M. Pimsner S. Popa

# PROBLEME DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

Ministerul Educației și Învățămîntului

Mihai Pimsner        Sorin Popa

# PROBLEME DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI, 1979

Redactor Prof. Gabriela Iliescu
Tehnoredactor: Achile Daniel
Grafician: Nicolae Sîrbu

# PREFAȚĂ

*Culegerea de probleme de geometrie elementară de M. Pimsner și S. Popa este adresată elevilor care se prezintă la concursuri, la olimpiade de matematică și profesorilor, care o pot folosi în activitatea lor didactică și pentru pregătirea examenelor de definitivat sau obținerii de grad. Ea pune la dispoziția cititorului metode eficiente de abordare și rezolvare a unor probleme de geometrie de factură deosebită, urmărind în primul rînd stimularea gîndirii matematice a elevilor.*

*Deși problemele sînt de geometrie elementară și pot fi rezolvate prin metode elementare, folosind numai cunoștințele predate în liceu, totuși ele au un caracter mai mare de abstractizare decît cele din manualele școlare. Rezolvarea acestor probleme familiarizează elevul cu noțiuni elementare de topologie a planului și spațiului, pregătindu-l pentru înțelegerea noțiunilor de analiză pe care le va întîlni în clasele XI-XII și în învățămîntul superior.*

*Culegerea cuprinde aproape 300 de probleme. Ea începe cu probleme referitoare la triunghiuri și patrulatere, fiind urmată de inegalități și de probleme de maxime și minime geometrice. Partea cea mai consistentă cuprinde probleme cu poligoane și puncte, precum și probleme diverse.*

*Învățarea matematicii pretinde o muncă asiduă, din care o bună parte trebuie consacrată rezolvării de probleme pentru îmbogățirea cunoștințelor și pentru obținerea deprinderii de a lucra și gîndi matematic. De aceea, culegerile de probleme sînt la fel de utile ca și manualele școlare. Dar aceste culegeri nu sînt toate la fel. Unele urmăresc un scop imediat, ca de exemplu pregătirea elevilor pentru diferite examene (treptele I și II, admitere în învățămîntul superior etc.). Nivelul problemelor din aceste culegeri este limitat chiar de scopul urmărit. Altele sînt făcute pentru elevii talentați la matematică, dornici de a rezolva probleme frumoase cu un grad mai mare de dificultate. O astfel de culegere este cea de față.*

*Cartea conține unele probleme care, la prima vedere, par extraordinar de grele, dar pot fi rezolvate surprinzător de simplu. Eleganța soluțiilor, ingeniozitatea lor, captivează elevul iubitor de matematică.*

*Autorii fac parte din grupul restrîns de profesori, care au pregătit lotul de elevi, care în anul acesta au cucerit locul întîi pentru țara noastră la Olimpiada internațională de matematică. Din entuziasmul lor și din dorința de a îndruma elevii dotați pentru studiul matematicii a rezultat și cartea de față.*

Acad. Gh. Mihoc

# INTRODUCERE

Problemele din această culegere sînt împărțite în opt capitole. Primele șapte capitole conțin probleme rezolvate, soluțiile fiind date la sfîrșitul cărții. Scopul pentru care Culegerea a fost împărțită în capitole este mai mult de natură pedagogică. Multe din probleme pot la fel de bine să fie incluse într-un capitol sau în altul. Ordinea numerotării problemelor rezolvate, de la 1 la 188 a fost făcută în așa fel încît problemele rezolvate pînă la un anumit moment să sugereze și să ușureze rezolvarea problemei următoare. De aceea, cititorul este sfătuit să încerce rezolvarea problemelor în ordinea expunerii, mai ales în capitolele II—VII, deoarece de multe ori unele argumente nu mai sînt repetate în detaliu și se fac numeroase conexiuni cu problemele din urmă.

Unele probleme sînt prezentate cu mai multe soluții. Acest lucru are atît un scop instructiv cît și unul stimulativ, de a convinge pe cititor să încerce pentru fiecare problemă cît mai multe soluții.

Problemele nerezolvate (cele din cap. VIII) în cea mai mare parte pot fi făcute cu metode similare celor de la problemele din cap. I—VII. În acest ultim capitol problemele nu respectă o ordine anumită.

