\mathbf{G}^F \backslash \mathbf{X}(\mathbf{t}) \times \mathbf{X}(\mathbf{b}))$ sont des puissances entières de q^δ (voir corollaire 3.3.4(ii)), cette somme est nulle si k' est impair. Soit $\tilde{\chi}_{h^2m}(T_{\mathbf{t}}F)_{(j)}$ le coefficient de $(h^2t)^{j/2}$ dans $\tilde{\chi}_{h^2m}(T_{\mathbf{t}}F)$ et soit

$$f(k,k',m) := \sum_{i,\chi \in \mathrm{Irr}(W)^F} \tilde{\chi}_{h^2t}(mF)_{(k-i)} \big\langle R_{\tilde{\chi}}, H_c^i\big(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell\big)_{i+k'-k}\big\rangle$$

pour $m \in \mathcal{H}_{h^2t}(W)$. On trouve donc que $f(k,k',T_{\mathbf{t}})$ est indépendant de ℓ pour tout $\mathbf{t}$ dans le sous-monoïde de $\underline{B}^+$ engendré par $\underline{S}$ et pour tous k, k' et est nul si k' est impair. Nous avons retiré l'étoile sur $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell)_{i+k'-k}$ en utilisant que $R_{\tilde{\chi}}$ est rationnel, car $\tilde{\chi}$ est rationnel.

Pour $w \in W$, on fixe une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_n$ et on pose $B_w = T_{\underline{s}_1} \cdots T_{\underline{s}_n}$. Alors, $\{B_w\}_{w \in W}$ est une base de $\mathcal{H}_{h^2t}(W)$. Soit $\{C_w\}_{w \in W}$ la base de Kazhdan–Lusztig de $\mathcal{H}_{h^2t}(W)$. Il existe des entiers $p_{v,w,i}$ tels que $C_w = \sum_{i,v} p_{v,w,i}(h^2t)^i B_v$. On a $f(k,k',C_w) = \sum_{i,v} p_{v,w,i} f(k-2i,k'-2i,B_v)$. On en déduit que $f(k,k',C_w)$ est indépendant de ℓ et est nul si k' est impair.

Nous fixons maintenant $\mathbf{b}$ et nous notons $g(\chi,i,j)$ l'assertion de l'énoncé, à savoir : $\langle R_{\tilde\chi}, H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$ est indépendant de ℓ et nul si $a_\chi \not\equiv j \pmod 2$. Nous allons démontrer $g(\chi,i,j)$ par récurrence décroissante sur a_χ et croissante sur i. Nous fixons donc une famille $\mathcal{F}$, nous posons $a=a_{\mathcal{F}}$ et nous fixons un élément w de la cellule bilatère déterminée par $\mathcal{F}$. Nous supposons démontrée $g(\chi,i',j)$ pour tout j et tout i' si $a_\chi>a$, ou pour tout j et $i'<i$ si $a_\chi=a$. Nous voulons en déduire $g(\chi,i,j)$ pour $\chi\in\mathcal{F}$. Par [26, 5.2.1] on a $\tilde\chi_{h^2t}(C_wF)_{(i')}=0$ si $i'<-a_\chi$; et en lisant la preuve de [26, 5.2] on voit que $\tilde\chi_{h^2t}(C_wF)=0$ si $a_\chi<a$, ou si $a_\chi=a$ et $\chi\notin\mathcal{F}$. Comme dans *loc. cit.* nous notons $c_{wF,\tilde\chi}:=(-1)^{l(w)}\tilde\chi_{h^2t}(C_wF)_{(-a_\chi)}$.

On obtient

$$\begin{aligned}f(i-a,j-a,C_w)&=(-1)^{l(w)}\sum_{\chi\in\mathcal{F}}c_{wF,\tilde\chi}\bigl\langle R_{\tilde\chi},H_c^i\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell\bigr)_j\bigr\rangle\\&\quad+\sum_{i',\{\chi\in\mathrm{Irr}(W)^F\mid a_\chi>a\}}\tilde\chi_{h^2t}(C_wF)_{(-a+i-i')}\bigl\langle R_{\tilde\chi},H_c^{i'}\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell\bigr)_{i'+j-i}\bigr\rangle\\&\quad+\sum_{i'<i,\,\chi\in\mathcal{F}}\tilde\chi_{h^2t}(C_wF)_{(-a+i-i')}\bigl\langle R_{\tilde\chi},H_c^{i'}\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell\bigr)_{i'+j-i}\bigr\rangle.\end{aligned}$$

Les autres termes étant nuls par les remarques qui précèdent. Par hypothèse de récurrence les deux dernières sommes sont indépendantes de ℓ (en utilisant $g(\chi,i',i'+j-i)$ pour $a_\chi>a$ et pour $i'<i$, respectivement). On obtient donc que $\sum_{\chi\in\mathcal{F}}c_{wF,\tilde\chi}\langle R_{\tilde\chi},H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$, qui s'écrit $\langle R_{a_{wF}},H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$ avec les notations de [26, 6.17.2], est indépendant de ℓ pour tout w et est nul si $j\not\equiv a \pmod 2$.

Or d'après [26, (b) above 6.17.1] l'espace engendré par les $R_{a_{wF}}$ coïncide avec celui engendré par les $R_{\tilde\chi}$, d'où le résultat. □

Rappelons une version du théorème de densité de Chebotarev.

Théorème 3.4.7. *Soit L une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$. Il existe une infinité de ℓ tels que $L\cap\mathbb{Q}_\ell=\mathbb{Q}$ (pour tout plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$).*

Proposition 3.4.8. *Soit ρ un caractère unipotent et soit $b\in\underline{B}^+$. Supposons que pour tous i et j, le produit scalaire $\langle\theta,H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$ est indépendant de ℓ, pour $\theta=\rho+\rho^*$ et pour θ un caractère unipotent irréductible différent de ρ et ρ^*. Alors pour tous i, j, on a $\langle\rho,H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle=\langle\rho^*,H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j\rangle$ et ce produit scalaire est indépendant de ℓ.*

Preuve. L'hypothèse implique que la partie ρ, ρ^*-isotypique de $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}),\mathbb{Q}_\ell)_j$ que nous noterons simplement H_j^i est de la forme $a_{i,j}\rho+a'_{i,j}\rho^*$ où $a_{i,j}+a'_{i,j}$ est indépendant de ℓ. Nous prouvons la conclusion par récurrence croissante sur i, et pour i donné par récurrence croissante sur j. Par récurrence, on sait donc que pour $k<i$ et tout l, ou pour $k=i$ et $l<j$, on a $a'_{k,l}=a_{k,l}$. En ne retenant que les termes correspondant à la partie ρ, ρ^*-isotypique dans $S_{2i,2j,\mathbf{b},\mathbf{b}}$ on obtient que

$$\begin{aligned}\sum_{k,l}\bigl\langle H_l^k,\bigl(H_{2j-l}^{2i-k}\bigr)^*\bigr\rangle&=2a_{i,j}a'_{i,j}+\sum_{l<j}2a_{i,l}\bigl(a_{i,2j-l}+a'_{i,2j-l}\bigr)\\&\quad+\sum_{l}\sum_{k<i}2a_{k,l}\bigl(a_{2i-k,2j-l}+a'_{2i-k,2j-l}\bigr)\end{aligned}$$

est indépendant de ℓ. On obtient donc que $a_{i,j}a'_{i,j}$ est indépendant de ℓ. D'après le théorème 3.4.7, il existe une infinité de ℓ tels que ni ρ ni ρ^* ne soient à valeur dans $\mathbb{Q}_\ell$. Pour de tels ℓ, on a donc nécessairement $a_{i,j} = a'_{i,j}$ donc $a_{i,j}a'_{i,j} = (a_{i,j} + a'_{i,j})^2/4$. Pour tout ℓ on a donc $a_{i,j}a'_{i,j} = (a_{i,j} + a'_{i,j})^2/4$ ce qui implique $a_{i,j} = a'_{i,j} = (a_{i,j} + a'_{i,j})/2$. □

4. Cohomologies dans les groupes réductifs de rang 2

4.1. Généralités

Nous allons déterminer la cohomologie d'un certain nombre de variétés de Deligne–Lusztig dans des groupes $\mathbf{G}$ de rang 2 (déployés ou non). Dans tous les cas notre résultat principal sera une « quasi-périodicité » des cohomologies calculées par rapport à la multiplication par un élément central de B^+.

Les parties Id-isotypiques et St-isotypiques de la cohomologie d'une variété $\mathbf{X}(\mathbf{y})$ sont connues par les propositions 3.3.14 et 3.3.15. Nous nous intéressons donc seulement à la partie isotypique de ces cohomologies pour les autres caractères unipotents. Si $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont ces caractères, nous écrirons alors $H(\mathbf{y})$ pour la partie $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$-isotypique de $\sum_i h^i H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$, représentée suivant notre convention de §3.3.5 par un élément de $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\rho_1, \ldots, \rho_n]$.

Nous commençons par donner un certain nombre de conséquences des propositions du §3. Nous notons $S = \{s, t\}$ les générateurs de W.

Pour raccourcir les démonstrations, si $x, y, z \in \underline{B}^+$ nous écrirons dans le texte qui suit qu'un résultat est obtenu « par $x \xrightarrow{o} y \xrightarrow{f} z$ » pour signifier que la variété $\mathbf{X}(x)$ est une sous-variété ouverte de $\mathbf{X}(y)$, que $\mathbf{X}(z)$ est la sous-variété fermée complémentaire et que le résultat est obtenu en considérant la suite exacte longue $\cdots H^i_c(\mathbf{X}(x)) \to H^i_c(\mathbf{X}(y)) \to H^i_c(\mathbf{X}(z)) \to H^{i+1}_c(\mathbf{X}(x)) \to \cdots$ qui en résulte.

Lemme 4.1.1. *Soit $y \in \underline{B}^+$. Alors,*

(i) *pour tout $x \in \underline{B}^+$ on a $H(xy) = H(yF(x))$,*
(ii) $H(\underline{s}\,\underline{t}y) = H(\underline{st}y)$,
(iii) $H(s\underline{s}y) = H(\underline{s}sy) = h^2tH(\underline{s}y)$,
(iv) $H(\underline{s}\,\underline{s}y) = (h^2t + 1)H(\underline{s}y)$,
(v) $H(\underline{w}_0y) = 0$.

Preuve. (i) résulte de la proposition 3.1.6. (ii) est une relation du monoïde $\underline{B}^+$. (iii) et (iv) proviennent de la proposition 3.2.3 appliquée à $w = s$. (iv) provient du corollaire 3.3.19. □

4.2. Type A_2

4.2.1. Nous considérons maintenant le cas d'un groupe (déployé ou non) de type A_2. Dans ce cas il existe un unique caractère unipotent ρ différent de St et Id. Nous omettrons la mention de ρ dans la notation pour $H(\mathbf{y})$ qui sera représenté par un élément de $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h]$.

On note R_x la représentation de $\mathcal{H}_x(W) \rtimes \langle F \rangle$ donnée par $T_s \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{x} & x \end{smallmatrix}\right)$, $T_t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & \sqrt{x} \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $F \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ si $\mathbf{G}$ est déployé, $F \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sinon.

Lemme 4.2.2. *Soit $y \in \underline{B}^+$. Alors,*

(i) $H(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}y) = H(\underline{st}\,\underline{s}y) = h^2tH(\underline{s}y)$.

(ii) $H(\underline{t}\,\mathbf{s}\,\underline{t}y) = hH(\underline{t}y)$.
(iii) $H(\underline{s}\mathbf{ts}y) = hH(\underline{st}y)$.
(iv) *Soit σ l'automorphisme de $\underline{B}^+$ donné par l'échange de* $\mathbf{s}$ (*respectivement* $\underline{s}$) *et* $\mathbf{t}$ (*respectivement* $\underline{t}$) (*c'est l'action de F si* $(\mathbf{G}, F)$ *est non déployé, i.e., de type* ${}^2A_2$). *Alors* $H(y) = H(\sigma(y))$.
(v) *Si y est dans le sous-monoïde engendré par $\underline{W}$, alors on a* $H(y) = \mathrm{Trace}(T_y F \mid R_{h^2t})$.

Preuve. (i) vient des relations de $\underline{B}^+$, de la proposition 3.2.9 appliquée à $w = st$ et $y = s$, et de 4.1.1(v). (ii) est obtenu par 4.1.1(v) et par

$$\underline{t}\mathbf{s}\underline{t}y \xrightarrow{o} \underline{sts}y \xrightarrow{f} \underline{t}y.$$

(iii) est obtenu par 4.1.1(v) et par

$$\underline{s}\mathbf{ts}y \xrightarrow{o} \underline{sts}y \xrightarrow{f} \underline{st}y.$$

(iv) est une conséquence de la proposition 3.1.8 en prenant comme isogénie l'automorphisme d'opposition de $\mathbf{G}$. Enfin (v) est une conséquence immédiate du corollaire 3.3.8(ii) et du fait que dans un groupe de type A_2 toutes les variétés $\mathbf{X}(\underline{w})$ pour $w \in W$ sont rationnellement lisses (*cf.* proposition 3.2.5). □

4.2.3. Nous décrivons maintenant pour un certain nombre de variétés une périodicité par rapport à la multiplication par $\boldsymbol{\pi}$; nous conjecturons qu'une telle périodicité a lieu pour toutes les variétés associées à des éléments de $\underline{B}^+$.

Théorème 4.2.4. *Soit* $(\mathbf{G}, F)$ *un groupe déployé de type A_2, soit* $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{st})^3$ *et soit* $y \in \underline{B}^+$ *apparaissant dans la table ci-dessous. Alors, pour tout n, on a* $H(y\boldsymbol{\pi}^n) = (h^8t^3)^n f(y)$ *où $f(y)$ est la valeur de $H(y)$ donnée par la table.*

y	$H(y)$
1	2
$\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$	$h^2t + h$
$\underline{s}$, $\underline{t}$	$h^2t + 1$
$\mathbf{ss}$, $\mathbf{tt}$	$h^2 + h^4t^2$
$\underline{st}$, $\underline{ts}$	h^2t
$\underline{s}\mathbf{t}$, $\underline{t}\mathbf{s}$	h
$\mathbf{st}$, $\mathbf{ts}$	h^3t
$\mathbf{sts}$, $\mathbf{tst}$, $\mathbf{stt}$, $\mathbf{sst}$	0
$\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$, $\mathbf{t}\underline{s}\mathbf{t}$, $\underline{s}\mathbf{tt}$	$h^4t^2 + h^2$
$\mathbf{stst}$, $\mathbf{ssst}$	h^5t^2
$\mathbf{tsst}$, $\mathbf{sstt}$	$h^6t^3 + h^4t$
$\mathbf{tstst} = \mathbf{stsst}$	$h^7t^3 + h^6t^2$

Preuve. Nous procédons par récurrence sur n. Nous traitons en même temps le point de départ de la récurrence ($n = 0$) et le cas général (où l'on suppose le théorème prouvé pour $n - 1$) pour ne pas avoir à dupliquer certains raisonnements identiques dans les deux cas. Nous supposons donc $H(y\boldsymbol{\pi}^{n-1})$ connu pour tout y dans la table, et nous allons déterminer $H(y\boldsymbol{\pi}^n)$, en raisonnant par longueur croissante de y dans la table du théorème 4.2.4. Notons qu'un résultat sur $H(x)$ est équivalent au résultat correspondant pour $H(\sigma(x))$ d'après le lemme 4.2.2(iv).

• *Cas de* $\boldsymbol{\pi}^n$, $\mathbf{s}\boldsymbol{\pi}^n$ *et* $\mathbf{s}^2\boldsymbol{\pi}^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit de la proposition 3.3.16. Sinon, nous appliquons la proposition 3.3.17 pour $m=0,1,2,3,4$ et $\mathbf{b}=\mathbf{tsst}\boldsymbol{\pi}^{n-1}$. Les valeurs de $H(\mathbf{s}^m\mathbf{b})$ sont dans la table (connues par récurrence) pour $m=0,1$ et permettent de déterminer avec les notations de la proposition 3.3.17 : $H_i=h^4t(h^8t^3)^{n-1}$ et $H_s=h^6t^3(h^8t^3)^{n-1}$, d'où, pour tout m, on a $H(\mathbf{s}^m\mathbf{b})=(h^8t^3)^{n-1}(h^{m+6}t^3+h^4t(h^2t)^m)$ ce qui donne les valeurs recherchées pour $m=2,3,4$ en tenant compte de $\mathbf{s}^2\mathbf{b}=\boldsymbol{\pi}^n$.

• *Cas de* $\underline{s}\boldsymbol{\pi}^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.2.2(v). Sinon on a

$$\begin{aligned}H\big(\underline{s}\boldsymbol{\pi}^n\big)&=H\big(\underline{s}\mathbf{sstsst}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^4t^2H\big(\underline{s}\mathbf{tsst}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^5t^2H\big(\underline{st}\mathbf{st}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)\\&=h^6t^2H\big(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^8t^3H\big(\underline{s}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)\end{aligned}$$

d'après les lemmes 4.1.1(iii) et 4.2.2(iii) puis encore (iii) et (i).

• *Cas de* $\underline{s}\,\underline{t}\boldsymbol{\pi}^n$. Si $n=0$ on utilise le lemme 4.2.2(v) et sinon on a

$$\begin{aligned}H\big(\underline{s}\,\underline{t}\boldsymbol{\pi}^n\big)&=H\big(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{ttsttts}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^4t^2H\big(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{sttts}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^5t^2H\big(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}\mathbf{ts}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)\\&=h^7t^3H\big(\underline{s}\mathbf{ts}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)=h^8t^3H\big(\underline{s}\,\underline{t}\boldsymbol{\pi}^{n-1}\big)\end{aligned}$$

d'après les lemmes 4.1.1(iii), 4.2.2(iii), (i) et (iii).

Jusqu'à la fin de la preuve, tous les éléments de $\underline{B}^+$ que nous allons considérer sont de la forme $y\boldsymbol{\pi}^n$. Pour simplifier les notations, nous poserons $\underline{H}(y)=(h^8t^3)^{-n}H(y\boldsymbol{\pi}^n)$ et aussi $\underline{H}^i_c(\mathbf{X}(y))=H^{i+8n}_c(\mathbf{X}(y\boldsymbol{\pi}^n))(3n)$. Notons que les lemmes 4.1.1 et 4.2.2 restent vrais pour $\underline{H}$ sauf 4.1.1(i) qui toutefois reste vrai pour $x\in B^+$, car on a alors $H(xy\boldsymbol{\pi}^n)=H(y\boldsymbol{\pi}^nx)=H(yx\boldsymbol{\pi}^n)$ cette dernière égalité car $\boldsymbol{\pi}^n$ est central dans B^+.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{s}\underline{t}$. On a $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t})=h^{-2}t^{-1}\underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{t})=h^{-2}t^{-1}\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts})=h^{-1}t^{-1}\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t})$ par 4.1.1(iii), (i) et le lemme 4.2.2(iii) ce qui ramène au cas précédent. Par les lemmes 4.2.2(iv) et 4.1.1(i), on obtient $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{t})$.

• *Cas de* $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$, $\mathbf{t}\underline{s}\mathbf{t}$ *et* $\underline{s}\mathbf{tt}$. Par $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}\xrightarrow{o}\mathbf{s}\underline{t}\,\underline{s}\xrightarrow{f}\mathbf{s}\underline{t}$ (où $\mathbf{s}\underline{t}\,\underline{s}$ est connu par $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{t}\,\underline{s})=\underline{H}(\underline{t}\,\underline{s}\mathbf{s})=h^2t\underline{H}(\underline{t}\,\underline{s})$ en utilisant 4.1.1(i) et 4.1.1(iii)) on trouve la valeur de $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s})$; par le lemme 4.2.2(iv) on en déduit $\mathbf{t}\underline{s}\mathbf{t}$ et par 4.1.1(i) on en déduit $\underline{s}\mathbf{tt}$.

