Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ACADEMIC PRESS

Journal of Algebra 257 (2002) 482–508

JOURNAL OF Algebra

www.academicpress.com

Complexes de chaînes étales et courbes de Deligne–Lusztig

Raphaël Rouquier

UFR de Mathématiques et Institut de Mathématiques de Jussieu (CNRS UMR 7586), Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Reçu le 1er mars 2002

Communicated by Michel Broué

Dedicated to J.G. Thompson on his 70th birthday

Abstract

In a first part, we lift the usual constructions of functors between derived categories of étale sheaves over schemes with a sheaf of algebras to pure derived categories. For varieties with finite group actions, we recover, in a more functorial way, Rickard's construction.

We apply this to the case of Deligne–Lusztig varieties and show that Broué's conjecture holds for curves. The additional ingredient we need is obtained from an easy property of the cohomology of etale covers of the affine line.

1. Introduction

La motivation de notre travail est l'étude du complexe de cohomologie des variétés de Deligne–Lusztig.

Dans la première partie de ce travail, nous relevons les constructions habituelles reliant des catégories dérivées de faisceaux étales sur un schéma muni d'un faisceau d'algèbres aux catégories dérivées pures (un analogue de la dualité de Poincaré reste à développer). Pour des variétés munies d'une action de groupe (ou de monoïde), nous obtenons ainsi un complexe représentant la cohomologie

Adresse e-mail : rouquier@math.jussieu.fr.

PII: S0021-8693(02)00530-6

qui possède de bonnes propriétés de finitude. Nous retrouvons la construction (indirecte) de Rickard de complexes pour des variétés munies d'actions de groupes finis.

M. Broué [7] conjecture que le complexe de cohomologie ℓ-adique de certaines variétés de Deligne–Lusztig induit une équivalence de Rickard (en particulier une équivalence de catégories dérivées) entre un bloc à groupe de défaut abélien d'un groupe réductif connexe sur un corps fini et le bloc correspondant du normalisateur d'un sous-groupe de défaut.

Broué et Michel [8] ont construit des actions de monoïdes de tresses, en plus des actions de groupes finis à l'origine des travaux de Deligne et Lusztig. Nous sommes alors à même de construire des complexes qui fournissent les invariants souhaités de ces variétés. La compatibilité de ces constructions avec les méthodes locales de théorie des blocs (foncteur de Brauer) est une conséquence immédiate de nos constructions (on retrouve le complexe de chaînes des points fixes par un ℓ-groupe).

Pour établir les conjectures de Broué, il reste à montrer que l'action du groupe des tresses sur la cohomologie se factorise par une algèbre de Hecke, ce qui est connu dans un certain nombre de cas [12] et à montrer une propriété de disjonction du complexe de cohomologie. Cette dernière partie est très mystérieuse pour le moment. Nous parvenons à l'établir lorsque les variétés de Deligne–Lusztig sont des courbes (les groupes concernés sont alors de type A_1, ${}^2A_2$, ${}^2B_2$ ou ${}^2G_2$). En effet, nous sommes alors en présence de revêtements étales de la droite affine. Il est alors facile de voir que le complexe de cohomologie possède de bonnes propriétés—c'est en fait un cas particulier de propriétés de la cohomologie de certains groupes profinis (cf. §3). Nous montrons plus généralement (Théorème 4.5) que, sous une hypothèse de cyclicité du groupe de Weyl relatif, alors la propriété de disjonction du complexe de cohomologie est suffisante pour démontrer la conjecture.

2. Relèvements

Les résultats exposés ici sont, pour l'essentiel, valides pour des topos annelés admettant des ensembles conservatifs de points. Nous utiliserons ici exclusivement la topologie étale.

Nous renvoyons au §2.4 la partie purement algébrique.

2.1. Notations

Sauf mention expresse du contraire, toutes les actions considérées sont des actions à gauche.

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie additive, on note $\mathrm{Comp}(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Comp}^?(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine des complexes bornés si $? = b$, bornés supérieurement si bornés inférieurement si $? = -$. On note $\mathrm{Ho}^?(\mathcal{C})$ la catégorie correspondante des complexes à homotopie près.

Soit X un schéma et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur X.

On note $\mathcal{A}$-Mod la catégorie des $\mathcal{A}$-modules. On note $\mathrm{Comp}^?(\mathcal{A})$ (respectivement $\mathrm{Ho}^?(\mathcal{A})$) la catégorie $\mathrm{Comp}^?(\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod})$ (respectivement $\mathrm{Ho}^?(\mathcal{A}\text{-}\mathrm{Mod})$). On note $D(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$-Mod.

Si V et W sont deux complexes de $\mathcal{A}$-modules, on notera $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{A}}(V,W)$ le complexe total associé au complexe double $(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(V^i,W^j))_{i,j})$. On note $\tau_{\leqslant n}$ et $\tau_{\geqslant n}$ les foncteurs de troncation.

Rappelons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit *flasque* si pour tout ouvert étale U de X, on a $H^i(U,\mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$.

Lorsque $\mathcal{A}$ est le faisceau constant associé à l'algèbre A et M est un A-module, on notera encore M le faisceau constant associé, vu comme un $\mathcal{A}$-module.

Soit A une algèbre. Soit $\mathcal{U}$ une sous-catégorie pleine de A-Mod. On notera $\hat{\mathcal{U}}$ la plus petite sous-catégorie additive pleine de A-Mod contenant $\mathcal{U}$, close par produits infinis et colimites filtrantes (donc par facteurs directs). On notera $\mathcal{U}^{\oplus}$ la plus petite sous-catégorie additive pleine de A-Mod contenant $\mathcal{U}$ et close par facteurs directs.

Si M est un A-module, on note $\mathrm{add}(M)$ la plus petite sous-catégorie additive pleine de A-Mod contenant M et close par facteurs directs. On notera A-mod la catégorie des A-modules de type fini.

On notera A° l'algèbre opposée à A.

2.2. *Catégories dérivées pures*

2.2.1. *Définitions*

Nous reprenons ici la construction classique de la catégorie dérivée pure.

Un complexe C de $\mathcal{A}$-modules est dit *purement acyclique* si et seulement si $P \otimes_{\mathcal{A}} C$ est acyclique pour tout $\mathcal{A}$-module à droite P. En particulier, un complexe purement acyclique est acyclique.

Lemme 2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes, pour C un complexe de $\mathcal{A}$-modules* :

- (i) *C est purement acyclique* ;
- (ii) *$\tau_{\leqslant n}C$ est purement acyclique pour tout n* ;
- (iii) *$\tau_{\geqslant n}C$ est purement acyclique pour tout n* ;
- (iv) *pour tout $\mathcal{A}$-module M localement de présentation finie, le complexe $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{A}}(M,C)$ est acyclique* ;
- (v) *pour tout point géométrique x de X, le complexe de $\mathcal{A}_x$-modules C_x est purement acyclique* ;
- (vi) *pour tout point géométrique x de X et pour tout $\mathcal{A}_x$-module N de présentation finie, le complexe $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}_x}(N,C_x)$ est acyclique.*

Démonstration. L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) est immédiate.

L'équivalence entre (i) et (v) et entre (iv) et (vi) résulte immédiatement de ce que tout $\mathcal{A}_x$-module (respectivement tout $\mathcal{A}_x$-module de présentation finie) provient d'un $\mathcal{A}$-module (respectivement d'un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie).

L'équivalence entre (v) et (vi) est [5, §5, Exercice 1]. □

Définition 2.2. La catégorie dérivée pure $\widetilde{D}(\mathcal{A})$ est la catégorie triangulée quotient de la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ des complexes de $\mathcal{A}$-modules par la sous-catégorie pleine des complexes purement acycliques.

On a des foncteurs canoniques de passage au quotient

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}).$$

Notons qu'un morphisme $f : M \to N$ de complexes de $\mathcal{A}$-modules devient un isomorphisme dans $\widetilde{D}(\mathcal{A})$ si et seulement si pour tout $\mathcal{A}$-module à droite P, alors $1_P \otimes_{\mathcal{A}} f$ est un quasi-isomorphisme. La catégorie $\widetilde{D}(\mathcal{A})$ est la localisation de $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ en ces flèches.

Remarque 2.3. Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres semi-simples, alors $\widetilde{D}(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A})$.

On verra que si X est le spectre d'un corps algébriquement clos et $\mathcal{A}$ est artinien, alors le foncteur canonique $\mathrm{Ho}^b(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle (Corollaire 2.26).

Les constructions de colimites filtrantes dans $\mathrm{Comp}(\mathcal{A})$ passent à $\widetilde{D}(\mathcal{A})$. Les foncteurs de troncation de $\mathrm{Comp}(\mathcal{A})$ passent à $\widetilde{D}(\mathcal{A})$.

Pour $? \in \{+, -, b\}$, on définit la catégorie quotient $\widetilde{D}^?(\mathcal{A})$ de $\mathrm{Ho}^?(\mathcal{A})$ par les complexes purement acycliques. Le foncteur canonique $\widetilde{D}^?(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle (on le voit comme pour les catégories dérivées usuelles, à l'aide des foncteurs de troncation).

On définit $\widetilde{D}^{(+)}(\mathcal{A})$ comme la catégorie quotient de la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ des complexes M tels que $\tau_{\leqslant n} M$ est purement acyclique pour $n \ll 0$ par la sous-catégorie des complexes purement acycliques. Le foncteur canonique $\widetilde{D}^{(+)}(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. On définit de même $\widetilde{D}^{(?)}(\mathcal{A})$. Le foncteur canonique $\widetilde{D}^{(?)}(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. Le foncteur canonique $\widetilde{D}^?(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}^{(?)}(\mathcal{A})$ est une équivalence.

2.2.2. Bifoncteurs $\otimes$ et $\mathcal{H}om^\bullet$

Les foncteurs $\otimes$ et $\mathcal{H}om^\bullet$ passent (sous certaines hypothèses) trivialement au quotient :

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{B}$ un faisceau d'algèbres sur X et M un $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$-bimodule. Le foncteur $M \otimes_{\mathcal{A}} -$ induit un foncteur $\widetilde{D}(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{B})$.*

Supposons maintenant que M est localement de présentation finie comme $\mathcal{B}$-module. Alors $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M,-)$ induit un foncteur $\widetilde{D}(\mathcal{B}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$ et on a une paire d'adjonction $(M \otimes_{\mathcal{A}} -, \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M,-))$ entre foncteurs $\widetilde{D}(\mathcal{B}) \rightleftarrows \widetilde{D}(\mathcal{A})$.

Démonstration. Il s'agit de voir que les foncteurs préservent les objets purement acycliques. L'adjonction au niveau des catégories $\widetilde{D}$ résulte de l'adjonction au niveau des catégories Comp.

