Séminaire BOURBAKI Mars 2005
57ème année, 2004-2005, n$^{\mathrm{o}}$ 947

CATÉGORIES DÉRIVÉES ET GÉOMÉTRIE BIRATIONNELLE [d'après Bondal, Orlov, Bridgeland, Kawamata...]

par **Raphaël ROUQUIER**

1. INTRODUCTION

L'objet principal de cet exposé est la catégorie dérivée $D^b(X)$ des faisceaux cohérents sur une variété X. La catégorie dérivée organise l'information homologique (groupes d'extensions entre faisceaux cohérents) et numérique (K-théorie). Nous allons étudier son comportement au cours des opérations de « chirurgie algébrique » (« flips » et « flops »).

La catégorie dérivée d'un espace projectif se décrit à partir d'une algèbre de dimension finie (Beilinson, 1978) et ceci a placé dans un cadre approprié les descriptions de fibrés vectoriels en terme d'algèbre linéaire. À la suite de ce résultat, des descriptions analogues (décomposition semi-orthogonale de la catégorie dérivée) ont été recherchées pour d'autres variétés. De telles décompositions devraient apparaître en présence d'un « flip », étape cruciale du programme de Mori de modèles minimaux (MMP) pour la classification des variétés projectives lisses, et cela a amené en particulier la question de l'invariance de la catégorie dérivée par « flop » (Bondal-Orlov, 1995). D'un autre côté, la conjecture homologique de symétrie miroir (Kontsevich, 1994) a elle aussi posé le problème de l'invariance birationnelle de la catégorie dérivée, pour des variétés de Calabi-Yau. Indépendamment, la construction d'une équivalence dérivée entre une variété abélienne et sa duale (Mukai, 1981) a montré la relation entre la réalisation d'une variété X comme un espace de modules d'objets sur Y et la construction d'une équivalence (ou d'un foncteur pleinement fidèle) entre la catégorie dérivée de X et celle de Y.

Commençons par poser des problèmes sur les catégories dérivées de variétés, en suivant trois points importants du MMP.

On note K_X le diviseur canonique d'une variété lisse X et on considère l'équivalence linéaire entre diviseurs. On se donne un diagramme où f et g sont des morphismes birationnels entre variétés projectives lisses complexes

(1)
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

On a une première conjecture sur les flops généralisés (cf [8, Conjecture 4.4] et [29, Conjecture 1.2]):

Conjecture 1.1 (Bondal-Orlov). — *Si $f^*K_X \sim g^*K_Y$, alors $D^b(X) \simeq D^b(Y)$.*

On sait que dans cette situation les nombres de Hodge coïncident (cf remarque 3.9). La conjecture a une réponse positive en dimension 3 (corollaire 4.11), pour des variétés symplectiques de dimension 4 (corollaire 4.7) et dans le cadre torique (théorème 4.15). Pour des variétés de Calabi-Yau (ω trivial), on s'attend donc à ce que birationalité et équivalence dérivée coïncident, comme le prédit la conjecture de Kontsevich de symétrie miroir [35]. La « réciproque » de la conjecture 1.1 n'est pas vraie (remarque 3.15).

On a une conjecture sur les flips généralisés [8, Conjecture 4.4]:

Conjecture 1.2 (Bondal-Orlov). — *Si $f^*K_X - g^*K_Y$ est équivalent à un diviseur effectif, alors il existe un foncteur pleinement fidèle $D^b(Y) \to D^b(X)$.*

La minimisation d'une variété dans le MMP devrait alors s'interpréter comme une minimisation de la catégorie dérivée, un modèle minimal pour une variété X devant être construit comme un espace de module d'objets de la catégorie dérivée de X. Dans la conjecture 1.2, il serait aussi souhaitable de savoir décrire l'orthogonal de l'image de $D^b(Y)$ dans $D^b(X)$.

On a enfin une conjecture de finitude [29, Conjecture 1.5]:

Conjecture 1.3 (Kawamata). — *Soit X une variété projective lisse. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de variétés projectives lisses Y telles que $D^b(X) \simeq D^b(Y)$.*

La réponse est positive en dimension ≤ 2 (cf [14, Corollary 1.2] et [29, Theorem 1.6]) et pour X, Y des variétés abéliennes [47, Corollary 2.8].

Dans la première partie de cet exposé, nous montrons, dans la situation extrême où le fibré canonique est ample ou anti-ample, comment reconstruire la variété à partir de la catégorie dérivée (théorème 2.1). Nous expliquons ensuite le mécanisme de dévissage de catégories dérivées (§2.2). Dans le §3, nous présentons la construction de transformations à noyau et les invariants transportés par les équivalences, puis nous exposons le cas des variétés abéliennes et des surfaces, où la théorie est presque complète. La partie §4 présente plusieurs cas de réponse positive aux conjectures 1.1 et 1.2.

Outre le livre en préparation [26], le lecteur pourra consulter [8, 18, 25, 48] pour des exposés généraux.

Je remercie Arnaud Beauville, Tom Bridgeland, Olivier Debarre et Alastair King pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce texte, et Daniel Huybrechts, pour de très nombreuses discussions.

2. PROPRIÉTÉS INTERNES

2.1. Reconstruction

2.1.1. Terminologie. — Une *variété* sera pour nous un schéma quasi-projectif X sur $\mathbf{C}$. La plupart du temps, il s'agira de variétés projectives lisses. Les points considérés seront toujours des points fermés.

La catégorie dérivée $D^b(X)$ est définie comme la localisation de la catégorie des complexes bornés de faisceaux cohérents en la classe des quasi-isomorphismes (=morphismes de complexes qui induisent un isomorphisme entre faisceaux de cohomologie). Ses objets sont donc les complexes bornés de faisceaux cohérents sur X. Les flèches sont obtenues à partir de morphismes de complexes auxquels les inverses des quasi-isomorphismes ont été ajoutés. La catégorie $D^b(X)$ n'est pas abélienne en général, mais elle possède la structure de catégorie triangulée : le rôle des suites exactes courtes est joué par les triangles distingués.

Tous les foncteurs considérés entre catégories triangulées seront triangulés. Une sous-catégorie *épaisse* d'une catégorie triangulée est une sous-catégorie triangulée pleine close par facteurs directs. La sous-catégorie d'une catégorie triangulée *engendrée* (resp. *faiblement engendrée*) par une famille d'objets est la plus petite sous-catégorie pleine triangulée (resp. la plus petite sous-catégorie épaisse) contenant cette famille.

2.1.2. Catégories abéliennes. — Soit X une variété lisse. On sait, depuis Gabriel [23], que la catégorie des faisceaux cohérents X-coh sur X détermine X:

- l'application qui a un fermé associe les faisceaux supportés par ce fermé induit une bijection $Z \mapsto \mathcal{I}_Z$ de l'ensemble des fermés de X vers l'ensemble des sous-catégories de Serre de X-coh engendrées par un objet
- la catégorie quotient $X\text{-coh}/\mathcal{I}_Z$ est équivalente à $(X - Z)$-coh et son centre s'identifie à $\mathcal{O}_X(X - Z)$.

Suivant Thomason et Balmer [3] (voir aussi [51, Theorem 3.11]), ce principe de reconstruction s'étend à la catégorie $D^b(X)$, si on munit celle-ci de sa structure tensorielle, en plus de sa structure triangulée:

- l'application qui à un fermé Z de X associe la sous-catégorie pleine $D^b_Z(X)$ de $D^b(X)$ des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont supportés par Z est injective, d'image l'ensemble des sous-catégories épaisses faiblement engendrées par un élément et $\otimes$-idéales (*i.e.*, stables par $- \otimes L$ pour tout $L \in D^b(X)$) [58, Theorem 3.15]
- La catégorie $D^b(X - Z)$ s'identifie à $D^b(X)/D^b_Z(X)$ et, si $X - Z$ est un ouvert affine, le centre de $D^b(X - Z)$ s'identifie à $\mathcal{O}_X(X - Z)$.

Par conséquent, X-coh, vue comme catégorie abélienne, et $D^b(X)$, vue comme catégorie triangulée tensorielle, ne sont pas des invariants intéressants de X !

2.1.3. Fibré canonique (anti-)ample. — La catégorie $D^b(X)$, munie de sa seule structure de catégorie triangulée, ne détermine pas la variété X, mais elle apparaît comme un invariant intéressant. Dans la suite, les catégories dérivées seront considérées avec leur seule structure triangulée (voir à ce sujet §3.1.4). Le premier exemple (Mukai) est celui de l'équivalence dérivée entre une variété abélienne et sa duale (théorème 3.11).

Bondal et Orlov démontrent que lorsque le fibré canonique ω_X est ample ou anti-ample, alors la variété est déterminée par sa catégorie dérivée [7, Theorem 2.5].

Théorème 2.1 (Bondal-Orlov). — *Soit X une variété projective lisse telle que ω_X ou ω_X^{-1} est ample. Si Y est une variété projective lisse et si on a une équivalence de catégories triangulées $D^b(X\text{-coh}) \simeq D^b(Y\text{-coh})$, alors $X \simeq Y$.*

Un point crucial est joué dans la preuve par la notion de foncteur de Serre [5, §3]. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie $\mathbf{C}$-linéaire telle que $\dim \operatorname{Hom}(M,N) < \infty$ pour tous $M,N \in \mathcal{T}$. Un foncteur de Serre est la donnée d'une auto-équivalence $S : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ et d'isomorphismes bifonctoriels pour tous $M,N \in \mathcal{T}$:

$$\operatorname{Hom}(M,N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(N, SM)^*.$$

Si on voit $\mathcal{T}$ comme une « algèbre avec plusieurs objets », alors ceci correspond à la notion d'algèbre de Frobenius.

Un foncteur de Serre, s'il existe, est unique à isomorphisme unique près. Par conséquent, une équivalence de catégories commute avec les foncteurs de Serre. En outre, si $\mathcal{T}$ est une catégorie triangulée, alors un foncteur de Serre est automatiquement triangulé.