• *Cas de* $\mathbf{st}$, $\mathbf{sts}$, $\mathbf{sst}$, $\mathbf{tst}$ *et* $\mathbf{stt}$. Par les lemmes 4.2.2(iv) et 4.1.1(i) on a $\underline{H}(\mathbf{sts})=\underline{H}(\mathbf{sst})=\underline{H}(\mathbf{tst})=\underline{H}(\mathbf{stt})$. Nous allons étudier simultanément les deux éléments $\mathbf{st}$ et $\mathbf{sts}$. Par

$$\mathbf{st}\xrightarrow{o}\underline{s}\mathbf{t}\xrightarrow{f}\mathbf{t}$$

où la valeur $\underline{H}(\mathbf{t})=\underline{H}(\mathbf{s})$ est connue, on trouve qu'il existe $\varepsilon\in\{0,1\}$ tel que $\underline{H}(\mathbf{st})=\varepsilon(h+h^2)+h^3t$. Par

$$\mathbf{sts}\xrightarrow{o}\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}\xrightarrow{f}\mathbf{ss}$$

on trouve qu'il existe $\theta, \gamma \in \{0,1\}$ tels que $\underline{H}(\mathbf{sts}) = (h^2+h^3)\theta + (h^4+h^5)t^2\gamma$. En utilisant maintenant la suite exacte longue qui résulte de la proposition 3.2.10 :

$$\cdots \to \underline{H}_c^{i-3}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)(-1) \to \underline{H}_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{st})\big)(-1) \oplus \underline{H}_c^{i-1}\big(\mathbf{X}(\mathbf{st})\big) \to \underline{H}_c^{i}\big(\mathbf{X}(\mathbf{sts})\big)$$
$$\to \underline{H}_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)(-1) \to \cdots,$$

on trouve $\varepsilon = \theta = 0$. Enfin, par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ (où $\underline{s}\mathbf{ts}$ est connu par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h\underline{H}(\underline{st})$ par le lemme 4.2.2(iii)) on trouve $\gamma = 0$.

• *Cas de* **tsst**. On a $\underline{H}(\mathbf{tsst}) = \underline{H}(\mathbf{sstt})$ par 4.1.1(i) et on trouve la valeur de **sstt** par

$$\mathbf{sstt} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{s}\mathbf{tt} \xrightarrow{f} \mathbf{stt}$$

où le terme du milieu est connu par $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{tt}) = h^2 t \underline{H}(\underline{s}\mathbf{tt})$ (*cf.* 4.1.1(iii)).

• *Cas de* **stst**. On a $\underline{H}(\mathbf{stst} = \mathbf{ssts}) = \underline{H}(\mathbf{s}^3\mathbf{t})$ par 4.1.1(i) et $\mathbf{s}^3\mathbf{t} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{s}^2\mathbf{t} \xrightarrow{f} \mathbf{s}^2\mathbf{t}$ donne le résultat où $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{s}^2\mathbf{t}) = h^4t^2\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t})$ par 4.1.1(iii).

• *Cas de* **tstst**. On a le résultat par $\mathbf{tstst} \xrightarrow{o} \underline{t}\mathbf{stst} \xrightarrow{f} \mathbf{stst}$ où le terme du milieu est connu par $\underline{H}(\underline{t}\mathbf{stst} = \underline{t}\mathbf{tstt}) = \underline{H}(\mathbf{tt}\underline{t}\mathbf{ts}) = h^6t^3\underline{H}(\underline{t}\mathbf{s})$ par 4.1.1(iii). □

Avant de formuler une conjecture qui généralise le résultat ci-dessus, faisons quelques remarques sur la conjugaison dans le groupe de tresses de type A_2. Nous appelons « conjugaison par permutation circulaire » la relation d'équivalence sur B^+ clôture transitive de la relation $\mathbf{xy} \sim \mathbf{yx}$.

Proposition 4.2.5. *Soient B (respectivement B^+) le groupe (respectivement le monoïde) des tresses de type A_2. Soit $\mathbf{w} \in B^+$. Alors, il existe un unique $n \geqslant 0$ et un unique $\mathbf{y}$ dans la liste ci-dessous tel que $\mathbf{w}$ est conjugué dans B à $\boldsymbol{\pi}^n\mathbf{y}$.*

(i) $\mathbf{s}^a$ *avec* $a \geqslant 0$.
(ii) **st**.
(iii) $\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\mathbf{s}^{a_3}\cdots\mathbf{s}^{a_{2k-1}}\mathbf{t}^{a_{2k}}$, *avec $k \geqslant 1$, $a_i \geqslant 2$, la suite (a_i) est plus grande pour l'ordre lexicographique que $(a_{i+d \pmod{2k}})$ pour tout d.*
(iv) $\mathbf{w}_0\mathbf{s}^a$ *avec* $a \in \{0,1\}$.
(v) $\mathbf{w}_0\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\mathbf{s}^{a_3}\cdots\mathbf{t}^{a_{2k-2}}\mathbf{s}^{a_{2k-1}}$ *avec $k \geqslant 1$, $a_i \geqslant 2$ et la suite (a_i) est plus grande pour l'ordre lexicographique que $(a_{i+d \pmod{2k-1}})$ pour tout d.*

De plus, tout élément de B^+ est conjugué par permutation circulaire à un des éléments (i)–(v) *ou à un de leurs conjugués par* $\mathbf{w}_0$.

Preuve. La conjugaison par $\mathbf{w}_0$ réalise l'automorphisme de B^+ donné par $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{t}, \mathbf{t} \mapsto \mathbf{s}$. Il en résulte que tout élément de B^+ de la forme $\mathbf{x}\mathbf{w}_0\mathbf{y}$ (avec $\mathbf{x},\mathbf{y} \in B^+$) est divisible par $\mathbf{w}_0$ à gauche.

Notons pour commencer qu'un élément de la forme $\mathbf{t}^{a_1}\mathbf{s}^{a_2}\cdots\mathbf{s}^{a_{2k}}$ est conjugué par $\mathbf{w}_0$ à $\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\cdots\mathbf{t}^{a_{2k}}$. Par conséquent, tout élément $\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\cdots\mathbf{t}^{a_{2k}}$ avec $a_i \geqslant 2$ est conjugué par permutation circulaire à un élément du type (iii) ou à un conjugué par $\mathbf{w}_0$ d'un tel élément. De même, tout élément de la forme $\mathbf{w}_0\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\mathbf{s}^{a_3}\cdots\mathbf{t}^{a_{2k-2}}\mathbf{s}^{a_{2k-1}}$ avec $k \geqslant 1$, $a_i \geqslant 2$, est conjugué par permutation circulaire à un élément du type (v) ou à un conjugué par $\mathbf{w}_0$ d'un tel élément.

Il est clair que tout élément de B^+ est conjugué par permutation circulaire à un élément $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0^n\mathbf{x}$, où aucun des permutés circulaire de $\mathbf{w}$ n'est divisible par $\mathbf{w}_0^{n+1}$. Fixons un tel $\mathbf{w}$. À conjugaison près par $\mathbf{w}_0$, l'élément $\mathbf{x}$ est de la forme $\mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}^{a_2}\mathbf{s}^{a_3}\cdots\mathbf{s}^{a_{2k-1}}\mathbf{t}^{a_{2k}}\mathbf{s}^{a_{2k+1}}$, où $k \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_{2k} \geqslant 1$ et $a_{2k+1} \geqslant 0$. Puisque $\mathbf{x}$ n'est pas divisible par $\mathbf{w}_0$, on a trois possibilités : $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}$ ou $a_2, a_3, \ldots, a_{2k-2}, a_{2k-1} \geqslant 2$, et $a_{2k} \geqslant 2$ si $a_{2k+1} \neq 0$.

Supposons n pair. Si $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}$, on est dans le cas (i). Si $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}$, alors $a_1 = 1$, car $\mathbf{x}$ est conjugué circulairement à $\mathbf{sts}^{a_1-1}$ qui n'est pas divisible par $\mathbf{w}_0$ par hypothèse. On est alors dans le cas (ii). Sinon, quitte à remplacer $\mathbf{x}$ par un permuté circulaire, on peut supposer que $a_{2k+1} = 0$. Puisque x est conjugué circulairement à $\mathbf{s}^{a_1-1}\mathbf{t}^{a_2}\cdots\mathbf{s}^{a_{2k-1}-1}\mathbf{st}^{a_{2k}}\mathbf{s}$, ce dernier n'est pas divisible à droite par $\mathbf{w}_0$, donc $a_{2k} \geqslant 2$ et on est alors dans le cas (iii).

Supposons maintenant n impair. Si $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}$, on est dans le cas (v) pour $a_1 \geqslant 2$ et dans le cas (iv) sinon. Si $\mathbf{x} = \mathbf{s}^{a_1}\mathbf{t}$, alors $\mathbf{w}_0\mathbf{x} = \mathbf{sts}^{a_1+1}\mathbf{t}$ est conjugué circulairement à $\mathbf{w}_0\mathbf{s}^{a_1+1}$ et on est dans le cas (v). Sinon, quitte à remplacer $\mathbf{x}$ par un permuté circulaire, on peut supposer que $a_{2k+1} \neq 0$. Puisque $\mathbf{w}_0\mathbf{x}$ est conjugué circulairement à $\mathbf{w}_0\mathbf{s}^{a_1-1}\mathbf{t}^{a_2}\cdots\mathbf{t}^{a_{2k}-1}\mathbf{ts}^{a_{2k+1}}\mathbf{t}$, alors $a_{2k+1} \neq 1$ et on est dans le cas (v), au changement $k \mapsto k+1$ près.

Il reste à vérifier que la liste donnée ne contient pas deux éléments conjugués. Comme toute conjugaison est composée de « conjugaisons élémentaires » (*cf.* [28, corollaire 4.5]) de la forme $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}^{-1}\mathbf{wv}$ où $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{v}^{-1}\mathbf{wv} \in B^+$, il suffit d'étudier l'effet de la conjugaison par chaque élément de $\mathbf{W}$ sur chaque forme donnée. Il suffit en outre de considérer le cas où $\mathbf{v} \not\preccurlyeq \mathbf{w}$, car sinon il s'agit d'une conjugaison par permutation circulaire. Les seuls $\mathbf{w}$ à considérer sont donc ceux des types (i), (ii) et (iii). On montre alors facilement que si $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{v} \not\preccurlyeq \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \preccurlyeq \mathbf{wv}$, alors $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{w}_0\mathbf{v}^{-1}$ centralise $\mathbf{w}$. □

Corollaire 4.2.6. *Si* $\mathbf{G}$ *est de type* A_2 *déployé, alors pour tout* i *l'application* $\mathbf{t} \mapsto H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{t}))$ *définit une fonction de classe* : $B^+ \to \mathcal{R}(\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle)$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.6, qui montre que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont conjugués par permutation circulaire, on a $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \simeq H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$, du lemme 4.2.2(iv) qui montre que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont conjugués par $\mathbf{w}_0$, alors on a $H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \simeq H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$, et de la dernière remarque de la proposition 4.2.5 qui montre que toute conjugaison dans B^+ peut être réalisée par une conjugaison par permutation circulaire suivie d'une conjugaison par $\mathbf{w}_0$. □

La liste de la proposition 4.2.5 forme un système de représentants des classes de conjugaison dans B^+. On définit une fonction de classe φ sur B^+ en lui attribuant la valeur 0 dans les cas (i) et (ii), la valeur a dans le cas (iv) et la valeur k dans les cas (iii) et (v) et en demandant que $\varphi(\boldsymbol{\pi}^n\mathbf{b}) = n + \varphi(\mathbf{b})$. Nous conjecturons le résultat suivant, qui outre le théorème 4.2.4, est étayé par de nombreux autres calculs :

Conjecture 4.2.7. *Supposons* $\mathbf{G}$ *de type* A_2 *déployé et soit* $\mathbf{b} \in B^+$. *Alors, on a* $H(\mathbf{b}) = (-h)^{l(\mathbf{b})-\varphi(\mathbf{b})}\operatorname{Trace}(T_{\mathbf{b}} \mid R_{-ht})$.

4.2.8. Nous allons maintenant considérer un groupe tel que $(\mathbf{G}, F)$ soit de type ${}^2A_2$. Par conséquent, on a $\delta = 2$, ρ est un caractère unipotent cuspidal et les valeurs propres de F^δ qui lui sont attachées sont dans $-q^{\delta/2}q^{\mathbb{N}}$.

Théorème 4.2.9. *Supposons* $(\mathbf{G}, F)$ *de type* ${}^2A_2$ *et soit* $y \in \underline{B}^+$ *apparaissant dans la table ci-dessous. Alors, pour tout* n*, on a* $H(y\boldsymbol{\pi}^n) = (h^8t^3)^n f(y)$ *où* $f(y)$ *est la valeur de* $H(y)$ *donnée par la table.*

y	$H(y)$
1	0
$\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$	$ht^{1/2}$
$\underline{s}\,\underline{t}$, $\underline{t}\,\underline{s}$	$h^3t^{3/2} + ht^{1/2}$
st, **ts**, **tt**, **ss**	$h^3t^{3/2} + h^2t^{1/2}$
sts	$2h^4t^{3/2}$
$\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s}$	$h^2t^{1/2}$
$\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{ss}$	$h^3t^{1/2} + h^5t^{5/2}$
ssts, **stss**, **tsst**	$h^5t^{3/2} + h^6t^{5/2}$
sssts	$h^8t^{7/2} + h^6t^{3/2}$
sstss, **stsst**	$h^7t^{5/2}$

Preuve. Comme pour le théorème 4.2.4, nous procédons par récurrence sur n en traitant en même temps le cas $n = 0$ et le cas général, et en raisonnant par longueur croissante de y. Mais, à la différence du théorème 4.2.4, nous supposons à l'étape n le théorème démontré pour $\boldsymbol{\pi}^n$ (si $n = 0$ cela résulte du lemme 4.2.2(v)). La récurrence s'achèvera par la preuve pour $\boldsymbol{\pi}^{n+1}$.

Tous les éléments de $\underline{B}^+$ que nous allons considérer sont de la forme $y\boldsymbol{\pi}^n$. Comme dans le cas A_2 déployé, nous poserons $\underline{H}(y) = (h^8t^3)^{-n}H(y\boldsymbol{\pi}^n)$ et $\underline{H}^i_c(\mathbf{X}(y)) = H^{i+8n}_c(\mathbf{X}(y\boldsymbol{\pi}^n))(3n)$.

• *Cas de* $\underline{s}\boldsymbol{\pi}^n$ *et* $\underline{s}\,\underline{t}\boldsymbol{\pi}^n$. La preuve dans le cas A_2 déployé est encore valable ici.

• *Cas de* **s** *et* **t**. On trouve la valeur de $\underline{H}(\mathbf{s})$ par $\mathbf{s} \xrightarrow{o} \underline{s} \xrightarrow{f} 1$, et $\underline{H}(\mathbf{t})$ a même valeur par 4.1.1(i).

• *Cas de* **st**, **ss**, **ts** *et* **tt**. Par $\mathbf{st} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{t} \xrightarrow{f} \mathbf{t}$ où le terme du milieu est donné par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t}) = \underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}) = h^2t\underline{H}(\underline{s})$ par 4.1.1(i) et (iii), on trouve la valeur de $\underline{H}(\mathbf{st})$. Par 4.1.1(i) on a $\underline{H}(\mathbf{ss}) = \underline{H}(\mathbf{ts}) = \underline{H}(\mathbf{tt}) = \underline{H}(\mathbf{st})$.

• *Cas de* $\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s}$. On a $h^2t\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s}) = \underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s}) = \underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{st}) = h\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}) = h^3t\underline{H}(\underline{s})$, respectivement par 4.1.1(iii), 4.1.1(i), 4.2.2(iii) et 4.2.2(i).

• *Cas de* **sts**, **ssts**, **sssts**, **tsst** *et* **stss**. Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ où le terme du milieu est donné par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t})$ par le lemme 4.2.2(iii) on trouve qu'il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que $\underline{H}(\mathbf{sts}) = 2h^4t^{3/2} + \varepsilon(h^2 + h^3)t^{1/2}$.

Nous appliquons maintenant la proposition 3.3.17 avec $\mathbf{b} = \mathbf{ts}$, pour $m = 0, 1, 2, 3$. Avec les notations de la proposition 3.3.17 on a $\underline{H}(\mathbf{sts}) - h\underline{H}(\mathbf{ts}) = (th^2 - h)H_i$ et avec les valeurs calculées ci-dessus on trouve $\underline{H}(\mathbf{sts}) - h\underline{H}(\mathbf{ts}) = (th^2 - h)h^2t^{1/2} + \varepsilon(h^2 + h^3)t^{1/2}$, qui n'est divisible par $th^2 - h$ que si $\varepsilon = 0$, ce qui est donc le cas. On a donc $H_i = h^2t^{1/2}$ et $H_s = h^3t^{3/2}$, ce qui donne les valeurs pour **ssts** ($m = 2$) et **sssts** ($m = 3$). Par 4.1.1(i) on déduit **tsst** et **stss**.

• *Cas de* $\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{ss}$. On trouve la valeur en utilisant $\underline{s}\mathbf{tss} \xrightarrow{o} \underline{s}\,\underline{t}\mathbf{ss} \xrightarrow{f} \underline{s}\mathbf{ss}$ où le terme de gauche est donné par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tss}) = h\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s})$ (lemme 4.2.2(iii)) et celui de droite par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ss}) = h^4t^2\underline{H}(\underline{s})$ (4.1.1(iii)).

• *Cas de* **sstss**, **stsst** *et* $\boldsymbol{\pi}$. Par $\mathbf{sstss} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{s}\mathbf{tss} \xrightarrow{f} \mathbf{stss}$ où le terme du milieu est donné par $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{tss}) = h^2t\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tss}) = h^3t\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s})$ par les lemmes 4.1.1(iii) et 4.2.2(iii) on trouve qu'il existe $\varepsilon' \in \{0, 1\}$ tel que $\underline{H}(\mathbf{sstss}) = h^7t^{5/2} + \varepsilon'(h^5 + h^6)t^{3/2}$ et c'est aussi la valeur de $\underline{H}(\mathbf{stsst})$ par 4.1.1(i).

Par $\mathbf{sstsst} \xrightarrow{o} \mathbf{sstss}\underline{t} \xrightarrow{f} \mathbf{sstss}$ où le terme du milieu est donné par

$$\underline{H}(\mathbf{sstss}\underline{t}) = h^4t^2\underline{H}(\mathbf{tss}\underline{t}) = h^4t^2\underline{H}(\underline{t}\mathbf{stt}) = h^4t^2\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tss}) = h^5t^2\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{s}),$$

la première égalité par 4.1.1(i) et (iii), les autres respectivement par les lemmes 4.1.1(i), 4.2.2(iv) et 4.2.2(iii), on trouve qu'il existe ε'' tel que $\underline{H}(\boldsymbol{\pi}) = \underline{H}(\mathbf{sstsst}) = \varepsilon''t^{5/2}(h^7 + h^8) + \varepsilon't^{3/2}(h^6 + h^7)$.

Par la proposition 3.2.10, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned}\cdots &\to \underline{H}_c^{i-3}\big(\mathbf{X}(\mathbf{tsst})\big)(-1) \to \underline{H}_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{stsst})\big)(-1) \oplus \underline{H}_c^{i-1}\big(\mathbf{X}(\mathbf{stsst})\big)\\ &\to \underline{H}_c^{i}\big(\mathbf{X}(\mathbf{sstsst})\big) \to \underline{H}_c^{i-2}\big(\mathbf{X}(\mathbf{tsst})\big)(-1) \to \cdots\end{aligned}$$

et on déduit que $\varepsilon' \leqslant \varepsilon''$.

Enfin, par $\mathbf{sstsss} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{stsss} \xrightarrow{f} \mathbf{stsss}$ où le terme de gauche est donné par $\underline{H}(\mathbf{sstsss}) = \underline{H}(\boldsymbol{\pi})$ (*cf.* 4.1.1(i)), le terme du milieu est donné par $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{stsss}) = h^2t\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tsss}) = h^3t\underline{H}(\underline{s}\,\underline{t}\mathbf{ss})$ (*cf.* lemmes 4.1.1(iii) et 4.2.2(iii)) et le terme de droite est donné par $\underline{H}(\mathbf{stsss}) = \underline{H}(\mathbf{tttst}) = \underline{H}(\mathbf{sssts})$ par les lemmes 4.1.1(i) et 4.2.2(iv) respectivement, on trouve $\varepsilon'' = 0$. □

4.3. Type B_2

4.3.1. Nous allons maintenant considérer un groupe $\mathbf{G}$ de type B_2. Si $\mathbf{G}$ est déployé nous noterons σ, τ, ρ et θ les 4 caractères unipotents de $\mathbf{G}^F$ différents de St et Id, où σ (respectivement τ) est le caractère de la série principale correspondant au caractère $s \mapsto 1$, $t \mapsto -1$ (respectivement $s \mapsto -1$, $t \mapsto 1$) de W, ρ est le caractère de la série principale correspondant au caractère de dimension 2 de W, et θ est le caractère unipotent cuspidal. Nous écrirons donc $H(\mathbf{y})$ pour la partie $(\sigma, \tau, \rho, \theta)$-isotypique de $\sum_i h^i H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$, représentée suivant notre convention 3.3.5 par un élément de $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\sigma, \tau, \rho, \theta]$.