Autorii țin să mulțumească, pe această cale, colegilor Mircea Martin, Sorin Rădulescu și Cornel Pasnicu pentru fructuoasele discuții purtate în timpul elaborării culegerii, cît și pentru permisiunea de a reproduce unele probleme originale ale acestora, nepublicate pînă acum.

Autorii

# NOTAȚII

Notațiile sînt cele clasice folosite în geometria elementară, în afară de specificările făcute în text.

În general vom nota:

$\mathbf{N}$ = mulțimea numerelor naturale
$\mathbf{Z}$ = mulțimea numerelor întregi
$\mathbf{Q}$ = mulțimea numerelor raționale
$\mathbf{R}$ = mulțimea numerelor reale
$\mathbf{C}$ = mulțimea numerelor complexe
$S_F$ = aria figurii $F$
$V_P$ = volumul corpului $P$
$\sphericalangle(\alpha, \beta)$ = unghiul dintre $\alpha$ și $\beta$, unde $\alpha$ și $\beta$ sînt drepte, plane sau vectori.
$h_{ABC}$ = înălțimea din $A$ în triunghiul $ABC$
$(a, b)$ = cel mai mare divizor comun dintre $a$ și $b$,
$(a, b \in \mathbf{Z})$.
$a \mid b$ = $a$ divide pe $b$ $(a, b \in \mathbf{Z})$

# ENUNȚURI

## I. TRIUNGHIURI, PATRULATERE, CERCUL

**1.** Să se arate că $a > 0, b > 0, c > 0$ sînt lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) < 0.$$

**2.** Să se găsească toate triunghiurile dreptunghice cu laturile numere întregi.

**3.** Se dau: punctul $O$ şi trei lungimi $x, y, z$. Să se demonstreze că triunghiul echilateral $ABC$, astfel ca $OA = x, OB = y, OC = z$, se poate construi dacă şi numai dacă:

$$x + y \geq z; \quad y + z \geq x; \quad z + x \geq y.$$

**4.** Să se arate că în orice triunghi bisectoarea se află între înălţimea şi mediana duse din acelaşi vîrf.

**5.** Într-un triunghi înălţimea, bisectoarea şi mediana împart unghiul $A$ în patru părţi egale. Să se calculeze unghiurile triunghiului.

**6.** Fie un paralelogram $ABCD$ şi pe latura $AB$ un punct $M$ astfel încît

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{n}.$$

Notăm cu $N = CM \cap BD$. Atunci:

$$\frac{BN}{BD} = \frac{1}{n+1}.$$

**7.** Pe laturile $AB$, $AC$ ale unui triunghi oarecare se consideră punctele $M$, $N$ astfel ca:

$$\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = K.$$

Să se demonstreze că dreapta $MN$ trece prin centrul de greutate al triunghiului dacă şi numai dacă $K = 1$.

**8.** Fie $ABC$ un triunghi de arie 9. Să se arate că nu se poate împărţi triunghiul, în două figuri, printr-o dreaptă care trece prin centrul de greutate, astfel încît una din figuri să aibă aria mai mică decît 4.

**9.** Fie $ABC$ un triunghi. Să se arate că toate dreptele care împart aria şi perimetrul triunghiului în două părţi egale sînt concurente.

**10.** Unind mijloacele laturilor unui hexagon convex din două în două, obținem două triunghiuri. Să se arate că centrele lor de greutate coincid.

**11.** Pe fiecare latură a triunghiului $ABC$ se dau două puncte; pe $AB$ — $D$ și $E$, pe $BC$ — $F$ și $G$, pe $CA$ — $H$ și $K$.
Se dă: $AD = BE$, $BF = CG$ și $CH = AK$.
În triunghiurile $ADK$, $BEF$ și $CGH$ ducem medianele corespunzătoare vîrfurilor $A$, $B$ și $C$. Să se arate că aceste mediane sînt concurente.

**12.** Fie punctele $A$, $B$, $C$, $D$ ale unui cerc astfel ca $AB$ să fie un diametru, iar $CD$ nu. Să se demonstreze că dreapta care unește punctul de intersecție ale tangentelor la cerc duse în $C$ și $D$, cu punctul de intersecție al dreptelor $AC$ și $BD$, este perpendiculară pe dreapta $AB$.