La définition est motivée par la dualité de Serre:

Théorème 2.2. — *Si X est une variété projective lisse purement de dimension n, alors $S = \omega_X[n] \otimes -$ est un foncteur de Serre pour $D^b(X)$.*

Preuves du théorème 2.1 (esquisses) —

On se ramène facilement au cas où X et Y sont connexes (cf proposition 2.4) et on fixe une équivalence $F : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$. On suppose ω_X ample (preuve identique dans l'autre cas). Le théorème résulterait immédiatement de l'invariance des algèbres canoniques, si on savait que ω_Y était ample (cf §3.2.2).

• 1ère approche [7]. Sur une variété projective lisse connexe Z, pour tout point z et tout $i \in \mathbf{Z}$, les $C = \mathcal{O}_z[i] \in D^b(Z)$[(1)] vérifient

$$(2) \qquad S(C) \simeq C[\dim Z], \ \operatorname{End}_{D^b(Z)}(C) = \mathbf{C} \text{ et } \operatorname{Hom}(C, C[i]) = 0 \text{ pour } i < 0.$$

Sur la variété X où ω_X est ample, les conditions (2) caractérisent les objets $\mathcal{O}_x[i]$ dans $D^b(X)$. On en déduit que l'ensemble $\{F(\mathcal{O}_x)[i]\}_{i,x}$ contient les $\mathcal{O}_y[j]$ pour $y \in Y$ et

[(1)] $\mathcal{O}_z$ est le faisceau gratte-ciel en z

$j \in \mathbf{Z}$. Si $F(\mathcal{O}_x)$ n'est pas de cette forme, il est orthogonal aux $\mathcal{O}_y[j]$, donc il est nul. On déduit alors que F envoie tout $\mathcal{O}_x[i]$ sur un $\mathcal{O}_y[j]$ et ceci induit une bijection entre points de X et de Y. On caractérise ensuite les faisceaux inversibles décalés sur une variété lisse Z comme les $C \in D^b(Z)$ tels que pour tout $z \in Z$, il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\mathrm{Hom}(L, \mathcal{O}_z[n]) \simeq \mathbf{C} \text{ et } \mathrm{Hom}(L, \mathcal{O}_z[i]) = 0 \text{ pour } i \neq n.$$

On en déduit que F envoie un faisceau inversible sur un faisceau inversible décalé. Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Quitte à décaler F, alors on peut supposer $F(L) \in \mathrm{Pic}(Y)$. L'algèbre $\bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Hom}(L, S^i(L)[-i \dim X])$ est isomorphe à l'algèbre canonique de X et les ouverts définis par ses éléments forment une base de la topologie de X. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre définie de la même façon pour Y et elle donne donc une base de la topologie de Y. Ceci montre que ω_Y est ample et que les algèbres canoniques de X et Y sont isomorphes.

• 2ème approche [25, §4]. On commence comme ci-dessus par vérifier que les $\mathcal{O}_x[i]$ s'envoient sur des $\mathcal{O}_y[j]$. La suite de la preuve n'utilise plus que ω_X est ample. On utilise le théorème 3.7 plus bas qui affirme qu'il existe $K \in D^b(Y \times X)$ tel que $F = \Phi_K$. Alors, le lemme 3.1 plus bas montre que $Y \simeq X$.

• 3ème approche [51, §3.2.4]. Soit $\mathcal{I}$ une sous-catégorie épaisse de $D^b(X)$. Si $\mathcal{I}$ est stable par $L^{-1} \otimes -$ pour un faisceau ample L, alors elle est $\otimes$-idéale. Cette propriété est donc équivalente à la stabilité sous S^{-1}. Par conséquent, l'ensemble des fermés de X se retrouve à partir de $D^b(X)$ (à partir de sa seule structure triangulée). Pour tout fermé Z de Y, il existe donc un fermé Z' de X tel que $F(D^b_{Z'}(X)) = D^b_Z(Y)$. On montre que cette injection de l'ensemble des fermés de Y vers ceux de X se restreint en une bijection $Y \to X$ d'inverse continu. On identifie enfin les faisceaux d'anneaux.□

Bondal et Orlov [7, Theorem 3.1] déterminent le groupe $\mathrm{Aut}(D^b(X))$ des classes d'isomorphisme d'auto-équivalences de $D^b(X)$ lorsque $\omega_X^{\pm}$ est ample (ceci est par exemple fourni par la deuxième preuve du théorème 2.1) :

$$\mathrm{Aut}(D^b(X)) = \mathrm{Pic}(X) \rtimes \mathrm{Aut}(X) \times \mathbf{Z}.$$

2.2. Décompositions semi-orthogonales

2.2.1. Décompositions partielles. — Considérons la forme d'Euler sur la K-théorie $K_0(X)$

$$\langle [\mathcal{F}], [\mathcal{G}] \rangle = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Nous allons décrire l'analogue, pour la catégorie dérivée, d'une base triangulaire pour cette forme, où plus généralement d'une décomposition semi-orthogonale de $K_0(X)$.

Soit $\mathcal{I}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. On pose ${}^\perp\mathcal{I} = \{C \in \mathcal{T} | \mathrm{Hom}(C, I) = 0 \text{ pour tout } I \in \mathcal{I}\}$ et $\mathcal{I}^\perp = \{C \in \mathcal{T} | \mathrm{Hom}(I, C) = 0 \text{ pour tout } I \in \mathcal{I}\}$. On dit que $\langle \mathcal{I}^\perp, \mathcal{I} \rangle$ est une *décomposition semi-orthogonale* de $\mathcal{T}$ lorsque pour tout objet C de $\mathcal{T}$, il existe un triangle distingué $C_1 \to C \to C_2 \rightsquigarrow$ avec $C_1 \in \mathcal{I}$ et $C_2 \in \mathcal{I}^\perp$. Ceci revient à demander que le foncteur canonique $\mathcal{I}^\perp \to \mathcal{T}/\mathcal{I}$ soit une équivalence ou à demander que le foncteur d'inclusion $\mathcal{I} \to \mathcal{T}$ ait un adjoint à droite.

Lorsque $\mathcal{I}^\perp = \langle \mathcal{K}, \mathcal{J} \rangle$, on écrit $\mathcal{T} = \langle \mathcal{K}, \mathcal{J}, \mathcal{I} \rangle$ et on généralise aux décompositions $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m \rangle$.

L'existence d'un « générateur fort » pour $D^b(X)$ fournit un théorème de représentabilité à la Brown pour les foncteurs cohomologiques sur $D^b(X)$ (cf [5] et [9]) et on obtient un théorème général d'existence de décompositions:

Théorème 2.3 (Bondal, Kapranov, Van den Bergh). — *Soient X une variété projective lisse et $\mathcal{I} = D^b(X)$ une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. Alors, le foncteur d'inclusion $\mathcal{I} \to \mathcal{T}$ a des adjoints à gauche et à droite,* i.e., *on a des décompositions semi-orthogonales $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}^\perp, \mathcal{I} \rangle$ et $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}, {}^\perp\mathcal{I} \rangle$.*

Une décomposition orthogonale de $D^b(X)$ correspond à une décomposition de X en union de composantes connexes:

Proposition 2.4. — *Soit X une variété connexe. Soient $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux sous-catégories épaisses de $D^b(X)$ telles que $D^b(X) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ (*i.e.*, $D^b(X) = \langle \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \rangle = \langle \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_1 \rangle$). Alors, $\mathcal{I}_1 = 0$ ou $\mathcal{I}_2 = 0$.*

Preuve — Un objet indécomposable de $D^b(X)$ est dans $\mathcal{I}_1$ ou dans $\mathcal{I}_2$. Soient r, s tels que $\mathcal{O}_X \in \mathcal{I}_r$ et $\{r, s\} = \{1, 2\}$. Soit $X_i = \{x \in X \mid \mathcal{O}_x \in \mathcal{I}_i\}$. Si $x \in X_s$, alors $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_x) = 0$, ce qui est impossible, donc $X_s = \emptyset$. Si $C \in \mathcal{I}_s$, alors $\mathrm{Hom}(C, \mathcal{O}_x[i]) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $i \in \mathbf{Z}$, donc $C = 0$.$\square$

Remarque 2.5. — Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée avec un foncteur de Serre S et $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{I}^\perp \rangle$ une décomposition semi-orthogonale. Alors, $\mathcal{T} = \langle {}^\perp\mathcal{I}, \mathcal{I} \rangle$ et ${}^\perp\mathcal{I} = S^{-1}(\mathcal{I}^\perp)$.

Considérons en particulier $\mathcal{T} = D^b(X)$ où X une variété projective lisse connexe de Calabi-Yau. Alors, il n'y a pas de décomposition semi-orthogonale non triviale de $D^b(X)$, car une telle décomposition serait une décomposition orthogonale.

2.2.2. Décompositions complètes. — Voyons le cas particulier d'une *suite exceptionnelle* d'objets. C'est une suite $(C_1, \ldots, C_m)$ d'objets de $\mathcal{T}$ telle que

- $\mathrm{Hom}(C_i, C_j[r]) = 0$ pour $r \in \mathbf{Z}$ et $i > j$
- $\mathrm{Hom}(C_i, C_i[r]) = 0$ pour $r \neq 0$
- $\mathrm{End}(C_i) = \mathbf{C}$.

On dit que la suite est *complète* si elle engendre $\mathcal{T}$.

Soit $(C_1, \ldots, C_m)$ une suite exceptionnelle complète. Notons $\mathcal{I}_i$ la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$ engendrée par C_i. Nous noterons $D^b(A)$ la catégorie dérivée bornée des modules de type fini sur une algèbre A.