Si $\mathbf{G}$ est de type ${}^2B_2$, alors F est une isogénie dont le carré est le Frobenius pour une $\mathbb{F}_{q^2}$-structure où q^2 est une puissance impaire de 2. Il y a deux caractères unipotents différents de St et Id. Ils sont cuspidaux, de dimension $q(q^2 - 1)/\sqrt{2}$, associés aux valeurs propres $\lambda_\rho = \zeta_8^3 = (-1 + i)/\sqrt{2}$ et $\omega_\rho = q$ (respectivement $\lambda_\rho = \zeta_8^5 = (-1 - i)/\sqrt{2}$ et $\omega_\rho = q$) de F^2, où l'on a posé $\zeta_8 = e^{2i\pi/8}$ (*cf.* corollaire 3.3.4 et [23, §7.3]). Nous les noterons ρ^+ et ρ^-. Ils ne sont pas rationnels, mais définis sur $\mathbb{Q}(i)$ et échangés par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})$. D'après la proposition 3.4.8, qui est applicable car $(\rho^+ + \rho^-)/\sqrt{2}$ est un $R_{\tilde{\chi}}$ (*cf.* proposition 3.4.6), ils ont même multiplicité dans chaque cohomologie et ces multiplicités sont indépendantes de ℓ. Nous représenterons la partie (ρ^+, ρ^-)-isotypique $H(\mathbf{y})$ de $\sum_i h^i H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$, par $P \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, h]$ représentant $(\rho^+ + \rho^-)P \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\rho^+, \rho^-]$.

Puisque $\mathbf{w}_0 = \mathbf{stst}$ est central dans B^+, nous allons trouver une périodicité pour la translation par $\mathbf{w}_0$, à condition pour B_2 déployé d'introduire l'involution E sur les caractères unipotents qui échange σ et τ ainsi que ρ et θ (E pour « Ennola », car cette involution correspond à l'échange de q et de $-q$).

Nous commençons par énoncer des conséquences des résultats du §3 pour B_2.

Lemme 4.3.2. *Soit $y \in \underline{B}^+$. Alors*

(i) $H(\underline{s}\mathbf{tst}y) = hH(\underline{sts}y)$.
(ii) $H(\underline{t}\,\underline{sts}\,y) = h^2tH(\underline{ts}y)$.
(iii) $H(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}y) = h^2tH(\underline{s}y) + H(\underline{sts}y)$.
Les assertions obtenues en échangeant s et t dans les assertions précédentes sont aussi vraies.
(iv) *Considérons les représentations de $\mathcal{H}(h^2t)(W) \rtimes \langle F\rangle$ données par les valeurs suivantes sur les générateurs :*

$$\sigma_{h^2t}(T_s) = h^2t, \qquad \sigma_{h^2t}(T_t) = -1, \qquad \sigma(F) = 1.$$
$$\tau_{h^2t}(T_s) = -1, \qquad \tau_{h^2t}(T_t) = h^2t, \qquad \tau(F) = 1,$$
$$\rho_{h^2t}(T_s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ h\sqrt{2t} & h^2t \end{pmatrix}, \qquad \rho_{h^2t}(T_t) = \begin{pmatrix} h^2t & h\sqrt{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{h^2t}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $\mathbf{G}$ est déployé et $\rho_{h^2t}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sinon. Alors si y est dans le sous-monoïde engendré par $\underline{W}$, on a

$$H(y) = \frac{1}{2}\big(\sigma \cdot \mathrm{Trace}(T_y \mid \sigma_{h^2t} - \tau_{h^2t} + \rho_{h^2t}) + \tau \cdot \mathrm{Trace}(T_y \mid -\sigma_{h^2t} + \tau_{h^2t} + \rho_{h^2t})$$
$$+ \rho \cdot \mathrm{Trace}(T_y \mid \sigma_{h^2t} + \tau_{h^2t} + \rho_{h^2t}) + \theta \cdot \mathrm{Trace}(T_y \mid -\sigma_{h^2t} - \tau_{h^2t} + \rho_{h^2t})\big)$$

si $\mathbf{G}$ est déployé et $H(y) = (1/\sqrt{2})\,\mathrm{Trace}(T_yF \mid \rho_{h^2t})$ sinon.
(v) *Si $\mathbf{G}$ est non déployé et si y est produit d'éléments de $C_{B^+}(F)$ et d'éléments de $\underline{W}^F$, alors $H(y)$ a tous ses coefficients pairs.*

Preuve. (i) est obtenu par 4.1.1(v) et par $\underline{s}\mathbf{tst}y \xrightarrow{o} \underline{stst}y \xrightarrow{f} \underline{sts}y$. (ii) vient de la proposition 3.2.9 appliquée avec $w = sts$ et $y = ts$, et de 4.1.1(v). (iii) vient du lemme 3.2.7(iii) appliqué avec $w = st$ et $y = s$, et de la proposition 3.2.9. On obtient (iv) comme conséquence immédiate du corollaire 3.3.8(ii) et du fait que dans un groupe de type B_2 toutes les variétés $\mathbf{X}(\underline{w})$ pour $w \in W$ sont rationnellement lisses (*cf.* proposition 3.2.5), en utilisant [26, théorème 4.23 et §4.15] si $\mathbf{G}$ est déployé et [26, p. 373] si $\mathbf{G}$ n'est pas déployé.

Démontrons le (v). La proposition 3.4.8 montre que pour tout y les multiplicités de ρ^+ et ρ^- dans $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ sont indépendantes de ℓ pour tout j et tout k, où $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ est la partie de $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)$ où les valeurs propres de F^δ sont de module $q^{\delta k/2}$. Le (v) dit que la multiplicité de ρ^+ et de ρ^- dans $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ est paire. Comme $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ est un sous-$(\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle)$-module de $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, on a $\mathrm{Trace}(gF \mid H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k) \in \mathbb{Q}_\ell$. La somme $|\mathbf{G}^F|^{-1} \sum_{g\in\mathbf{G}^F} \mathrm{Trace}(gF \mid H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k)\rho^+(g^{-1})$ appartient donc à la même extension de $\mathbb{Q}_\ell$ que ρ^+, c'est-à-dire à $\mathbb{Q}_\ell(i)$. Comme y est stable par F, ce dernier induit un automorphisme sur la cohomologie dont les valeurs propres sur $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ sont de la forme $\pm\zeta_{16}^3 q^{k/2}$, où ζ_{16}^3 est une racine carrée de $\lambda_{\rho^+} = \zeta_8^3$. La somme ci-dessus vaut donc $\zeta_{16}^3 q^{k/2}(n^+ - n^-)$, où n^+ (respectivement n^-) est la multiplicité de ρ^+ dans la partie de $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ correspondant à l'espace propre généralisé de F pour la valeur propre $\zeta_{16}^3 q^{k/2}$

(respectivement $-\zeta_{16}^3 q^{k/2}$). Comme il existe une infinité de ℓ tels que $\zeta_{16}^3 q^{k/2}$ n'appartienne pas à $\mathbb{Q}_\ell(i)$ (théorème 3.4.7), cela force $n^+ = n^-$, donc $\langle H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k, \rho^+\rangle$ est pair. Comme cette multiplicité est indépendante de ℓ on obtient le résultat. Le même raisonnement s'applique à ρ^-. □

4.3.3. Nous démontrons maintenant un théorème analogue à 4.2.4.

Théorème 4.3.4. *Supposons $(\mathbf{G}, F)$ de type B_2 déployé et soit $y \in \underline{B}^+$ apparaissant dans la table ci-dessous. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H(y\mathbf{w}_0^n) = (h^5t^2)^n E^n(f(y))$ où $f(y)$ est la valeur de $H(y)$ donnée par la table ci-dessous (où nous avons étendu E par linéarité à $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\sigma, \tau, \rho, \theta]$).*

y	$H(y)$
1	$\sigma + \tau + 2\rho$
$\mathbf{s}$	$h(\tau + \rho) + h^2t(\sigma + \rho)$
$\mathbf{t}$	$h(\sigma + \rho) + h^2t(\tau + \rho)$
$\underline{s}$	$(h^2t + 1)(\sigma + \rho)$
$\underline{t}$	$(h^2t + 1)(\tau + \rho)$
$\mathbf{ss}$	$h^2(\tau + \rho) + h^4t^2(\sigma + \rho)$
$\mathbf{tt}$	$h^2(\sigma + \rho) + h^4t^2(\tau + \rho)$
$\underline{s}\underline{t}$, $\underline{t}\underline{s}$	$h^2t(\sigma + \tau + \rho + \theta)$
$\underline{s}\mathbf{t}$, $\mathbf{t}\underline{s}$	$h(\rho + \sigma) + h^2t(\tau + \theta)$
$\underline{t}\mathbf{s}$, $\mathbf{s}\underline{t}$	$h(\rho + \tau) + h^2t(\sigma + \theta)$
$\mathbf{st}$, $\mathbf{ts}$	$h^2t\theta + h^3t\rho$
$\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}$	$(h^2t + h^4t^2)(\sigma + \tau + \rho + \theta)$
$\underline{sts}$	$(h^2t + h^4t^2)(\tau + \theta)$
$\underline{tst}$	$(h^2t + h^4t^2)(\sigma + \theta)$
$\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$	$h^2(\rho + \tau) + h^3t(\sigma + \theta) + h^4t^2(\sigma + \rho + \tau + \theta)$
$\mathbf{sts}$	$h^3t(\theta + \sigma) + h^4t^2(\tau + \theta)$
$\mathbf{tst}$	$h^3t(\theta + \tau) + h^4t^2(\sigma + \theta)$

Preuve. Comme dans le théorème 4.2.4, nous procédons par récurrence croissante sur n en traitant en même temps le cas $n = 0$ et le cas général, et en raisonnant par longueur croissante de y. Nous commençons par le

• *Cas de $\underline{s}\mathbf{w}_0^n$ et $\underline{t}\mathbf{w}_0^n$.* Si $n = 0$ la valeur se déduit du lemme 4.3.2(iv). Sinon, on a

$$H(\underline{s}\mathbf{w}_0^n) = th^2 H(\underline{s}\mathbf{tstw}_0^{n-1}) = th^3 H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}) = h^5t^2 E(H(\underline{s}\mathbf{w}_0^{n-1}))$$

respectivement par les lemmes 4.1.1(iii), 4.3.2(i) et les valeurs données dans la table. Le cas de $\underline{t}\mathbf{w}_0^n$ est analogue.

• *Cas de $\mathbf{w}_0^n$, $\mathbf{sw}_0^n$, $\mathbf{ssw}_0^n$, $\mathbf{tw}_0^n$ et $\mathbf{ttw}_0^n$.* Si $n = 0$ la valeur se déduit par exemple de la proposition 3.3.16. Sinon, nous appliquons la proposition 3.3.17 avec $\mathbf{b} = \mathbf{tstw}_0^{n-1}$ pour $m = 0, 1, 2, 3$. Par l'hypothèse de récurrence nous avons

$$H(\mathbf{b}) = (h^5t^2)^{n-1} E^{n-1}(h^3t(\theta + \tau) + h^4t^2(\sigma + \theta)).$$

Soit $\mathbf{Y}$ le fermé complémentaire de $\mathbf{X}(\mathbf{sb}) = \mathbf{X}(\mathbf{w}_0^n)$ dans $\mathbf{X}(\underline{w}_0\mathbf{w}_0^{n-1})$. Par

$$\mathbf{stsw}_0^{n-1} \xrightarrow{o} \mathbf{Y} \xrightarrow{f} \underline{tst}\mathbf{w}_0^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{tstw}_0^{n-1} \xrightarrow{o} \mathbf{Y} \xrightarrow{f} \underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}$$

on trouve qu'il existe $\varepsilon \in \{0,1\}$ tel que $H(\mathbf{Y}) = (h^5t^2)^{n-1}E^{n-1}(h^4t^2(\tau+\sigma+2\theta) + \varepsilon(h^2+h^3)t\theta)$. Par

$$\mathbf{w}_0^n \xrightarrow{o} \underline{w}_0\mathbf{w}_0^{n-1} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$$

et 4.1.1(v) on en déduit $H(\mathbf{w}_0^n) = (h^5t^2)^{n-1}E^{n-1}(h^5t^2(\tau+\sigma+2\theta) + \varepsilon(h^3+h^4)t\theta)$. Avec les notations de la proposition 3.3.17 on doit avoir $H(\mathbf{sb}) - hH(\mathbf{b}) = (ht^2-h)H_i$ d'où $H(\mathbf{sb}) - hH(\mathbf{b}) = (h^5t^2)^{n-1}E^{n-1}((ht^2-h)h^3t(\theta+\tau) + \varepsilon(h^3+h^4)t\theta)$, ce qui n'est divisible par $ht^2 - h$ que si $\varepsilon = 0$. Donc $\varepsilon = 0$ et on trouve les valeurs $H_i = h^{-2}t^{-1}(h^5t^2)^nE^n(\rho+\sigma)$ et $H_s = h^{-1}(h^5t^2)^nE^n(\rho+\tau)$. En appliquant la proposition 3.3.17 avec $m = 2, 3$ on en déduit les valeurs pour $\mathbf{sw}_0^n$ et $\mathbf{ssw}_0^n$. On procède de façon symétrique pour $\mathbf{tw}_0^n$ et $\mathbf{ttw}_0^n$, en échangeant les rôles de $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$.

• *Cas de $\underline{st}$.* Par les lemmes 4.1.1(iii), 4.3.2(i) et (ii), on a $H(\underline{st}\mathbf{w}_0^n) = H(\underline{st}\mathbf{tstsw}_0^{n-1}) = h^2tH(\underline{st}\mathbf{stsw}_0^{n-1}) = h^3tH(\underline{s}\,\underline{tst}\mathbf{w}_0^{n-1}) = h^5t^2H(\underline{st}\mathbf{w}_0^{n-1})$, ce qui est le résultat cherché car la table montre que $E(H(\underline{st}\mathbf{w}_0^{n-1})) = H(\underline{st}\mathbf{w}_0^{n-1})$.

• *Cas de $\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}$.* On procède exactement comme le cas précédent.

• *Cas de $\underline{sts}$ et $\underline{tst}$.* On a

$$\begin{aligned} H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^n) &= H(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}\mathbf{w}_0^n) - h^2tH(\underline{s}\mathbf{w}_0^n) = h^5t^2E(H(\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}\mathbf{w}_0^{n-1})) - h^7t^3E(H(\underline{s}\mathbf{w}_0^{n-1})) \\ &= h^5t^2E(H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1})) \end{aligned}$$

par le lemme 4.3.2(iii), les cas précédents, et à nouveau le lemme 4.3.2(iii). Le cas de $\underline{tst}$ est analogue.

Jusqu'à la fin de la preuve, tous les éléments de $\underline{B}^+$ que nous allons considérer sont de la forme $y\mathbf{w}_0^n$. Pour simplifier les notations, nous posons $\underline{H}(y) = (h^5t^2)^{-n}E^n(H(y\mathbf{w}_0^n))$ et $\underline{H}^i_c(\mathbf{X}(y)) = E^n(H_c^{i+5n}(\mathbf{X}(y\mathbf{w}_0^n))(2n))$.

• *Cas de $\underline{s}\mathbf{t}$ et $\mathbf{s}\underline{t}$.* En utilisant $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = \underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{t}) = h^2t\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t})$ et $\underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{o} \underline{sts} \xrightarrow{f} \underline{st}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t}) = h(\rho+\sigma) + h^2t(\tau+\theta) + (1+h)(\varepsilon\tau + \varepsilon'\theta).$$

En reportant ces valeurs dans la suite exacte longue déduite de $\underline{s}\mathbf{t} \xrightarrow{o} \underline{st} \xrightarrow{f} \underline{s}$ on trouve $\varepsilon = \varepsilon' = 0$.

On procède symétriquement pour $\mathbf{s}\underline{t}$.

• *Cas de $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$.* On trouve le résultat par $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{s}\underline{t}$ où le terme du milieu est donné par $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{ts}) = \underline{H}(\underline{ts}\mathbf{s}) = h^2t\underline{H}(\underline{ts})$.

• *Cas de* **st**, **ts**, **sts** *et* **sst**. Par $\mathbf{st} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{t} \xrightarrow{f} \mathbf{t}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\mathbf{st}) = h^2 t\theta + h^3 t\rho + \varepsilon\big(h+h^2\big)\rho + \varepsilon'\big(h+h^2\big)\sigma + \varepsilon''\big(h^2+h^3\big)t\tau.$$

Symétriquement, par $\mathbf{st} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{t} \xrightarrow{f} \mathbf{s}$ on trouve qu'il existe $\eta, \eta', \eta'' \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\mathbf{st}) = h^2 t\theta + h^3 t\rho + \eta\big(h+h^2\big)\rho + \eta'\big(h+h^2\big)\tau + \eta''\big(h^2+h^3\big)t\sigma.$$

En comparant, on trouve $\varepsilon = \eta$ et $\varepsilon' = \varepsilon'' = \eta' = \eta'' = 0$.

À ce stade on a donc (la première égalité par 4.1.1(i))

$$\underline{H}(\mathbf{st}) = \underline{H}(\mathbf{ts}) = h^2 t\theta + h^3 t\rho + \varepsilon\big(h+h^2\big)\rho.$$

Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ et $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h^2 t\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t})$ (4.1.1(iii)), on trouve qu'il existe $\delta \in \{0,1\}$ tel que

$$\underline{H}(\mathbf{sts}) = \varepsilon\big(h^2+h^3\big)\rho + \delta\big(h^3+h^4\big)t\rho + h^3 t(\sigma+\theta) + h^4 t^2(\tau+\theta).$$

Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s} \xrightarrow{f} \mathbf{ss}$ on voit que $\delta = 0$. Enfin, en utilisant la suite exacte longue qui vient de la proposition 3.2.10

$$\begin{aligned}\cdots &\to \underline{H}^0_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)(-1) \to \underline{H}^1_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{st})\big)(-1) \oplus \underline{H}^2_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{st})\big) \to \underline{H}^3_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{sst})\big)\\ &\to \underline{H}^1_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{t})\big)(-1) \to \cdots\end{aligned}$$

(où $\underline{H}(\mathbf{sst}) = \underline{H}(\mathbf{sts})$ par 4.1.1(i)) on trouve $\varepsilon = 0$. On procède symétriquement pour **tst**. □

Théorème 4.3.5. *Supposons* $(\mathbf{G}, F)$ *de type* ${}^2B_2$ *et soit* $y \in \underline{B}^+$ *apparaissant dans la table ci-dessous. Alors pour tout n, on a* $H(y\mathbf{w}_0^n) = (h^5t^2)^n f(y)$ *où* $f(y)$ *est la valeur de* $H(y)$ *donnée par la table.*

y	$H(y)$
1	0
s, **t**, $\underline{s}$, $\underline{t}$	$ht^{1/2}$
ts, **st**, **ss**, **tt**	$h^2t^{1/2} + h^3t^{3/2}$
$\underline{sts}$	$h^3t^{3/2}$
$\underline{s}$**ts**	$h^2t^{1/2}$
sts, **tst**	$h^4t^{3/2}$
$\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}$	$2h^3t^{3/2}$

Preuve. La démonstration procède comme dans le théorème 4.2.9.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{s}\,\underline{t}\,\underline{s}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{sts}\mathbf{w}_0^n$. On procède exactement comme pour les mêmes cas dans le théorème 4.3.4.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{tsw}_0^n$. On a $hH(\underline{sts}\mathbf{w}_0^n) = H(\underline{s}\mathbf{tstw}_0^n) = H(\underline{s}\mathbf{tsw}_0^n\mathbf{t}) = H(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{tsw}_0^n) = h^2tH(\underline{s}\mathbf{tsw}_0^n)$ où la première égalité est par le lemme 4.3.2(i), la deuxième car $\mathbf{w}_0$ est central, la troisième par 4.1.1(i) et la dernière par 4.1.1(iii).

Dans la suite, les éléments de $\underline{B}^+$ considérés sont de la forme $y\mathbf{w}_0^n$. Pour simplifier les notations, nous posons $\underline{H}(y) = (h^5t^2)^{-n}H(y\mathbf{w}_0^n)$ et $\underline{H}_c^i(\mathbf{X}(y)) = H_c^{i+5n}(\mathbf{X}(y\mathbf{w}_0^n))_{\rho^+}(2n) = H_c^{i+5n}(\mathbf{X}(y\mathbf{w}_0^n))_{\rho^-}(2n)$.