Soit V un complexe purement acyclique de $\mathcal{A}$-modules. Pour tout $\mathcal{B}$-module à droite P, le complexe $P \otimes_{\mathcal{B}} (M \otimes_{\mathcal{A}} V) \xrightarrow{\sim} (P \otimes_{\mathcal{B}} M) \otimes_{\mathcal{A}} V$ est acyclique, donc $M \otimes_{\mathcal{A}} V$ est purement acyclique.

Soit P un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie et V un complexe purement acyclique de $\mathcal{B}$-modules. Alors $M \otimes_{\mathcal{A}} P$ est localement de présentation finie comme $\mathcal{A}$-module, donc $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M \otimes_{\mathcal{A}} P, V)$ est acyclique (Lemme 2.1). Puisque $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{A}}(P, \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M,V)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M \otimes_{\mathcal{A}} P, V)$, alors $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{A}}(P, \mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M,V))$ est acyclique, d'où $\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{B}}(M,V)$ est purement acyclique (Lemme 2.1). □

2.2.3. Foncteur f^*

Soit $f: X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur S.

Proposition 2.5. *Le foncteur $f^*: \mathrm{Comp}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Comp}(f^*\mathcal{A})$ induit un foncteur $\widetilde{D}(\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(f^*\mathcal{A})$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que f^*C est purement acyclique lorsque C l'est. Soit x un point géométrique de X et P un $f^*\mathcal{A}$-module à droite. On a

$$\left(P \otimes_{f^*\mathcal{A}} f^*C\right)_x \simeq P_x \otimes_{(f^*\mathcal{A})_x} \left(f^*C\right)_x \simeq P_x \otimes_{\mathcal{A}_{f(x)}} C_{f(x)}.$$

La proposition résulte alors du fait que l'acyclicité pure se lit sur les fibres. □

2.2.4. Résolutions de Godement

On pose $\mathcal{B} = f^*\mathcal{A}$. Pour D un complexe de $\mathcal{B}$-modules, on note $C(D)$ la résolution de Godement de D [3, XVII, §3.1.2]. Rappelons cette construction.

Soit X^0 un ensemble conservatif de points de X. Pour $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-module, on pose $C^0(\mathcal{F}) = u_*u^*\mathcal{F}$ où u est le morphisme produit $\prod_{x \in X^0} x \to X$. Un faisceau de la forme u_*G sera dit *induit*. L'unité de la paire adjointe (u^*, u_*) fournit un morphisme injectif fonctoriel $\varepsilon(\mathcal{F}): \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F})$. On pose $C^1(\mathcal{F}) = C^0(\operatorname{coker}\varepsilon(\mathcal{F}))$ et on note d^0 la composition

$$C^0(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \operatorname{coker}\varepsilon(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon(\operatorname{coker}\varepsilon(\mathcal{F}))} C^1(\mathcal{F}).$$

On définit enfin par récurrence $C^{i+1}(\mathcal{F}) = C^0(\operatorname{coker} d^{i-1})$ et d^i comme la composition

$$C^i(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \operatorname{coker} d^{i-1} \xrightarrow{\varepsilon(\operatorname{coker} d^{i-1})} C^{i+1}(\mathcal{F}).$$

Le complexe $C(\mathcal{F})$ est alors le complexe $(C^i(\mathcal{F}), d^i)$. On a ainsi construit un foncteur $C : \mathcal{B}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Comp}^+(\mathcal{B})$.

On notera $C_{\leqslant n}(\mathcal{F})$ le complexe $\tau_{\leqslant n} C(\mathcal{F})$ pour $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ (on prend $C_{\leqslant\infty} = C$). On a un isomorphisme $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} C_{\leqslant 0}(\mathcal{F})$.

On en déduit un endofoncteur de $\mathrm{Comp}(\mathcal{B})$ obtenu par complexe total (formé avec $\oplus$), encore noté $C_{\leqslant n}$.

Rassemblons quelques propriétés utiles.

Proposition 2.6.

(i) *Les foncteurs $C_{\leqslant n}$ sont exacts.*

(ii) *Les morphismes canoniques $C_{\leqslant m}(\mathcal{F}) \to C_{\leqslant n}(\mathcal{F})$ induisent des isomorphismes dans $\widetilde{D}(\mathcal{B})$, pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Comp}(\mathcal{B})$ et $m \leqslant n$. En particulier, on a un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} C(\mathcal{F})$ dans $\widetilde{D}(\mathcal{B})$.*

(iii) *Les faisceaux $C^n(\mathcal{F})$ sont induits, donc flasques.*

(iv) *Soit M un $\mathcal{B}$-module localement de présentation finie. Alors, pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Comp}(\mathcal{B})$, on a un isomorphisme fonctoriel $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, C_{\leqslant m}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} C_{\leqslant m}(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}))$ pour tout $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.*

(v) *Soit P un $\mathcal{B}$-module à droite localement de présentation finie. Alors, on a isomorphisme canonique $P \otimes_{\mathcal{B}} C_{\leqslant m}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} C_{\leqslant m}(P \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Comp}(\mathcal{B})$ et tout $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. Les assertions (i)–(iii) sont [3, XVII, Proposition 4.2.3]. L'assertion (iv) est immédiate.

L'isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_x}(M_x, \mathcal{F}_x)$ pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X et x point géométrique montre que l'on a des isomorphismes canoniques

$$u_* u^* \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_* \mathcal{H}om_{u^*\mathcal{B}}\big(u^* M, u^* \mathcal{F}\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}\big(M, u_* u^* \mathcal{F}\big).$$

La suite

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}\big(M, u_* u^* \mathcal{F}\big) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}\big(M, \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{F})\big) \to 0$$

est exacte, car $0 \to \mathcal{F} \to u_* u^* \mathcal{F} \to \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{F}) \to 0$ est purement acyclique (Lemme 2.1). Par conséquent, on a un diagramme commutatif dont les suites horizontales sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \varepsilon(\mathcal{F}))"] \arrow[d, "="'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, u_* u^* \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{F})) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}) \arrow[r, "\varepsilon(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}))"] & u_* u^* \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F}) \arrow[r] & \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(M, \mathcal{F})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit (iv).

A partir d'une présentation locale $\mathcal{B}^r \to \mathcal{B}^s \to P \to 0$, on déduit que le morphisme canonique $P \otimes_{\mathcal{B}} C^0(\mathcal{F}) \to C^0(P \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$ est un isomorphisme. Puisque la suite exacte $0 \to \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}) \to \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{F}) \to 0$ est scindée en les fibres, on obtient une suite exacte $0 \to P \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \to P \otimes_{\mathcal{B}} C^0(\mathcal{F}) \to P \otimes_{\mathcal{B}} \operatorname{coker} \varepsilon(\mathcal{F}) \to 0$. On en déduit l'assertion (v). □

Construisons maintenant un morphisme de foncteurs $\gamma(f): Cf_* \to f_*C$, suivant [1].

Le morphisme $f^*f_* \to 1$ fournit, pour tout point géométrique x de X, un morphisme $(f_*\mathcal{F})_y \to \mathcal{F}_x$, où $y = f(x)$. On a donc un morphisme $(f_*\mathcal{F})_y \to \prod_{x \in f^{-1}(y)} \mathcal{F}_x$ dont on déduit un morphisme $Cf_*\mathcal{F} \to f_*C\mathcal{F}$.

Lorsque X est un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos, on prendra pour X^0 l'ensemble des points fermés $\operatorname{Spec} k \to X$.

2.2.5. Foncteur $\widetilde{R}f_*$

Nous relevons ici le foncteur $Rf_*: D^+(f^*\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{A})$ en un foncteur $\widetilde{R}f_*: \widetilde{D}^+(f^*\mathcal{A}) \to \widetilde{D}^+(\mathcal{A})$.

Proposition 2.7. *Le foncteur $f_*C: \mathrm{Comp}^+(f^*\mathcal{A}) \to \mathrm{Comp}^+(\mathcal{A})$ induit un foncteur*

$$\widetilde{R}f_*: \widetilde{D}^+\big(f^*\mathcal{A}\big) \to \widetilde{D}^+(\mathcal{A})$$

qui relève le foncteur Rf_*.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Comp}^+(f^*\mathcal{A})$ purement acyclique. Il s'agit de montrer que $f_*C(\mathcal{F})$ est purement acyclique. Soit M un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om^\bullet_{\mathcal{A}}\big(M, f_*C(\mathcal{F})\big) &\xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{H}om^\bullet_{f^*\mathcal{A}}\big(f^*M, C(\mathcal{F})\big)\\ &\xrightarrow{\sim} f_*C\big(\mathcal{H}om^\bullet_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F})\big)\end{aligned}$$

d'après la Proposition 2.6 (iv). Puisque $\mathcal{F}$ est purement acyclique, le complexe $\mathcal{H}om^\bullet_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F})$ est acyclique, donc $f_*C(\mathcal{H}om^\bullet_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F}))$ est acyclique car $C(\mathcal{H}om^\bullet_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F}))$ est un complexe acyclique borné à gauche de faisceaux flasques, ce qui montre que $f_*C(\mathcal{F})$ est purement acyclique.

Finalement, f_*C relève Rf_* puisque $C(\mathcal{F})$ est un complexe de faisceaux f_*-acycliques quasi-isomorphe à $\mathcal{F}$. □

Avec des hypothèses de finitude, le foncteur s'étend aux complexes non bornés :

Proposition 2.8. *Si $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $f^*\mathcal{A}$-module $\mathcal{F}$ et tout entier $i > m$, alors le foncteur $f_*C: \mathrm{Comp}(f^*\mathcal{A}) \to \mathrm{Comp}(\mathcal{A})$ induit un foncteur*

$$\widetilde{R}f_*: \widetilde{D}\big(f^*\mathcal{A}\big) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$$

qui relève le foncteur Rf_* et on a un isomorphisme canonique $f_*C_{\leqslant m} \xrightarrow{\sim} f_*C$.

Démonstration. La première assertion se prouve comme la Proposition 2.7.

Pour $\mathcal{F}$ un $f^*\mathcal{A}$-module et $D = 0 \to D^0 \to D^1 \to \cdots$ une résolution f_*-acyclique de $\mathcal{F}$, alors $\tau_{\leqslant m} D$ est encore une résolution f_*-acyclique. Soit maintenant M un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*C\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] & f_*C\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F}) \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*C_{\leqslant m}\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & f_*C_{\leqslant m}\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, \mathcal{F}) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes sont dans les catégories dérivées, les isomorphismes horizontaux étant analogues à ceux de la preuve de la Proposition 2.7.

Par conséquent, le morphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*C_{\leqslant m}\mathcal{F}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*C\mathcal{F})$$

est un quasi-isomorphisme, donc le cône du morphisme canonique $f_*C_{\leqslant m}\mathcal{F} \to f_*C\mathcal{F}$ est purement acyclique. □

Supposons que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Le faisceau $\mathcal{A}$ est constant de valeur A. On notera $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathcal{F})$ le complexe $\widetilde{R}f_*(\mathcal{F})$ de $\widetilde{D}(A)$. Soit Γ un monoïde agissant sur X. Alors, $\widetilde{R}f_*(f^*\mathcal{A})$ est un complexe de $A\Gamma$-modules borné à gauche. Sa cohomologie est $H^*(X, A)$.