On a une équivalence $C_i \otimes_{\mathbf{C}} - : D^b(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_i$ et une décomposition semi-orthogonale $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m \rangle$. Réciproquement, toute décomposition semi-orthogonale en des catégories équivalentes à $D^b(\mathbf{C})$ provient d'une suite exceptionnelle d'objets. L'ensemble $\{[C_i]\}$ forme une base de $K_0(\mathcal{T})$. Si $\mathcal{T}$ est localement de type fini (*i.e.*, si

$\dim \bigoplus_i \mathrm{Hom}(M, N[i]) < \infty$ pour tous $M, N \in \mathcal{T}$), alors la matrice de la forme d'Euler dans la base $\{[C_i]\}$ est triangulaire.

Exemple 2.6. — Soit $X = \mathbf{P}^n$. Beilinson [4] montre que $(\mathcal{O}(-n), \mathcal{O}(-n+1), \ldots, \mathcal{O}(0))$ est une suite exceptionnelle complète. L'orthogonalité est claire. La résolution de la diagonale $\Delta \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$:

$$0 \to \mathcal{O}(-n) \boxtimes \Omega^n(n) \to \cdots \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

décrit le foncteur identité de $D^b(\mathbf{P}^n)$ comme extension de foncteurs $\mathcal{O}(-i) \otimes H^*(\Omega^i(i) \otimes -)$ et ceci démontre l'engendrement. Soient $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}(-i)$ et $A = \mathrm{End}(\mathcal{F})$, une algèbre de dimension finie. Alors, on a en plus ici $\mathrm{Ext}^{>0}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ et on déduit que le foncteur $R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -) : D^b(\mathbf{P}^n) \to D^b(A)$ est une équivalence.

Nous renvoyons le lecteur à [24] pour un article de synthèse, consacré en particulier aux espaces projectifs et aux surfaces de Del Pezzo.

2.2.3. Minimisation. — Kapranov a construit des suites exceptionnelles complètes pour les quadriques projectives lisses et les variétés de drapeaux de type A [27] (cf [53] pour un survol des constructions pour les variétés de Fano).

King [34, Conjecture 9.3] conjecture que toute variété torique complète lisse X admet une suite $(L_1, \ldots, L_n)$ de fibrés en droites telle que $\mathrm{Ext}^{>0}(L_i, L_j) = 0$ pour tous i, j et les L_i engendrent $D^b(X)$ (alors, $D^b(X)$ est équivalente à $D^b(A)$, où $A = \mathrm{End}(\bigoplus_i L_i)$). Kawamata [33] démontre l'existence d'une suite exceptionnelle complète de faisceaux pour toute variété torique projective lisse.

Dès que $K_0(X)$ n'est pas de type fini, $D^b(X)$ ne peut être équivalente à la catégorie dérivée d'une algèbre de dimension finie. On montre par contre que pour toute variété X, il existe une dg-algèbre (=algèbre différentielle graduée) A dont la catégorie des complexes parfaits est équivalente à $D^b(X)$ (cf Keller, Thomason, Neeman, Kontsevich, Bondal-Van den Bergh, [52, Proposition 3.14 et Theorem 7.39]).

La recherche de modèles minimaux est reliée à la minimisation de la catégorie dérivée. On cherche une suite exceptionnelle $L_1, \ldots, L_n$ avec n maximal. Soit $\mathcal{I}$ la sous-catégorie triangulée de $D^b(X)$ engendrée par les L_i. Alors, $D^b(X) = \langle \mathcal{I}, \mathcal{I}^\perp \rangle$ et la géométrie de X devrait être en partie contrôlée par la catégorie triangulée $\mathcal{T} = \mathcal{I}^\perp$. Il serait intéressant d'étudier l'indépendance de $\mathcal{T}$ du choix de $L_1, \ldots, L_n$ et même son indépendance birationnelle (cf [37]). La catégorie $\mathcal{T}$ apparaît parfois comme la catégorie dérivée d'une variété X', de dimension inférieure ou égale (cf [38] pour un exemple de variété de Fano X de dimension 3 où X' est une courbe de genre 7). L'exemple le plus simple est celui d'un éclatement de centre un espace projectif (cf théorème 4.2).

3. COMPARAISONS

3.1. Transformations à noyau

3.1.1. Définition. — L'idée des transformations à noyau est la suivante: on se donne une fonction $\phi : X \times Y \to \mathbf{C}$. On a alors une application des fonctions sur Y vers les fonctions sur X donnée par $f \mapsto (x \mapsto \int_Y f(y)\phi(x,y)dy)$.

Cette construction a un analogue pour les faisceaux cohérents (les mêmes constructions pour les faisceaux constructibles ou les $\mathcal{D}$-modules sont classiques). Soient X et Y deux variétés projectives lisses et $p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$ les deux projections.

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Soit $K \in D^b(X \times Y)$. On définit alors le foncteur (dit de « Fourier-Mukai ») $\Phi_K : D^b(Y) \to D^b(X)$ par

$$\Phi_K(C) = \mathbf{R}p_*(K \otimes^{\mathbf{L}} q^*C).$$

Soit $K^\vee = \mathbf{R}\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_{X\times Y}) \in D^b(Y \times X)$. Si X et Y sont de dimension pure, alors les foncteurs $\Phi_{K^\vee \otimes p^*\omega_X[\dim X]}$ et $\Phi_{K^\vee \otimes q^*\omega_Y[\dim Y]}$ sont respectivement adjoints à gauche et à droite de Φ_K.

Soient Z une autre variété projective lisse et $L \in D^b(Y \times Z)$.

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times Z \arrow[dl, "p_{12}"'] \arrow[d, "p_{13}"'] \arrow[dr, "p_{23}"] & \\ X \times Y & X \times Z & Y \times Z \end{tikzcd}$$

On pose $K \circ L = \mathbf{R}p_{13*}(p_{12}^*K \otimes^{\mathbf{L}} p_{23}^*L)$. On a alors un isomorphisme canonique $\Phi_K \circ \Phi_L \xrightarrow{\sim} \Phi_{K\circ L}$.

Le lemme classique suivant permet de reconnaître quand K provient d'un isomorphisme de variétés (cf [25, Corollary 4.3]).

Lemme 3.1. — *On suppose que Y est connexe et que pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $\Phi_K(\mathcal{O}_y) \simeq \mathcal{O}_x[n]$. Alors, il existe un morphisme $\sigma : Y \to X$ de graphe Γ_σ et il existe $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que $K \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_\sigma} \otimes q^*L[m]$.*

Si Φ_K est une équivalence, alors σ est un isomorphisme.

Preuve (esquisse) — Soit $y \in Y$ d'anneau local $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_y}$ et soit $n \in \mathbf{Z}$ tel que $K \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_y$ est concentré en degré $-n$. Le lemme de Nakayama montre que $q_*(K \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{\mathfrak{m}_y}) \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{m}_y}[n]$. Il existe alors un voisinage ouvert U de y tel que $q_*(K \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_U) \simeq \mathcal{O}_U[n]$ et on obtient un morphisme $U \to X$. Ceux-ci se recollent en $\sigma : Y \to X$ avec les propriétés voulues. Si Φ_K est une équivalence, alors $K^\vee \otimes p^*\omega_X[\dim X]$ définit un morphisme $X \to Y$ inverse de σ.□

3.1.2. Pleine fidélité. — La pleine fidélité du foncteur Φ_K peut se tester sur une famille d'objets appropriée (cf [11, Theorems 5.1 and 5.4]). Nous utilisons ici les faisceaux gratte-ciel [6, Theorem 1.1], le point-clef étant qu'un objet orthogonal (à gauche ou à droite) aux faisceaux gratte-ciel et à leurs décalés est nul.

Proposition 3.2 (Bondal-Orlov). — *Soit $K \in D^b(X \times Y)$. Le foncteur Φ_K est pleinement fidèle si et seulement si pour tous $y, y' \in Y$, on a*

$$\mathrm{Hom}(\Phi_K(\mathcal{O}_y), \Phi_K(\mathcal{O}_{y'})[i]) = \begin{cases} 0 & \textit{sauf si } y = y' \textit{ et } 0 \leq i \leq \dim Y \\ k & \textit{si } y = y' \textit{ et } i = 0. \end{cases}$$

C'est une équivalence si en plus $\Phi_K(\mathcal{O}_y) \otimes \omega_X \simeq \Phi_K(\mathcal{O}_y)$ pour tout $y \in Y$.

Cette proposition montre que lorsque X et Y ont des fermés stricts Z et Z' en dehors desquels K est le faisceau de structure du graphe d'un isomorphisme $Y - Z' \xrightarrow{\sim} X - Z$, alors le critère précédent peut se vérifier en remplaçant X et Y par leurs complétés formels le long de Z et Z'. Ceci permet de substituer à X et Y des modèles préférés, à condition de garder les mêmes complétés formels (cf la preuve du théorème 4.6).

Un cas particulier de pleine fidélité est fourni par le résultat suivant, qui se déduit immédiatement de la formule de projection.

Proposition 3.3. — *Soit $f : V \to W$ un morphisme entre variétés projectives lisses. Si le morphisme canonique $\mathcal{O}_W \to \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_V$ est un isomorphisme, alors $\mathbf{L}f^* : D^b(W) \to D^b(V)$ est pleinement fidèle.*

3.1.3. Familles. — Soient X', Y' deux variétés projectives lisses et $K' \in D^b(X' \times Y')$. Alors, on a le résultat classique (cf [48, Proposition 2.1.7]):

Proposition 3.4. — *Si $\Phi_K : D^b(Y) \to D^b(X)$ et $\Phi_{K'} : D^b(Y') \to D^b(X')$ sont pleinement fidèles (resp. sont des équivalences), alors $\Phi_{K \boxtimes K'} : D^b(Y \times Y') \to D^b(X \times X')$ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence).*

Soient $p : X \to S$ et $q : Y \to S$ des morphismes projectifs lisses entre variétés projectives lisses. Soient $s_0 \in S$, $X_0 = p^{-1}(s_0)$ et $Y_0 = q^{-1}(s_0)$. Soient $i : X_0 \to X$, $j : Y_0 \to Y$ et $k : X \times_S Y \to X \times Y$ les immersions fermées. Les propriétés d'une famille de noyaux se spécialisent [19, Proposition 6.2]:

Proposition 3.5 (Chen). — *Soit $K \in D^b(X \times_S Y)$ tel que $\Phi_{k_*K} : D^b(Y) \to D^b(X)$ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence). Alors, $\Phi_{\mathbf{L}(i\times j)^*K} : D^b(Y_0) \to D^b(X_0)$ est pleinement fidèle (resp. est une équivalence).*

Ce résultat permet de vérifier dans certains cas qu'un noyau donne une équivalence par déformation (cf par exemple §4.4).