**13.** Să se arate că într-un patrulater inscriptibil două laturi consecutive sînt egale dacă și numai dacă unul din unghiurile patrulaterului este egal cu unghiul dintre diagonale.

**14.** Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Fie $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, respectiv mijloacele segmentelor $B_1C_1$, $C_1D_1$, $D_1A_1$, $A_1B_1$. Să se arate că punctele $AA' \cap CC'$ și $BB' \cap DD'$ se află pe segmentul $MH$ care unește mijloacele diagonalelor, împărțindu-l în trei părți egale.

**15.** Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal ($AC \perp BD$) și $O$ intersecția diagonalelor sale. Se duce $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OQ \perp DA$. Să se arate că $MNPQ$ este un patrulater inscriptibil.

**16.** Fie $ABCD$ un patrulater circumscris cercului de centru $O$. Să se arate că mijloacele diagonalelor și cu $O$ sînt coliniare.

**17.** Dacă $ABCD$ e un trapez circumscriptibil și notăm cu $O = AC \cap BD$ și cu $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, razele cercurilor inscrise în triunghiurile $ABO$, $BCO$, $CDO$, $DAO$, atunci:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

**18.** Să se demonstreze că cele patru perpendiculare coborîte din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse se intersectează în același punct.

**19.** Să se găsească toate patrulaterele inscriptibile cu proprietatea că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse sînt perpendiculare.

**20.** Într-un cerc se înscrie un patrulater $ABCD$. Să se demonstreze că centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC$, $CDA$, $BCD$, $DAB$ sînt conciclice.

**21.** Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se găsească locul geometric al punctelor $O$ din interiorul lui $ABCD$ pentru care ariile patrulaterelor $OBCD$ și $OBAD$ sînt egale.

**22.** Se poate găsi în interiorul unui patrulater convex $ABCD$ un punct $O$, în așa fel încît ariile tuturor triunghiurilor $OAB$, $OBC$, $OCD$ și $ODA$ să fie egale.

**23.** Se dă un triunghi $ABC$ ascuțitunghic în care $\widehat{ABC} = n \cdot \widehat{BAC}$, cu $n \in N^*$. Să se arate că se poate împărți triunghiul dat, prin $n - 1$ segmente de dreaptă, în $n$ triunghiuri isoscele, astfel ca laturile egale ale acestor triunghiuri să fie toate egale între ele.



**24.** Fie triunghiul isoscel $A_1A_2A_3$. Să se arate că există în plan două puncte $M_1$, $M_2$, astfel ca triunghiurile $A_1A_2M_i$, $A_1A_3M_i$, $A_2A_3M_i$ să fie isoscele, $i = 1, 2$.

**25.** În triunghiul $ABC$ fie $M$ un punct astfel încît $\sphericalangle AMB = 180° - \hat{B}$, $\sphericalangle AMC = 180° - \hat{C}$. Atunci să se arate că $M$ este pe mediana dusă din $A$.

**26.** Fie $ABCD$ un pătrat și $O$ un punct în interiorul său astfel încît $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = 15°$. Să se arate că triunghiul $OCD$ este echilateral.

**27.** Fie triunghiul $ABC$ și pe laturile $AB$ și $AC$ punctele $M$ și $N$ astfel încît $BM = CN$. Fie $E$ și $F$ pe $MN$ respectiv pe $BC$ astfel încît $ME = EN$ și $BF = FC$. Atunci $EF$ e paralelă cu bisectoarea din $A$.

**28.** Dacă un triunghi are două bisectoare egale atunci este isoscel.

**29.** Să se construiască centrul $O$ al unui cerc numai cu compasul.

**30.** Se dă triunghiul $ABC$ isoscel, cu $AB = AC$, $\hat{A} = 20°$. Pe $AC$ se ia un punct $M$ iar pe $AB$ un punct $N$ astfel ca $\widehat{MBA} = 20°$ și $\widehat{NCA} = 30°$. Să se calculeze unghiul $\widehat{NMB}$.

**31.** Fie $XYZ$ un triunghi astfel încît în triunghiul $ABC$ dreptele $AY$, $AZ$, $BZ$, $BX$, $CX$, $CY$ să împartă unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$ respectiv $\hat{C}$ în trei părți egale (vezi fig. 31). Să se arate că triunghiul $XYZ$ este echilateral.