• *Cas de* $\mathbf{s}$. On conclut par $\mathbf{s} \xrightarrow{o} \underline{s} \xrightarrow{f} 1$.

• *Cas de* $\mathbf{st}$, $\mathbf{ss}$, $\mathbf{ts}$, $\mathbf{tt}$. On trouve $\mathbf{ss}$ par $\mathbf{ss} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{s} \xrightarrow{f} \mathbf{s}$ où le terme du milieu est donné par 4.1.1(iii). Les autres éléments sont F-conjugués par permutation circulaire (*cf.* 4.1.1(i)).

• *Cas de* $\mathbf{sts}$ *et* $\mathbf{w}_0$. Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que

$$\underline{H}(\mathbf{sts}) = h^4t^{3/2} + \varepsilon\big(h^2 + h^3\big)t^{1/2}.$$

Par $\mathbf{w}_0 \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{tst} \xrightarrow{f} \mathbf{tst}$, où le terme du milieu est égal à $h^2t\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts})$ par 4.1.1(iii), on trouve qu'il existe $\eta \in \{0, 1\}$ tel que

$$\underline{H}(\mathbf{w}_0) = \varepsilon\big(h^3 + h^4\big)t^{1/2} + \eta\big(h^4 + h^5\big)t^{3/2}.$$

On conclut en utilisant le lemme 4.3.2(v) qui montre qu'on doit avoir $\varepsilon = \eta = 0$. □

4.4. *Type* G_2

4.4.1. Nous considérons maintenant un groupe $\mathbf{G}$ de type G_2.

Si $\mathbf{G}$ est déployé, nous notons σ (respectivement τ) le caractère linéaire de W donné par $s \mapsto -1$, $t \mapsto 1$ (respectivement $s \mapsto 1$, $t \mapsto -1$) et nous notons A (respectivement B) la représentation irréductible de degré 2 où w_0 agit par -1 (respectivement 1). Par abus de notation, nous noterons de la même façon les caractères unipotents de la série principale autres que Id et St. Il y a 4 autres caractères unipotents, qui sont cuspidaux et associés aux valeurs propres $\lambda_\rho = 1, -1, j, j^2$ respectivement où l'on a posé $j = e^{2i\pi/3}$. Nous les noterons ρ, ρ_{-1}, ρ_j et ρ_{j^2}. Nous ne saurons démontrer un théorème que pour les caractères différents de B et ρ_{-1}. Nous écrirons donc $H(y)$ pour la partie $\sigma, \tau, A, \rho, \rho_j, \rho_{j^2}$-isotypique de $\sum_i h^i H_c^i(\mathbf{X}(y))$, représentée par un élément de $\mathbb{Z}[t, h][\sigma, \tau, A, \rho, \rho_j, \rho_{j^2}]$.

Si $(\mathbf{G}, F)$ est de type ${}^2\mathbf{G}_2$, alors F est une isogénie dont le carré est l'endomorphisme de Frobenius pour une $\mathbb{F}_{q^2}$-structure où q^2 est une puissance impaire de 3. Le groupe $\mathbf{G}^F$ possède 6 caractères unipotents différents de St et Id, tous cuspidaux. Ils ne sont pas rationnels mais définis sur $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ où $\zeta_3 = e^{2i\pi/3}$. Ils forment 3 orbites sous $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q})$. La première contient deux caractères de dimension $q(q^2 + \sqrt{3}q + 1)(q^2 - 1)/(2\sqrt{3})$, associés aux valeurs propres $\lambda_\rho = i$ et $\omega_\rho = q$ de F^2 (respectivement $\lambda_\rho = -i$ et $\omega_\rho = q$) (*cf.* corollaire 3.3.4 et [14, 4.7]) ; nous noterons ρ_i et ρ_{-i} ces caractères. La deuxième orbite est identique sauf que la dimension des caractères qu'elle contient est $q(q^2 - \sqrt{3}q + 1)(q^2 - 1)/(2\sqrt{3})$; nous noterons ρ'_i et ρ'_{-i} les caractères correspondants. La troisième orbite contient deux caractères de dimension $q(q^4 - 1)/\sqrt{3}$, associés aux valeurs propres $\lambda_\rho = \zeta_{12}^5$ et $\omega_\rho = q$ de F^2 (respectivement $\lambda_\rho = \zeta_{12}^7$

et $\omega_\rho = q$) où $\zeta_{12} = e^{2i\pi/12}$. Nous noterons $\rho_{\zeta_{12}^5}$ et $\rho_{\zeta_{12}^7}$ ces deux caractères. Nous noterons $H(\mathbf{y})$ la partie $(\rho_i, \rho_{-i}, \rho'_i, \rho'_{-i}, \rho_{\zeta_{12}^5}, \rho_{\zeta_{12}^7})$-isotypique de $\sum_i h^i H^i_c(\mathbf{X}(\mathbf{y}))$. Nous représenterons $H(\mathbf{y})$ par $P \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\rho_i, \rho_{-i}, \rho'_i, \rho'_{-i}, \rho_{\zeta_{12}^5}, \rho_{\zeta_{12}^7}]$.

Ici encore $\mathbf{w}_0 = \mathbf{ststst}$ est central dans B^+, et nous allons trouver une périodicité pour la translation par $\mathbf{w}_0$, à « l'involution d'Ennola » E près (qui correspond à l'échange de q et de $-q$) qui dans le cas déployé échange B et ρ_{-1} d'une part, et A et ρ d'autre part. Dans le cas non déployé, E échange ρ_i et ρ'_i, et ρ_{-i} et ρ'_{-i}.

Nous commençons par rappeler des conséquences des résultats des deux premiers chapitres pour un groupe de type G_2.

Lemme 4.4.2. *Soit $y \in \underline{B}^+$. Alors*

(i) $H(\underline{s}\mathbf{tstst}y) = hH(\underline{ststs}y)$.
(ii) $H(\underline{s}\,\underline{ts}y) = H(\underline{sts}y) + h^2 t H(\underline{s}y)$.
(iii) $H(\underline{t}\,\underline{sts}y) = H(\underline{tsts}y) + h^2 t H(\underline{ts}y)$.
(iv) $H(\underline{s}\,\underline{tsts}y) = H(\underline{ststs}y) + h^2 t H(\underline{sts}y)$.
(v) $H(\underline{t}\,\underline{ststs}y) = h^2 t H(\underline{tsts}y)$.

Les symétriques des assertions ci-dessus obtenues en échangeant s et t sont aussi vraies.

(vi) *Considérons les représentations A_{h^2t} et B_{h^2t} de $\mathcal{H}(h^2t) \rtimes \langle F \rangle$ définies sur les générateurs par :*

$$A_{h^2t}(T_s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ h\sqrt{3t} & h^2t \end{pmatrix}, \qquad A_{h^2t}(T_t) = \begin{pmatrix} h^2t & h\sqrt{3t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$B_{h^2t}(T_s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ h\sqrt{t} & h^2t \end{pmatrix}, \qquad B_{h^2t}(T_t) = \begin{pmatrix} h^2t & h\sqrt{t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et dans les deux cas $A_{h^2t}(F) = B_{h^2t}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ si $\mathbf{G}$ est déployé et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sinon. Alors si y est dans le sous-monoïde engendré par $\underline{W}$, on a si $\mathbf{G}$ est déployé :

$$\begin{aligned} 6H(y) = {} & A \operatorname{Trace}(T_y \mid A_{h^2t} + 3B_{h^2t} + 2\sigma_{h^2t} + 2\tau_{h^2t}) \\ & + \sigma \operatorname{Trace}(T_y \mid 2A_{h^2t} + 4\sigma_{h^2t} - 2\tau_{h^2t}) + \tau \operatorname{Trace}(T_y \mid 2A_{h^2t} - 2\sigma_{h^2t} + 4\tau_{h^2t}) \\ & + \rho \operatorname{Trace}(T_y \mid A_{h^2t} - B_{h^2t} + 2\sigma_{h^2t} + 2\tau_{h^2t}) \\ & + (\rho_j + \rho_{j^2}) \operatorname{Trace}(T_y \mid 2A_{h^2t} - 2\sigma_{h^2t} - 2\tau_{h^2t}) \end{aligned}$$

et sinon

$$\begin{aligned} H(y) = {} & \frac{1}{2}\big((\rho_i + \rho_{-i}) \operatorname{Trace}(T_y F \mid A_{h^2t}/\sqrt{3} + B_{h^2t}) \\ & + \big(\rho'_i + \rho'_{-i}\big) \operatorname{Trace}(T_y F \mid A_{h^2t}/\sqrt{3} - B_{h^2t})\big) \\ & + (\rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7}) \operatorname{Trace}(T_y F \mid A_{h^2t}/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(vii) *Supposons* $\mathbf{G}$ *non déployé et* y *produit d'éléments de* $C_{B^+}(F)$ *et d'éléments de* $\underline{W}^F$*. Soit* $H_c^j(y, \mathbb{Q}_\ell)_k$ *la partie de* $H_c^j(y, \mathbb{Q}_\ell)$ *où les valeurs propres de* F^δ *sont de module* $q^{\delta k/2}$*. Si les multiplicités de tous les caractères unipotents cuspidaux dans* $H_c^j(y, \mathbb{Q}_\ell)_k$ *sont indépendantes de* ℓ *pour tout* j*, alors tous les coefficients de* $H(y)$ *sont pairs.*

Preuve. (i) est obtenu par 4.1.1(v) et par $\underline{s}\mathbf{tstst}y \xrightarrow{o} \underline{ststst}\,y \xrightarrow{f} \underline{ststs}\,y$. (ii), (iii) et (iv) viennent du lemme 3.2.7(iii) et de la proposition 3.2.9. Pour (v), on obtient à partir du lemme 3.2.7(iii) et de la proposition 3.2.9

$$H(\underline{t}\ \underline{ststs}\ y) = H(\underline{w}_0 y) + h^2 t H(\underline{tsts}y).$$

En utilisant de plus le lemme 4.1.1(v) on obtient le résultat. On obtient (vi) immédiatement par le corollaire 3.3.8(ii) en utilisant [26, p. 376] (voir aussi [14, 4.7]) grâce au fait que dans un groupe de type G_2 toutes les variétés $\mathbf{X}(\underline{w})$ pour $w \in W$ sont rationnellement lisses (*cf.* proposition 3.2.5).

Le (vii) dit que la multiplicité de tout caractère unipotent cuspidal ρ dans $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ est paire. Comme $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ est un sous-($\mathbf{G}^F \times \langle F\rangle$)-module de $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, on a $\mathrm{Trace}(gF \mid H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k) \in \mathbb{Q}_\ell$. La somme

$$\left|\mathbf{G}^F\right|^{-1} \sum_{g\in\mathbf{G}^F} \mathrm{Trace}\bigl(gF \mid H_c^j\bigl(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell\bigr)_k\bigr)\rho\bigl(g^{-1}\bigr)$$

appartient donc à la même extension de $\mathbb{Q}_\ell$ que ρ, c'est-à-dire à $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_3)$. Comme y est stable par F, ce dernier induit un automorphisme sur la cohomologie dont les valeurs propres sur $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ sont de la forme $\pm\mu_\rho q^{k/2}$, où μ_ρ est une racine carrée de λ_ρ. La somme ci-dessus vaut donc $\mu_\rho q^{k/2}(n^+ - n^-)$, où n^+ (respectivement n^-) est la multiplicité de ρ dans la partie de $H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k$ correspondant à l'espace propre généralisé de F pour la valeur propre $\mu_\rho q^{k/2}$ (respectivement $-\mu_\rho q^{k/2}$). D'après le théorème 3.4.7, il existe des ℓ tels que $\mu_\rho q^{k/2}$ n'appartienne pas à $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_3)$ (car μ_ρ est une racine primitive 8-ième ou 24-ième de l'unité), donc $n^+ = n^-$ et $\langle H_c^j(\mathbf{X}(y), \mathbb{Q}_\ell)_k, \rho\rangle$ est pair. Comme cette multiplicité est indépendante de ℓ on obtient le résultat. □

On notera que dans la table ci-dessous, l'échange de s et t dans une variété échange σ et τ dans la cohomologie correspondante. En caractéristique 3, ce résultat peut se démontrer en utilisant l'isogénie de $\mathbf{G}$ induite par l'automorphisme du diagramme ; dans les autres caractéristiques nous ne savons que le constater.

Théorème 4.4.3. *Supposons* $(\mathbf{G}, F)$ *de type* G_2 *déployé et soit* $y \in \underline{B}^+$ *apparaissant dans la table ci-dessous. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $H(y\mathbf{w}_0^n) = (h^7t^3)^n E^n(f(y))$ *où* $f(y)$ *est la valeur de* $H(y)$ *donnée par la table (dans la table nous avons posé* $J = \rho_j + \rho_{j^2}$ *et nous avons étendu* E *par linéarité à* $\mathbb{Z}[t^{1/2}, h][\sigma, \tau, A, \rho, J]$*).*

y	$H(y)$
1	$\sigma + \tau + 2A$
s	$h(\sigma + A) + h^2t(\tau + A)$
t	$h(\tau + A) + h^2t(\sigma + A)$

(*suite à la page suivante*)

(*suite*)

y	$H(y)$
$\underline{s}$	$(h^2t+1)(\tau+A)$
$\underline{t}$	$(h^2t+1)(\sigma+A)$
$\mathbf{st}$, $\mathbf{ts}$	h^3tA+h^2tJ
$\underline{s}\mathbf{t}$, $\mathbf{t}\underline{s}$	$h(\tau+A)+h^2t(\sigma+J)$
$\underline{t}\mathbf{s}$, $\mathbf{s}\underline{t}$	$h(\sigma+A)+h^2t(\tau+J)$
$\underline{st}$, $\underline{ts}$	$h^2t(\sigma+\tau+A+J)$
$\mathbf{ss}$	$h^2(\sigma+A)+h^4t^2(\tau+A)$
$\mathbf{tt}$	$h^2(\tau+A)+h^4t^2(\sigma+A)$
$\mathbf{sts}$	$h^3t(\tau+J)+h^4t^2(\sigma+J)$
$\mathbf{tst}$	$h^3t(\sigma+J)+h^4t^2(\tau+J)$
$\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$	$h^4t^2(\sigma+\tau+A+J)+h^3t(\tau+J)+h^2(\sigma+A)$
$\underline{sts}$	$(h^2t+h^4t^2)(\sigma+J)$
$\underline{s}\mathbf{ts}$	$h^3t(\tau+A)+h^4t^2(\sigma+J)$
$\mathbf{stst}$	$h^4t^2\rho+h^5t^2J$
$\underline{tsts}$, $\underline{stst}$	$h^4t^2(\tau+\sigma+\rho+J)$
$\underline{s}\mathbf{tst}$	$h^3t(\sigma+J)+h^4t^2(\tau+\rho)$
$\underline{t}\mathbf{sts}$	$h^3t(\tau+J)+h^4t^2(\sigma+\rho)$
$\underline{ststs}$	$(h^6t^3+h^4t^2)(\tau+\rho)$
$\mathbf{tstst}$	$h^6t^3(\sigma+\rho)+h^5t^2(\tau+\rho)$
$\underline{t}\mathbf{stst}$	$h^5t^2(\tau+J)+h^6t^3(\sigma+\rho)$
$\underline{s}\mathbf{tsts}$	$h^5t^2(\sigma+J)+h^6t^3(\tau+\rho)$

Preuve. Nous procédons comme pour le théorème 4.2.9, en démontrant le théorème par récurrence sur n ; à l'étape n nous le supposons démontré pour $y\mathbf{w}_0^{n-1}$, où y est dans la table, ainsi que pour $\mathbf{w}_0^n$; ainsi nous terminons la démonstration en le démontrant pour $\mathbf{w}_0^{n+1}$.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{w}_0^n$ *et* $\underline{t}\mathbf{w}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.4.2(vi). Sinon, on a $H(\underline{s}\mathbf{w}_0^n)=H(\underline{s}\mathbf{ststst}\mathbf{w}_0^{n-1})=h^2tH(\underline{s}\mathbf{tstst}\mathbf{w}_0^{n-1})=h^3tH(\underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1})=h^7t^3E(H(\underline{s}\mathbf{w}_0^{n-1}))$, en utilisant les lemmes 4.1.1(iii), 4.4.2(i) et la récurrence. Le cas de $\underline{t}\mathbf{w}_0^n$ est analogue.

• *Cas de* $\underline{st}\mathbf{w}_0^n$ *et de* $\underline{ts}\mathbf{w}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.4.2(vi). Sinon, on a

$$\begin{aligned}H\big(\underline{ts}\mathbf{w}_0^n\big)&=H\big(\underline{ts}\mathbf{ststst}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)=h^2tH\big(\underline{ts}\mathbf{tstst}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)=h^3tH\big(\underline{t}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\&=h^5t^2H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)=h^7t^3E\big(H\big(\underline{ts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\big)\end{aligned}$$

par les lemmes 4.1.1(iii), 4.4.2(i), 4.4.2(v) et la récurrence. Le cas de $\underline{st}\mathbf{w}_0^n$ est analogue.

• *Cas de* $\underline{sts}\mathbf{w}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.4.2(vi). Sinon, on a $H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^n)=$ (par le lemme 4.4.2(ii)) $H(\underline{st}\ \underline{s}\mathbf{w}_0^n)-h^2tH(\underline{s}\mathbf{w}_0^n)=$ (voir la preuve du cas $\underline{s}\mathbf{w}_0^n$) $h^3tH(\underline{st}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1})-h^5t^2H(\underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1})=$ (par le lemme 4.4.2(v)) $h^5t^2H(\underline{s}\ \underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1})-h^5t^2H(\underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1})=$ (par le lemme 4.4.2(iv)) $h^7t^3H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1})=$ (par la table) $h^7t^3E(H(\underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}))$. Le cas de $\underline{tst}\mathbf{w}_0^n$ est analogue.

• *Cas de* $\underline{tsts}\mathbf{w}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.4.2(vi). Sinon, on a

$$H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^n\big)=H\big(\underline{tst}\ \underline{s}\mathbf{w}_0^n\big)-h^2tH\big(\underline{ts}\mathbf{w}_0^n\big)\quad\text{(par le lemme 4.4.2(iii))}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^3 t H\big(\underline{tst}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - h^7 t^3 H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\
&\quad \text{(voir les preuves des cas } \underline{s}\mathbf{w}_0^n \text{ et } \underline{ts}\mathbf{w}_0^n\text{)}\\
&= h^3 t H\big(\underline{ts}\ \underline{t}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - h^5 t^2 H\big(\underline{t}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - h^7 t^3 H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\
&\quad \text{(par le lemme 4.4.2(ii))}\\
&= h^5 t^2 H\big(\underline{ts}\ \underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - 2h^7 t^3 H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\
&\quad \text{(par le lemme 4.4.2(v))}\\
&= h^5 t^2 H\big(\underline{t}\ \underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) + h^7 t^3 H\big(\underline{t}\ \underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - 2h^7 t^3 H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\
&\quad \text{(par le lemme 4.4.2(iv))}\\
&= h^7 t^3 H\big(\underline{t}\ \underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - h^7 t^3 H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) \quad \text{(par le lemme 4.4.2(v))}\\
&= h^9 t^4 H\big(\underline{ts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) \quad \text{(par le lemme 4.4.2(iii))}\\
&= h^7 t^3 E\big(H\big(\underline{tsts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\big) \quad \text{(par la table).}
\end{aligned}
$$

Le cas de $\underline{stst}\mathbf{w}_0^n$ est analogue.