N'importe quelle résolution par des modules induits permet de calculer le foncteur $\widetilde{R}f_*$:

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{F}$ un $f^*\mathcal{A}$-module induit. Alors, le morphisme canonique $f_*\mathcal{F} \to \widetilde{R}f_*\mathcal{F}$ est un isomorphisme dans $\widetilde{D}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}(M, \mathcal{F})$ est encore induit, pour M un $f^*\mathcal{A}$-module localement de présentation finie. On en déduit facilement que si N est un complexe purement acyclique de $f^*\mathcal{A}$-modules induits, alors, f_*N est purement acyclique. Le lemme résulte de ce résultat appliqué au cône du morphisme canonique $\mathcal{F} \to C(\mathcal{F})$. □

Remarque 2.10. Il est probable que l'image par f_* d'un complexe purement acyclique de modules f_*-acycliques n'est pas toujours purement acyclique.

Soit $f' : X' \to X$ un morphisme de schémas. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Comp}^+((ff')^*\mathcal{A})$. Le morphisme canonique $f_*f'_*C(\mathcal{F}) \to f_*C(f'_*C(\mathcal{F}))$ est un isomorphisme dans

$\widetilde{D}(\mathcal{A})$, car les composantes de $f'_*C(\mathcal{F})$ sont induites (Lemme 2.9). On en déduit un isomorphisme canonique

$$\widetilde{R}(ff')_* \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}f_*\widetilde{R}f'_*.$$

La paire adjointe (f^*, f_*) de foncteurs entre $\mathcal{A}$-modules et $f^*\mathcal{A}$-modules induit une paire adjointe $(f^*, \widetilde{R}f_*)$.

Lemme 2.11. *Si f est un morphisme fini et $\mathcal{F}$ un faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules, alors on a un isomorphisme canonique dans $\widetilde{D}(\mathcal{A})$*

$$f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}f_*\mathcal{F}.$$

Démonstration. Soit D un complexe purement acyclique de $f^*\mathcal{A}$-modules et M un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie. On a $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*D) \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, D)$. Puisque f_* est exact et $\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}(f^*M, D)$ est acyclique, on en déduit que $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, f_*D)$ est acyclique. On déduit le lemme en prenant pour D le cône du morphisme canonique $\mathcal{F} \to C(\mathcal{F})$. $\square$

Considérons un carré commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "\pi"'] & S \end{tikzcd}$$

On définit un morphisme de changement de base

$$\pi^*\widetilde{R}f_* \to \widetilde{R}f'_*(\pi')^*$$

comme adjoint du morphisme

$$\begin{aligned} \widetilde{R}f_* = f_*C \ &\to\ f_*C\pi'_*(\pi')^* \xrightarrow{f_*\gamma(\pi')(\pi')^*} f_*\pi'_*C(\pi')^* \\ &\to\ \widetilde{\pi}_*f'_*C(\pi')^* = \pi_*\widetilde{R}f'_*(\pi')^*. \end{aligned}$$

Le théorème suivant assure que c'est un isomorphisme dans les catégories $\widetilde{D}$ dès que c'est un isomorphisme dans les catégories dérivées.

Théorème 2.12. *Considérons un carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "\pi"'] & S \end{tikzcd}$$

Si le morphisme de changement de base $\pi^*\widetilde{R}f_*\mathcal{F} \to \widetilde{R}f'_*(\pi')^*\mathcal{F}$ est un isomorphisme dans $D(\pi^*\mathcal{A})$ pour tout faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules $\mathcal{F}$, alors, c'est un isomorphisme dans $\widetilde{D}(\pi^*\mathcal{A})$, pour tout faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules $\mathcal{F}$.

En particulier, on a un isomorphisme de changement de base dans $\widetilde{D}(\pi^*\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ est un faisceau de torsion et

- *f est propre ;*
- *ou f est quasi-compact, π est lisse et la torsion de $\mathcal{A}$ est inversible sur S.*

Démonstration. Soit M un $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie. On a une série d'isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_{\pi^*\mathcal{A}}\big(\pi^*M, \pi^* f_* C(\mathcal{F})\big) &\simeq \pi^*\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}\big(M, f_*C(\mathcal{F})\big)\\ &\simeq \pi^* f_* C\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}\big(f^*M, \mathcal{F}\big)\end{aligned}$$

(Proposition 2.6(iv)). Par hypothèse, le morphisme canonique

$$\pi^* f_* C\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}\big(f^*M, \mathcal{F}\big) \to f'_* C(\pi')^*\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}\big(f^*M, \mathcal{F}\big)$$

est un quasi-isomorphisme. Enfin, on a les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}f'_* C(\pi')^*\mathcal{H}om_{f^*\mathcal{A}}\big(f^*M, \mathcal{F}\big) &\simeq f'_* C\mathcal{H}om_{(\pi')^* f^*\mathcal{A}}\big((\pi')^* f^*M, (\pi')^*\mathcal{F}\big)\\ &\simeq \mathcal{H}om_{\pi^*\mathcal{A}}\big(\pi^*M, f'_*C(\pi')^*\mathcal{F}\big).\end{aligned}$$

Puisque le morphisme de changement de base devient un quasi-isomorphisme après application du foncteur $\mathcal{H}om_{\pi^*\mathcal{A}}(\pi^*M, -)$, pour tout $\mathcal{A}$-module localement de présentation finie M, le théorème est établi.

La véracité des théorèmes de changements de base usuels est donnée par [3, XII, Théorème 5.1] et [3, XVI, Corollaire 1.2]. $\square$

2.2.6. Foncteur $\widetilde{R}f_!$

Lemme 2.13. *Si f est étale, alors $f_!$ induit un foncteur $\widetilde{D}(f^*\mathcal{A}) \to \widetilde{D}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Pour P un $\mathcal{A}$-module à droite et $N \in \mathrm{Comp}(f^*\mathcal{A})$, on a un isomorphisme de complexes $P \otimes_{\mathcal{A}} f_!N \simeq f_!(f^*P \otimes_{f^*\mathcal{A}} N)$. Donc, si N est purement acyclique, alors $f_!N$ l'est aussi, puisque $f_!$ est exact. $\square$

Considérons une compactification de X. On a $i : X \to Y$ une immersion ouverte, $p : Y \to S$ propre et $f = pi$.

Alors, on pose $\widetilde{R}f_! = \widetilde{R}p_* \cdot i_!$.

On montre de la manière usuelle [3, XVII, §5.1.7] que $\widetilde{R}f_!$ est indépendant de la compactification (grâce au Théorème 2.12). On a des isomorphismes de transitivité pour la composition de deux morphismes et on dispose d'un théorème de changement de base.

Lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, on note $\widetilde{R}\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ le complexe $\widetilde{R}f_!(\mathcal{F})$.

2.2.7. Foncteur $\widetilde{R}f^!$

En procédant comme dans [3, XVIII, §3], on construit un adjoint à droite au foncteur $\widetilde{R}f_!$. Pour f lisse, il n'est pas isomorphe, en général, à un décalé de f^* (cf. la remarque suivante), i.e., on ne dispose pas de la dualité de Poincaré sous sa forme habituelle.

Remarque 2.14. Soit X la droite affine sur k un corps algébriquement clos, ℓ un nombre premier inversible dans k et $G = \mu_\ell(k)$ agissant par multiplication sur X. Les complexes $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{F}_\ell)$ et $\widetilde{R}\Gamma_c(X, \mathbf{F}_\ell)$ sont canoniquement isomorphes à des objets de $\mathrm{Ho}^b(\mathbf{F}_\ell G)$ (cf. §2.5.1 et Corollaire 2.26). Alors, $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{F}_\ell)$ est un complexe de $\mathbf{F}_\ell G$-modules homotope à $\mathbf{F}_\ell$ (complexe concentré en degré 0), mais $\widetilde{R}\Gamma_c(X, \mathbf{F}_\ell)$ est homotope à $0 \to \mathbf{F}_\ell \to \mathbf{F}_\ell G \to \mathbf{F}_\ell G \to 0$ (ici, $\mathbf{F}_\ell$ est en degré 0 et l'homologie est concentrée en degré 2). Ainsi, $\widetilde{R}\Gamma(X)$ et $\widetilde{R}\Gamma_c(X)$ ne sont pas duaux l'un de l'autre (après décalage) dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G)$.

2.2.8. Cas ℓ-adique

Soit ℓ un nombre premier inversible sur X.

On suppose que X est un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos. On définit $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{Z}_\ell)$ comme la limite projective des $\Gamma(X, C_{\leqslant 2\dim X}\mathbf{Z}/\ell^n)$, les morphismes de transition étant fournis par la Proposition 2.6(v). Si $\mathcal{O}$ est une $\mathbf{Z}_\ell$-algèbre plate, on pose $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathcal{O}) = \widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathcal{O}$.

2.3. Propriétés de finitude

2.3.1. Constructibilité

Nous supposons dans §2.3.1

- que $R^i f_*\mathcal{F}$ est constructible pour tout entier i et tout $f^*\mathcal{A}$-module constructible $\mathcal{F}$ et ;
- qu'il y a un entier m tel que $R^i f_*\mathcal{F} = 0$ pour tout $f^*\mathcal{A}$-module constructible $\mathcal{F}$ et tout entier $i > m$.

Cette hypothèse est vérifiée par exemple lorsque X et S sont des schémas de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension 0 ou 1 et $\mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres noethériennes à gauche et de torsion, tuée par un entier inversible sur S [10, Théorème 1.1 et Remarque 1.3 p. 233]. Le cas usuel est celui où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k, $\mathcal{A}$ une algèbre noethérienne de torsion première à la caractéristique de k et X un schéma de type fini sur k : on peut alors prendre $m = 2\dim X$.

On note $\mathrm{Comp}^?_c(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Comp}^?(\mathcal{A})$ des complexes à cohomologie constructible et $\widetilde{D}^?_c(\mathcal{A})$ son image essentielle dans $\widetilde{D}^?(\mathcal{A})$, pour $? \in \{b, +, -, \text{blanc}\}$.

Le foncteur $\widetilde{R}f_*$ induit alors par restriction un foncteur $\widetilde{R}f_*:\widetilde{D}_c(f^*\mathcal{A}) \to \widetilde{D}_c(\mathcal{A})$. Il envoie $\widetilde{D}_c^?(f^*\mathcal{A})$ dans $\widetilde{D}_c^?(\mathcal{A})$, d'après la Proposition 2.8.