## II. INEGALITĂȚI GEOMETRICE. PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

**32.** Să se demonstreze că dacă trei unghiuri ale unui patrulater convex sînt obtuze, atunci diagonala care pleacă din al patrulea unghi este mai mare decît cealaltă diagonală.

**33.** În patrulaterul convex $ABCD$ avem $AB + BD \leqslant AC + CD$. Să se arate că $AB$ este mai mică decît $AC$.

**34.** Fie un punct $M$ pe una din fețele unui triedru care are suma unghiurilor plane $< 180°$. Să se ducă prin $M$ un drum închis care să străbată toate fețele și toate muchiile triedrului și să aibă lungimea minimă.

**35.** Fie $\sphericalangle xOy < 45°$ și $A \in Ox$ fixat. Să se determine $M$ și $N$ pe $Oy$, respectiv pe $Ox$ astfel încît $AM + MN$ să fie minimă.

**36.** Să se arate că dacă printre patrulaterele înscrise într-un patrulater dat $ABCD$ ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in DA$, $M$, $N$, $P$, $Q$ distincte între ele) există unul de perimetru minim, atunci $ABCD$ este inscriptibil.

**37.** Să se găsească triunghiul de perimetru minim înscris într-un triunghi ascuțitunghic.

**38.** În orice triunghi ascuțitunghic există un punct și numai unul pentru care suma distanțelor la cele trei vîrfuri e minimă.

**39.** Se dă un cub de muchie 1. Să se arate că există pe suprafața $S$ a cubului un punct $N$ care să poată fi unit cu orice alt punct al suprafeței $S$ printr-o linie frîntă de lungime mai mică decît 2, situată în întregime pe suprafața cubului.

**40.** Pe suprafața unei sfere de rază 1 se consideră două puncte. Aceste puncte sînt unite printr-un drum care trece prin interiorul sferei și care are lungimea 2. Să se arate că se poate secționa sfera printr-un plan care trece prin centrul sferei și care lasă întreg drumul de aceeași parte a planului.

**41.** Fie $ABCD$ un patrulater convex, $M$ mijlocul laturii $AB$ și $N$ mijlocul laturii $CD$.

a) Să se arate că:

$$\frac{AD + BC}{2} \geqslant MN;$$

b) Inegalitatea devine egalitate dacă și numai dacă $ABCD$ este un trapez.

**42.** Să se arate că dacă într-un triunghi avem $a + c = 2b$ atunci $b^2 \geqslant 6rR$. În ce caz avem egalitate?

**43.** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu $M$ și $N$ mijloacele laturilor $BC$, respectiv $AD$. Să se arate că aria patrulaterului $MQNP$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor $ABP$ și $CDQ$, unde am notat $P = AM \cap BN$, $Q = CN \cap MD$.

**44.** Într-un paralelogram se unește mijlocul fiecărei laturi cu extremitățile laturii opuse. Să se găsească raportul dintre aria octogonului interior convex format și cea a paralelogramului dat.

**45.** Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $M$ și $N$ pe $AB$, respectiv $CD$, astfel încît:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$$

Să se arate că dacă $AC$, $BD$, $MN$ sînt concurente, atunci $ABCD$ este trapez.

**46.** Fie $ABCD$ un patrulater convex și pe $AB$ fie $AM = MN = NB$ și pe $CD$, $CP = PQ = QD$. Dacă $AC \cap BD = O$, atunci să se arate că

$$S_{NOQ} = S_{MOP}.$$

**47.** Fie $ABCD$ patrulater convex, $M$ și $N$ pe $AB$, $P$ și $Q$ pe $CD$. Dacă $AM = NB$ și $CP = QD$ și $S_{AMQD} = S_{BNPC}$ atunci $AB \parallel CD$.

**48.** Fie $ABCD$ patrulater și punctele $M$, $N$ pe $AB$ și $P$, $Q$ pe $CD$ astfel încît $DQ = QP = PC$ și $AM = MN = NB$. Atunci $3S_{MNPQ} = S_{ABCD}$.