Remarque 3.6. — Soit $\Phi_K : D^b(Y) \to D^b(X)$ un foncteur pleinement fidèle. Alors, on doit penser à Y comme l'espace de modules fin de $\{F(\mathcal{O}_y)\}_{y \in Y}$ et à K comme l'objet universel associé.

3.1.4. Représentabilité. — L'imperfection des axiomes des catégories triangulées rend la preuve du résultat suivant délicate (cf [46], [48, Theorem 3.2.1] et [9, Theorem 1.1] qui assure l'existence d'adjoints; cf [31, Theorem 1.1] pour une extension aux champs de Deligne-Mumford et une autre preuve).

THÉORÈME 3.7 (Orlov). — *Soit $F : D^b(Y) \to D^b(X)$ un foncteur pleinement fidèle. Alors, il existe un unique $K \in D^b(X \times Y)$ tel que $F \simeq \Phi_K$.*

Une approche préférable à ce problème (et à ceux de §3.2) consiste à considérer une structure plus riche que celle de catégorie triangulée, celle de dg-catégorie (les Hom sont munis d'une structure de complexe d'espaces vectoriels) dont le « H^0 » est la catégorie dérivée de départ [59]. On dispose d'une dg-catégorie $L_{\mathrm{coh}}(X)$ dont le « H^0 » est $D^b(X)$. Toen montre que la dg-catégorie des foncteurs de $L_{\mathrm{coh}}(Y)$ vers $L_{\mathrm{coh}}(X)$ est (quasi-)équivalente à $L_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$ [59, Theorem 8.15] et ceci fournit un analogue du théorème 3.7, pour des foncteurs non nécessairement pleinement fidèles. Les foncteurs $D^b(Y) \to D^b(X)$ obtenus sont alors tous du type Φ_K et réciproquement tout foncteur de ce type provient d'un foncteur défini au niveau des dg-catégories.

3.2. Invariants d'une équivalence

3.2.1. Soit $F : D^b(Y) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ une équivalence, avec X et Y projectives lisses connexes. D'après le théorème 3.7, il existe $K \in D^b(X \times Y)$ tel que $F \simeq \Phi_K$.

La commutation de F avec les foncteurs de Serre montre que $\dim X = \dim Y$ et que ω_X et ω_Y ont le même ordre [14, Lemma 2.1].

Un argument de rigidité montre que F induit un isomorphisme de groupes algébriques $\mathrm{Pic}^0(Y) \rtimes \mathrm{Aut}^0(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(X) \rtimes \mathrm{Aut}^0(X)$, où $\mathrm{Aut}^0(X)$ est la composante neutre de $\mathrm{Aut}(X)$ (cf théorème 3.11 pour un cas où les deux facteurs sont échangés).

3.2.2. Cohomologie. — Passons maintenant à des invariants du type cohomologie ou algèbre canonique (cf [42, Theorem 4.9], [16], [17], [29, Theorem 2.3] et [48, Theorem 2.1.8]).

Soit $HA_{i,k}(X) = \mathrm{Ext}^i_{X \times X}(\mathcal{O}_{\Delta X}, i_*\omega_X^k)$ où $i : \Delta X \to X \times X$ est l'inclusion de la diagonale. Soit $HA(X) = \bigoplus_{i,k} HA_{i,k}(X)$. On munit $HA(X)$ d'une structure d'algèbre bigraduée via les isomorphismes canoniques $\mathrm{Ext}^i_{X \times X}(i_*\omega_X^r, i_*\omega_X^s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{X \times X}(\mathcal{O}_{\Delta X}, i_*\omega_X^{s-r})$.

On a $HA_{i,k}(X) =$« $\mathrm{Hom}(S_X, S_X^k[i - k \dim X])$ », où le terme de droite doit être compris comme le H^0 d'un complexe de Hom's pris au niveau des dg-catégories.

On a $HA_{i,k}(X) \simeq \bigoplus_{p+q=i} H^p(X, \Lambda^q \mathcal{T}_X \otimes \omega_X^k)$ (cf [36] et [54, Corollary 2.6]), où $\mathcal{T}_X$ est le fibré tangent. En particulier, $\bigoplus_{k \geq 0} HA_{0,k}(X)$ est isomorphe à l'algèbre canonique $R(X) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \omega_X^k)$.

THÉORÈME 3.8. — *F induit un isomorphisme d'algèbres graduées $HA(Y) \xrightarrow{\sim} HA(X)$. En particulier, F induit un isomorphisme gradué entre les algèbres canoniques $R(Y) \xrightarrow{\sim} R(X)$ et un isomorphisme entre les espaces vectoriels de cohomologie $H^*(Y, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X, \mathbf{C})$.*

PREUVE (esquisse) — On utilise l'équivalence $\Phi_{K\boxtimes L} : D^b(Y\times Y)\xrightarrow{\sim} D^b(X\times X)$ où $L = K^\vee \otimes p^*\omega_X[\dim X] \simeq K^\vee \otimes q^*\omega_Y[\dim Y]$ vu dans $D^b(X\times Y)$.$\square$

L'isomorphisme $H^*(X,\mathbf{C})\xrightarrow{\sim} H^*(Y,\mathbf{C})$ n'est pas compatible à la multiplication ni à la graduation classique, en général. Il est par contre compatible à la graduation donnée par ${}^nH(X,\mathbf{C}) = \bigoplus_{p-q=n} H^p(X,\Omega_X^q)$.

Remarque 3.9. — On s'attend tout de même à l'égalité des nombres de Hodge de X et Y (cf [15, §1.3]). Dans la situation de la conjecture 1.1, la formule de changement de variable pour l'intégration motivique montre que les variétés X et Y ont les mêmes nombres de Hodge (Kontsevich, Batyrev et Denef–Loeser), cf [50, §4] et [39].

On déduit du théorème 3.8 l'invariance de la dimension de Kodaira. On déduit aussi que si $\kappa(X,\omega_X) = \dim X$ (*i.e.*, X de type général) ou $\kappa(X,\omega_X^{-1}) = \dim X$, alors X et Y sont birationnelles.

Via le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, on obtient l'invariance de la cohomologie à coefficients rationnels.

Soit $L \in D^b(X\times Y)$. Soit $\mathrm{ch} : K_0(X) \to H^*(X,\mathbf{Q})$ la classe de Chern et soit td_X la classe de Todd de X. On définit un morphisme

$$\phi_L : H^*(Y,\mathbf{Q}) \to H^*(X,\mathbf{Q}),\ \xi \mapsto p_*\Big(p^*(\sqrt{\mathrm{td}_X})\cdot \mathrm{ch}([L])\cdot q^*(\sqrt{\mathrm{td}_Y})\cdot q^*(\xi)\Big)\,.$$

Ce morphisme est gradué pour la graduation ${}^nH$ et on a $\phi_{L\circ L'} = \phi_L \circ \phi_{L'}$.

Lorsque $L = K$, alors ce morphisme est un isomorphisme et sa complexification est l'isomorphisme du théorème 3.8.

La transformation Φ_L induit un morphisme $[\Phi_L] : K_0(Y) \to K_0(X)$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_0(Y) \arrow[r, "{[\Phi_L]}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}(-)\cdot\sqrt{\mathrm{td}_Y}"'] & K_0(X) \arrow[d, "\mathrm{ch}(-)\cdot\sqrt{\mathrm{td}_X}"] \\ H^*(Y,\mathbf{Q}) \arrow[r, "\phi_L"'] & H^*(X,\mathbf{Q}) \end{tikzcd}$$

Remarque 3.10. — Hille et Van den Bergh [25, Remark 3.4] mentionnent l'invariance de la K-théorie topologique par équivalence dérivée et en déduisent l'invariance de $H^*(X,\mathbf{Z})$ dans $H^*(X,\mathbf{Q})$ pour les courbes, les surfaces $K3$ et les variétés abéliennes.

3.3. Variétés abéliennes

Le résultat suivant de Mukai [41, Theorem 2.2] est le point de départ des travaux sur les équivalences entre catégories dérivées de faisceaux cohérents.

Soient A une variété abélienne et $\hat{A} = \mathrm{Pic}^0(A)$ sa variété abélienne duale. On note $\mathcal{P}$ le fibré de Poincaré sur $A\times\hat{A}$.

THÉORÈME 3.11 (Mukai). — *Le foncteur* $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(\hat{A}\text{-coh}) \to D^b(A\text{-coh})$ *est une équivalence.*

Preuve — On vérifie les conditions de la proposition 3.2. Pour $x \in \hat{A}$, alors $\Phi_K(\mathcal{O}_x)$ est un fibré en droites L_x de degré 0 sur A. Puisque $H^*(L) = 0$ pour tout $L \in \mathrm{Pic}^0(A)$ non trivial, on déduit que $\Phi_{\mathcal{P}}$ est pleinement fidèle, et donc une équivalence, car $\omega_A \simeq \mathcal{O}_A$.□

On décrit maintenant toutes les équivalences dérivées entre variétés abéliennes (cf [47], [48, §5] et [49, §11 et §15]).

Soit B une variété abélienne. Soit

$$f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : B \times \hat{B} \to A \times \hat{A}.$$

On pose

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \hat{t} & -\hat{y} \\ -\hat{z} & \hat{x} \end{pmatrix} : A \times \hat{A} \to B \times \hat{B}.$$

On note $U(B \times \hat{B}, A \times \hat{A})$ l'ensemble des isomorphismes $f : B \times \hat{B} \xrightarrow{\sim} A \times \hat{A}$ tels que $f^{-1} = \tilde{f}$.