• *Cas de* $\underline{ststs}\mathbf{w}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit du lemme 4.4.2(vi). Sinon, on a

$$
\begin{aligned}
H\big(\underline{ststs}\mathbf{w}_0^n\big) &= H\big(\underline{s}\ \underline{tsts}\mathbf{w}_0^n\big) - h^2 t H\big(\underline{sts}\mathbf{w}_0^n\big) \quad \text{(par le lemme 4.4.2(iv))}\\
&= h^9 t^4 H\big(\underline{s}\ \underline{ts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) - h^9 t^4 H\big(\underline{sts}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\\
&\quad \text{(voir les cas de } \underline{tsts}\mathbf{w}_0^n \text{ et de } \underline{sts}\mathbf{w}_0^n\text{)}\\
&= h^{11} t^5 H\big(\underline{s}\mathbf{w}_0^{n-1}\big) \quad \text{(par le lemme 4.4.2(ii))}\\
&= h^7 t^3 E\big(H\big(\underline{ststs}\mathbf{w}_0^{n-1}\big)\big) \quad \text{(par la table).}
\end{aligned}
$$

• *Cas de* $\mathbf{sw}_0^n$, $\mathbf{ssw}_0^n$, $\mathbf{tw}_0^n$ *et* $\mathbf{ttw}_0^n$. Si $n=0$ la valeur se déduit par exemple de la proposition 3.3.16. Sinon, nous appliquons la proposition 3.3.17 avec $\mathbf{b}=\mathbf{tststw}_0^{n-1}$ pour $m=0,1,2,3$. Par l'hypothèse de récurrence nous avons

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{b}) &= \big(h^7 t^3\big)^{n-1} E^{n-1}\big(h^5 t^2(\tau+\rho) + h^6 t^3(\sigma+\rho)\big)\\
&= \big(h^7 t^3\big)^{n} E^{n}\big(h^{-2} t^{-1}(\tau+A) + h^{-1}(\sigma+A)\big),
\end{aligned}
$$

et $H(\mathbf{sb}) = H(\mathbf{w}_0^n) = (h^7t^3)^n(\tau+\sigma+2A)$. Ces deux égalités permettent dans la proposition 3.3.17 de déterminer $H_i = (h^7t^3)^n E^n(h^{-2}t^{-1}(\tau+A))$ et $H_s = (h^7t^3)^n E^n(h^{-1}(\sigma+A))$ et on en déduit les valeurs pour $m=2,3$. On procède de façon analogue pour $\mathbf{tw}_0^n$ et $\mathbf{ttw}_0^n$.

Jusqu'à la fin de la preuve, tous les éléments de $\underline{B}^+$ que nous allons considérer sont de la forme $y\mathbf{w}_0^n$. Pour simplifier les notations, nous posons $\underline{H}(y) = (h^7t^3)^{-n}E^n(H(y\mathbf{w}_0^n))$ et $\underline{H}^i_c(\mathbf{X}(y)) = E^n(H_c^{i+7n}(\mathbf{X}(y\mathbf{w}_0^n))(3n))$.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{t}$ *et* $\underline{s}\mathbf{ts}$*,* $\underline{t}\mathbf{s}$ *et* $\underline{t}\mathbf{st}$*.* Par $\underline{s}\mathbf{t} \xrightarrow{o} \underline{st} \xrightarrow{f} \underline{s}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_A, \varepsilon_\tau \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{t}) = h(\tau + A) + h^2 t(\sigma + J) + \bigl(h^2 + h^3\bigr) t(\varepsilon_A A + \varepsilon_\tau \tau).$$

Par $\underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{o} \underline{sts} \xrightarrow{f} \underline{st}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_j, \varepsilon_{j^2} \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h^4 t^2(\sigma + J) + h^3 t(\tau + A) + \bigl(h^2 + h^3\bigr) t(\varepsilon_\sigma \sigma + \varepsilon_j \rho_j + \varepsilon_{j^2} \rho_{j^2}).$$

Mais par 4.1.1(i) et (iii) on a $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h^2 t \underline{H}(\underline{s}\mathbf{t})$, donc en comparant les valeurs on trouve que $\varepsilon_A = \varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma = \varepsilon_j = \varepsilon_{j^2} = 0$ d'où le résultat pour les deux premières variétés. On procède de façon analogue pour $\underline{t}\mathbf{s}$ et $\underline{t}\mathbf{st}$.

• *Cas de* $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s}$*.* Par $\mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{s}\underline{t}$, où $\underline{H}(\mathbf{s}\underline{ts}) = h^2 t \underline{H}(\underline{ts})$ par 4.1.1(i) et (iii), on trouve la valeur.

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{tst}$ *et de* $\underline{s}\mathbf{tsts}$*,* $\underline{t}\mathbf{sts}$*,* $\underline{t}\mathbf{stst}$*.* Par $\underline{s}\mathbf{tsts} \xrightarrow{o} \underline{ststs} \xrightarrow{f} \underline{stst}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_\tau, \varepsilon_\rho \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tsts}) = h^6 t^3(\tau + \rho) + h^5 t^2(\sigma + J) + \bigl(h^4 + h^5\bigr) t^2(\varepsilon_\tau \tau + \varepsilon_\rho \rho).$$

Par $\underline{s}\mathbf{tst} \xrightarrow{o} \underline{stst} \xrightarrow{f} \underline{sts}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_j, \varepsilon_{j^2} \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tst}) = h^3 t(\sigma + J) + h^4 t^2(\tau + \rho) + \bigl(h^4 + h^5\bigr) t^2(\varepsilon_\sigma \sigma + \varepsilon_j \rho_j + \varepsilon_{j^2} \rho_{j^2}).$$

Mais on a $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tsts}) = \underline{H}(\mathbf{tsts}\underline{s}) = h^2 t \underline{H}(\mathbf{tst}\underline{s}) = h^2 t \underline{H}(\underline{s}\mathbf{tst})$. En comparant les valeurs on trouve le résultat. Les variétés $\underline{t}\mathbf{sts}$ et $\underline{t}\mathbf{stst}$ se traitent par des arguments symétriques.

• *Cas de* $\mathbf{st}$ *et de* $\mathbf{sts}$*,* $\mathbf{tst}$*.* Par $\mathbf{st} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{t} \xrightarrow{f} \mathbf{t}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_A, \varepsilon_\tau, \varepsilon_\sigma \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\mathbf{st}) = h^3 t A + h^2 t J + \bigl(h^2 + h\bigr)(\varepsilon_\tau \tau + \varepsilon_A A) + \bigl(h^2 + h^3\bigr) t \varepsilon_\sigma \sigma.$$

Par la symétrie entre σ et τ (qu'on peut obtenir ici en considérant $\mathbf{st} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{t} \xrightarrow{f} \mathbf{s}$), on trouve $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0$.

Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon \in \{0,1\}$ tel que

$$\underline{H}(\mathbf{sts}) = h^3 t(\tau + J) + h^4 t^2(\sigma + J) + \bigl(h^2 + h^3\bigr) \varepsilon_A A + \bigl(h^3 + h^4\bigr) t \varepsilon A.$$

En comparant avec $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{t}\mathbf{s} \xrightarrow{f} \mathbf{ss}$ on trouve que $\varepsilon = 0$. Enfin, en comparant avec la suite exacte longue qui vient de la proposition 3.2.10

$$\begin{aligned} \cdots \to \underline{H}^0_c\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)(-1) \to \underline{H}^1_c\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{st})\bigr)(-1) \oplus \underline{H}^2_c\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{st})\bigr) \to \underline{H}^3_c\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{sst})\bigr) \\ \to \underline{H}^1_c\bigl(\mathbf{X}(\mathbf{t})\bigr)(-1) \to \cdots \end{aligned}$$

on trouve que $\varepsilon_A = 0$. On obtient $\underline{H}(\mathbf{tst})$ par un argument symétrique.

• *Cas de* **stst**. Par $\mathbf{stst} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{tst} \xrightarrow{f} \mathbf{tst}$ on trouve qu'il existe $\varepsilon_\tau, \varepsilon_\sigma, \varepsilon_j, \varepsilon_{j^2} \in \{0,1\}$ tels que

$$\underline{H}(\mathbf{stst}) = h^4t^2\rho + h^5t^2J + \left(h^3+h^4\right)t(\varepsilon_\sigma\sigma + \varepsilon_j\rho_j + \varepsilon_{j^2}\rho_{j^2}) + \left(h^4+h^5\right)t^2\varepsilon_\tau\tau.$$

La symétrie entre σ et τ (qu'on peut obtenir ici en considérant $\mathbf{stst} \xrightarrow{o} \mathbf{sts}\underline{t} \xrightarrow{f} \mathbf{sts}$) montre que $\varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma = 0$.

• *Cas de* **tstst**. Par $\mathbf{tstst} \xrightarrow{o} \underline{t}\mathbf{stst} \xrightarrow{f} \mathbf{stst}$ on trouve qu'il existe $\alpha_j, \alpha_{j^2} \in \{0,1\}$ tels que

$$\begin{aligned}\underline{H}(\mathbf{tstst}) = {} & h^6t^3(\sigma+\rho) + \left(h^5t^2\right)(\tau+\rho) + \left(h^5+h^6\right)t^2(\alpha_j\rho_j + \alpha_{j^2}\rho_{j^2}) \\ & + \left(h^4+h^5\right)t(\varepsilon_j\rho_j + \varepsilon_{j^2}\rho_{j^2}).\end{aligned}$$

• *Cas de* $\mathbf{w}_0$. Par $\mathbf{w}_0 \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{tstst} \xrightarrow{f} \mathbf{tstst}$ où $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tstst}) = h\underline{H}(\underline{ststs})$ (*cf.* lemme 4.4.2(i)) on trouve qu'il existe $\varepsilon_\tau, \varepsilon_\rho \in \{0,1\}$ tels que

$$\begin{aligned}\underline{H}(\mathbf{w}_0) = {} & h^7t^3(\sigma+\tau+2\rho) + \left(h^5+h^6\right)t(\varepsilon_j\rho_j + \varepsilon_{j^2}\rho_{j^2}) + \left(h^6+h^7\right)t^2(\alpha_j\rho_j + \alpha_{j^2}\rho_{j^2}) \\ & + \left(h^5+h^6\right)t^2(\varepsilon_\tau\tau + \varepsilon_\rho\rho).\end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant la proposition 3.3.17 avec $\mathbf{b} = \mathbf{tstst}$, sous la forme (en suivant les notations de la proposition 3.3.17) : $\underline{H}(\mathbf{sb}) - h\underline{H}(\mathbf{b}) = (h^2t - h)H_i$, en particulier on voit que $\underline{H}(\mathbf{sb}) - h\underline{H}(\mathbf{b})$ doit être divisible par $h^2t - h$. Avec les valeurs obtenues, cela implique que $\varepsilon_\tau = \varepsilon_\rho = 0$.

Nous finissons en utilisant le corollaire 5.4.3 qui montre que les caractères ρ_j et ρ_{j^2} ne peuvent intervenir dans la cohomologie de $X(\boldsymbol{\pi}^n\mathbf{w}_0)$, donc que $\varepsilon_j = \varepsilon_{j^2} = \alpha_j = \alpha_{j^2} = 0$ (notons que le corollaire 5.4.3 dépend du théorème 4.4.4 mais pas du théorème 4.4.3). □

Théorème 4.4.4. *Supposons* $(\mathbf{G}, F)$ *de type* ${}^2G_2$ *et soit* $y \in \underline{B}^+$ *apparaissant dans la table ci-dessous. Alors pour tout n, on a* $H(y\mathbf{w}_0^n) = (h^7t^3)^nE^n(f(y))$ *où* $f(y)$ *est la valeur de* $H(y)$ *donnée par la table ; dans cette table nous avons posé* $A = \rho_i + \rho_{-i} + \rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7}$ *et* $B = \rho'_i + \rho'_{-i} + \rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7}$ *; avec ces notations E échange A et B.*

y	$H(y)$
1	0
s, **t**, $\underline{s}$, $\underline{t}$	$ht^{1/2}A$
$\underline{st}$, $\underline{ts}$	$(ht^{1/2} + h^3t^{3/2})A$
ss, **st**, **ts**, **tt**	$(h^2t^{1/2} + h^3t^{3/2})A$
$\underline{sts}$, $\underline{tst}$	$h^3t^{3/2}(A+B)$
$\underline{s}$**ts**	$h^2t^{1/2}A + h^3t^{3/2}B$
sts, **tst**	$h^4t^{3/2}A + h^3t^{3/2}B + \varepsilon_n(h^3+h^4)t^{3/2}(\rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7})$
$\underline{stst}$, $\underline{tsts}$	$(h^3t^{3/2} + h^5t^{5/2})B$
$\underline{s}$**tst**, $\underline{t}$**sts**	$h^4t^{3/2}A + h^5t^{5/2}B$
stst, **tsts**	$(h^4t^{3/2} + h^5t^{5/2})B$
$\underline{ststs}$	$h^5t^{5/2}B$
$\underline{s}$**tsts**	$h^4t^{3/2}B$
ststs, **tstst**, $\underline{s}$**tstst**	$h^6t^{5/2}B$

Ci-dessus $\varepsilon_n \in \{0, -1\}$ *est une constante indépendante de* ℓ.

Preuve. La preuve procède comme pour le théorème 4.4.3, sauf que nous allons utiliser l'ingrédient supplémentaire (les notations sont celles de §3.4.5) :

Proposition 4.4.5. *Nous fixons* $i, j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b} \in \underline{B}^+$. *Soit* $M_\ell = H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{b}), \mathbb{Q}_\ell)_j$; *supposons que* $\langle M_\ell, M_\ell^* \rangle$ *est indépendant de* ℓ, *et que* $\langle \rho_i', M_\ell \rangle = \langle \rho_{-i}', M_\ell \rangle = 0$. *Alors* $\langle \rho_i, M_\ell \rangle = \langle \rho_{-i}, M_\ell \rangle$, $\langle \rho_{\zeta_{12}^5}, M_\ell \rangle = \langle \rho_{\zeta_{12}^7}, M_\ell \rangle$ *et* M_ℓ *est indépendant de* ℓ.

Preuve. Soient $a_i, a_{-i}, a_{\zeta_{12}^5}, a_{\zeta_{12}^7}$ les multiplicités respectives de ρ_i, ρ_{-i}, $\rho_{\zeta_{12}^5}$, $\rho_{\zeta_{12}^7}$ dans M_ℓ. Comme $\rho_i + \rho_{-i} + \rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7}$ et $\rho_i' + \rho_{-i}' + \rho_{\zeta_{12}^5} + \rho_{\zeta_{12}^7}$ sont combinaisons linéaires de $R_{\tilde{\chi}}$, on déduit de la proposition 3.4.6 et de l'hypothèse que $\alpha := a_i + a_{-i}$ et $\beta := a_{\zeta_{12}^5} + a_{\zeta_{12}^7}$ sont indépendants de ℓ. L'hypothèse nous donne que $\gamma := a_i a_{-i} + a_{\zeta_{12}^5} a_{\zeta_{12}^7} = a_i(\alpha - a_i) + a_{\zeta_{12}^5}(\beta - a_{\zeta_{12}^5})$ est indépendant de ℓ. Il existe une infinité de ℓ tels que ni ρ_i ni $\rho_{\zeta_{12}^5}$ ne soient à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$ (théorème 3.4.7), ce qui pour ces ℓ force $a_i = \alpha/2$ et $a_{\zeta_{12}^5} = \beta/2$ ce qui donne $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)/4$. Donc pour tout ℓ on a $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)/4$. Mais on a toujours $a_i(\alpha - a_i) \leqslant \alpha^2/4$ avec égalité uniquement si $a_i = \alpha/2$ (et similairement pour $a_{\zeta_{12}^5}$ et β). On a donc nécessairement $a_i = \alpha/2 = a_{-i}$ et $a_{\zeta_{12}^5} = \beta/2 = a_{\zeta_{12}^7}$. □

Nous avons évidemment la proposition analogue en échangeant ρ_i et ρ_i' et ρ_{-i} et ρ_{-i}'. En général nous saurons que l'hypothèse de la proposition a lieu car $\langle M_\ell, M_\ell^* \rangle$ sera le seul terme inconnu de la somme $S_{2i,2j,\mathbf{b},\mathbf{b}}$.

Nous commençons par

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{t}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{st}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{ts}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{sts}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{tsts}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{stst}\mathbf{w}_0^n$, $\underline{ststs}\mathbf{w}_0^n$. La preuve procède exactement comme pour les mêmes éléments dans le cas de G_2.

Jusqu'à la fin de la preuve, tous les éléments de $\underline{B}^+$ que nous allons considérer sont de la forme $y\mathbf{w}_0^n$. Pour simplifier les notations, nous posons $\underline{H}(y) = (h^7 t^3)^{-n} E^n(H(y\mathbf{w}_0^n))$ et nous noterons $\underline{H}^i(y)_j$ la partie $\rho_i, \rho_{-i}, \rho_i', \rho_{-i}', \rho_{\zeta_{12}^5}, \rho_{\zeta_{12}^7}$-isotypique de $E^n(H_c^{i+7n}(\mathbf{X}(y\mathbf{w}_0^n), \mathbb{Q}_\ell)_{j+6n})$. Comme expliqué dans la preuve du théorème 4.2.4, les items de 4.1.1 sont encore vrais pour $\underline{H}$ sauf le (i) qui est encore vrai si $x \in B^+$.

• *Cas de* $\mathbf{s}$ *et de* $\mathbf{t}$. L'élément $\mathbf{s}$ est donné par $\mathbf{s} \xrightarrow{o} \underline{s} \xrightarrow{f} 1$. On en déduit $\mathbf{t}$ par 4.1.1(i).

• *Cas de* $\mathbf{ss}$, $\mathbf{ts}$, $\mathbf{st}$ *et* $\mathbf{tt}$. L'élément $\mathbf{ss}$ est donné par $\mathbf{ss} \xrightarrow{o} \mathbf{s}\underline{s} \xrightarrow{f} \mathbf{s}$ où $\mathbf{s}\underline{s}$ est donné par 4.1.1(iii). On déduit les autres éléments par 4.1.1(i).

• *Cas de* $\underline{s}\mathbf{ts}$, *de* $\underline{s}\mathbf{tst}$ *et de* $\underline{t}\mathbf{sts}$. Remarquons tout d'abord qu'on a $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tst}) = \underline{H}(\mathbf{s}\underline{s}\mathbf{ts})$ (par 4.1.1(i)) $= h^2 t \underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts})$ (par 4.1.1(iii)).

Par $\underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{o} \underline{sts} \xrightarrow{f} \underline{ts}$ on trouve que

$$\underline{H}(\underline{s}\mathbf{ts}) = h^2 t^{1/2} A + h^3 t^{3/2} B + (h^3 + h^4) t^{3/2} {}_{\leqslant}A,$$

où ${}_{\leqslant}A$ dénote un sous-module de A. Alors par $\underline{s}\mathbf{tst} \xrightarrow{o} \underline{stst} \xrightarrow{f} \underline{tst}$ et la remarque préliminaire on trouve que ${}_{\leqslant}A = 0$.

On obtient $\underline{t}\mathbf{sts}$ par un raisonnement symétrique.

• *Cas de* $\underline{s}$**tstst** *et de* $\underline{s}$**tsts**. Par un raisonnement analogue au cas précédent, on a $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tstst}) = h^2 t \underline{H}(\underline{s}\mathbf{tsts})$, et on obtient $\underline{H}(\underline{s}\mathbf{tstst})$ par le lemme 4.4.2(i), d'où les deux valeurs.

• *Cas de* **sts**, **tsts**, **ststs** *et* $\mathbf{w}_0$, *ainsi que* **tst**, **stst** *et* **tstst**. Par $\mathbf{sts} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{ts} \xrightarrow{f} \mathbf{ts}$ on trouve qu'il existe $\beta, \beta^* \in \{0, -1\}$ et un sous-module A_1 de A tels que

$$\underline{H}(\mathbf{sts}) = h^3 t^{3/2} B + h^4 t^{3/2} A + \left(h^3 + h^4\right) t^{3/2} \left(\beta \rho_{\zeta_{12}^5} + \beta^* \rho_{\zeta_{12}^7}\right) + \left(h^2 + h^3\right) t^{1/2} A_1.$$

On peut appliquer 4.4.5 avec $M_\ell = H^2(\mathbf{sts})_1$ car $\langle M_\ell, M_\ell^* \rangle$ est le seul terme non nul de $S_{4+14n,2+12n,\mathbf{sts},\mathbf{sts}}$, ce qui prouve que A_1 est rationnel et indépendant de ℓ. On voit de même que β est indépendant de ℓ et que $\beta = \beta^*$ en appliquant 4.4.5 avec $M_\ell = H^4(\mathbf{sts})_3$.

Ensuite, par $\mathbf{tsts} \xrightarrow{o} \underline{t}\mathbf{sts} \xrightarrow{f} \mathbf{sts}$ on trouve qu'il existe un sous-module A_2 de A tel que

$$\underline{H}(\mathbf{tsts}) = \left(h^4 t^{3/2} + h^5 t^{5/2}\right) B + \left(h^3 + h^4\right) t^{1/2} A_1 + \left(h^4 + h^5\right) t^{3/2} A_2.$$

En appliquant 4.4.5 avec $M_\ell = H^5(\mathbf{tsts})_3$ on voit que A_2 est indépendant de ℓ.