**49.** Fie $ABCD$ un patrulater convex de laturi consecutive $a$, $b$, $c$, $d$, și arie $S$. Să se arate că:

$$S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} \quad \text{și} \quad S \leqslant \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}.$$

**50.** Fiind dat triunghiul $ABC$ alegem un punct oarecare pe una din laturile sale și ducem prin el paralele la celelalte laturi ale triunghiului. Notînd cu $S_1$, $S_2$ ariile triunghiurilor ce se formează prin construirea acestor paralele și cu $S$ aria triunghiului dat să se arate că este adevărată inegalitatea:

$$2(S_1 + S_2) \geqslant S.$$

**51.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare. Prin punctul $M$ ales în interiorul triunghiului ducem paralele la laturile $AB$, $BC$, $CA$. Se formează astfel trei triunghiuri care au toate laturile paralele cu laturile triunghiului dat. Notînd cu $S_1$, $S_2$, $S_3$ ariile acestor triunghiuri și cu $S$ aria triunghiului dat să se arate că există inegalitatea:

$$3(S_1 + S_2 + S_3) \geqslant S.$$



**52.** Se dă triunghiul $ABC$. Pe prelungirile laturilor $a$, $b$, $c$, ale triunghiului se iau segmentele $BM = BN = b$, $CP = CR = c$, $AK = AL = a$. Să se arate că $S_{KLMNPR} \geqslant 13S_{ABC}$.

**53.** Trei coarde împart un disc $C$ în 7 regiuni plane. Pot avea aceste regiuni arii egale?

**54.** Să se arate că în orice patrulater convex se poate înscrie un cerc de rază $S/P$, unde $S$ și $P$ sînt respectiv aria și perimetrul patrulaterului.

**55.** Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Unind din două în două vîrfurile sale se obține în interiorul său un nou pentagon convex $A'B'C'D'E'$. Să se arate că:

$$S_{ABCDE} > 2S_{A'B'C'D'E'}$$

**56.** Fie $A_1A_2 \ldots A_6$ un hexagon convex de arie $S$. Să se arate că există un triunghi format din trei vîrfuri consecutive ale hexagonului a cărui arie este mai mică decît $\frac{1}{6} S$.

**57.** Fie $O$ un punct în planul triunghiului $ABC$. Să se arate că:

$$3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \geqslant AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

**58.** Fie un punct $M$ în interiorul triunghiului $ABC$. Să se arate că:

$$MA + MB + MC \geqslant 2(d_a + d_b + d_c),$$

unde $d_a$, $d_b$, $d_c$ sînt distanțele punctului $M$ la laturile $a$, $b$, respectiv $c$.

**59.** Fie $A_0$ și $A_n$ două puncte pe un cerc. Să se găsească poziția punctelor $A_1 \ldots A_{n-1}$ situat la rînd pe unul din cele două arce $A_0A_n$ astfel încît lungimea liniei frînte $A_0A_1 \ldots A_n$ să fie maximă.

**60.** Să se demonstreze că produsul razelor cercurilor exînscrise unui triunghi oarecare este inferior sau egal produsului laturilor triunghiului înmulțit cu $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Cînd are loc egalitatea?

**61.** Pe laturile unui patrulater convex $ABCD$ se iau punctele $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ așa fel încît:

$$\frac{AB}{AA_1} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{CD}{CC_1} = \frac{DA}{DD_1} = n.$$

Să se determine valoarea lui $n$ pentru care $S_{A_1B_1C_1D_1}$ e minimă.

**62.** Printr-un punct $M$ interior cercului de centru $O$ se duc două coarde $AB$, $CD$ perpendiculare una pe alta.

Cum trebuie să se ducă aceste coarde pentru ca suma ariilor triunghiurilor $MAC$, $MBD$ să fie cea mai mică posibilă.

**63.** Care poate fi aria cea mai mare a unui triunghi de laturi $a$, $b$, $c$ care verifică inegalitățile:

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3.$$

**64.** Printre patrulaterele convexe care se găsesc în interiorul semicercului de rază $R$ să se găsească patrulaterul de arie maximă și cel de perimetru maxim.

**65.** Să se găsească printre toate patrulaterele convexe $ABCD$ cu laturi $AB = BC = CD = 1$ acela care are aria cea mai mare.

**66.** Să se determine într-un cerc de centru $O$ și raza $R$ un triunghi de arie maximă, astfel încît una din laturile sale să treacă printr-un punct $M$ din interiorul cercului, unde $2MO \geqslant R$.