Soient $a \in A$ et $\alpha \in \hat{A}$. On note $m_a : A \to A$, $b \mapsto a + b$. On pose $\Phi_{a,\alpha} = L_\alpha \otimes m_{a*}(-) : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(A)$.

Théorème 3.12 (Polishchuk, Orlov). — *Soit $F : D^b(B) \xrightarrow{\sim} D^b(A)$ une équivalence. Alors, il existe $\sigma \in U(B \times \hat{B}, A \times \hat{A})$ tel que*

$$\Phi_{\sigma(b,\beta)} = F \circ \Phi_{b,\beta} \circ F^{-1} \text{ pour tous } b \in B \text{ et } \beta \in \hat{B}. \tag{3}$$

Réciproquement, soit $\sigma \in U(B \times \hat{B}, A \times \hat{A})$. Alors, il existe une équivalence $F : D^b(B) \xrightarrow{\sim} D^b(A)$ vérifiant (3).

Preuve (éléments) — L'invariance de $\mathrm{Aut}^0 \times \mathrm{Pic}^0$ (cf §3.2) fournit un isomorphisme $B \times \hat{B} \xrightarrow{\sim} A \times \hat{A}$, dont on vérifie qu'il a la propriété voulue. La réciproque requiert la construction d'un fibré simple semi-homogène de pente donnée.□

On obtient alors une description explicite du groupe des auto-équivalences. On a une suite exacte de groupes

$$0 \to (A \times \hat{A})(\mathbf{C}) \times \mathbf{Z} \to \mathrm{Aut}(D^b(A)) \to U(A \times \hat{A}, A \times \hat{A}) \to 1.$$

Remarque 3.13. — On peut conjecturer qu'une variété projective lisse dérivé-équivalente à une variété abélienne est une variété abélienne.

3.4. Surfaces

Notons tout d'abord que le cas des courbes n'est pas intéressant! Deux courbes projectives lisses sont dérivé-équivalentes si et seulement si elles sont isomorphes : en genre $\neq 1$, le théorème 2.1 donne le résultat. Pour les courbes elliptiques, on le déduit par exemple de l'invariance de la structure de Hodge entière.

Nous décrivons brièvement la situation pour les surfaces. Les démonstrations demandent une analyse minutieuse suivant la classification des surfaces minimales.

Soient X et Y deux surfaces projectives lisses connexes non isomorphes. On suppose que X est minimale, *i.e.*, ne contient pas de $\mathbf{P}^1$ avec auto-intersection -1. On a une description précise des cas d'équivalences dérivées [15] (cf [42, 46] pour les $K3$).

Théorème 3.14 (Bridgeland-Maciocia). — *On a $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ si et seulement si une des assertions suivantes est vraie*

- *X et Y sont toutes deux abéliennes (ou toutes deux des $K3$) et il existe une isométrie entre leurs réseaux transcendants compatible avec les structures de Hodge*
- *X et Y sont des surfaces elliptiques et Y est un schéma de Picard relatif de la fibration elliptique de X[10].*

Remarque 3.15. — La K-équivalence entre deux variétés projectives lisses X et Y (=existence d'un diagramme (1) avec $f^*K_X \sim g^*K_Y$) implique que les variétés sont isomorphes en codimension 1. Si deux surfaces sont K-équivalentes, elles sont donc isomorphes. Uehara [60] construit des exemples de surfaces elliptiques birationnelles et dérivé-équivalentes mais qui ne sont pas isomorphes, donc pas K-équivalentes non plus.

4. FLIPS ET FLOPS

4.1. Introduction

Un cas particulier de la conjecture 1.1 est celui d'un flop. Ce cas est important car une des conjectures du MMP est que deux modèles minimaux birationnels sont connectés par une suite de flops.

Un flop est un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\ & \bar{X} & \end{tikzcd}$$

où

- $\bar{X}$ est une variété projective de Gorenstein,
- f et f^+ sont des résolutions crépantes (*i.e.*, $f^*\omega_{\bar{X}} \simeq \omega_X$ et $(f^+)^*\omega_{\bar{X}} \simeq \omega_{X^+}$) dont le lieu exceptionnel est de codimension ≥ 2 et
- il existe un diviseur D sur X tel que $-D$ est relativement f-ample et le transformé strict de D est relativement f^+-ample.

Le morphisme f détermine uniquement f^+ (car $X^+ = \operatorname{Proj} \bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{O}_{\bar{X}}(f_*(mD))$, indépendant de D). La conjecture 1.1 prédit que $D^b(X) \simeq D^b(X^+)$ et donc que X^+ peut se construire comme un espace de module d'objets de $D^b(X)$ (cf §4.5 pour la dimension 3). Cette approche pourrait aussi s'appliquer pour les flips.

Nous allons voir des exemples (§4.3, §4.4.1 et §4.5) où la transformation de noyau $\mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+}$ est une équivalence $D^b(X^+)\xrightarrow{\sim}D^b(X)$. Néanmoins, nous verrons dans §4.4.2 une situation où cette transformation n'est pas une équivalence.

4.2. Éclatements

4.2.1. Fibrés projectifs. — Soit E un fibré vectoriel de rang $r \geq 1$ sur une variété projective lisse Y et soit $q : \mathbf{P}(E) \to Y$ le fibré projectif associé.

La proposition suivante [45, Theorem 2.6] fournit une version relative de l'exemple 2.6.

Proposition 4.1 (Orlov). — *On a une décomposition semi-orthogonale*

$$D^b(\mathbf{P}(E)) = \langle D^b(Y)_{-r+1}, D^b(Y)_{-r+2}, \ldots, D^b(Y)_0\rangle,$$

où $D^b(Y)_d$ est l'image de $D^b(Y)$ par le foncteur pleinement fidèle $\mathcal{O}_q(d) \otimes q^*(-)$.

Preuve (esquisse) — La pleine fidélité est fournie par la proposition 3.3. Soient $C, D \in D^b(Y)$ et $L \in D^b(\mathbf{P}(E))$. On a

$$\mathrm{Hom}(q^*C, L \otimes^{\mathbf{L}} q^*D) \simeq \mathrm{Hom}(C, \mathbf{R}q_*(L \otimes^{\mathbf{L}} q^*D)) \simeq \mathrm{Hom}(C, (\mathbf{R}q_*L) \otimes^{\mathbf{L}} D).$$

La semi-orthogonalité résulte alors de l'annulation de $\mathbf{R}q_*\mathcal{O}_q(i)$ pour $-1 \geq i \geq -r+1$.

Soit $\mathcal{T}$ la sous-catégorie triangulée de $D^b(\mathbf{P}(E))$ engendrée par $D^b(Y)_{-r+1}, \ldots, D^b(Y)_0$. Soient $y \in Y$ et $F = q^{-1}(y)$. Les faisceaux $\mathcal{O}_F(-r+1), \ldots, \mathcal{O}_F(0)$ engendrent $D^b(F)$ (exemple 2.6), donc, vus comme faisceaux sur $\mathbf{P}(E)$, ils engendrent $D^b_F(\mathbf{P}(E))$. Par conséquent, $D^b_F(\mathbf{P}(E)) \subset \mathcal{T}$ et en particulier $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}$ pour $x \in F$. On en déduit que ${}^\perp\mathcal{T} = 0$, d'où $\mathcal{T} = D^b(\mathbf{P}(E))$ par le théorème 2.3.□

4.2.2. Décomposition pour un éclatement. — Soient maintenant X une variété projective lisse et Y une sous-variété fermée lisse de X purement de codimension $r \geq 2$. Soit $\mathcal{N}_{Y/X}$ le fibré normal de Y dans X. Soient $\tilde{X}$ l'éclatée de X le long de Y et $\tilde{Y} \simeq \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$ le diviseur exceptionnel, image inverse de Y dans $\tilde{X}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "q"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Le théorème suivant décrit comment la catégorie dérivée grossit par éclatement [45, Theorem 4.3].

Théorème 4.2 (Orlov). — *On a une décomposition semi-orthogonale*

$$D^b(\tilde{X}) = \langle D^b(Y)_{-r+1}, D^b(Y)_{-r+2}, \ldots, D^b(Y)_{-1}, D^b(X)_0\rangle$$

où $D^b(Y)_d = j_*(\mathcal{O}_q(d) \otimes q^*D^b(Y))$ et $D^b(X)_0 = \mathbf{L}p^*D^b(X)$. Les foncteurs canoniques induisent des équivalences $D^b(X)\xrightarrow{\sim}D^b(X)_0$ et $D^b(Y)\xrightarrow{\sim}D^b(Y)_d$ pour tout d.

Preuve (esquisse) — Un point utile est l'existence, pour tout $C \in D^b(\tilde{Y})$, d'un triangle distingué

$$C \otimes \mathcal{O}_q(1) \to \mathbf{L}j^* j_* C \to C \rightsquigarrow . \qquad (4)$$

La proposition 3.3 montre que $\mathbf{L}p^* : D^b(X) \to D^b(\tilde{X})$ est pleinement fidèle. Pour l'équivalence $D^b(Y) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)_d$, la proposition 4.1 ramène le problème à montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbf{L}j^* j_* \mathcal{O}_F, \mathcal{O}_F[i]) = 0$ pour toute fibre F de q et tout $i \neq 0$. Le triangle distingué (4) ramène l'annulation recherchée à celles de $H^*(\mathbf{P}^{r-1}, \mathcal{O}(-1))$ et $H^{>0}(\mathbf{P}^{r-1}, \mathcal{O})$.

La semi-orthogonalité de $\mathcal{T} = \langle D^b(Y)_{-r+1}, D^b(Y)_{-r+2}, \ldots, D^b(Y)_{-1}, D^b(X)_0 \rangle$ s'établit par la même technique que dans la preuve de la proposition 4.1.