Puis, par $\mathbf{ststs} \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{tsts} \xrightarrow{f} \mathbf{tsts}$ on trouve qu'il existe un sous-module B_1 de B tel que

$$\underline{H}(\mathbf{ststs}) = h^6 t^{5/2} B + \left(h^4 + h^5\right) t^{1/2} A_1 + \left(h^4 + h^5\right) t^{3/2} B_1 + \left(h^5 + h^6\right) t^{3/2} A_2.$$

En appliquant 4.4.5 avec $M_\ell = H^4(\mathbf{ststs})_3$ on voit que B_1 est indépendant de ℓ.

Enfin, par $\mathbf{w}_0 \xrightarrow{o} \underline{s}\mathbf{tstst} \xrightarrow{f} \mathbf{ststs}$ où $\underline{s}\mathbf{tstst}$ est donné par le lemme 4.4.2(i), on trouve qu'il existe un sous-module B_2 de B tel que

$$\underline{H}(\mathbf{w}_0) = \left(h^5 + h^6\right) t^{1/2} A_1 + \left(h^5 + h^6\right) t^{3/2} B_1 + \left(h^6 + h^7\right) t^{3/2} A_2 + \left(h^6 + h^7\right) t^{5/2} B_2.$$

En appliquant 4.4.5 avec $M_\ell = H^7(\mathbf{w}_0)_5$ on voit que B_2 est indépendant de ℓ.

En appliquant alors le lemme 4.4.2(vii) on trouve que $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ (des inconnues que nous avons introduites, seule β n'a pas été prouvée nulle ; nous l'avons notée ε_n dans la table).

Les éléments **tst**, **tstst** donnent la même valeur que respectivement **sts** et **ststs** par 4.1.1(i), et **stst** s'obtient par un raisonnement symétrique de celui utilisé pour **tsts**. □

5. Endomorphismes des variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w})$

Pour $\mathbf{t} \in B^+$, suivant [5], nous nous intéresserons dans cette partie à certains morphismes commutant à l'action de $\mathbf{G}^F$ entre variétés $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ qui nous permettront de construire l'action de $C_{\mathbf{B}}(\mathbf{w}F)$ mentionnée dans l'introduction.

5.1. Combinatoire

Nous considérons la catégorie $\mathcal{B}$ d'objets les éléments de B, avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = \left\{\mathbf{y} \in B \mid \mathbf{w}' = \mathbf{y}^{-1} \mathbf{w} F(\mathbf{y})\right\}$$

et la composition est donnée par le produit. Soit $\mathcal{B}^+$ la sous-catégorie pleine d'objets les éléments de B^+.

Nous introduisons deux sous-catégories de $\mathcal{B}^+$, dont l'ensemble des objets coïncide avec B^+. La catégorie $\mathcal{D}^+$ est la plus petite sous-catégorie telle que

$$\left\{\mathbf{y} \in B^+ \mid \mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{w},\ \mathbf{y}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{y}) = \mathbf{w}'\right\} \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^+}(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$$

et $\mathcal{D}$ est la plus petite sous-catégorie contenant $\mathcal{D}^+$ et dont toutes les flèches sont inversibles.

Remarque 5.1.1. (i) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^+}(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$ est l'ensemble des $\mathbf{y} \in B^+$ qui admettent une décomposition $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n$ avec $\mathbf{y}_i \in B^+$, telle qu'il existe une suite $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ d'éléments de B^+ avec $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$, $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}'$, $\mathbf{y}_i \preccurlyeq \mathbf{w}_i$ et $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{y}_i^{-1}\mathbf{w}_i\ F(\mathbf{y}_i)$.

(ii) De même, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$ est l'ensemble des $\mathbf{y} \in B$ qui admettent une décomposition $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n$ avec $\mathbf{y}_i \in B^+$ ou $\mathbf{y}_i^{-1} \in B^+$, telle qu'il existe une suite $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ d'éléments de B^+ avec $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$, $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}'$, $\mathbf{y}_i \preccurlyeq \mathbf{w}_i$ si $\mathbf{y}_i \in B^+$ et $\mathbf{y}_i^{-1} \preccurlyeq \mathbf{w}_{i+1}$ si $\mathbf{y}_i^{-1} \in B^+$, et $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{y}_i^{-1}\mathbf{w}_i F(\mathbf{y}_i)$.

Soit $\tilde{\mathcal{D}}^+$ la catégorie d'ensemble d'objets B^+ et dont les flèches sont engendrées par les $\gamma_{\mathbf{y}} = \gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w},\mathbf{w}'} : \mathbf{w} \to \mathbf{w}'$ pour $\mathbf{y} \in B^+$ vérifiant $\mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{w}$ et $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{y}) = \mathbf{w}'$, avec les relations $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w},\mathbf{w}''} = \gamma_{\mathbf{y}_2}^{\mathbf{w}',\mathbf{w}''}\gamma_{\mathbf{y}_1}^{\mathbf{w},\mathbf{w}'}$ lorsque $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \preccurlyeq \mathbf{w}$.

On a un foncteur canonique $\tilde{\mathcal{D}}^+ \to \mathcal{B}$ qui est l'identité sur les objets et envoie $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w},\mathbf{w}'}$ sur $\mathbf{y}$.

Proposition 5.1.2. *Le foncteur canonique $\tilde{\mathcal{D}}^+ \to \mathcal{B}$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathcal{D}}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^+$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que $\tilde{\mathcal{D}}^+ \to \mathcal{B}$ est pleinement fidèle.

Soit $\mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ l'ensemble des suites $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ d'éléments de B^+ de produit $\mathbf{y}$ et telles qu'il existe une suite $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ d'éléments de B^+ avec $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$, $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}'$, $\mathbf{y}_i \preccurlyeq \mathbf{w}_i$ et $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{y}_i^{-1}\mathbf{w}_i\ F(\mathbf{y}_i)$. L'image du foncteur s'identifie à la sous-catégorie de $\mathcal{B}$ d'objets B^+ et d'ensemble de flèches de $\mathbf{w}$ à $\mathbf{w}'$ les $\mathbf{y} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$ tels que $\mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}') \neq \emptyset$.

Nous allons démontrer par récurrence sur $l(\mathbf{y})$ que :

(i) Si $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{v} \preccurlyeq \mathbf{w}$ et $\mathbf{v} \preccurlyeq \mathbf{y}$, alors il existe $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ avec $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$.
(ii) Si $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n), (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k) \in \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, alors on a $\gamma_{\mathbf{y}_n} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_1} = \gamma_{\mathbf{z}_k} \cdots \gamma_{\mathbf{z}_1}$.

La proposition résultera de l'assertion (ii).

Considérons $\mathbf{v}$ comme en (i). Posons $\mathbf{v} = \mathbf{s}\mathbf{v}'$ avec $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$. Soit $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \in \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$.

Supposons tout d'abord $\mathbf{s} \preccurlyeq \mathbf{y}_1$. Posons $\mathbf{w}_1 = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{s})$ et $\mathbf{y}_1 = \mathbf{s}\mathbf{y}_1'$. Alors, $\mathbf{v}' \preccurlyeq \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{v}' \preccurlyeq \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_n$, donc par récurrence il existe $(\mathbf{v}', \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathcal{E}(\mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}')$ et $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ satisfait l'assertion (i). Par récurrence, on a $\gamma_{\mathbf{u}_m} \cdots \gamma_{\mathbf{u}_2}\gamma_{\mathbf{v}'} = \gamma_{\mathbf{y}_n} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_2}\gamma_{\mathbf{y}_1'}$, donc $\gamma_{\mathbf{u}_m} \cdots \gamma_{\mathbf{u}_2}\gamma_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{y}_n} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_1}$.

Supposons maintenant $\mathbf{s} \not\preccurlyeq \mathbf{y}_1$. Soit $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$ tel que $\mathbf{y}_1 = \mathbf{t}\mathbf{y}_1'$ Soit $\mathbf{d}$ le p.p.c.m. de $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$, i.e., le plus court élément de B^+ divisible à gauche par $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$. On a $\mathbf{s} \preccurlyeq \mathbf{w}$, $\mathbf{s} \preccurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{t} \preccurlyeq \mathbf{w}$ et $\mathbf{t} \preccurlyeq \mathbf{y}$, donc $\mathbf{d} \preccurlyeq \mathbf{w}$ et $\mathbf{d} \preccurlyeq \mathbf{y}$ (lemme 2.1.5). Soit $\mathbf{d}' \in B^+$ tel que $\mathbf{d} = \mathbf{t}\mathbf{d}'$ et soit $\mathbf{w}_1 = \mathbf{t}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{t})$. Alors, $\mathbf{d}' \preccurlyeq \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{d}' \preccurlyeq \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_n$. Par récurrence, on déduit de (i) qu'il existe $(\mathbf{d}', \mathbf{y}_2', \dots, \mathbf{y}_k') \in \mathcal{E}(\mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 \cdots \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}')$, donc $(\mathbf{d}, \mathbf{y}_2', \dots, \mathbf{y}_k') \in \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$. Puisque $\mathbf{s} \preccurlyeq \mathbf{d}$, on déduit de l'étude précédente qu'il existe $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$, d'où (i). L'étude précédente montre aussi que $\gamma_{\mathbf{y}_k'} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_2'}\gamma_{\mathbf{d}} = \gamma_{\mathbf{y}_n} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_1}$, donc, en utilisant à nouveau le cas précédent, $\gamma_{\mathbf{u}_m} \cdots \gamma_{\mathbf{u}_2}\gamma_{\mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{y}_n} \cdots \gamma_{\mathbf{y}_1}$.

Soient maintenant $(\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_k)\in\mathcal{E}(\mathbf{y},\mathbf{w},\mathbf{w}')$. Soit $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ tel que $\mathbf{z}_1=\mathbf{u}\mathbf{z}'_1$. Nous avons montré qu'il existe $(\mathbf{u},\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_m)\in\mathcal{E}(\mathbf{y},\mathbf{w},\mathbf{w}')$ tel que $\gamma_{\mathbf{u}_m}\cdots\gamma_{\mathbf{u}_2}\gamma_{\mathbf{u}}=\gamma_{\mathbf{y}_n}\cdots\gamma_{\mathbf{y}_1}$. Par récurrence, (ii) montre que $\gamma_{\mathbf{u}_m}\cdots\gamma_{\mathbf{u}_2}=\gamma_{\mathbf{z}_k}\cdots\gamma_{\mathbf{z}_2}\gamma_{\mathbf{z}'_1}$, donc $\gamma_{\mathbf{u}_m}\cdots\gamma_{\mathbf{u}_2}\gamma_{\mathbf{u}}=\gamma_{\mathbf{z}_k}\cdots\gamma_{\mathbf{z}_2}\gamma_{\mathbf{z}_1}$, d'où le (ii). □

Remarque 5.1.3. On en déduit que le sous-monoïde $B^+_{\mathbf{w}}\subset C_{B^+}(\mathbf{w}F)$ considéré dans [5, 5.6(ii)] s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathcal{D}^+}(\mathbf{w})$.

Soit $\tilde{\mathcal{D}}$ la catégorie déduite de $\tilde{\mathcal{D}}^+$ en rendant toutes les flèches inversibles. Puisque $\mathcal{B}$ est un groupoïde, le foncteur canonique $\tilde{\mathcal{D}}^+\to\mathcal{B}$ s'étend de manière unique en un foncteur $\tilde{\mathcal{D}}\to\mathcal{B}$.

Proposition 5.1.4. *Le foncteur canonique $\tilde{\mathcal{D}}\to\mathcal{B}$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathcal{D}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}$.*

Commençons par un lemme.

Lemme 5.1.5. *Soit X un ensemble fini de flèches de $\tilde{\mathcal{D}}^+$ de même source vérifiant* :

(i) *Tout facteur initial d'une flèche de X est dans X, i.e., si $\gamma'\gamma''\in X$ alors $\gamma''\in X$.*
(ii) *Si, pour $\mathbf{s},\mathbf{t}\in\mathbf{S}$ on a $\gamma_{\mathbf{s}}\gamma\in X$ et $\gamma_{\mathbf{t}}\gamma\in X$, alors $\gamma_{\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}}}\gamma\in X$.*

Alors X est l'ensemble des facteurs initiaux d'une flèche $\gamma\in\tilde{\mathcal{D}}^+$.

Preuve. Remarquons d'abord que la condition (ii) a un sens : si $\gamma_{\mathbf{s}}^{\mathbf{w},\mathbf{s}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{s})}$ et $\gamma_{\mathbf{t}}^{\mathbf{w},\mathbf{t}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{t})}$ sont deux flèches de même source, alors la flèche

$$\gamma_{\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}}}^{\mathbf{w},\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}-1}\mathbf{w}F(\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}})}$$

existe, car $\mathbf{s}\preccurlyeq\mathbf{w}$ et $\mathbf{t}\preccurlyeq\mathbf{w}$ implique $\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}}\preccurlyeq\mathbf{w}$. Soit γ une flèche de longueur maximale dans X. Si γ n'est pas multiple de toutes les flèches de X, alors il existe $f\in X$ qui est un facteur initial de γ et $\mathbf{s}\in\mathbf{S}$ tels que $\gamma_{\mathbf{s}}f\in X$ et $\gamma_{\mathbf{s}}f$ n'est pas un facteur initial de γ. Fixons un tel f de longueur maximale. Comme la longueur de f est inférieure à celle de γ, il existe $\mathbf{t}\in\mathbf{S}$ tel que $\gamma_{\mathbf{t}}f$ soit un facteur de γ. Par (i) on a $\gamma_{\mathbf{t}}f\in X$ et (ii) implique que

$$\gamma_1=\gamma_{\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}}}f\in X.$$

Comme $\gamma_{\mathbf{s}}f$ est un facteur initial de γ_1, la flèche γ_1 n'est pas un facteur initial de γ. Donc il existe un facteur initial f' de γ_1, dont $\gamma_{\mathbf{t}}f$ soit un facteur et qui soit facteur de γ, et un $\mathbf{s}'\in\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}$ tel que $\gamma_{\mathbf{s}'}f'$ ne soit pas facteur de γ. Comme f' est plus long que f, on a une contradiction. □

Corollaire 5.1.6. *L'ensemble des flèches $\gamma_{\mathbf{x}}$ de $\tilde{\mathcal{D}}^+$ de source donnée telles que $\mathbf{x}\in\mathbf{W}$ est formé des facteurs initiaux d'une unique flèche $\gamma_{\mathbf{u}}$ avec $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$.*

Preuve. L'ensemble X des flèches de l'énoncé vérifie les conditions du lemme 5.1.5 car $\mathbf{xs}\in\mathbf{W}$ et $\mathbf{xt}\in\mathbf{W}$ implique $\mathbf{x}\mathbf{w}_0^{\{\mathbf{s},\mathbf{t}\}}\in\mathbf{W}$. □

Preuve de la Proposition 5.1.4. Il s'agit de montrer que $\tilde{\mathcal{D}}\to\mathcal{B}$ est pleinement fidèle. Le lemme 5.1.7 ci-dessous ramène la preuve de la proposition au cas de flèches positives (i.e., de $\tilde{\mathcal{D}}^+$) et la proposition 5.1.2 l'a déjà résolu. □

Lemme 5.1.7. *Soit γ une flèche de $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{x},\mathbf{y}\in B^+$ tels que $\gamma=\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{y}}^{-1}$. Alors, il existe $\mathbf{x}',\mathbf{y}'\in B^+$ tels que $\gamma=\gamma_{\mathbf{x}'}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}'}$ et $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{y}'\mathbf{x}'^{-1}$.*

Preuve. Soient $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_m$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n$ des décompositions en éléments de $\mathbf{W}$. Nous démontrons le lemme par récurrence sur $m+n$; nous rajoutons dans l'hypothèse de récurrence que $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{y}'$ ont des décompositions en éléments de $\mathbf{W}$ de longueurs respectives n' et m' telles que $n' + m' \leqslant m + n$.

Par 5.1.6, $\gamma_{\mathbf{x}_1}$ et $\gamma_{\mathbf{y}_1}$ sont facteurs d'une flèche $\gamma_{\mathbf{u}}$. Écrivons $\mathbf{u} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}'_1 = \mathbf{y}_1\mathbf{y}'_1$. Alors

$$\gamma_{\mathbf{x}_1}\gamma_{\mathbf{y}_1}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}'_1}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}'_1}.$$

Notons que comme la propriété est claire si $m = 0$ ou $n = 0$, i.e., si $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ est l'identité, on l'a démontrée si $m + n \leqslant 2$; on peut aussi supposer $n, m \geqslant 1$.

On a

$$\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{y}}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_m}\gamma_{\mathbf{x}_1}\gamma_{\mathbf{y}_1}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}_2\cdots\mathbf{y}_n}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_m}\gamma_{\mathbf{x}'_1}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}'_1}\gamma_{\mathbf{y}_2\cdots\mathbf{y}_n}^{-1}.$$

Comme $m < n + m$, par récurrence il existe $\mathbf{x}'', \mathbf{y}'' \in B^+$ tels que

$$\gamma_{\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_m}\gamma_{\mathbf{x}'_1}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}''}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}''}.$$

Notons que $\mathbf{y}''$ est produit d'au plus $m-1$ termes dans $\mathbf{W}$; si $\mathbf{x}'' \neq 1$ ceci est assuré par l'hypothèse de récurrence. Sinon $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}_1'^{-1}\mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_m$ est dans B^+, et donc produit de $m-1$ termes de $\mathbf{W}$ au plus. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui affirme qu'il existe $\mathbf{x}''', \mathbf{y}' \in B^+$ tels que $\gamma_{\mathbf{y}'_1\mathbf{y}''}\gamma_{\mathbf{y}_2\cdots\mathbf{y}_n}^{-1} = \gamma_{\mathbf{x}'''}^{-1}\gamma_{\mathbf{y}'}$. On en déduit le lemme en posant $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''\mathbf{x}'''$. □

5.2. Traces

5.2.1. Soit $\mathcal{C}^+$ la catégorie des variétés quasi-projectives sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ munies des morphismes propres. On a un foncteur $\tilde{\mathcal{D}}^+ \to \mathcal{C}^+$ qui envoie $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{y} \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{D}}^+}(\mathbf{w}, \mathbf{w}')$ sur $D_{\mathbf{y}}$ (*cf.* proposition 3.1.6).

Soit $\mathcal{C}$ la localisation de $\mathcal{C}^+$ en les morphismes qui induisent des équivalences de sites étales. Le foncteur précédent s'étend en un foncteur $\tilde{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}$.

En composant avec le foncteur H_c^*, on obtient un foncteur de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F$-modules gradués.

Par abus de notation, nous noterons encore

$$D_{\mathbf{b}} \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F}\big(H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w})\big), H_c^*\big(\mathbf{X}(\mathbf{w}')\big)\big)$$

l'image par le foncteur ci-dessus de $D_{\mathbf{b}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{X}(\mathbf{w}'))$. Nous nous intéresserons à calculer la représentation de $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$ ainsi obtenue dans $\mathrm{End}_{\mathbf{G}}^F(H_c^*(\mathbf{X}(\mathbf{w})))$, qui sera dans certains cas une « algèbre de Hecke cyclotomique » associée au groupe $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$.

Soit Sh l'opérateur de torsion sur les classes de conjugaison de $\mathbf{G}^F$ défini comme suit. Soit $g \in \mathbf{G}^F$ et $h \in \mathbf{G}$ tel que $g = h^{-1}F(h)$. Alors, $\mathrm{Sh}((g)) = (F(h)h^{-1})$. On note encore Sh l'automorphisme de l'espace des fonctions centrales sur $\mathbf{G}^F$ qui s'en déduit.

Pour deux endomorphismes de Frobenius F_1 et F_2 de $\mathbf{G}$, soit Sh_{F_1/F_2} la descente de Shintani de $\mathbf{G}^{F_1}$ à $\mathbf{G}^{F_2}$ (*cf.* [10, I, 7]). Pour $g \in \mathbf{G}^{F_1}$, soit $h \in \mathbf{G}$ tel que $g = h^{-1}F_1(h)$. Alors, $\mathrm{Sh}_{F_1/F_2}((g)) = (hF_2(h)^{-1})$. On note encore Sh_{F_1/F_2} l'application linéaire des fonctions centrales sur $\mathbf{G}^{F_1}$ vers celles sur $\mathbf{G}^{F_2}$ qui s'en déduit.

On note T_w l'endomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathcal{B}^F] = \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F}\mathrm{Id}$ donné par $\mathbf{B} \mapsto \sum_{\mathbf{B}'} \mathbf{B}'$, où $\mathbf{B}'$ décrit les éléments de $\mathcal{B}^F$ tels que $\mathbf{B}' \xrightarrow{w} \mathbf{B}$.