**67.** Fie $M$ un punct în interiorul triunghiului $ABC$ și fie $d_a$, $d_b$, $d_c$ distanțele lui $M$ la $BC$, $AC$, $AB$. Atunci:

$$MA \cdot MB \cdot MC \geqslant (d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a).$$

**68.** Să se arate că dintre patrulaterele convexe de laturi $a$, $b$, $c$, $d$, cel de arie maximă este inscriptibil.

**69.** Dacă există între poligoanele cu $n$ laturi și de perimetru dat $p$, unul de arie maximă, atunci acel poligon este regulat.

**70.** Fie $O$ un punct pe o dreaptă $d$ și $\overrightarrow{OP}_1, \ldots, \overrightarrow{OP}_n$ vectori de lungime 1 care se găsesc în același semiplan determinat de $d$. Atunci $n$ impar implică $|\overrightarrow{OP}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP}_n| \geqslant 1$.

**71.** Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon înscris în cercul unitate de centru $O$ și avînd centrul de greutate tot în $O$. Să se arate că dacă $M$ este un punct oarecare în plan avem: $\sum_{i=1}^{n} A_iM \geqslant n$.

**72.** Să se arate că un poligon convex de perimetru $P$ are o diagonală strict mai mare decît $P/\pi$.

**73.** Fie $\overrightarrow{OV}_1, \ldots, \overrightarrow{OV}_{32}$ vectori în plan de lungime 1. Să se arate că putem extrage $k$ vectori distincți dintre aceștia, astfel încît suma lor să fie în modul mai mare decît 10.

## III. POLIGOANE REGULATE

**74.** Se dau în plan două triunghiuri echilaterale $\Delta ABC$ și $\Delta A'B'C'$. Să se arate că mijloacele lui $AA'$, $BB'$, $CC'$ determină un triunghi echilateral, atunci cînd unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{B'A'C'}$ sînt rotite în același sens.

**75.** Se dă un hexagon convex cu centru de simetrie.

Se duc pe fiecare latură a sa în interior triunghiuri echilaterale. Unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale consecutive obținem un nou hexagon. Să se arate că mijloacele laturilor acestui hexagon determină un hexagon regulat.

**76.** Fie $A_0A_1 \ldots A_n$ vîrfurile unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris în cercul unitate. Atunci:

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 \ldots A_0A_{n-1} = n.$$

**77.** Luăm un poligon regulat cu $n$ laturi $P_n$ și colorăm vîrfurile sale în diferite culori astfel încît fiecare culoare să determine un poligon regulat. Să se arate că cel puțin două astfel de poligoane nou obținute sînt egale.

**78.** În plan se dă poligonul regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ ($n \geqslant 3$). Cîte triunghiuri obtuzunghice $A_iA_jA_k$ se pot forma?



**79.** Fiind dat un poligon regulat cu $n$ laturi și un punct $M$ în interiorul lui aflat la distanțele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de laturi, să se arate că:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} > \frac{2\pi}{a}$$

unde $a$ este latura poligonului.

**80.** Fie $h_n$ apotema poligonului regulat cu $n$ laturi, înscris în cercul de rază $R$. Să se demonstreze că:

$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > R.$$

**81.** Fie în plan un poligon regulat $A_1A_2 \ldots A_n$. Să se găsească toți $m$ cu $n \geqslant m \geqslant 1$ astfel încît să existe în plan un punct $M$ cu proprietatea că:

$$MA_1 < MA_2 < \ldots < MA_m.$$

**82.** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în spațiu astfel încît $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_nA_1$ și $\widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_2A_3A_4} = \ldots = \widehat{A_{n-1}A_nA_1} = \widehat{A_nA_1A_2}$. Să se afle toți $n \geqslant 3$ pentru care rezultă automat că punctele sînt coplanare.

**83.** Fie $A_1, \ldots A_n$ vîrfurile unui poligon regulat și $P$ un punct în planul poligonului. Să se arate că se poate construi un poligon cu laturile de lungime $PA_1$, $PA_2$, $\ldots$, $PA_n$.

**84.** Să se arate că dacă într-un punct din interiorul unui poligon regulat cu $2n$ laturi se intîlnesc $n$ diagonale, atunci acest punct este centrul cercului circumscris poligonului.

## IV. PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI METRICE ALE FIGURILOR GEOMETRICE

**85.** Să se arate că într-un poligon convex cu $n \geqslant 3$ laturi numărul maxim de diagonale și laturi care se intersectează oricare două, este $n$.