Il reste à établir que ${}^\perp\mathcal{T}$ est nul. Soit $y \in Y$. On a $\mathbf{L}^d p^* \mathcal{O}_y \simeq \Omega^d_{p^{-1}(y)}(d)$ pour $0 \leq d \leq r-1$ et $\mathbf{L}^d p^* \mathcal{O}_y = 0$ pour $d \geq r$. On a $H^*(\mathbf{P}^{r-1}, \Omega^d(d)) = 0$ pour $1 \leq d \leq r-1$ et la résolution de la diagonale dans $\mathbf{P}^{r-1}$ (cf l'exemple 2.6) montre que pour $1 \leq d \leq r-1$, alors $\Omega^d(d)$ est dans la sous-catégorie de $D^b(\mathbf{P}^{r-1})$ engendrée par $\mathcal{O}(-r+1), \ldots, \mathcal{O}(-1)$. Par conséquent, le cône du morphisme canonique $\mathbf{L}p^* \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{p^{-1}(y)}$ est dans $\mathcal{T}$, donc finalement $\mathcal{O}_{p^{-1}(y)}$ est dans $\mathcal{T}$ et on termine comme pour la proposition 4.1.$\square$

Remarque 4.3. — Les arguments essentiels pour les deux résultats précédents apparaissent aussi dans les travaux de Thomason [56, 57] qui s'intéresse à la K-théorie supérieure.

4.3. Flips et flops standard

Soient X une variété projective lisse et Y une sous-variété fermée isomorphe à $\mathbf{P}^k$ telle que $\mathcal{N}_{Y/X} \simeq \mathcal{O}_Y(-1)^{l+1}$ avec $1 \leq l \leq k$. Soit $p : \tilde{X} \to X$ l'éclatée de X le long de Y. Le diviseur exceptionnel $\tilde{Y}$ est isomorphe à $\mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l$ et on a $\mathcal{N}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}(-1,-1)$. Soit $p^+ : \tilde{X} \to X^+$ la contraction de $\tilde{Y}$ sur $\mathbf{P}^l$. On suppose que X^+ est une variété projective. Soient $f : X \to \bar{X}$ et $f^+ : X^+ \to \bar{X}$ les contractions de $\mathbf{P}^k$ et $\mathbf{P}^l$ sur un point. Ils fournissent l'exemple le plus simple de flip (et de flop lorsque $k = l$). On a $\tilde{X} \simeq X \times_{\bar{X}} X^+$.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y} \simeq \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l \arrow[dl] \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dr] & \\
\mathbf{P}^k \simeq Y \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "p^+"] & Y^+ \simeq \mathbf{P}^l \arrow[d, hook] \\
X \arrow[dr, "f"] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\
 & \bar{X} &
\end{tikzcd}$$

Les conjectures 1.1 et 1.2 sont connues dans ce cas (cf [6, Theorem 3.6] et [48, Theorem 2.2.9]):

Théorème 4.4 (Bondal-Orlov). — *Le foncteur* $\Phi_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} = \mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^* : D^b(X^+) \to D^b(X)$ *est pleinement fidèle et c'est une équivalence si* $l = k$.

Preuve (esquisse) — Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) la sous-catégorie triangulée pleine de $D^b(\tilde{X})$ engendrée par les $j_*\mathcal{O}(r,s)$ avec $r = 0$ et $-l \leq s \leq -1$ (resp. $-k \leq r < 0$ et $-l \leq s \leq -1$). Les décompositions du théorème 4.2 et de l'exemple 2.6 donnent une décomposition semi-orthogonale $(\mathbf{L}p^*D(X))^\perp = \langle \mathcal{B}, \mathcal{A} \rangle$. On a $\mathcal{B} \subset (\mathbf{L}(p^+)^*D^b(X^+))^\perp$. Puisque $(\omega_{\tilde{X}})_{|\tilde{Y}} \simeq \mathcal{O}(-k,-l)$, on a aussi $\mathcal{A} \otimes \omega_{\tilde{X}} \subset (\mathbf{L}(p^+)^*D^b(X^+))^\perp$, donc $\mathcal{A} \subset {}^\perp(\mathbf{L}(p^+)^*D^b(X^+))$.

Soit $C \in D^b(X^+)$ et soit $\bar{C}$ le cône du morphisme canonique $\mathbf{L}p^*\mathbf{R}p_*(\mathbf{L}(p^+)^*C) \to \mathbf{L}(p^+)^*C$. On a $\bar{C} \in (\mathbf{L}p^*D(X))^\perp \cap {}^\perp\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Par conséquent, le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(C, D) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^*C, \mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^*D)$$

est un isomorphisme pour tout $D \in D^b(X^+)$.

Supposons maintenant $k = l$. Soit $p^! = \mathbf{L}p^*(-) \otimes \omega_{\tilde{X}/X}[k]$. Le foncteur $\mathbf{R}p_*^+p^!$ est adjoint à droite de $\mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^*$. On montre, comme ci-dessus, que $\mathbf{R}p_*^+(\omega_{\tilde{X}/X}[k] \otimes \mathbf{L}p^*(-))$ est pleinement fidèle et finalement $\mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^*$ est une équivalence.$\square$

Remarque 4.5. — Il devrait en fait être vrai que $D^b(X)/\mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^*D^b(X^+)$ a une suite exceptionnelle complète de longueur $k - l$.

4.4. Flop de Mukai

4.4.1. Soit X une variété projective lisse de dimension $2n \geq 4$. Soit $i : Y = \mathbf{P}^n \hookrightarrow X$ une immersion fermée. On suppose $\mathcal{N}_{Y/X} \simeq \Omega^1_Y$. On considère comme précédemment l'éclatement $p : \tilde{X} \to X$. Soit $Y^\vee$ l'espace projectif dual. Alors, le diviseur exceptionnel $\tilde{Y}$ s'identifie à la variété d'incidence dans $Y \times Y^\vee$ et on a $\mathcal{N}_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}(-1,-1)_{|\tilde{Y}}$. On a alors une contraction $p^+ : \tilde{X} \to X^+$ de $\tilde{Y}$ sur $Y^\vee$ et on suppose X^+ projective.

Le foncteur $\mathbf{R}p_*\mathbf{L}(p^+)^* : D^b(X^+) \to D^b(X)$ n'est pas une équivalence (cf [29, Proposition 5.12] et [43, Corollary 2.2]). Par contre, un autre noyau fournit une équivalence (cf [29, Corollary 5.7] et [43, Theorem 4.4]).

Soient $f : X \to \bar{X}$ et $f^+ : X^+ \to \bar{X}$ les contractions de Y et Y^+ sur un point (flop de Mukai). Soit $\hat{X} = X \times_{\bar{X}} X^+$. Alors, $\hat{X} = \tilde{X} \cup (Y \times Y^+) \subset X \times X^+$ et l'intersection est à croisements normaux.

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi^+"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\
 & \bar{X} &
\end{tikzcd}$$

Théorème 4.6 (Kawamata, Namikawa). — *Le foncteur* $\Phi_{\mathcal{O}_{\hat{X}}} = \mathbf{R}\pi_*\mathbf{L}(\pi^+)^* : D^b(X^+) \to D^b(X)$ *est une équivalence.*

PREUVE (esquisse) — Il suffit de traiter le cas où $X = \operatorname{Spec}\Omega^1_Y$ et $i : Y \to X$ est la section nulle, car cela ne change pas le complété formel de X le long de Y (cf §3.1.2). La non-projectivité de X ne pose pas de problème nouveau. Soit $\mathcal{X} = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_Y(-1)^{n+1}$. La suite exacte $0 \to \Omega^1_Y \to \mathcal{O}_Y(-1)^{n+1} \to \mathcal{O}_Y \to 0$ fournit un morphisme lisse $\mathcal{X} \to \mathbf{A}^1$ et la fibre de 0 s'identifie à X.

On a $\mathcal{N}_{Y/\mathcal{X}} \simeq \mathcal{O}_Y(-1)^{n+1}$ et on a alors un flop standard $\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}^+$ (cf §4.3). Le foncteur $\Phi_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}} : D^b(\mathcal{X}^+) \to D^b(\mathcal{X})$ est une équivalence et il résulte de la proposition 3.5 que $\Phi_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}$ est une équivalence.□

Deux variétés projectives symplectiques birationnelles de dimension 4 sont connectées par une suite de flops de Mukai ([63, Theorem 1.2], [20, §8]; il faut en fait permettre la contraction simultanée de plusieurs $\mathbf{P}^2$ disjoints pour que les variétés intermédiaires restent projectives [62]). On déduit alors ([43, Corollary 4.5] et [29, Remark 5.13]) :

COROLLAIRE 4.7 (Kawamata, Namikawa). — *Deux variétés projectives symplectiques birationnelles de dimension* 4 *sont dérivé-équivalentes.*

4.4.2. Flop de Mukai stratifié. — Markman [40] a étudié une généralisation du flop de Mukai. Nous suivons ici la présentation de [44] et ne donnons que la version « linéarisée ».

Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $G(V,r)$ la Grassmannienne des sous-espaces de dimension r de V, où r est un entier $\leq n/2$. Soient $X = T^*G(V,r)$ et $\bar{X}$ la sous-variété fermée de $\operatorname{End}_{\mathbf{C}}(V)$ des endomorphismes a tels que $a^2 = 0$ et $\operatorname{rang}(a) \leq r$. On identifie $T^*G(V,r)$ à la variété des paires (W,ϕ) où W est un sous-espace de dimension r de V et $\phi \in \operatorname{Hom}(V/W, W)$. On dispose d'une application moment $f : X \to \bar{X}$ qui envoie (W,ϕ) sur la composition $a : V \twoheadrightarrow V/W \xrightarrow{\phi} W \hookrightarrow V$. L'application moment est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert des endomorphismes de rang r. On dispose de même d'une application moment $f^+ : X^+ = T^*G(V, n-r) \to \bar{X}$.