Proposition 5.2.2. *Soit $\mathbf{w} \in (B^+)^F$, $g \in \mathbf{G}^F$ et soit d un entier strictement positif. Alors,*

(i) *L'endomorphisme $gD_{\mathbf{w}}F^n$ de $\mathbf{X}(\mathbf{w}^d)$ vérifie la formule des traces pour tout $n \geqslant 0$.*
(ii) *Si $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^F$, on a*

$$g \mapsto \left|\mathbf{X}\left(\mathbf{w}^d\right)^{gD_{\mathbf{w}}F^n}\right| \\ = \begin{cases} \mathrm{Sh}^d\left(g \mapsto \mathrm{Trace}\left(gT_w \mid \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F}\mathrm{Id}\right)\right) & si\ n = 0, \\ \mathrm{Sh}_{F^n/F} \circ \mathrm{Sh}_{F^{nd+1}/F^n}\left(g \mapsto \mathrm{Trace}\left(gT_wF^n \mid \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}^{F^{nd+1}}}^{\mathbf{G}^{F^{nd+1}}}\mathrm{Id}\right)\right) & si\ n > 0. \end{cases}$$

Preuve. L'élément $\mathbf{w} \in (B^+)^F$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{w}_0^{I_1} \cdots \mathbf{w}_0^{I_k}$ où $I_1, \ldots, I_k$ sont des sous-ensembles F-stables de S (proposition 2.1.6). Soit

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\left(\underline{w}_0^{I_1}, \ldots, \underline{w}_0^{I_k}, \ldots, \underline{w}_0^{I_1}, \ldots, \underline{w}_0^{I_k}\right)$$

(la suite $\underline{w}_0^{I_1}, \ldots, \underline{w}_0^{I_k}$ est répétée d fois), une compactification lisse F-stable de $\mathbf{X}(\mathbf{w}^d)$ (propositions 2.3.6, 2.3.5 et corollaire 2.2.10).

Soit

$$D' = D_{\underline{w}_0^{I_1} \cdots \underline{w}_0^{I_k}}.$$

Le morphisme $gD'F^n$ est fini et, comme il a une puissance égale à une puissance de F, son graphe est transverse à la diagonale. Par conséquent, l'opérateur $gD'F^n$ sur $\mathbf{Y}$ vérifie la formule des traces (théorème 2.2.6). Notons qu'il prolonge l'endomorphisme $gD_{\mathbf{w}}F^n$ de $\mathbf{X}(\mathbf{w}^d)$.

Nous considérons maintenant la stratification de $\mathbf{Y}$ donnée par (2.2.15). L'opérateur $gD'F^n$ permute les pièces de cette stratification de la même manière que D'. Nous allons montrer par récurrence sur la longueur de $\mathbf{w}$ et pour chaque $\mathbf{w}$ par récurrence sur la dimension des pièces que $gD'F^n$ vérifie la formule des traces sur toute union D'-stable de pièces.

Les deux membres de la formule des traces pour un endomorphisme f d'une variété $\mathbf{X}$ sont additifs par rapport à la décomposition de $\mathbf{X}$ comme union d'un nombre fini de sous-variétés localement fermées f-stables. Cela est clair pour le second membre et résulte pour le premier membre de la longue suite exacte de cohomologie pour l'union d'un ouvert et d'un fermé. Pour prouver que $gD'F^n$ vérifie la formule des traces sur une union de pièces, on est donc ramené à le prouver pour une orbite de pièces sous D'.

Sur une orbite qui a au moins deux pièces $gD'F^n$ n'a pas de point fixe. La cohomologie d'une telle orbite est la somme directe des cohomologies des pièces et $gD'F^n$ permute cycliquement les facteurs de cette somme directe, donc a une trace nulle et vérifie la formule des traces dans ce cas. Si l'orbite est une seule pièce D'-stable, cette pièce est de la forme $\mathbf{X}((\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k)^d)$, où $\mathbf{v}_i \in W_{I_i}^F$, et $gD'F^n$ induit $gD_{\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k}F^n$ sur cette pièce. Si $\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k$ n'est pas égal à $\mathbf{w}$, l'opérateur $gD_{\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k}F^n$ vérifie la formule des traces sur cette pièce par récurrence sur $l(\mathbf{w})$. Si $\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k = \mathbf{w}$, par récurrence sur la dimension des pièces on sait que $gD_{\mathbf{w}}F^n$ vérifie la formule des traces sur la réunion de toutes les autres pièces de $\mathbf{Y}$. Comme il la vérifie sur $\mathbf{Y}$, il la vérifie par additivité sur $\mathbf{X}(\mathbf{w}^d)$.

Démontrons maintenant la deuxième assertion de la proposition. Un point fixe de $gD_{\mathbf{w}}F^n$ sur la variété $\mathbf{X}(w,\dots,w)$ (où w est répété d fois) est une suite $(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_d)$ telle que

$$(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_d)=\bigl({}^gF^n(\mathbf{B}_2),\dots,{}^gF^n(\mathbf{B}_d),{}^gF^{n+1}(\mathbf{B}_1)\bigr).$$

Une telle suite correspond à la donnée de $\mathbf{B}_1$ tel que $\mathbf{B}_1={}^{g^d}F^{dn+1}(\mathbf{B}_1)$ et ${}^gF^n(\mathbf{B}_1)\xrightarrow{w}\mathbf{B}_1$. Soit k tel que $g^d=k^{-1}F^{nd+1}(k)$ et posons $\mathbf{B}'={}^k\mathbf{B}_1$ et $g'=kgF^n(k)^{-1}$. Alors les conditions deviennent $\mathbf{B}'\in\mathcal{B}^{F^{nd+1}}$ et ${}^{g'}F^n(\mathbf{B}')\xrightarrow{w}\mathbf{B}'$. On a

$$\operatorname{Trace}\bigl(g'T_wF^n\mid\operatorname{Ind}_{\mathbf{B}^{F^{nd+1}}}^{\mathbf{G}^{F^{nd+1}}}\operatorname{Id}\bigr)=\bigl|\bigl\{\mathbf{B}'\in\mathcal{B}^{F^{nd+1}}\mid{}^{g'}F^n(\mathbf{B}')\xrightarrow{w}\mathbf{B}'\bigr\}.$$

Pour conclure, il faut donc montrer que si $n=0$ alors $(g')=\operatorname{Sh}^d((g))$ et sinon $(g')=\operatorname{Sh}_{F^n/F^{nd+1}}\circ\operatorname{Sh}_{F/F^n}(g)$.

Commençons par le cas $n=0$. On a une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison rationnelles des conjugués géométriques de g vers $H^1(F,C_{\mathbf{G}}(g))$, donnée par ${}^kg\mapsto k^{-1}F(k)$. Ici, la classe de g' est paramétrée par l'image de g^d dans $H^1(F,C_{\mathbf{G}}(g))$. Or, d'après [10, IV, proposition 1.1], telle est l'image de la classe de g par Sh^d.

Supposons maintenant $n\geqslant 1$. Soit alors $h\in\mathbf{G}$ tel que $g=hF^n(h)^{-1}$. Comme $g\in\mathbf{G}^F$, on a $g^d=gF^n(g)\cdots F^{(d-1)n}(g)=hF^{dn}(h)^{-1}$ et $g'=(kh)F^n(kh)^{-1}$. Donc, en utilisant que $\operatorname{Sh}_{F/F^n}(g)\subset\mathbf{G}^{F^n}$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh}_{F/F^n}(g)&=F^{nd}\bigl(\operatorname{Sh}_{F/F^n}(g)\bigr)=F^{nd}\bigl(h^{-1}F(h)\bigr)\\&=\bigl(h^{-1}g^dF^{nd+1}(h)\bigr)=\bigl((kh)^{-1}F^{nd+1}(kh)\bigr)\end{aligned}$$

et $\operatorname{Sh}_{F^n/F^{nd+1}}$ de cette classe vaut bien (g'). □

La proposition suivante nous permettra de démontrer que certains opérateurs $D_{\mathbf{y}}$ ont une trace nulle sur la cohomologie de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ (quand nous saurons qu'ils vérifient la formule des traces).

Proposition 5.2.3. *Soient* $\mathbf{w}\in B^+$ *et* $\mathbf{y}\in\operatorname{End}_{\mathcal{D}^+}(\mathbf{w})$ *tel que* $\mathbf{y}\preccurlyeq\boldsymbol{\pi}$ *et que l'image* $\beta(\mathbf{y})\in W$ *soit non triviale. Alors l'endomorphisme* $D_{\mathbf{y}}$ *de* $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ *n'a pas de points fixes.*

Preuve. D'après les propriétés des mots dans B^+ (*cf.* par exemple [5, 3.20]), le fait que $\mathbf{y}$ divise $\boldsymbol{\pi}$ est équivalent à l'existence de $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in\mathbf{W}$ tels que $\mathbf{y}=\mathbf{x}\mathbf{x}'$. Soit $\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_n$ une décomposition de $\mathbf{y}$ comme dans la remarque 5.1.1(i) où nous supposons $\mathbf{y}_i\in\mathbf{W}$. Soit $a\in\mathbf{X}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{B}=p'(a)$ (voir proposition 2.2.18). Alors, si on pose $\mathbf{B}_1=p'(D_{\mathbf{y}_1}(a))$, $\mathbf{B}_2=p'(D_{\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2}(a))$, etc., un point fixe a de $D_{\mathbf{y}}$ donne lieu à une suite $\mathbf{B}\xrightarrow{y_1}\mathbf{B}_1\xrightarrow{y_2}\mathbf{B}_2\cdots\xrightarrow{y_n}\mathbf{B}$, i.e., à un élément $b\in\mathcal{O}(\mathbf{y})$ tel que $p'(b)=p''(b)$.

Montrons que ceci est impossible. Un tel élément b correspond, par l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}(\mathbf{x}\mathbf{x}')\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(x,x')$, à une suite $\mathbf{B}\xrightarrow{x}\mathbf{B}'\xrightarrow{x'}\mathbf{B}$. Mais ceci n'est possible que si $x'=x^{-1}$, ce que nous avons exclu en supposant que $\beta(\mathbf{y})\neq 1$. □

5.2.4. Nous rappelons des constructions de [5, §5.A et 6.D].

Proposition 5.2.5. *Soit d un entier strictement positif.*

(i) *Soit $\mathcal{D}^+_{F^d}$ la catégorie $\mathcal{D}^+$ relative au Frobenius F^d. On a*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{D}^+_{F^d}}(\boldsymbol{\pi}) = C^+_B\big(F^d\big).$$

On en déduit une action à droite, que nous noterons $\mathbf{b} \mapsto D^{\boldsymbol{\pi}F^d}_{\mathbf{b}}$, du monoïde $C^+_B(F^d)$ sur $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}, F^d)$.

(ii) *Soit $\mathbf{w} \in B^+$ tel que $(\mathbf{w}F)^d = \boldsymbol{\pi}F^d$. L'application*

$$\mathcal{O}(\mathbf{w}) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbf{w}) \times \mathcal{O}\big(F(\mathbf{w})\big) \times \cdots \times \mathcal{O}\big(F^{d-1}(\mathbf{w})\big), \quad x \mapsto \big(x, F(x), \ldots, F^{d-1}(x)\big)$$

se restreint en un plongement de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}, F^d)$. Pour tout $\mathbf{b} \in C^+_B(\mathbf{w}F)$, l'opérateur $D^{\boldsymbol{\pi}F^d}_{\mathbf{b}}$ défini en (i) *stabilise $\mathbf{X}(\mathbf{w})$, et nous noterons $D_{\mathbf{b}}$ sa restriction à $\mathbf{X}(\mathbf{w})$. Ceci fournit une action à droite de $C^+_B(\mathbf{w}F)$ sur $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ et une action à droite de $C_B(\mathbf{w}F)$ sur $H^*_c(\mathbf{X}(\mathbf{w}))$.*

Preuve. Tout élément de $\mathbf{W}$ divisant $\boldsymbol{\pi}$, on a

$$C_{\mathbf{W}}\big(\boldsymbol{\pi}F^d\big) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{D}^+_{F^d}}(\boldsymbol{\pi}) \subset C_{B^+}\big(\boldsymbol{\pi}F^d\big),$$

d'où (i) car $C_{\mathbf{W}}(\boldsymbol{\pi}F^d) = C_{\mathbf{W}}(F^d)$ engendre $C^+_B(F^d)$ comme monoïde (*cf.* proposition 2.1.6).

L'image par i de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ est clairement dans

$$\mathcal{O}(\mathbf{w}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}\big(F(\mathbf{w})\big) \times_{\mathcal{B}} \cdots \times_{\mathcal{B}} \mathcal{O}\big(F^{d-1}(\mathbf{w})\big) = \mathcal{O}\big(\mathbf{w}F(\mathbf{w}) \cdots F^{d-1}(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\pi}\big)$$

d'où l'assertion sur i dans (ii). Enfin, le fait que $D^{\boldsymbol{\pi}F^d}_{\mathbf{b}}$ stabilise $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ quand $\mathbf{b} \in C^+_B(\mathbf{w}F)$ n'est pas écrit dans [5], mais on peut le voir comme suit : $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ est caractérisé dans $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}, F^d)$ comme l'ensemble des solutions de l'équation $D_{\mathbf{w}}x = F(x)$. Cette équation est clairement préservée par l'action d'un tel $D^{\boldsymbol{\pi}F^d}_{\mathbf{b}}$. □

Il est clair que dans le cas où $\mathbf{b}$ divise $\mathbf{w}$, l'opérateur défini en (ii) ci-dessus est bien le même que celui de la définition 3.1.5, donc quand $\mathbf{b} \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}^+}(\mathbf{w})$ c'est le même qu'en §5.2.1.

5.2.6. Nous allons maintenant introduire une technique qui nous permettra d'obtenir des résultats pour les opérateurs $D_{\mathbf{x}}$ induits par les éléments $\mathbf{x} \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}_I}(\mathbf{w})$ en nous ramenant à un sous-groupe de Levi de type I.

Définition 5.2.7. Soit I une partie de S. Nous notons $\mathcal{D}^+_I$ la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{D}^+$ avec même ensemble d'objets et telle que

$$\big\{\mathbf{y} \in B^+_I \mid \mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{w},\ \mathbf{y}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{y}) = \mathbf{w}'\big\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+_I}(\mathbf{w}, \mathbf{w}').$$

De même, nous notons $\mathcal{D}_I$ la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{D}^+_I$ et dont toutes les flèches sont inversibles.

Proposition 5.2.8. *On se place dans le cadre des notations et des hypothèses de la définition* 2.3.12 *et de la proposition* 2.3.13. *Soit* $\mathbf{x} \in B_I^+$ *tel que* $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. *Alors, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_k) \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y}, \dot{z}F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times D_{\mathbf{x}}"'] & \mathbf{X}(\mathbf{w}) \arrow[d, "D_{\mathbf{x}}"] \\
\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_k) \times_{\mathbf{L}_I^{\dot{z}F}} \mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}), \dot{z}F) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{X}(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{x})).
\end{tikzcd}$$

Preuve. Notons tout d'abord que l'opérateur $D_{\mathbf{x}}$ est bien défini sur $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y}, \dot{z}F)$ car $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$. Notons aussi que l'on a $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{z}F(\mathbf{x}) = \alpha_I(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{x}))$ et $\mathbf{z} = \omega_I(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{x}))$ car $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{w}F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{\mathbf{z}}F(\mathbf{x}))\mathbf{z}$.

Puisque $D_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2} = D_{\mathbf{x}_2} \circ D_{\mathbf{x}_1}$ si $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \preccurlyeq \mathbf{w}$, on peut supposer $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$. Quitte à changer de décomposition de $\mathbf{y}$, on peut en plus supposer $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1$. L'opérateur $\mathrm{Id} \times D_{\mathbf{x}}$ envoie

$$\big((g_1\mathbf{U}_{I_1}, \ldots, g_k\mathbf{U}_{I_k}), (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_h)\big)$$

sur

$$\big((g_1\mathbf{U}_{I_1}, \ldots, g_k\mathbf{U}_{I_k}), \big(\mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_h, {}^{z}F(\mathbf{B}_1)\big)\big).$$

Via les isomorphismes de la proposition 2.3.13, cela correspond à envoyer

$$\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I), {}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I), \ldots, {}^{g_1}(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I), {}^{g_1}\big({}^{z}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_1}\big), {}^{g_2}\big({}^{z_2\cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_2}\big), \\ \ldots, {}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_k}\big)\big)$$

sur l'élément A suivant de la variété $\mathbf{X}(y_2, \ldots, y_h, {}^{z}F(y_1), z_1, \ldots, z_k)$:

$$\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I), \ldots, {}^{g_1}(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I), {}^{g_1}\big({}^{z}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_I\big), {}^{g_1}\big({}^{z}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_1}\big), {}^{g_2}\big({}^{z_2\cdots z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_2}\big), \\ \ldots, {}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_k}\big)\big).$$

Rappelons que ${}^{\mathbf{z}_i\cdots\mathbf{z}_k}F(\mathbf{y}_1)\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_i{}^{\mathbf{z}_{i+1}\cdots\mathbf{z}_k}F(\mathbf{y}_1) \in \mathbf{W}$. L'isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}\big({}^{z_i\cdots z_k}F(y_1), z_i\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\big(z_i, {}^{z_{i+1}\cdots z_k}F(y_1)\big)$$

envoie

$$\big({}^{g_i}\big({}^{z_i\cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_i}\big), {}^{g_i}\big({}^{z_i\cdots z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_i}\big), {}^{g_{i+1}}\big({}^{z_{i+1}\cdots z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_{i+1}}\big)\big)$$

sur

$$\big({}^{g_i}\big({}^{z_i\cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_i}\big), {}^{g_{i+1}}\big({}^{z_{i+1}\cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_{i+1}}\big), {}^{g_{i+1}}\big({}^{z_{i+1}\cdots z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_{i+1}}\big)\big).$$

L'isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}\big({}^{z_k}F(y_1), z_k\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\big(z_k, F(y_1)\big)$$

envoie

$$\big({}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_k}\big), {}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_{I_k}\big), F\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I)\big)\big)$$

sur

$$\big({}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_k}\big), F\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I)\big), F\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I)\big)\big).$$

Par composition des isomorphismes canoniques, on en déduit que A s'envoie sur l'élément

$$\begin{aligned}\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_2\mathbf{U}_I), \ldots, {}^{g_1}(\mathbf{B}_h\mathbf{U}_I), {}^{g_1}\big({}^{z}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_1}\big), {}^{g_2}\big({}^{z_2\cdots z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_1}\big),&\\ \ldots, {}^{g_k}\big({}^{z_k}F(\mathbf{B}_1)\mathbf{U}_{I_k}\big), F\big({}^{g_1}(\mathbf{B}_1\mathbf{U}_I)\big)\big)&\end{aligned}$$

de la variété $\mathbf{X}(y_2, \ldots, y_h, z_1, \ldots, z_k, F(y_1))$: c'est bien l'image par $D_{\mathbf{x}}$ de la suite initiale, d'où le résultat. $\square$

La proposition précédente a pour conséquence :

Corollaire 5.2.9. *Soit* $\mathbf{x} \in \operatorname{End}_{\mathcal{D}_I}(\mathbf{w})$. *Alors,* $D_{\mathbf{x}} \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_{\mathbf{w}})$ *correspond par l'isomorphisme de la proposition* 2.3.13 *à* $\operatorname{Id} \times D_{\mathbf{x}}$ *(où* $D_{\mathbf{x}}$ *est vu dans* $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{y}, \dot{z}F))$*).*

Soit $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{U}$) un complément de Levi (respectivement le radical unipotent) d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et soit $n \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{L}$ est nF-stable. Soit $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{U},n} : \mathcal{R}(\mathbf{L}^{nF}) \to \mathcal{R}(\mathbf{G}^F)$ le morphisme donné par

$$[V] \mapsto \sum_i (-1)^i \big[H^i_c\big(\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{L},\mathbf{U}}(n), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^{nF}} V\big].$$

D'après [4, Theorem 1.33] la restriction aux caractères unipotents de $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},\mathbf{U},n}$ ne dépend pas de $\mathbf{U}$. Nous noterons alors $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L},n}$ cette restriction.