**86.** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, numere reale strict pozitive. Să se arate că aceste numere pot fi laturile consecutive ale unui poligon dacă și numai dacă avem inegalitățile:

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2 + \ldots + a_n \\ a_2 &< a_1 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &< a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

**87.** Să se arate că orice patrulater convex poate fi deformat la un patrulater inscriptibil cu laturile egale cu ale patrulaterului inițial. Este afirmația valabilă pentru poligoane arbitrare?

**88.** Perimetrul unui poligon convex este mai mic decît perimetrul unei linii poligonale închise care-l înconjură din toate părțile.

**89.** Suprafața unui poliedru convex este mai mică decît suprafața oricărui poliedru care-l conține.

**90.** Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuțite.

**91.** Fie $P$ un punct în interiorul unui poligon convex $A_1A_2 \ldots A_n$. Să se arate că există o latură $A_iA_{i+1}$ a poligonului astfel încît proiecția punctului $P$ pe dreapta determinată de punctele $A_i$, $A_{i+1}$ să se afle în interiorul segmentului $A_iA_{i+1}$.

**92.** Fie $P$ un poliedru convex și $O$ un punct în interiorul său. Să se arate că există o față a poliedrului pe care punctul $O$ se proiectează în interior.

**93.** Se dă un poligon în plan. Există întotdeauna un vîrf și o latură care nu îl conține, astfel încît vîrful să se proiecteze pe latura respectivă? Să se studieze problema analoagă în spațiu (pt. vîrfuri și fețe).

**94.** Într-un pătrat de latură 1 se află un poligon convex de arie $\geqslant 1/2$. Să se arate că există o dreaptă $d$ paralelă cu una din laturi care să intersecteze poligonul după un segment de lungime $\geqslant 1/2$.

**95.** Fie un pătrat de latură 50. O linie frîntă $L$ este situată în întregime în pătrat, astfel că distanța de la fiecare punct din interiorul pătratului la punctul cel mai apropiat al liniei $L$ este inferioară unității. Să se demonstreze că lungimea liniei $L$ este superioară lui 1 248.

**96.** Se dă un pătrat cu latura de 38 cm, în care se găsesc 100 de poligoane convexe de arie cel mult $\pi$ cm² și perimetrul cel mult $2\pi$ cm. Să se arate că în pătrat există un cerc de rază 1 cm care n-are puncte comune cu nici un poligon.

**97.** Într-un cub de latură 1 se consideră o linie frîntă de lungime 300 care nu se intretaie. Să se arate că există un plan paralel cu una din fețele cubului care taie linia frîntă în cel puțin 101 puncte distincte.

**98.** Se dă în plan o linie frîntă $L$ de lungime $2l$. Să se arate că există un dreptunghi de arie $l^2$ care să o includă în interior.

**99.** Să se demonstreze că orice poligon convex $P$ de arie 1 poate fi inclus într-un dreptunghi de arie 2.

**100.** Fie $P$ un poligon convex de arie $S$.

a) Să se arate că există două drepte paralele la distanță minimă care să lase poligonul între ele;

b) Să se arate că se poate duce în interiorul poligonului un dreptunghi de laturi $a/2$ și $\sqrt{S}/4$, unde prin $a$ am notat distanța minimă obținută la primul punct.

**101.** Fie $P_1$ un pentagon convex cu vîrfurile $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ și fie $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ pentagoanele pe care le obținem aplicînd lui $P_1$ translațiile $A_1 \to A_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$). Să se arate că cel puțin două dintre pentagoanele $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ au puncte interioare comune.

**102.** Fie $P_1$ un poliedru cu 9 vîrfuri $A_1, \ldots, A_9$, convex și fie $P_2, \ldots, P_9$ poliedrele pe care le obținem aplicînd lui $P_1$ translațiile $A_1 \to A_i$ ($i=2,\ldots, 9$). Să se arate că cel puțin două dintre poliedrele $P_1, P_2, \ldots, P_9$ au puncte interioare comune.

**103.** Să se arate că toate axele de simetrie ale unui poligon sînt concurente.

**104.** Să se arate că într-un poligon cu exact $n$ axe de simetrie se poate înscrie un poligon regulat cu $d$ laturi, oricare ar fi $d$ divizor al lui $2n$ cu $d \geqslant 3$.