Le noyau « évident » ne fournit pas une équivalence dérivée, bien que sa classe dans K_0 soit adéquate [44, Theorem 2.7 et Observation 4.9]:

THÉORÈME 4.8 (Namikawa). — *L'application* $[\Phi_{\mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+}}] : K_0(X^+) \to K_0(X)$ *est un isomorphisme pour tous* n, r *mais* $\Phi_{\mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+}} : D^b(X^+) \to D^b(X)$ *n'est pas une équivalence pour* $n = 4$ *et* $r = 2$.

Dans le cas $n = 4$ et $r = 2$, Kawamata construit un noyau de la forme $\mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+} \otimes \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites, qui induit une équivalence [32].

Voyons maintenant une construction pour n, r généraux d'un noyau supporté par $X \times_{\bar{X}} X^+$ et induisant une équivalence dérivée.

Soit U la sous-variété ouverte de $G(V,r)\times G(V,n-r)$ des (W,W') tels que $W\cap W'=0$ et soit $\iota : U \to G(V,r)\times G(V,n-r)$ l'immersion ouverte.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\
 & G(V,r)\times G(V,n-r) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
G(V,r) & & G(V,n-r)
\end{tikzcd}$$

Il est classique [28, Exercice III.15] que la transformation de noyau $\iota_!\mathbf{C}_U$ induit une équivalence entre catégories dérivées de faisceaux constructibles de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels:

$$\mathbf{R}\alpha_!(\mathbf{C}_U\otimes\beta^{-1}(-)) : D^b_{\mathrm{cons}}(G(V,n-r))\xrightarrow{\sim}D^b_{\mathrm{cons}}(G(V,r))$$

Soit $\mathcal{K}$ le module de Hodge mixte correspondant à $\iota_!\mathbf{C}_U$. C'est un noyau inversible pour les transformations entre catégories dérivées de modules de Hodge mixtes. Soit $K=\mathrm{Gr}(\mathcal{K})$, un faisceau cohérent $\mathbf{G}_m$-équivariant sur $T^*(G(V,r)\times G(V,n-r))=X\times X^+$. Alors, l'inversibilité du noyau $\mathcal{K}$ montre que $\Phi_K : D^b(X^+)\to D^b(X)$ est une équivalence (c'est bien sûr aussi une équivalence pour les catégories $\mathbf{G}_m$-équivariantes).

Il serait intéressant de décrire explicitement le faisceau K. Kashiwara a proposé une description pour $n=4$ et $r=2$, qu'il faudrait comparer avec le noyau de [32].

Cette construction se généralise à des variétés de drapeaux paraboliques pour des groupes semi-simples complexes arbitraires. Dans le cas des variétés de drapeaux complets, une telle construction au niveau de la K-théorie a été effectuée par Tanisaki [55].

On peut aussi construire une équivalence $D^b(X^+)\xrightarrow{\sim}D^b(X)$ en regroupant les $D^b(T^*G(V,r))$, $0\le r\le\dim V$, et en appliquant les méthodes de [21].

4.5. Dimension 3

4.5.1. On expose ici la construction de Bridgeland [12] (voir aussi [19, 29, 61]).

Considérons un flop entre variétés projectives lisses de dimension 3 :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\
 & \bar{X} &
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.9. — Lorsque f ne contracte qu'une courbe irréductible C, alors $C\simeq\mathbf{P}^1$ et le fibré normal $\mathcal{N}_{C/X}$ est $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-2)$ ou $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(-3)$ (cf [22, Corollary 16.3]). Le premier cas est un flop standard (§4.3) et le second cas peut se traiter par des méthodes similaires [6, Theorem 3.9].

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \times_{\bar{X}} X^+ \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi^+"] & \\ X & & X^+ \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 4.10 (Bridgeland). — *Le foncteur* $\mathbf{R}\pi_*\mathbf{L}(\pi^+)^* : D^b(X^+) \to D^b(X)$ *est une équivalence.*

Bridgeland construit le flop f^+ à partir de f : la variété X^+ apparaît comme un espace de modules fin de certains objets de $D^b(X)$ (« faisceaux pervers ponctuels ») et le noyau de l'équivalence est le fibré universel. La détermination de ce fibré, et donc la forme précise du théorème 4.10, sont dues à Chen.

Un flop généralisé entre variétés projectives lisses de dimension 3 se décompose en une suite de flops [29, Theorem 4.6] et on en déduit:

COROLLAIRE 4.11. — *La conjecture 1.1 est vraie en dimension* 3.

4.5.2. Construction du flop et équivalence. — Soit $\bar{X}$ une variété projective connexe de Gorenstein de dimension 3. Soit $f : X \to \bar{X}$ une résolution crépante dont le lieu exceptionnel est union d'un nombre fini de courbes et soit D un diviseur sur X tel que $-D$ est relativement f-ample.

Le théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider montre, via la formule de projection, que $\mathbf{R}^{>0}f_*\mathcal{O}_X = 0$. Le foncteur $\mathbf{L}f^* : D(\bar{X}) \to D(X)$ est donc pleinement fidèle (variante de la proposition 3.3 pour les catégories dérivées non bornées que requiert la non-lissité de $\bar{X}$). Soit $\mathcal{B}$ son image. On a une décomposition semi-orthogonale $D(X) = \langle \mathcal{B}^\perp, \mathcal{B}\rangle$, où $\mathcal{B}^\perp = \{C \in D(X) | \mathbf{R}f_*C = 0\}$.

On construit une nouvelle t-structure sur $D(X)$ en recollant la t-structure standard de $\mathcal{B}$ avec celle de $\mathcal{B}^\perp$ décalée de 1 vers la gauche. Son cœur $\mathrm{Per}_{X/\bar{X}}$ (une catégorie abélienne) consiste en les $C \in D(X)$ tels que

- $\mathcal{H}^iC = 0$ pour $i \neq 0, 1$
- $f_*\mathcal{H}^{-1}C = 0$
- $\mathbf{R}^1f_*\mathcal{H}^0C = 0$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^0C, M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{B}^\perp \cap X$-coh.

On a $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Per}_{X/\bar{X}}$ et on dit que $E \in \mathrm{Per}_{X/\bar{X}}$ est un « faisceau pervers ponctuel » si

- E est un quotient de $\mathcal{O}_X$ (dans $\mathrm{Per}_{X/\bar{X}}$)
- la classe de Chern de E est égale à celle d'un faisceau gratte-ciel.

Soit S une variété. Une famille de faisceaux pervers ponctuels paramétrée par S est un objet $\mathcal{E} \in D^b(S \times X)$ tel que $\mathbf{L}j_s^*\mathcal{F} \in \mathrm{Per}_{X/\bar{X}}$ pour tout point (fermé) $s \in S$. Ici, $j_s : s \times X \to S \times X$ est l'inclusion. Deux familles qui diffèrent par le produit par un fibré inversible de S sont dites équivalentes.

On considère le foncteur qui à une variété S associe l'ensemble des classes d'équivalence de familles de faisceaux pervers ponctuels paramétrées par S. Bridgeland

[12, Theorem 3.8] démontre l'existence d'un espace de modules fin: le foncteur est représentable par une variété projective $M(X/\bar{X})$.

Soit U l'ouvert de $\bar{X}$ des points au-dessus desquels f est un isomorphisme. Alors, $\mathcal{O}_{f^{-1}(u)}$ est un faisceau pervers ponctuel pour tout $u \in U$. Ceci définit une immersion ouverte $U \to M(X/\bar{X})$ et on note X^+ l'adhérence de l'image (on montre en fait que $X^+ = M(X/\bar{X})$). On note $f^+ : X^+ \to \bar{X}$ le morphisme canonique. Chen [19, Proposition 4.2] montre que $\mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+}$ est un fibré universel.

Le théorème 4.10 admet la version plus précise suivante.

Théorème 4.12 (Bridgeland). — *Le foncteur* $\mathbf{R}\pi_*\mathbf{L}(\pi^+)^* : D^b(X^+) \to D^b(X)$ *est une équivalence. En outre,* $f^+ : X^+ \to \bar{X}$ *est un flop :* f^+ *est une résolution crépante et le transformé strict de* D *est relativement* f^+*-ample.*

La preuve est essentiellement la même que pour la correspondance de McKay [13]. L'outil-clef est un résultat d'algèbre commutative que nous rappelons maintenant (dans la version de [15, §5]).

Soient Z une variété irréductible et $C \in D^b(Z)$ non nul. Soit $\mathrm{Supp}(C)$ l'union des supports des $\mathcal{H}^i(C)$. Soit $\mathrm{ampl}(C)$ l'ensemble des $i \in \mathbf{Z}$ tels qu'il existe $z \in Z$ avec $\mathrm{Hom}(C, \mathcal{O}_z[-i]) \neq 0$. La dimension homologique de C est $\mathrm{hd}(C) = \sup(\mathrm{ampl}(C)) - \inf(\mathrm{ampl}(C))$.

Théorème 4.13 (« Nouveau théorème d'intersection »). — *On a* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Supp}(C) \leq \mathrm{hd}(C)$.

Soit $z \in Z$ *tel que* $\mathrm{Supp}(C) = \{z\}$, $\mathcal{H}^0(C) \simeq \mathcal{O}_z$ *et* $\mathrm{ampl}(C) \subseteq [-\dim Z, 0]$. *Alors,* z *est un point lisse de* Z *et* $C \simeq \mathcal{O}_z$.

Preuve du théorème 4.12 (esquisse) — Soit $p_X : X \times X^+ \to X$ la première projection. Soient $\mathcal{P} = \mathcal{O}_{X\times_{\bar{X}}X^+}$ et $\mathcal{P}_w = \Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_w)$ pour $w \in X^+$. Soient $\mathcal{P}' = \mathcal{P}^\vee \otimes p_X^*\omega_X[3]$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{P}' \circ \mathcal{P} \in D^b(X^+ \times X^+)$. On vérifie que $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_w, \mathcal{P}_{w'}[i]) = 0$ pour tout i, lorsque $f^+(w) \neq f^+(w')$ et on montre que $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_w, \mathcal{P}_{w'}) = \delta_{w,w'}\mathbf{C}$, d'où $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_{w'}, \mathcal{P}_w[3]) \simeq \delta_{w,w'}\mathbf{C}$ par dualité de Serre.