Théorème 5.2.10. *Soient* $\mathbf{w} \in B^+$, $I \subset S$ *tels que* ${}^{\mathbf{w}}F(B_I) = B_I$ *et soit* $\dot{z}$ *un représentant dans* $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ *de* $\beta(\omega_I(\mathbf{w}))$. *Soit* $\mathbf{x} \in \operatorname{End}_{\mathcal{D}^+_I}(\mathbf{w})$. *Alors, la fonction centrale sur* $\mathbf{G}^F$ *donnée par*

$$g \mapsto \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}\big(gD_{\mathbf{x}} \mid H^i_c\big(\mathbf{X}(\mathbf{w}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)\big)$$

est l'image par $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I,\dot{z}}$ *de la fonction*

$$l \mapsto \sum_i (-1)^i \operatorname{Trace}\big(lD_{\mathbf{x}} \mid H^i_c\big(\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}\big(\alpha_I(\mathbf{w}), \dot{z}F\big), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)\big).$$

Preuve. Le théorème résulte des propositions 2.3.13 et 5.2.8, compte tenu du fait qu'on peut donc, si la forme normale de $\omega_I(\mathbf{w})$ est $\mathbf{z}_1\cdots\mathbf{z}_k$, calculer $R^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{L}_I,\dot z}$ en utilisant la variété $\tilde{\mathbf{X}}_{(I)}(\dot z_1,\dots,\dot z_k)$, où les $\dot z_i$ sont des représentants dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ des z_i tels que $\dot z=\dot z_1\cdots\dot z_k$. □

5.3. Cas $\mathbf{w}=\boldsymbol{\pi}^n$

5.3.1. Soit (W,S) un groupe de Coxeter cristallographique muni d'un automorphisme σ. Soit $\mathcal{H}_x(W,\sigma)$ le quotient de l'algèbre du groupe $C_{B^+}(\sigma)$ sur l'anneau $\mathbb{Z}[x^{1/2},x^{-1/2}]$ par l'idéal engendré par les $(\mathbf{w}_0^I+1)(\mathbf{w}_0^I-x^{l(w_0^I)})$ pour $I\in S/\sigma$. On note T_I l'image de $\mathbf{w}_0^I$ dans $\mathcal{H}_x(W,\sigma)$. Cette algèbre admet pour base $\{T_w\}_{w\in W^\sigma}$ et se spécialise en l'algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell W^\sigma$ par $x^{1/2}\mapsto 1$ (rappelons que $C_B(\sigma)$ est un monoïde de tresses, *cf.* proposition 2.1.6). Pour $\chi\in\operatorname{Irr}(W^\sigma)$, nous notons $\chi_x\in\operatorname{Irr}(\mathcal{H}_x(W,\sigma))$ le caractère qui se spécialise en χ par $x^{1/2}\mapsto 1$.

On suppose maintenant à nouveau que W est le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$. Soit $\mathcal{H}_q(W,F)=\mathcal{H}_x(W,F)\otimes_f\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, où f est la spécialisation $x^{1/2}\mapsto q^{1/2}$.

On prend comme convention que les endomorphismes d'un espace vectoriel agissent à droite (donc, si M est un (A,B)-bimodule, alors on a un morphisme d'algèbres $B\to\operatorname{End}_A(M)$).

Proposition 5.3.2. *On a* $\mathcal{H}_q(W,F)\simeq\operatorname{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F}(\operatorname{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F}\mathrm{Id})$.

Preuve. Cette propriété est bien connue, mais faute de référence commode nous en rappelons une démonstration. On sait que

$$\operatorname{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F}\bigl(\operatorname{Ind}_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{G}^F}\mathrm{Id}\bigr)$$

est une algèbre de Hecke du groupe W^F, où les valeurs propres du générateur associé à w_0^I sont -1 et $|(\mathbf{B}/(\mathbf{B}\cap{}^{w_0^I}\mathbf{B}))^F|$ (*cf.* [3, IV, §1, exercice 24]). Pour calculer cette dernière valeur propre on utilise le fait que

$$\bigl(\mathbf{B}/\bigl(\mathbf{B}\cap{}^{w_0^I}\mathbf{B}\bigr)\bigr)^F\simeq\bigl(\mathbf{U}\cap{}^{w_0^I}\mathbf{U}^-\bigr)^F,$$

où $\mathbf{U}^-$ est le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé à $\mathbf{B}$. Comme le nombre de points rationnels sur $\mathbb{F}_q$ d'un espace affine est indépendant de la $\mathbb{F}_q$-structure considérée (voir par exemple [11, Example 3.7]), le nombre de points rationnels vaut

$$q^{\dim(\mathbf{U}\cap{}^{w_0^I}\mathbf{U}^-)}=q^{l(w_0^I)},$$

ce qui est bien la valeur annoncée. □

5.3.3. Dans le cas où l'action de F sur W est triviale et $n=1$, le théorème suivant est [5, théorème 2.7].

Théorème 5.3.4. *Pour tout* $n\geqslant 1$, *l'action de* $C_{B^+}(F)$ *sur* $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}^n)$ (*cf. proposition* 5.2.5) *induit un morphisme*

$$\mathcal{H}_q(W,F)\to\operatorname{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F}\Bigl(\bigoplus_i H_c^i\bigl(\mathbf{X}\bigl(\boldsymbol{\pi}^n\bigr)\bigr)\Bigr),\quad T_I\mapsto D_{\mathbf{w}_0^I}.$$

Preuve. Il suffit de voir que les $D_{\mathbf{w}_0^I}$ vérifient les relations quadratiques de $\mathcal{H}_q(W,F)$. Nous appliquons la proposition 5.2.8 avec I une partie F-stable de S (les hypothèses sont vérifiées pour tout $\mathbf{x}\in B_I^+$ tel que $\mathbf{x}\preccurlyeq\boldsymbol{\pi}^n$). Si $\mathbf{x}\in C_{B_I^+}(F)$ et $\mathbf{x}\preccurlyeq\boldsymbol{\pi}^n$, alors $D_{\mathbf{x}}$ est un endomorphisme de $\mathbf{X}(\boldsymbol{\pi}^n)$ qui correspond d'après la proposition 5.2.8 à l'endomorphisme $D_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\boldsymbol{\pi}_I^n)$, où $\boldsymbol{\pi}_I=(\mathbf{w}_0^I)^2$ est l'élément analogue à $\boldsymbol{\pi}$ pour $\mathbf{L}_I$ (car on a $\alpha_I(\boldsymbol{\pi}^n)=\boldsymbol{\pi}_I^n$, et $\dot{z}=1$). Via la formule de Künneth, il suffit donc de démontrer que l'endomorphisme $D_{\mathbf{w}_0^I}$ de $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\boldsymbol{\pi}_I^n)$ vérifie la relation quadratique

$$(D_{\mathbf{w}_0^I}+1)\big(D_{\mathbf{w}_0^I}-q^{l(w_0^I)}\big)=0$$

quand I est une orbite de F dans S.

Soit I une orbite de F sur S. Le groupe adjoint $(\mathbf{L}_I)_{\mathrm{ad}}$ de $\mathbf{L}_I$ est une descente des scalaires, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{H}^k$ où $\mathbf{H}$ est un groupe réductif quasi-simple, et $(\mathbf{L}_I)_{\mathrm{ad}}^F\simeq\mathbf{H}^{F^k}$. Les représentations unipotentes se factorisant par le groupe adjoint, la cohomologie de $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\boldsymbol{\pi}_I^n)$ est isomorphe à celle de $\mathbf{X}'=\mathbf{X}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^{kn},F^k)$ (où $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}$ est l'élément analogue à $\boldsymbol{\pi}$ pour $\mathbf{H}$) sur laquelle $D_{\mathbf{w}_0^I}$ induit l'action de $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$ (proposition 2.3.3).

Le groupe $\mathbf{H}^{F^k}$ est d'un des types $A_1(q^k)$, ${}^2A_2(q^k)$, ${}^2B_2(q^k)$ ou ${}^2G_2(q^k)$. D'après les théorèmes 4.2.9, 4.3.5 et 4.4.4, seules les représentations Id et St apparaissent dans la cohomologie de $\mathbf{X}'$. D'après les propositions 3.3.14 et 3.3.15, la variété $\mathbf{X}'$ n'a que deux groupes de cohomologie non nuls : en degrés $2knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})$ et $knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})$. Sur $H_c^{2knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$, le groupe $\mathbf{H}^{F^k}$ agit par Id et la valeur propre de F^k est $q^{k^2nl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}$. Sur $H_c^{knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$, il agit par St et la valeur propre de F^k est 1. Puisque les $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F)$-modules $H_c^{2knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$ et $H_c^{knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$ sont irréductibles, l'action de $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$ sur chacun d'eux est donnée par un scalaire.

Comme

$$D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}^{2kn}=D_{\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^{kn}}=F^k$$

sur $\mathbf{X}'$, on en déduit que $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$ agit sur $H_c^{knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$ (un espace de dimension $q^{kl(w_0^{\mathbf{H}})}$) par α, une racine $2kn$-ème de l'unité. En outre, $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$ agit sur $H_c^{2knl(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}})}(\mathbf{X}')$ (un espace de dimension 1) par $q^{kl(w_0^{\mathbf{H}})}\beta$, où β est une racine $2kn$-ème de l'unité.

Les propositions 5.2.2(i) et 5.2.3 donnent

$$\sum_i(-1)^i\operatorname{Trace}\big(D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}\mid H_c^i\big(\mathbf{X}',\overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)\big)=0,$$

donc $\alpha=-\beta$. Soit g est un élément unipotent non trivial de $\mathbf{H}^{F^k}$. Alors, $\operatorname{Trace}(g,\mathrm{St})=0$ et $\operatorname{Trace}(g,\mathrm{Id})=1$. D'après la proposition 5.2.2(i), on a

$$\big|(\mathbf{X}')^{gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}}\big|=\sum_i(-1)^i\operatorname{Trace}\big(gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}\mid H_c^i\big(\mathbf{X}',\overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)\big)=\beta q^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}})},$$

donc $\beta=1$ puisque $|(\mathbf{X}')^{gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}}|$ est un entier positif. On a donc bien la relation quadratique annoncée. $\square$

5.4. Cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n$

Notons $\mathcal{H}_{-q}(W, w_0F)$ la spécialisation de $\mathcal{H}_x(W, w_0F)$ via $x^{1/2} \mapsto i\sqrt{q}$. Dans cette partie, nous construisons une représentation de l'algèbre $\mathcal{H}_{-q}(W, w_0F)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{G}}^F(\bigoplus_i H_c^i(\mathbf{X}(w_0)))$.

Soit $I \in S/w_0F$; comme $(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^nF)^2 = \boldsymbol{\pi}^{2n+1}F^2$ et $\mathbf{w}_0^I \in C_{B^+}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^nF)$, la proposition 5.2.5(ii) fournit un endomorphisme $D_{\mathbf{w}_0^I}$ de $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnant naissance à une action de $C_{B^+}(\mathbf{w}_0F)$ sur $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n)$.

Les deux énoncés suivants généralisent [24, 3.10(b)] (cas où w_0F agit trivialement sur W).

Théorème 5.4.1. *Pour tout $n \geqslant 0$, l'action de $C_{B^+}(\mathbf{w}_0F)$ sur $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n)$ induit un morphisme d'algèbres*

$$\mathcal{H}_{-q}(W, w_0F) \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F}\biggl(\bigoplus_i H_c^i\bigl(\mathbf{X}\bigl(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n\bigr)\bigr)\biggr), \quad T_I \mapsto (-1)^{l(w_0^I)}D_{\mathbf{w}_0^I}.$$

Preuve. On procède comme dans la preuve du théorème 5.3.4. Il s'agit de prouver que pour tout I, l'action de $(-1)^{l(w_0^I)}D_{\mathbf{w}_0^I}$ sur la cohomologie de $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n)$ vérifie la même relation quadratique que T_I. Grâce au corollaire 5.2.9, il suffit de montrer que $(-1)^{l(w_0^I)}D_{\mathbf{w}_0^I}$ vérifie la bonne relation quadratique sur la variété $\mathbf{X}_{\mathbf{L}_I}(\mathbf{w}_0^I\boldsymbol{\pi}_I^n, w_0^Iw_0F)$.

Soit $\mathbf{H}$ un groupe réductif quasi-simple tel que le groupe adjoint de $\mathbf{L}_I$ soit isomorphe à $\mathbf{H}^k$ et soit F' l'endomorphisme de Frobenius sur $\mathbf{H}$ correspondant par cet isomorphisme à $(w_0^Iw_0F)^k$. On se ramène à l'étude de l'opérateur $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$, induit par $D_{\mathbf{w}_0^I}$, sur la variété $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_{\mathbf{H}}((\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)^k, F')$. Le groupe $\mathbf{H}^{F'}$ est d'un des types $A_1(q^k)$, ${}^2B_2(q^k)$, ${}^2G_2(q^k)$, ${}^2A_2(q^k)$ (si k est pair) ou $A_2(q^k)$ (si k est impair). D'après les théorèmes 4.3.5, 4.4.4, 4.2.9 et 4.2.4, seules les représentations Id et St apparaissent dans la cohomologie de la variété $\mathbf{X}'$. D'après les propositions 3.3.14 et 3.3.15, la variété $\mathbf{X}'$ n'a que deux groupes de cohomologie non nuls : en degrés $kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)$ et $2kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)$. Le groupe $\mathbf{H}^{F'}$ agit sur $H_c^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)}(\mathbf{X}')$ par St la valeur propre de F' est 1. Sur $H_c^{2kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)}(\mathbf{X}')$, le groupe $\mathbf{H}^{F'}$ agit par Id et F' a comme valeur propre $q^{k^2l(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{H}}^n)}$.

L'opérateur $D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}$ est une racine $(2n+1)k$-ème de F' et commute à $\mathbf{H}^{F'}$. Par conséquent, il agit sur $H_c^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}^n)}(\mathbf{X}')$ (un espace de dimension $q^{kl(w_0^{\mathbf{H}})}$) par α et sur $H_c^{2kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\pi}^n)}(\mathbf{X}')$ (un espace de dimension 1) par $\beta q^{kl(w_0^{\mathbf{H}})}$, où α et β sont des racines $(2n+1)k$-èmes de 1.

Les propositions 5.2.2(i) et 5.2.3 donnent $\sum_i(-1)^i\,\mathrm{Trace}(D_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}} \mid H_c^i(\mathbf{X}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = 0$, donc $\alpha = (-1)^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}})-1}\beta$. Soit g est un élément unipotent non trivial de $\mathbf{H}^{F'}$. D'après la proposition 5.2.2(i), on a

$$\begin{aligned}\bigl|(\mathbf{X}')^{gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}}\bigr| &= \sum_i(-1)^i\,\mathrm{Trace}\bigl(gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}} \mid H_c^i\bigl(\mathbf{X}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)\bigr)\\ &= -\beta\,\mathrm{St}(g) + \beta q^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}})} = \beta q^{kl(\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}})},\end{aligned}$$

donc $\beta = 1$ puisque $|(\mathbf{X}')^{gD_{\mathbf{w}_0^{\mathbf{H}}}}|$ est un entier positif. On a donc bien la relation quadratique annoncée. □

Remarque 5.4.2. On pourra préférer considérer le morphisme $T_I \mapsto D_{\mathbf{w}_0^I}$ où l'algèbre de Hecke de $W^{w_0 F}$ a pour paramètres $\{((-1)^{1+l(w_0^I)}, q^{l(w_0^I)})\}_{I \in S/w_0 F}$.

L'énoncé précédent a la conséquence suivante.

Corollaire 5.4.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de F dans la cohomologie de $\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n)$ sont soit de la forme $\pm q^m$, soit de la forme $\pm i q^{m+1/2}$ où $m \in \mathbb{N}$. On est toujours dans le premier cas si w_0 est central dans W et $\mathbf{G}$ n'a pas de composante de type E_7 ou E_8.*

Preuve. L'action de F sur $\bigoplus_i H_c^i(\mathbf{X}(\mathbf{w}_0\boldsymbol{\pi}^n))$ est égale à l'action de l'élément $(-1)^{l(w_0)} T_{w_0}^{2n+1}$ dans la représentation de $\mathcal{H}_{-q}(W, w_0 F)$ sur cette cohomologie. Pour $\chi \in \operatorname{Irr}(W^{w_0 F})$, nous notons χ_{-q} le caractère correspondant de $\mathcal{H}_{-q}(W, w_0 F)$ et $d_{\chi_{-q}}$ le degré générique de χ_{-q}. Enfin nous noterons A_χ (respectivement a_χ) le degré (respectivement la valuation) de $d_{\chi_{-q}}$. La valeur propre de $T_{w_0}^2$ dans la représentation de caractère χ_{-q} est $(-q)^{2N-a_\chi-A_\chi}$ [5, corollaire 4.20] et les valeurs propres de T_{w_0} sont des racines carrées de cette valeur (ici, N est le nombre de racines de W). Ceci démontre l'énoncé sauf la dernière phrase. Si w_0 est central alors pour tout χ irréductible on a $\chi(w_0) \neq 0$ et si $\mathbf{G}$ n'a pas de composante de type E_7 ou E_8 alors par [5, corollaire 4.19] on en déduit que $a_\chi + A_\chi$ est pair (en effet tout caractère est alors « génériquement rationnel » suivant la terminologie de *loc. cit.*). $\square$

Remerciements

Nous remercions Frédéric Déglise, Luc Illusie, Bruno Kahn et Gérard Laumon pour des discussions utiles à ce travail.

Références

[1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux Pervers, Astérisque 100 (1982).
[2] A. Borel, Linear Algebraic Groups, Grad. Texts in Math., vol. 126, Springer, 1991.
[3] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Masson, 1981.
[4] M. Broué, G. Malle, J. Michel, Generic blocks of finite reductive groups, Astérisque 212 (1993) 7–92.
[5] M. Broué, J. Michel, Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne–Lusztig associées, in : Progr. Math., vol. 141, 1997, pp. 73–139.
[6] C. Chevalley, Fondements de la géométrie projective, Paris, 1958.
[7] P. Deligne, La conjecture de Weil II, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 52 (1979) 138–252.
[8] P. Deligne, Action du groupe des tresses sur une catégorie, Invent. Math. 128 (1997) 159–175.
[9] P. Deligne, G. Lusztig, Characters of finite reductive groups, Ann. of Math. 103 (1976) 103–161.
[10] F. Digne, J. Michel, Fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne–Lusztig et descente de Shintani, Mém. Soc. Math. Fr. 20 (1985).
[11] F. Digne, J. Michel, Representations of Finite Groups of Lie Type, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 21, Cambridge Univ. Press, 1991.
[12] F. Digne, J. Michel, Endomorphisms of Deligne–Lusztig varieties, Nagoya J. Math. 183 (2006).
[13] K. Fujiwara, Rigid geometry, Lefschetz–Verdier trace formula and Deligne's conjecture, Invent. Math. 127 (1997) 489–533.
[14] M. Geck, G. Malle, Fourier transforms and Frobenius eigenvalues for finite Coxeter groups, J. Algebra 260 (2003) 162–193.
[15] M. Geck, G. Pfeiffer, On the irreducible characters of Hecke algebras, Adv. Math. 102 (1993) 79–94.
[16] M. Geck, G. Pfeiffer, Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras, Oxford Univ. Press, 2000.

[17] M. Geck, S. Kim, G. Pfeiffer, Minimal length elements in twisted conjugacy classes of finite Coxeter groups, J. Algebra 229 (2000) 570–600.
[18] T. Geisser, Motivic cohomology, K-theory and topological cyclic homology, in: Handbook of K-theory, vol. 1, Springer, 2005, pp. 193–234.
[19] B. Haastert, Die Quasiaffinität der Deligne–Lusztig Varietäten, J. Algebra 102-1 (1986) 186–193.
[20] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979) 165–184.
[21] M. Levine, Mixed Motives, Amer. Math. Soc., 1998.
[22] G. Lusztig, Finiteness of the number of unipotent classes, Invent. Math. 34 (1976) 201–213.
[23] G. Lusztig, Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius, Invent. Math. 38 (1976) 101–159.
[24] G. Lusztig, Representations of Finite Chevalley Groups, CBMS, vol. 39, 1978.
[25] G. Lusztig, Unipotent characters of the symplectic and odd orthogonal groups over a finite field, Invent. Math. 64 (1981) 263–296.
[26] G. Lusztig, Characters of Reductive Groups over Finite Fields, Ann. of Math. Stud., vol. 107, Princeton Univ. Press, 1984.
[27] G. Lusztig, Homology bases arising from reductive groups over a finite field, in: Algebraic Groups and Their Representations, Kluwer, 1998, pp. 53–72.
[28] J. Michel, A note on words in braid monoids, J. Algebra 215 (1999) 366–377.
[29] J.S. Milne, Étale Cohomology, Princeton Math. Ser., vol. 33, Princeton Univ. Press, 1980.
[30] S. Ramanan, A. Ramanathan, Projective normality of flag varieties and Schubert varieties, Invent. Math. 79 (1985) 217–224.