2.3.2. Sous-classes de modules

Supposons ici que $\mathcal{A}$ est le faisceau constant associée à une algèbre A. Soit $\mathcal{U}$ une sous-catégorie additive pleine de A-Mod close par produits infinis et colimites filtrantes.

Proposition 2.15. *Soit $\mathcal{F}$ un $f^*\mathcal{A}$-module tel que $\mathcal{F}_x$ est dans $\mathcal{U}$ pour tout point géométrique x. Alors, $(f_*C^i(\mathcal{F}))_y$ est dans $\mathcal{U}$ pour tout point géométrique y et tout entier i.*

Démonstration. Pour $\alpha: U \to X$ étale, on a $C^0(\mathcal{F})(U) = \prod_x \mathcal{F}_x$ où x décrit la famille des points géométriques de U tels que $\alpha x \in X^0$. Par conséquent, $C^0(\mathcal{F})(U)$ est dans $\mathcal{U}$ (clôture par produits infinis) et $f_*C^0(\mathcal{F})(V)$ est dans $\mathcal{U}$ pour $V \to S$ étale, donc $(f_*C^0(\mathcal{F}))_y$ est dans $\mathcal{U}$ pour tout point géométrique y de S (clôture par colimites filtrantes).

Le conoyau $\operatorname{coker}\varepsilon_x$ du morphisme canonique $\varepsilon_x:\mathcal{F}_x \to C^0(\mathcal{F})_x$ est la colimite, où $U \to X$ décrit les morphismes étales dont l'image contient x, des $\prod_{z\in U-\{x\}}\mathcal{F}_z$, donc il est dans $\mathcal{U}$. On en déduit par récurrence sur i que $(f_*C^i\mathcal{F})_y$ est dans $\mathcal{U}$ pour tout y. □

Soit $\mathrm{Comp}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Comp}(\mathcal{A})$ des complexes dont les termes ont des fibres dans $\mathcal{U}$. Soit $\widetilde{D}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})$ l'image essentielle de $\mathrm{Comp}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})$ dans $\widetilde{D}(\mathcal{A})$.

On déduit de la Proposition 2.15 une propriété de conservation :

Corollaire 2.16. *Le foncteur $\widetilde{R}f_*$ envoie $\widetilde{D}_{\mathcal{U}}(f^*\mathcal{A})$ dans $\widetilde{D}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})$.*

Rappelons qu'un anneau A est cohérent à droite si tout sous-module de type fini du A-module à droite A est de présentation finie.

Proposition 2.17. *Supposons A cohérent à droite. Soit M un A-module de présentation finie tel que $\mathrm{End}_A(M)$ est cohérent à droite et M est de présentation finie comme $\mathrm{End}_A(M)$-module à droite. Soit $\mathcal{F} \in \widetilde{D}_{\widehat{\mathrm{add}}(M)}(f^*\mathcal{A})$. Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} \widetilde{R}f_*\big(\mathcal{H}om_A^\bullet(M,\mathcal{F})\big) \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}f_*\mathcal{F}.$$

Démonstration. On a un isomorphisme

$$M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} \widetilde{R}f_*\big(\mathcal{H}om_A^\bullet(M,\mathcal{F})\big) \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} f_*\big(\mathcal{H}om_A^\bullet\big(M, C(\mathcal{F})\big)\big)$$

(Proposition 2.6(iv)).

L'isomorphisme canonique $f_*\mathcal{H}om_A(M,V)\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_A(M,f_*V)$ pour V un $f^*\mathcal{A}$-module fournit

$$M\otimes_{\mathrm{End}_A(M)} f_*\big(\mathcal{H}om^\bullet_A\big(M,C(\mathcal{F})\big)\big)\xrightarrow{\sim} M\otimes_{\mathrm{End}_A(M)}\mathcal{H}om^\bullet_A\big(M,f_*C(\mathcal{F})\big).$$

Finalement il nous reste à montrer que le morphisme canonique

$$M\otimes_{\mathrm{End}_A(M)}\mathcal{H}om^\bullet_A\big(M,f_*C(\mathcal{F})\big)\to f_*C(\mathcal{F})=\widetilde{R}f_*\mathcal{F}$$

est un isomorphisme. Vérifions cela en tout point géométrique s de S. Pour tout complexe de $\mathcal{A}$-modules K, on a des isomorphismes canoniques

$$\big(M\otimes_{\mathrm{End}_A(M)}\mathcal{H}om^\bullet_A(M,K)\big)_s\xrightarrow{\sim} M\otimes_{\mathrm{End}_A(M)}\mathcal{H}om^\bullet_A(M,K)_s,$$
$$\mathcal{H}om^\bullet_A(M,K)_s\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}^\bullet_A(M,K_s)$$

car M est de présentation finie. Puisque $f_*C^i(\mathcal{F})_s$ est dans $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ (Proposition 2.15), le Corollaire 2.22 fournit la conclusion. □

2.3.3. Anneaux artiniens

On supposera dans cette partie §2.3.3 que S est le spectre d'un corps algébriquement clos k, que X est un schéma de type fini sur S et que A est artinien et de torsion, annulée par un entier inversible dans k. On pose $m=2\dim X$.

Soit $\mathcal{U}$ une sous-catégorie additive strictement pleine de A-mod engendrée par un module de type fini. On notera $\mathrm{Ho}^{+,b}(\hat{\mathcal{U}})$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Ho}^+(\hat{\mathcal{U}})$ des objets isomorphes à un complexe borné. D'après le Corollaire 2.26, les foncteurs canoniques $\mathrm{Ho}^{+,b}(\hat{\mathcal{U}})\to\widetilde{D}(A)$ et $\mathrm{Ho}^b(\mathcal{U}^\oplus)\to\widetilde{D}(A)$ sont pleinement fidèles et on identifiera ces catégories avec leurs images strictes.

Proposition 2.18. *Soit $\mathcal{U}$ une sous-catégorie additive strictement pleine de A-mod engendrée par un module de type fini.*

Alors, $\widetilde{R}f_*$ induit (via f_*C) un foncteur $\widetilde{D}^b_{c,\mathcal{U}}(f^*\mathcal{A})\to\mathrm{Ho}^{+,b}(\hat{\mathcal{U}})$ et (via $f_*C_{\leqslant m}$) un foncteur $\widetilde{D}^b_{c,\mathcal{U}}(f^*\mathcal{A})\to\mathrm{Ho}^b(\mathcal{U}^\oplus)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}\in\mathrm{Comp}^b_{c,\mathcal{U}}(f^*\mathcal{A})$. D'après le Corollaire 2.16, les termes du complexe $f_*C(\mathcal{F})$ sont dans $\hat{\mathcal{U}}$.

La Proposition 2.8 montre que $f_*C(\mathcal{F})$ est isomorphe, dans $\mathrm{Ho}^+(\hat{\mathcal{U}})$, au complexe borné $f_*C_{\leqslant m}(\mathcal{F})$. On en déduit la première partie de la proposition.

En outre, sa cohomologie est de type fini (cf. §2.3.1). Le Lemme 2.27 montre qu'il est alors homotope à un complexe borné d'objets de $\mathcal{U}^\oplus$. □

Soit $\mathrm{Comp}^b_{\mathrm{cons}}(f^*\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Comp}^b(f^*\mathcal{A})$ des complexes dont les termes sont constructibles et $\widetilde{D}^b_{\mathrm{cons}}(f^*\mathcal{A})$ son image essentielle dans $\widetilde{D}(f^*\mathcal{A})$.

Corollaire 2.19. *$\widetilde{R}f_*$ induit un foncteur $\widetilde{D}^b_{\mathrm{cons}}(f^*\mathcal{A}) \to \mathrm{Ho}^b(\mathcal{A}\text{-}\mathrm{mod})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un $f^*\mathcal{A}$-module constructible. Alors, l'ensemble des classes d'isomorphisme des A-modules $\mathcal{F}_x$ est fini et chacun de ces A-modules est de type fini. Soit N un complexe borné de $f^*\mathcal{A}$-modules constructibles. Alors, le corollaire se déduit de la Proposition 2.18 appliquée à $\mathcal{U}$, la plus petite sous-catégorie additive strictement pleine de A-mod contenant les N^i_x, pour tous i et x. $\square$

On déduit de la Proposition 2.18 une propriété de perfection analogue à [9, Proposition 3.7] (cas de la cohomologie à support compact).

Corollaire 2.20. *Soit $\mathcal{F}$ un $f^*\mathcal{A}$-module constructible tel que $\mathcal{F}_x$ est un A-module projectif pour tout x point ferm. Alors, $\widetilde{R}f_*\mathcal{F}$ est homotope à un complexe borné de A-modules projectifs de type fini.*

Tous les résultats du §2.3 s'étendent, avec les mêmes preuves, au cas du foncteur $\widetilde{R}f_!$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de A-modules sur X. Les Propositions 2.20 et 2.17 montrent que $\widetilde{R}f_!(\mathcal{F})$ est canoniquement isomorphe (dans $\widetilde{D}(A)$) à l'objet $\Omega_c(X,\mathcal{F})$ construit par Rickard [16, Définition 2.6] (la construction de Rickard passe par un A-module M, somme de représentants des classes d'isomorphismes des A-modules $\mathcal{F}_x$. On peut vérifier que cette construction ne dépend pas du choix de M, à isomorphisme canonique près).

Qu'avons-nous gagné par rapport à la construction de Rickard ? Soit Γ un monoïde d'endomorphismes de X et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible Γ-équivariant de A-modules sur X. Alors, la construction de Rickard fournit une action *à homotopie près* de Γ sur un complexe représentant $R\Gamma_c(X,\mathcal{F})$. Dans notre approche, $\widetilde{R}\Gamma_c(X,\mathcal{F})$ est un complexe de $A\Gamma$-modules.

2.4. Quelques propriétés algébriques

Nous décrivons ici des propriétés classiques de la catégorie dérivée pure d'un anneau, lorsque l'on dispose d'hypothèses de finitude.

Soit A un anneau et M un A-module.

Rappelons quelques propriétés.

(i) Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ commute aux limites. Si M est de présentation finie, il commute aux colimites filtrantes [6, Chap. I, §2, Exercice 9].
(ii) Le foncteur $-\otimes_A M$ commute aux colimites. Si M est de présentation finie, alors il commute aux produits infinis [6, Chap. I, §2, Exercice 9].

2.4.1. Platitude et cohérence

Théorème 2.21. *Si A est cohérent à droite, alors $\widehat{\mathrm{add}}(A)$ est la catégorie des A-modules plats.*

Démonstration. La propriété de platitude est close par produits infinis, car A est cohérent à droite [6, Chap. I, §2, Exercice 12]. Elle est en outre close par colimites filtrantes [6, Chap. I, §2, Proposition 2]), ce qui établit que les objets de $\widehat{\mathrm{add}}(A)$ sont plats.