Soit $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_{|X^+\times X^+ - \Delta X^+}$. Le support de $\mathcal{Q}'$ est contenu dans $X^+\times_{\bar{X}} X^+ - \Delta X^+$, donc est de codimension ≥ 2, s'il est non vide. On a $\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}', \mathcal{O}_{w,w'}[i]) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_w, \mathcal{P}_{w'}[i])$, donc $\mathrm{hd}(\mathcal{Q}') \leq 1$. Le théorème 4.13 montre alors que $\mathcal{Q}' = 0$.

Le morphisme canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_w, \mathcal{O}_w[1]) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_w, \mathcal{P}_w[1])$ est injectif (il s'identifie à l'application de Kodaira-Spencer). On en déduit que $\mathcal{H}^0(\Phi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{O}_w)) \simeq \mathcal{O}_w$. On a $\mathrm{ampl}(\Phi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{O}_w)) = [-3, 0]$. Le théorème 4.13 montre que $\Phi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{O}_w) \simeq \mathcal{O}_w$ et que X^+ est lisse en w. La crépance de f permet alors de conclure que $\Phi_{\mathcal{P}}$ est une équivalence, via la proposition 3.2.

La crépance de f^+ s'obtient en utilisant la trivialité du foncteur de Serre de $D^b_F(X^+)$ pour toute fibre F de f^+ [13, Lemma 3.1]. On montre que $\Phi_{\mathcal{P}}[-1]$ se restreint en une équivalence entre faisceaux cohérents sur X^+ tués par $\mathbf{R}f^+_*$ et faisceaux cohérents sur X tués par $\mathbf{R}f_*$ et l'amplitude relative du transformé strict de D s'en déduit [12, §4.6].□

Remarque 4.14. — Il serait intéressant de voir si la même méthode fournit une construction de flips (cf [1] pour des résultats dans cette direction, en dimension quelconque).

4.6. Variétés singulières

Les constructions pour les variétés projectives lisses ont des généralisations à une classe plus large, dans le cadre du MMP [2, 19, 29, 30, 31, 61]. Ceci est utile pour construire des équivalences entre variétés projectives lisses, car il existe des décompositions de flops généralisés en flops qui font intervenir des variétés singulières. Kawamata démontre en particulier un théorème d'équivalence dérivée pour des flops particuliers entre champs de Deligne-Mumford toriques. Il en déduit qu'un flop torique généralisé donne lieu à une équivalence dérivée [31, Corollary 4.5]:

THÉORÈME 4.15 (Kawamata). — *Soient $f : Z \to X$ et $g : Z \to Y$ des morphismes toriques birationnels entre variétés toriques projectives lisses tels que $f^*\omega_X \simeq g^*\omega_Y$. Alors, $D^b(Y) \simeq D^b(X)$.*

Mentionnons pour terminer la nécessité de considérer des variétés analytiques et d'effectuer les constructions dans le cadre de la log-géométrie.

RÉFÉRENCES

[1] D. Abramovich and J.C. Chen, *Computations with moduli of perverse point sheaves*, preprint math.AG/0304353.

[2] D. Abramovich and J.C. Chen, *Flops, flips and perverse point sheaves on threefold stacks*, preprint math.AG/0304354.

[3] P. Balmer, *Presheaves of triangulated categories and reconstruction of schemes*, Math. Ann. **324** (2002), 557–580.

[4] A.A. Beilinson, *The derived category of coherent sheaves on P^n*, Selecta Math. Soviet. **3** (1983/84), 233–237 ou (en russe) Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), 68–69.

[5] A. Bondal et M.M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and mutations*, Math. USSR-Izv. **35** (1990), 519–541.

[6] A. Bondal et D. Orlov, *Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties*, preprint alg-geom/9506012.

[7] A. Bondal et D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), 327–344.

[8] A. Bondal et D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 47–56, Higher Ed. Press, 2002.

[9] A. Bondal et M. Van den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*, Moscow Math. J. **3** (2003), 1–36.

[10] T. Bridgeland, *Fourier-Mukai transforms for elliptic surfaces*, J. Reine Angew. Math. **498** (1998), 115–133.

[11] T. Bridgeland, *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 25–34.

[12] T. Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), 613–632.

[13] T. Bridgeland, A. King et M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.

[14] T. Bridgeland et A. Maciocia, *Complex surfaces with equivalent derived categories*, Math. Z. **236** (2001), 677–697.

[15] T. Bridgeland et A. Maciocia, *Fourier-Mukai transforms for $K3$ and elliptic fibrations*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 629–657.

[16] A. Căldăraru, *The Mukai pairing, I: the Hochschild structure*, preprint math.AG/0308079(v2).

[17] A. Căldăraru, *The Mukai pairing, II: the Hochschild-Kostant-Rosenberg isomorphism*, preprint math.AG/0308080(v3).

[18] A. Căldăraru, *Derived categories of sheaves: a skimming*, preprint math.AG/0501094.

[19] J.-C. Chen, *Flops and equivalences of derived categories for threefolds with only terminal Gorenstein singularities*, J. Differential Geom. **61** (2002), 227–261.

[20] K. Cho, Y. Miyaoka et N.I. Shepherd-Barron *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds*, in “Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)”, 1–88, Math. Soc. Japan, 2002.

[21] J. Chuang et R. Rouquier, *Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification*, preprint math.RT/0407205.

[22] H. Clemens, J. Kollar et S. Mori, *Higher-dimensional complex geometry*, Astérisque **166** (1988).

[23] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[24] A.L. Gorodentsev et S.A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), 377–440, 535.

[25] L. Hille et M. Van den Bergh, *Fourier-Mukai transforms*, preprint math.AG/0402043(v2).

[26] D. Huybrechts, “Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry”, livre en préparation.

[27] M.M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. Math. **92** (1988), 479–508.

[28] M. Kashiwara et P. Schapira, “Sheaves on manifolds”, Springer Verlag, 1990.

[29] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, J. Differential Geom. **61** (2002), 147–171.

[30] Y. Kawamata, *Francia’s flip and derived categories*, in “Algebraic geometry”, 197–215, de Gruyter, 2002.

[31] Y. Kawamata, *Equivalences of derived categories of sheaves on smooth stacks*, Amer. J. Math. **126** (2004), 1057–1083.

[32] Y. Kawamata, *Derived equivalence for stratified Mukai flop on $G(2,4)$*, preprint math.AG/0503101.

[33] Y. Kawamata, *Derived Categories of Toric Varieties*, preprint math.AG/0503102.

[34] A. King, *Tilting bundles on some rational surfaces*, preprint (1997), http://www.maths.bath.ac.uk/∼masadk/papers/tilt.ps

[35] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, 1995.

[36] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157–216.

[37] A. Kuznetsov, *Derived category of a cubic threefold and the variety V_{14}*, Tr. Mat. Inst. Steklova 246 (2004), 183–207.

[38] A. Kuznetsov, *Derived category of V_{12} Fano threefolds*, preprint math.AG/0310008.

[39] E. Looijenga, *Motivic measures*, Séminaire Bourbaki, exposé 874, Astérisque **276** (2002), 267–297.

[40] E. Markman, *Brill-Noether duality for moduli spaces of sheaves on $K3$ surfaces*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 623–694.

[41] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.

[42] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on $K3$ surfaces. I*, in "Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984)", 341–413, Tata Inst. Fund. Res., 1987.

[43] Y. Namikawa, *Mukai flops and derived categories*, J. Reine Angew. Math. **560** (2003), 65–76.

[44] Y. Namikawa, *Mukai flops and derived categories. II*, in "Algebraic structures and moduli spaces", 149–175, Amer. Math. Soc., 2004.

[45] D. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), 133–141.

[46] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), 1361–1381.

[47] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Math. **66** (2002), 569–594.

[48] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and equivalences between them*, Russian Math. Surveys 58 (2003), no. 3, 511–591.

[49] A. Polishchuk, "Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform", Cambridge University Press, 2003.

[50] M. Reid, *La correspondance de McKay*, Séminaire Bourbaki, exposé 867, Astérisque **276** (2002), 53–72.

[51] R. Rouquier, *Catégories dérivées et géométrie algébrique*, notes d'exposés, janvier 2004, http://www.math.jussieu.fr/∼rouquier/preprints/luminy.dvi

[52] R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories*, preprint math.CT/0310134(v3).

[53] A. Rudakov, *Rigid and exceptional vector bundles and sheaves on a Fano variety*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1 (Zürich, 1994), 697–705, Birkhäuser 1995.

[54] R. Swan, *Hochschild cohomology of quasiprojective schemes*, J. Pure Appl. Algebra **110** (1996), 57–80.

[55] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), 841–879.

[56] R.W. Thomason, *Les K-groupes d'un fibré projectif*, in "Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, 1991)", 243–248, Kluwer, 1993.

[57] R.W. Thomason, *Les K-groupes d'un schéma éclaté et une formule d'intersection excédentaire*, Invent. Math. **112** (1993), 195–215.

[58] R.W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories*, Compositio Math. **105** (1997), 1–27.

[59] B. Toen, *The homotopy category of dg-categories and derived Morita theory*, preprint math.AG/0408337(v5).

[60] H. Uehara, *An example of Fourier-Mukai partners of minimal elliptic surfaces*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 371–375.

[61] M. Van den Bergh, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. **122** (2004), 423–455.

[62] J. Wierzba, *Birational geometry of symplectic 4-folds*, preprint, http://www.dpmms.cam.ac.uk/∼jw227/publications.html.

[63] J. Wierzba et J.A. Wiśniewski, *Small contractions of symplectic 4-folds*, Duke Math. J. **120** (2003), 65–95.

Raphaël ROUQUIER

Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586 du CNRS
UFR de Mathématiques, Université Paris 7
Case 7012
2 place Jussieu
F–75251 PARIS Cédex 05
E-mail : `rouquier@math.jussieu.fr`