D'après le théorème de Lazard, tout A-module plat est colimite filtrante de modules libres [5, §1, Théorème 1]. □

Corollaire 2.22. *Soit A un anneau cohérent à droite et M un A-module de présentation finie tel que $\mathrm{End}_A(M)$ est cohérent à droite et M est de présentation finie comme $\mathrm{End}_A(M)$-module à droite. Soit V un A-module.*

Alors, V est dans $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ si et seulement si le $\mathrm{End}_A(M)$-module $\mathrm{Hom}_A(M,V)$ est plat et le morphisme canonique

$$M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} \mathrm{Hom}_A(M,V) \xrightarrow{\sim} V$$

est un isomorphisme.

Les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ et $M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} -$ sont des équivalences inverses entre $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ et la catégorie des $\mathrm{End}_A(M)$-modules plats.

Démonstration. Puisque M est de présentation finie pour A et pour $\mathrm{End}_A(M)$, les foncteurs $M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} -$ et $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ commutent aux colimites filtrantes et aux produits infinis. Puisque le morphisme canonique est un isomorphisme pour $V = M$, c'est donc un isomorphisme pour tout V dans $\widehat{\mathrm{add}}(M)$. Pour un tel V, il résulte du théorème 2.21 que $\mathrm{Hom}_A(M,V)$ est plat.

Soit W un $\mathrm{End}_A(M)$-module plat. Il est colimite filtrante de modules libres (théorème de Lazard). On montre alors comme précédemment que le morphisme canonique

$$W \to \mathrm{Hom}_A(M, M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} W)$$

est un isomorphisme. En outre, $M \otimes_{\mathrm{End}_A(V)} W$ est dans $\widehat{\mathrm{add}}(M)$. □

2.4.2. Complexes purement acycliques et complexes acycliques scindés

Soit A un anneau commutatif. On dit que A est parfait à gauche si tout A-module a une enveloppe projective.

On a [2, Théorème 28.4]

Lemme 2.23. *Si A est parfait à gauche, alors tout A-module plat est projectif.*

Nous utiliserons dans la suite la propriété des anneaux artiniens d'être parfaits à gauche et cohérents à droite (propriété qui les caractérise dans le cas commutatif). Rappelons que si M est un module de type fini sur A artinien, alors il est de présentation finie pour A et pour $\mathrm{End}_A(M)$ (qui est elle aussi une algèbre artinienne).

Le Lemme 2.23 permet de reformuler le Corollaire 2.22 :

Corollaire 2.24. *Supposons A artinien. Soit M un A-module de type fini et V un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *V est dans* $\widehat{\mathrm{add}}(M)$;

(ii) $\mathrm{Hom}_A(M, V)$ *est un* $\mathrm{End}_A(M)$*-module projectif et le morphisme canonique*

$$M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} \mathrm{Hom}_A(M, V) \xrightarrow{\sim} V$$

est un isomorphisme ;

(iii) *V est facteur direct d'un multiple de M.*

Les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ *et* $M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} -$ *sont des équivalences inverses entre* $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ *et la catégorie des* $\mathrm{End}_A(M)$*-modules projectifs.*

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses de finitude, les complexes purement acycliques sont homotopes à 0.

Proposition 2.25. *Supposons A artinien. Soit M un A-module de type fini. Soit C un complexe borné de* $\widehat{\mathrm{add}}(M)$. *Alors,*

- *C est purement acyclique si et seulement si il est homotope à* 0.
- *Pour tout complexe purement acyclique D, le complexe* $\mathrm{Hom}^\bullet_A(C, D)$ *est acyclique.*

Démonstration. Supposons C purement acyclique. D'après la Proposition 2.24, $\mathrm{Hom}^\bullet_A(M, C)$ est un complexe borné de $\mathrm{End}_A(M)$-modules projectifs. Puisque C est purement acyclique, ce complexe est acyclique (Lemme 2.1), donc homotope à 0. L'isomorphisme

$$M \otimes_{\mathrm{End}_A(M)} \mathrm{Hom}^\bullet_A(M, C) \xrightarrow{\sim} C$$

du Corollaire 2.24 montre que C est lui aussi homotope à 0.

Soit maintenant D un complexe purement acyclique. Tout objet N de $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ est facteur direct d'un multiple de M (Corollaire 2.24), donc $\mathrm{Hom}^\bullet_A(N, D)$ est acyclique. Par conséquent, $\mathrm{Hom}^\bullet_A(C, D)$ est acyclique. □

Corollaire 2.26. *Supposons A artinien et soit M un A-module de type fini. Le foncteur canonique de* $\mathrm{Ho}^b(\widehat{\mathrm{add}}(M))$ *vers* $\widetilde{D}(A)$ *est pleinement fidèle. En particulier, le foncteur canonique de* $\mathrm{Ho}^b(A)$ *vers* $\widetilde{D}(A)$ *est pleinement fidèle.*

Lemme 2.27. *Supposons A artinien. Soit M un A-module de type fini. Alors, tout complexe borné de* $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ *à cohomologie de type fini est homotope à un complexe borné de* $\mathrm{add}(M)$.

Démonstration. Le lemme se déduit facilement du fait que tout objet de $\widehat{\mathrm{add}}(M)$ est facteur direct d'un multiple de M (Corollaire 2.24). □

2.5. Actions de groupes finis

2.5.1. Actions

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps algébriquement clos, muni de l'action d'un groupe fini G. Soit $\mathcal{O}$ une algèbre commutative artinienne de torsion, tuée par un nombre premier ℓ inversible sur k ou une extension finie de $\mathbf{Z}_\ell$ ou de $\mathbf{Q}_\ell$.

On considère la sous-catégorie $\mathcal{U} = \mathrm{add}(\bigoplus_H \mathcal{O}(G/H))$ de $\mathcal{O}G$-mod, où H décrit l'ensemble des sous-groupes de G qui apparaissent comme stabilisateurs de points fermés de X. La catégorie $\mathcal{U}$ est une sous-catégorie de la catégorie des modules de ℓ-permutation de type fini (=facteurs directs de modules de permutation de type fini). Il résulte du Corollaire 2.24 que les objets de $\widehat{\mathcal{U}}$ sont facteurs directs de sommes directes de modules du type $\mathcal{O}(G/H)$.

Le complexe $\Gamma(X, C_{\leqslant 2\dim X}(\mathcal{O}))$ est un complexe borné d'objets de $\widehat{\mathcal{U}}$. Il est homotope à un complexe borné d'objets de $\mathcal{U}$. Soit $\pi : X \to X/G$ le morphisme quotient. On a un morphisme canonique $\Gamma(X/G, C_{\leqslant 2\dim X}\pi_*\mathcal{O}) \to \Gamma(X, C_{\leqslant 2\dim X}(\mathcal{O}))$ qui est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}^b(\widehat{\mathcal{U}})$ (Lemme 2.11). Il est aussi homotope au complexe $\Lambda(X, G, \mathcal{O})$ d'objets de $\mathcal{U}$ construit par Rickard [16, Définition 3.1] (en transposant la définition de Rickard pour la cohomologie à support compact au cas ordinaire). Les résultats énoncés dans la suite (Théorèmes 2.28 et 2.29) restent valides, avec les mêmes preuves, pour la cohomologie à support compact.

2.5.2. Quotients

Soit Υ est un monoïde d'endomorphismes de X normalisant G. Alors, $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathcal{O})$ est un complexe de $\mathcal{O}(G \rtimes \Upsilon)$-modules.

Le résultat suivant est dû à Rickard, pour Υ fini [16, Théorème 4.1].

Théorème 2.28. *Si H est un sous-groupe fini de Υ, alors on a morphisme canonique de complexes de $\mathcal{O}\Upsilon$-modules*

$$\widetilde{R}\Gamma(X/G) \to \widetilde{R}\Gamma(X)^G$$

qui est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{O}H)$.

Démonstration. On a un morphisme canonique $\Gamma(X/G, C\pi_*\mathcal{O}) \to \widetilde{R}\Gamma(X)$ qui est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{O}H)$. On a des isomorphismes de complexes

$$\begin{aligned}\Gamma\big(X/G, C(\mathcal{O})\big) &\xrightarrow{\sim} \Gamma C\mathcal{H}om_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}, \pi_*\mathcal{O}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}G}\big(\mathcal{O}, \Gamma C(\pi_*\mathcal{O})\big) = \Gamma\big(X, C(\pi_*\mathcal{O})\big)^G\end{aligned}$$

d'après la Proposition 2.6(iv), ce qui fournit le résultat. $\square$

2.5.3. Points fixes

On prend ici pour $\mathcal{O}$ un corps de caractéristique ℓ. Rappelons la construction du foncteur de Brauer. Pour P un ℓ-groupe fini et V un $\mathcal{O}P$-module de permutation, alors $\mathrm{Br}_P(V)$ est l'image de V^P (invariants) dans V_P (coinvariants). Lorsque P agit trivialement sur V, alors $\mathrm{Br}_P(V) = V$. Lorsque V est un module de permutation associé à un P-ensemble sans points fixes, alors $\mathrm{Br}_P(V) = 0$. Cette construction s'étend à $\mathrm{Ho}(\mathcal{O}P)$.

Le résultat suivant généralise un résultat dû à Rickard [16, Théorème 4.2] dans le cas où le monoïde qui agit est un groupe fini.

Théorème 2.29. *Soit Υ un monoïde d'endomorphismes de X et P un ℓ-sous-groupe fini distingué de Υ. Alors, on a un isomorphisme canonique de complexes de $\mathcal{O}\Upsilon$-modules*

$$\mathrm{Br}_P\, \widetilde{R}\Gamma(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{R}\Gamma\big(X^P\big).$$

Démonstration. Soit i l'inclusion (immersion fermée) de X^P dans X, j l'inclusion (immersion ouverte) de $X - X^P$ dans X et $\pi : X \to X/P$ le morphisme quotient. On a une suite exacte de faisceaux Υ-équivariants sur X

$$0 \to j_!\mathcal{O} \to \mathcal{O} \to i_*\mathcal{O} \to 0$$

donc une suite exacte de faisceaux sur X/P

$$0 \to \pi_* j_!\mathcal{O} \to \pi_*\mathcal{O} \to \pi_* i_*\mathcal{O} \to 0$$

d'où une suite exacte de complexes de $\mathcal{O}\Upsilon$-modules

$$0 \to \Gamma C_{\leqslant m}\pi_* j_!\mathcal{O} \to \Gamma C_{\leqslant m}\pi_*\mathcal{O} \to \Gamma C_{\leqslant m}\pi_* i_*\mathcal{O} \to 0$$

qui fournit un triangle distingué dans $\mathrm{Ho}(\mathcal{O}P)$

$$\Gamma C_{\leqslant m}\pi_* j_!\mathcal{O} \to \Gamma C_{\leqslant m}\pi_*\mathcal{O} \to \Gamma C_{\leqslant m}\pi_* i_*\mathcal{O} \rightsquigarrow .$$

Puisque P agit sans points fixes sur $X - X^P$, les fibres du faisceau $\pi_* j_!\mathcal{O}$ sont des modules de permutation sur des ensembles sans points fixes par P. Par conséquent, $\Gamma C_{\leqslant m}\pi_* j_!\mathcal{O}$ est un complexe de $\mathcal{O}P$-modules de permutation par rapport à des sous-groupes non triviaux de P. On en déduit que $\mathrm{Br}_P\, \Gamma C_{\leqslant m}\pi_* j_!\mathcal{O} = 0$. Enfin, P agit trivialement sur les fibres de $\pi_* i_*\mathcal{O}$, donc $\Gamma C_{\leqslant m}\pi_* i_*\mathcal{O}$ est un complexe de modules munis de l'action triviale de P et on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Br}_P\, \Gamma C_{\leqslant m}\pi_*\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \Gamma C_{\leqslant m}\pi_* i_*\mathcal{O}$. $\square$

3. Groupes profinis et revêtements de la droite affine

3.1. Groupes profinis de ℓ-dimension cohomologique 1

Soit Π un groupe profini et ℓ un nombre premier. On suppose que la ℓ-dimension cohomologique de Π est au plus 1 et que Π n'a aucun quotient non trivial d'ordre ℓ—c'est-à-dire, que $H^i(\Pi, M) = 0$ pour tout $\mathbf{F}_\ell\Pi$-module discret M et tout $i > 1$ et que $H^1(\Pi, \mathbf{F}_\ell) = 0$.

Soit N un sous-groupe distingué d'indice fini de Π et $G = \Pi/N$. On suppose que $H^1(N, \mathbf{F}_\ell)$ est fini.

Soit $D = (D^n, d)$ le complexe des applications continues normalisées de Π^n dans $\mathbf{F}_\ell G$: D^n est le $\mathbf{F}_\ell$-module des fonctions continues $\Pi^n \to \mathbf{F}_\ell G$ qui s'annulent sur les éléments qui ont une coordonnée égale à 1 et

$$\begin{aligned}(df)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = {} & x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

C'est un complexe de $\mathbf{F}_\ell G$-modules libres.

Pour tout $\mathbf{F}_\ell G$-module à droite de dimension finie V, on a $H^i(V \otimes_{\mathbf{F}_\ell G} D) \xrightarrow{\sim} H^i(\Pi, V)$. Ces espaces sont nuls pour $i \neq 0, 1$ et finis pour $V = \mathbf{F}_\ell G$ car $H^*(\Pi, \mathbf{F}_\ell G) \simeq H^*(N, \mathbf{F}_\ell)$. Par conséquent, D est un complexe de $\mathbf{F}_\ell G$-modules parfait. Puisque c'est un complexe borné à gauche de $\mathbf{F}_\ell G$-modules libres, il est donc homotope à un complexe borné de $\mathbf{F}_\ell G$-modules projectifs de type fini.

Comme $H^i(D) = H^i(N, \mathbf{F}_\ell) = 0$ pour $i \neq 0, 1$ et $H^0(D) = \mathbf{F}_\ell$, il existe un $\mathbf{F}_\ell G$-module projectif de type fini S tel que D est homotope au complexe

$$\bigl(0 \to P^0 \xrightarrow{d} P^1 \to 0\bigr) \oplus S[-1]$$

où P^0 est une enveloppe injective du $\mathbf{F}_\ell G$-module trivial (placée en degré 0), P^1 une enveloppe injective de $P^0/\mathbf{F}_\ell$ et $\ker d = \mathbf{F}_\ell$. Puisque $\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{F}_\ell G} H^1(N, \mathbf{F}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\Pi, \mathbf{F}_\ell) = 0$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_\ell G}(P_1 \oplus S, \mathbf{F}_\ell) = 0$.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit G' un groupe fini contenant G comme sous-groupe distingué et $D' = \mathbf{F}_\ell G' \otimes_{\mathbf{F}_\ell G} D$. Alors, on a* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G')}(D', D'[i]) = 0$ *pour* $i \neq 0$.

Démonstration. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G')}\bigl(D', D'[i]\bigr) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in G'/G} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G)}\bigl(D, D^x[i]\bigr).$$

Puisque $(P^1 \oplus S)^x$ ne contient pas l'enveloppe projective du module trivial comme facteur direct, les espaces précédents sont nuls pour $i \neq 0$. $\square$

Remarque 3.2. L'hypothèse que G est normal dans G' n'est pas superflue. Par exemple, dans le cas où $G' = G \wr \mathbf{Z}/2$ et où G est plongé dans G' comme $G \times 1$, la propriété de disjonction n'est plus vraie.

Soit $B = \mathrm{End}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G')}(D')$. Alors, la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G')$ engendrée par les facteurs directs de D' est équivalente à la catégorie des complexes parfaits de B-modules. Si $S \oplus P^0$ est un progénérateur pour un facteur direct A de $\mathbf{F}_\ell G'$, alors les algèbres A et B ont des catégories dérivées équivalentes (théorie de Morita–Rickard).

3.2. Cohomologie de revêtements de la droite affine

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ avec $p \neq \ell$ et soit $\mathbf{A}^1$ la droite affine sur k.

Soit Π le groupe fondamental de $\mathbf{A}^1$ relatif à un point géométrique. Les sous-groupes distingués d'indice fini N de Π correspondent aux revêtements étales galoisiens connexes X de $\mathbf{A}^1$. Le groupe Π satisfait aux hypothèses de §3.1, i.e., il est de dimension cohomologique 1 [21, Proposition 1] et $H^1(\Pi, \mathbf{F}_\ell) = H^1(\mathbf{A}^1, \mathbf{F}_\ell) = 0$ (cohomologie étale du faisceau constant $\mathbf{F}_\ell$).

Soit $X \to \mathbf{A}^1$ un revêtement étale galoisien connexe de groupe G et N le sous-groupe distingué correspondant de Π. Soit D le complexe construit au §3.1. Alors, D est isomorphe dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G)$ à $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{F}_\ell)$. En effet, D est isomorphe à $\widetilde{R}\Gamma(X, \mathbf{F}_\ell)$ dans $D(\mathbf{F}_\ell G)$ [21, preuve de la Proposition 1] et tous deux sont homotopes à des complexes bornés de modules projectifs de type fini (cf. §3.1 et Corollaire 2.20).

Remarque 3.3. Les groupes G qui apparaissent sont exactement les groupes finis tels que $O^{p'}G = 1$ (théorème de Raynaud, anciennement conjecture d'Abhyankar [15]).

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de torsion première à p ou une extension plate de $\mathbf{Z}_\ell$ avec $\ell \neq p$.

Proposition 3.4. *Soit $X \to \mathbf{A}^1$ un revêtement étale galoisien de groupe G tel que le stabilisateur d'une composante connexe de X est un sous-groupe distingué de G. Alors, on a* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{O}G)}(\widetilde{R}\Gamma(X), \widetilde{R}\Gamma(X)[i]) = 0$ *pour* $i \neq 0$.

Démonstration. Notons que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{O}G)}(\widetilde{R}\Gamma(X), \widetilde{R}\Gamma(X)[i]) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}G)}(R\Gamma(X), R\Gamma(X)[i])$ car $\widetilde{R}\Gamma(X)$ est homotope à un complexe borné de $\mathcal{O}G$-

modules projectifs de type fini (Corollaire 2.20). La formule des coefficients universels montre alors qu'il suffit d'établir le lemme lorsque $\mathcal{O} = \mathbf{Z}/\ell$.

Soit Y une composante connexe de X et H son stabilisateur. Alors, $X = G \times_H Y$, donc $\widetilde{R\Gamma}(X) \simeq \mathbf{F}_\ell G \otimes_{\mathbf{F}_\ell H} \widetilde{R\Gamma}(Y)$. Le résultat découle alors de la Proposition 3.1. $\square$

Remarque 3.5. On aurait pu aussi bien sûr établir cette propriété facilement sans passer par le groupe fondamental de $\mathbf{A}^1$.

4. Courbes de Deligne–Lusztig

4.1. *Rappels sur les variétés de Deligne–Lusztig*

4.1.1. Soit G un groupe algébrique réductif sur une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$, muni d'un endomorphisme $F: G \to G$ dont une puissance F^n est un endomorphisme de Frobenius définissant une structure rationnelle sur $\mathbf{F}_q$.

Soit T un tore maximal F-stable, B un sous-groupe de Borel contenant T et U le radical unipotent de B. On note $\mathcal{L}: G \to G$, $g \mapsto g^{-1}F(g)$ l'application de Lang. La variété de Deligne–Lusztig associée à U [9, Définition 1.17] est

$$Y = Y_G(U) = \bigl(\mathcal{L}^{-1}\bigl(F(U)\bigr)/\bigl(U \cap F(U)\bigr).$$

L'action par multiplication de $G \times G^\circ$ sur G se restreint en une action de $G^F \times (T^F)^\circ$ sur Y. Le morphisme $Y \to Y/G^F$ est étale et les stabilisateurs dans G^F de points de Y sont des p-sous-groupes.

On note G^0 la composante neutre de G. Pour H un sous-groupe de T^F, on pose $\Delta H = \{(x, x^{-1}) \in G^F \times (T^F)^\circ \mid x \in H\}$.

Les deux lemmes suivants sont immédiats :

Lemme 4.1. *Soit L un sous-groupe de $G^F \times (T^F)^\circ$. Alors, $Y_G(U)^L = \emptyset$ si L n'est pas conjugué à un sous-groupe de ΔT^F. Si H est un sous-groupe de T^F, alors*

$$Y_G(U)^{\Delta H} = Y_{C_G(H)}\bigl(U \cap C_G(H)\bigr).$$

Lemme 4.2. *Soit $G^1 = \{g \in G \mid gG^0 \in (G/G^0)^F\}$. Alors, $Y_G(U) = Y_{G^1}(U)$.*

4.1.2. On suppose dans la suite que G est connexe. Soit $\dot{w} \in N_G(T)$ tel que $F(U) = \dot{w}^{-1}U\dot{w}$ et soit w l'image de $\dot{w}$ dans $W = N_G(T)/T$. Alors, Y est une variété lisse purement de dimension $\ell(w)$ [9, §1.4].

On définit l'automorphisme $\phi = q^{1/n}(F \circ w)$ de $Y(T) \otimes \mathbf{R}$ et on note δ son ordre. Soit F' l'endomorphisme de G donné par $F'(g) = F^\delta(g)\dot{v}^{-1}$ où $\dot{v} = \dot{w}F(\dot{w}) \cdots F^{\delta-1}(\dot{w})$ est F-stable. Alors, F' se restreint en un endomorphisme de Y qui commute avec l'action de G^F.

Pour $t \in T^F$, on a $F'(gt) = F'(g)(\dot{v}t\dot{v}^{-1})$. Soit Υ le monoïde libre sur un générateur σ et soit v l'image de $\dot{v}$ dans W. On définit une action de Υ sur T^F par $\sigma(t) = v^{-1}tv$ pour $t \in T^F$. On a une action de Υ sur Y donnée par $\sigma \mapsto F'$.

On a finalement construit une action de $G^F \times (T^F \rtimes \Upsilon)^\circ$ sur Y.

4.2. Conjecture de Broué

On fait les hypothèses suivantes :

(1) $w\phi^{-1}$ est un bon élément d-régulier, où d est un entier ([8, Définition 6.4]).
(2) Il existe ζ une racine primitive complexe d-ème de l'unité avec la propriété suivante. Soit S le sous-tore minimal F-stable de T tel que $\ker(\phi - \zeta) \subseteq Y(S) \otimes \mathbf{C}$. Alors, $\ell \mid |S^F|$ mais $\ell \nmid [G^F : S^F]$.
(3) $C_W(w\phi^{-1})$ est engendré par v.

On dispose maintenant du complexe $\widetilde{R}\Gamma(Y, \mathbf{Z}_\ell)$ de $\mathbf{Z}_\ell(G^F \times (T^F \rtimes \Upsilon)^\circ)$-modules qui sont de ℓ-permutation pour $G^F \times (T^F)^\circ$.

Alors, la conjecture de Broué [7], précisée par Broué et Michel [8], prédit que $\widetilde{R}\Gamma(Y, \mathbf{Z}_\ell)$ induit une équivalence de Rickard splendide [17], donc en particulier une équivalence dérivée, entre la somme $\mathbf{Z}_\ell G^F b$ des blocs de défaut maximal de $\mathbf{Z}_\ell G^F$ et un quotient de $\mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \Upsilon)$ isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$:

Conjecture 4.3. *Avec les hypothèses précédentes, alors,*

(i) *le complexe $\widetilde{R}\Gamma(Y, \mathbf{Z}_\ell)$ est isomorphe, dans* $\mathrm{Ho}(\mathbf{Z}_\ell(G^F \times (T^F)^\circ))$, *à* $D = \mathbf{Z}_\ell G^F b \otimes_{\mathbf{Z}_\ell G^F} \widetilde{R}\Gamma(Y, \mathbf{Z}_\ell)$,
(ii) *le complexe D est basculant pour $\mathbf{Z}_\ell G^F b$,*
(iii) *le morphisme canonique $\mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \Upsilon) \to A = \mathrm{End}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{Z}_\ell G^F b)}(D)$ est surjectif et*
(iv) *A est isomorphe, comme $\mathbf{Z}_\ell T^F$-algèbre intérieure, à $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$.*

En particulier, les algèbres $\mathbf{Z}_\ell G^F b$ et $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$ sont splendidement Rickard équivalentes.

Remarque 4.4. L'hypothèse (3) (cyclicité du centralisateur) n'est là que pour simplifier l'exposition. En général, Υ est remplacé par un monoïde de tresses [8] et la conjecture garde le même énoncé. En outre, la conjecture s'adapte au cas de blocs de défaut non maximal.

La seconde hypothèse prend une forme nettement plus simple lorsque F est un endomorphisme de Frobenius munissant G d'une structure rationnelle sur un corps fini à q éléments. Alors, l'hypothèse (2) dit que $\ell \mid \Phi_d(q)$ et que les ℓ-sous-groupes de Sylow de G^F sont abéliens. Dans ce cas, S est un Φ_d-sous-tore maximal de T.

Lorsque G est semi-simple, l'hypothèse (3) assure que les ℓ-sous-groupes de Sylow de G^F sont cycliques.

Théorème 4.5. *Si* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{F}_\ell G)}(\widetilde{R}\Gamma(Y,\mathbf{F}_\ell), \widetilde{R}\Gamma(Y,\mathbf{F}_\ell)[i]) = 0$ *pour* $i \neq 0$*, alors la Conjecture* 4.3 *est vraie.*

Démonstration. Soit $C = \Gamma C_{\leqslant 2l(w)}(\mathbf{Z}_\ell)$. C'est un complexe de $\mathbf{Z}_\ell(G^F \times (T^F \rtimes \Upsilon)^\circ)$-modules qui sont de ℓ-permutation pour $G^F \times (T^F)^\circ$. Vu comme complexe de $\mathbf{Z}_\ell G^F$-modules (respectivement $\mathbf{Z}_\ell(T^F)^\circ$-modules), ce complexe est homotope à un complexe borné de modules projectifs de type fini (Corollaire 2.20).

• *Étude locale de C.* Soit Q un sous-groupe de $G^F \times (T^F)^\circ$. On a $Y^Q = \emptyset$ si Q n'est pas conjugué à un sous-groupe de ΔT^F (Lemme 4.1). Soit R un ℓ-sous-groupe de T^F. Alors, R est un ℓ-sous-groupe de S^F (cf. Hypothèse (2)), donc la composante neutre $C_G(R)^0$ de $C_G(R)$ est T sauf si $R \leqslant Z(G)$, c'est-à-dire, sauf si v centralise R. En outre, $C_G(R)^F/(C_G(R)^0)^F = 1$ car R est un ℓ-groupe [11, Remarque 13.15(i)]. Par conséquent, $Y^{\Delta R} = T^F$ ou $Y^{\Delta R} = Y$ (Lemmes 4.1 et 4.2).

D'après le Théorème 2.29, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Br}_Q(C) \simeq \widetilde{R}\Gamma\big(Y^Q, \mathbf{F}_\ell\big)$$

pour tout ℓ-sous-groupe Q de $G^F \times (T^F)^\circ$. Pour Q un ℓ-sous-groupe de $G^F \times (T^F)^\circ$ non conjugué à un sous-groupe de ΔT^F, on a donc $\mathrm{Br}_Q(C) = 0$.

Pour R un ℓ-sous-groupe de T^F non central dans G, on a un isomorphisme de complexes de $\mathbf{F}_\ell(T^F \times (T^F \rtimes N_\Upsilon(R))^\circ)$-modules, $\mathrm{Br}_{\Delta R}(C) \simeq \mathbf{F}_\ell T^F$.

• *Étude locale du complexe des endomorphismes.* Soit $E = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}_\ell G^F b}(C, C)$ et $A = H^0(E)$. Par hypothèse, la cohomologie de

$$\mathbf{F}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} E \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{F}_\ell G^F}\big(\widetilde{R}\Gamma(Y,\mathbf{F}_\ell), \widetilde{R}\Gamma(Y,\mathbf{F}_\ell)\big)$$

est concentrée en degré 0. On a un isomorphisme de complexes de $(T^F \rtimes \Upsilon) \times (T^F \rtimes \Upsilon)^\circ$-modules [17, preuve du Théorème 4.1]

$$\mathrm{Br}_{\Delta R}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{F}_\ell C_{G^F}(R)}(\mathrm{Br}_{\Delta R} C, \mathrm{Br}_{\Delta R} C).$$

Par conséquent, pour tout ℓ-sous-groupe Q de $G^F \times (T^F)^\circ$, le complexe $\mathrm{Br}_Q(E)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0. Il résulte de [4, Théorème 1.3] que E est homotope à A, en tant que complexe de $\mathbf{Z}_\ell(T^F \times (T^F)^\circ)$-modules.

• *Étude de A.* On a $\mathrm{Br}_{\Delta R^{(1,v^i)}}(A) = \mathbf{F}_\ell T^F$ pour R le ℓ-sous-groupe de Sylow de T^F et $\mathrm{Br}_Q(A) = 0$ si Q est un ℓ-sous-groupe de $T^F \times (T^F)^\circ$ qui n'est pas conjugué, dans $(T^F \rtimes \Upsilon) \times (T^F \rtimes \Upsilon)^\circ$, à un sous-groupe de ΔT^F. Soit e l'ordre de v. Alors,

$$\bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant e-1} \mathrm{Ind}_{(\Delta T^F)^{(1,v^i)}}^{T^F \times (T^F)^\circ} \mathbf{Z}_\ell$$

est facteur direct du $\mathbf{Z}_\ell(T^F \times (T^F)^\circ)$-module de ℓ-permutation A. Ce facteur direct est lui-même isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \langle v\rangle)$. On a donc montré qu'il existe un $\mathbf{Z}_\ell(T^F \times (T^F)^\circ)$-module Z tel que $A \simeq \mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \langle v\rangle) \oplus Z$.

La formule d'orthogonalité des caractères de Deligne–Lusztig (cf. par exemple [9, Théorème 6.8]) montre que $\dim A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell = |T^F \rtimes \langle v\rangle|$. Par conséquent, on a $Z = 0$.

• *Déformation.* Soit $\bar\sigma$ l'image de σ dans A, $\tau = \bar\sigma^e$ et $\langle\tau\rangle$ la sous-algèbre de A engendrée par τ. L'image de $\tau \in A^R$ dans $\mathrm{Br}_{\Delta R}(A)$ est 1. Puisque $\ell \nmid e$, il existe $\alpha \in \langle\tau\rangle$ tel que $\alpha^e = \tau$ (lemme de Hensel). Soit maintenant $c = \alpha^{-1}\bar\sigma$. Alors, $c^e = 1$ et c agit sur T^F comme v. Ces propriétés fournissent un morphisme de $\mathbf{Z}_\ell T^F$-algèbres intérieures $b : \mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \langle v\rangle) \to A$ qui envoie v sur c.

Un raisonnement identique fournit un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell T^F$-algèbres intérieures $\mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \langle v\rangle) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$.

Le morphisme $\mathrm{Br}_{\Delta R}(b)$ est un isomorphisme lorsque R est un ℓ-sous-groupe de Sylow de T^F. Par conséquent, le morphisme $\mathrm{Br}_{\Delta R^{(1,v^i)}}(b)$ est aussi un isomorphisme. On déduit alors de [4, Proposition 2.10] que b est un isomorphisme.

On a donc obtenu un isomorphisme $\beta : \mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F) \xrightarrow{\sim} A$.

• *Fin de la preuve.* D'après le Lemme 4.9, il existe un complexe C' de $(\mathbf{Z}_\ell G^F, \mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F))$-bimodules et un isomorphisme

$$h : \mathrm{Res}_{G^F \times (T^F)^\circ} C' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{G^F \times (T^F)^\circ} C$$

dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{Z}_\ell(G^F \times (T^F)^\circ)$ tel que le morphisme structurel $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{Z}_\ell G^F)}(C')$ induit, via h, le morphisme β.

Le complexe C' induit une équivalence de Rickard entre $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$ et B, la somme des blocs de $\mathbf{Z}_\ell G^F$ qui n'agissent pas trivialement (modulo homotopie) sur C' [17, Théorème 2.1]. D'après le Lemme 4.10, ces blocs sont de défaut maximal. Puisque le nombre de blocs de défaut maximal de $\mathbf{Z}_\ell G^F$ est le même que pour $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$, on en déduit que B est la somme de tous les blocs de défaut maximal de $\mathbf{Z}_\ell G^F$. □

Remarque 4.6. Pour avoir un analogue de ce résultat sur $\mathbf{Q}_\ell$, il faut disposer d'information sur les valeurs propres de l'endomorphisme F dans $H^*(Y, \mathbf{Q}_\ell)$.

La preuve du théorème n'utilise pas la propriété de l'élément régulier $w\phi^{-1}$ d'être bon (Hypothèse (1)). En l'absence de cette hypothèse, la condition de disjonction n'est pas toujours satisfaite.

Corollaire 4.7. *Si $l(w) = 1$, alors la Conjecture 4.3 est vraie.*

Démonstration. La variété $Y(U)/G^F$ est normale car $Y(U)$ est lisse. Puisque elle est de dimension 1, elle est donc lisse.

Les variétés $Y(U)$ et $\mathcal{L}^{-1}(F(U))$ ont des cohomologies sur $\mathbf{Q}_\ell$ isomorphes comme G^F-modules. Or, $\mathcal{L}^{-1}(F(U))/(G^F) \xrightarrow{\sim} F(U)$ a la même cohomologie qu'un point, donc il en est de même de $Y(U)/G^F$.

La courbe lisse $Y(U)/G^F$ a la cohomologie d'un point, donc elle est donc isomorphe à la droite affine.

Ainsi, on est en présence d'un revêtement étale galoisien de groupe G^F de la droite affine. Puisque w n'est pas contenu dans un sous-groupe parabolique propre F-stable, la variété Y/T^F est connexe (cf. par exemple [12]). On en déduit que le stabilisateur dans G^F d'une composante connexe de Y est un sous-groupe distingué. Par conséquent, le théorème découle de la Proposition 3.4 et du Théorème 4.5. □

Lorsque w est de longueur 1, alors, $w\phi^{-1}$ est un bon élément régulier si et seulement si w n'est pas contenu dans un sous-groupe parabolique F-stable propre et alors w est un ϕ-élément de Coxeter au sens de Steinberg.

Supposons W irréductible et G adjoint. Alors, le corollaire s'applique dans les cas suivants.

- $(G, F) = A_1(q)$, $\ell \mid q+1$ et $\ell \neq 2$.
- $(G, F) = {}^2A_2(q)$, $\ell \mid q^2 - q + 1$ et $\ell \neq 3$.
- $(G, F) = {}^2B_2(q^2)$ et $\ell \mid q^2 - q\sqrt{2} + 1$.
- $(G, F) = {}^2G_2(q^2)$ et $\ell \mid q^2 - q\sqrt{3} + 1$.

Terminons par quelques remarques

- Le théorème fournit une équivalence entre catégories dérivées de $b\mathbf{Z}_\ell G^F$ et $\mathbf{Z}_\ell N_{G^F}(T^F)$. C'est une équivalence de Rickard splendide [17]. Notons qu'une équivalence de Rickard "splendide" (sur une extension de $\mathbf{Z}_\ell$) avait été construite pour les algèbres concernées comme cas particulier d'une construction générale pour les blocs à groupes de défaut cycliques [18,20].
- Le corollaire avait été démontré dans [19] pour le type A_1 (voir aussi [13]).
- Une étude précise de l'action de $T^F \rtimes \Upsilon$ sur $H^*(Y, \mathbf{Q}_\ell)$ devrait montrer que l'algèbre A est engendrée par l'image de $\mathbf{Z}_\ell(T^F \rtimes \Upsilon)$ sans hypothèse sur ℓ. Cela a été établi par Gonard pour le type A_1 [13].
- Le problème posé par l'extension du théorème au cas où $C_W(w\phi^{-1})$ n'est pas cyclique est l'identification d'une extension centrale de $C_W(w\phi^{-1})$.

4.3. *Lemmes de théorie des représentations*

On regroupe ici quelques résultats utiles à la preuve du Théorème 4.5.

On a un lemme facile de relèvement des actions dans les catégories homotopiques, en présence d'une condition de projectivité relative (à comparer avec le théorème de relèvement de Keller, qui requiert la condition de Toda [14, §8.3.1]).

Lemme 4.8. *Soient R et A deux $\mathbf{Z}_\ell$-algèbres finies et B une sous-algèbre de A. On suppose que le morphisme canonique de $(A \otimes A^\circ)$-modules $A \otimes_B A \to A$ est scindé.*

Soit X un complexe de $(R \otimes B^\circ)$-modules de type fini et $\phi : A \to \operatorname{End}_{\operatorname{Ho}(R)}(X)$ étendant l'action de B.

Alors, il existe un complexe X' de $(R \otimes A^\circ)$-modules et un isomorphisme $h : X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Res}_{R \otimes B^\circ} X'$ dans $\operatorname{Ho}(R \otimes B^\circ)$ tel que l'action de A sur X' induit, via h, le morphisme ϕ.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $e \in A \otimes_B A$ tel que $ae = ea$ pour tout $a \in A$ et tel que l'image de e dans A (via la multiplication $A \otimes_B A \to A$) est 1.

Soit f l'idempotent de $\operatorname{End}_{\operatorname{Ho}(R \otimes A^\circ)}(X \otimes_B A)$ donné par e. Alors, il existe un idempotent f' de l'algèbre des endomorphismes de $X \otimes_B A$, vu comme complexe de $(R \otimes A^\circ)$-modules, d'image f. Soit X' le facteur direct de $X \otimes_B A$, image de f'. Alors, le morphisme canonique de complexes de $(R \otimes B^\circ)$-modules $h : X \to X \otimes_B A \to X'$ est un isomorphisme dans $\operatorname{Ho}(R \otimes B^\circ)$ et l'action de A sur X' induit, via h, le morphisme ϕ. $\square$

Lemme 4.9. *Soient G et H deux groupes finis et P un sous-groupe de H d'indice premier à ℓ. Soit X un complexe de $\mathbf{Z}_\ell(G \times P^\circ)$-modules de type fini et $\phi : \mathbf{Z}_\ell H \to \operatorname{End}_{\operatorname{Ho}(\mathbf{Z}_\ell G)}(X)$ étendant l'action de P.*

Alors, il existe un complexe X' de $\mathbf{Z}_\ell(G \times H^\circ)$-modules et un isomorphisme $h : X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Res}_{G \times P^\circ} X'$ dans $\operatorname{Ho}(\mathbf{Z}_\ell(G \times P^\circ))$ tel que l'action de H sur X' induit, via h, le morphisme ϕ.

Démonstration. Cela résulte du Lemme 4.8 appliqué à $R = \mathbf{Z}_\ell G$, $A = \mathbf{Z}_\ell H$, $B = \mathbf{Z}_\ell P$ et $e = \frac{1}{[H:P]} \sum_{h \in H/P} h \otimes h^{-1}$. $\square$

Le lemme suivant montre en particulier que lorsqu'on a une équivalence de Rickard entre blocs, alors les blocs ont des groupes de défaut isomorphes.

Lemme 4.10. *Soient A et B deux blocs de groupes finis. Soit C un complexe borné de $(A \otimes B^\circ)$-modules tel que A est un facteur direct de $C \otimes_B C^*$, vu comme complexe de $(A \otimes A^\circ)$-modules. Alors, les groupes de défaut de A sont isomorphes à des sous-groupes des groupes de défaut de B.*

Démonstration. Le $(A \otimes A^\circ)$-module A est facteur direct d'un module du type $C^i \otimes_B (C^{-i})^*$. Soit D un groupe de défaut de B. Alors, A est facteur direct d'un module de la forme $V \otimes_{\mathbf{Z}_\ell D} V'$, donc D contient un groupe de défaut de A. $\square$

Remerciements

Je remercie Michel Broué, Pierre Deligne, Jean Michel et Jeremy Rickard pour des discussions utiles à la mise au point de ce travail et Cédric Bonnafé, pour les nombreuses améliorations et corrections qu'il a suggérées. Les résultats des §3 et §4 furent exposés lors de la conférence « Modular representation theory in the non-defining characteristic » à l'Isaac Newton Institute de Cambridge en avril 1997. La rédaction de ce travail a été achevée au département de mathématiques de l'University of Chicago, que je remercie pour son hospitalité.

Références

[1] A.B. Altman, R.T. Hoobler, S.L. Kleiman, A note on the base change map for cohomology, Compositio Math. 27 (1973) 25–38.
[2] F.W. Anderson, K.R. Fuller, Rings and Categories of Modules, 2nd Edition, Springer, 1992.
[3] M. Artin, et al., SGA4: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3, in: Lecture Notes in Math., Vol. 305, 1972–1973.
[4] S. Bouc, Le complexe de chaînes d'un G-complexe simplicial acyclique, J. Algebra 220 (1999) 415–436.
[5] N. Bourbaki, Algèbre. Chapitre 10, Algèbre homologique, Masson, 1980.
[6] N. Bourbaki, Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4, Masson, 1985.
[7] M. Broué, G. Malle, Zyklotomische Heckealgebren, Astérisque 212 (1993) 119–189.
[8] M. Broué, J. Michel, Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne–Lusztig associées, in: Finite Reductive Groups, Birkhäuser, 1997, pp. 73–139.
[9] P. Deligne, G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103 (1976) 103–161.
[10] P. Deligne, et al., SGA4$\frac{1}{2}$: Cohomologie étale, in: Lecture Notes in Math., Vol. 569, 1977.
[11] F. Digne, J. Michel, Representations of Finite Groups of Lie Type, in: London Math. Soc. Student Texts, Vol. 21, Cambridge Univ. Press, 1991.
[12] F. Digne, J. Michel, R. Rouquier, Cohomologie de certaines variétés de Deligne–Lusztig attachées à des éléments réguliers, en préparation.
[13] B. Gonard, Thèse, Université Paris 7, en préparation.
[14] B. Keller, On the construction of triangle equivalences, in: Derived equivalences for group rings, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1685, 1998, pp. 155–176.
[15] M. Raynaud, Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar, Invent. Math. 116 (1994) 425–462.
[16] J. Rickard, Finite group actions and étale cohomology, Publ. Math. IHES 80 (1994) 81–94.
[17] J. Rickard, Splendid equivalences: derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. 72 (1996) 331–358.
[18] R. Rouquier, From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect, in: Proceedings of "Groups 1993, Galway–Saint-Andrews conference", Vol. 2, in: London Math. Soc. Series, Vol. 212, Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 512–523.
[19] R. Rouquier, Some examples of Rickard complexes, in: Proceedings of the Conference on Representation Theory of Groups, Algebras, Orders, Ann. St. Univ. Ovidius Constantza 4 (1996) 169–173.
[20] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, in: Derived Equivalences for Group Rings, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1685, 1998, pp. 199–220.
[21] J.-P. Serre, Constructions de revêtements de la droite affine en caractéristique p, C. R. Acad. Sci. Paris Série I 311 (1990) 341–346.