**105.** Să se arate că într-un poligon convex cu cel puțin o axă de simetrie se poate înscrie un pătrat.



**106.** Să se arate că pentru orice poligon convex se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile pe laturile sale. Este același lucru adevărat pentru pătrat?

**107.** Să se demonstreze că un triunghi de arie 1 nu poate fi inscris într-un paralelogram de arie strict mai mică decît 2.

**108.** Fie 9 puncte într-un pătrat de latură 1. Atunci există un triunghi de arie $\leqslant 1/8$ cu capetele în trei puncte din cele nouă.

**109.** Fie 28 de puncte în interiorul unui cub de latură 1. Să se arate că există două puncte astfel încît distanța dintre ele să fie mai mică decît $\sqrt{3}/3$.

**110.** Dacă vîrfurile și ortocentrul unui triunghi se află pe laturile unui poligon convex, să se demonstreze că triunghiul este dreptunghic.

**111.** Să se demonstreze că punctul de intersecție al înălțimilor unui triunghi este situat mai aproape de cea mai mică dintre două laturi decît de cea mai mare.

**112.** Într-un triunghi cu unghiurile ascuțite este înscris un pătrat astfel încît două vîrfuri ale sale se află pe una din laturile triunghiului, iar celelalte două pe cîte o latură. Să se demonstreze că centrul cercului înscris în triunghi se află în interiorul pătratului.

**113.** Fie $ABCD$ patrulater convex și $M$, $N$ pe $AB$, respectiv $P$, $Q$ pe $CD$. Dacă $AM = MN = NB$ și $CP = PQ = QD$ și punem $O = AC \cap BD$ și $O' = QN \cap MP$ și dacă $O$ este situat în unul din triunghiurile $O'PQ$ sau $O'MN$ atunci $ABCD$ este un trapez.

**114.** Pe laturile unui patrulater convex se construiesc cercuri de diametru latura respectivă. Să se arate că discurile mărginite de aceste cercuri acoperă în întregime patrulaterul.

**115.** Să se arate că sferele cu diametrele pe muchiile laterale ale unei piramide, acoperă piramida.

**116.** Fie 6 discuri în plan cu intersecția nevidă. Să se arate că există cel puțin un disc care conține centrul altuia.

## V. CONFIGURAȚII DE PUNCTE. RELAȚII ÎNTRE PUNCTE ȘI FIGURI GEOMETRICE

**117.** Fie o partiție a planului în două mulțimi, $E_1$ și $E_2$, adică $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, și orice punct din plan este fie în $E_1$ fie în $E_2$. Să se arate că cel puțin una din mulțimi conține 3 puncte care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

**118.** Fie o partiție a unui pătrat de latură 1 în două mulțimi $E_1$ și $E_2$. Să se arate că există două puncte într-una din mulțimile partiției astfel încît distanța dintre ele să fie mai mare decît $\sqrt{5}/2$.

**119.** Fie o partiție a unui cub de latură 1, în două mulțimi. Să se arate că există într-una din cele două mulțimi două puncte la distanță mai mare de 3/2.

**120.** Fie 4 puncte în plan cu proprietatea că distanța dintre oricare două este cuprinsă între $\sqrt{2}$ și 2. Să se arate că punctele sînt conciclice.

**121.** Fie 6 puncte în plan. Să se arate că raportul dintre cea mai mare și cea mai mică dintre distanțele între două puncte este superior lui $\sqrt{3}$.

**122.** Să se arate că dacă punctul $M$ este așezat în interiorul pătratului $ABCD$ de latură 1 atunci cel mult una din distanțele $MA$, $MB$, $MC$, $MD$ este mai mare decît $\sqrt{5}/2$, cel mult două sînt mai mari decît 1 și cel mult trei mai mari decît $\sqrt{2}/2$.

**123.** Se dau în plan 5 puncte astfel încît oricare trei nu sînt coliniare. Fiecare două puncte se unesc între ele fie printr-o linie roșie fie printr-o linie albastră, astfel încît nici un triplet de astfel de linii să nu formeze un triunghi unicolor.

Să se demonstreze că:

a) Din fiecare punct pleacă două linii roșii și două albastre;

b) Segmentele roșii reprezintă o linie poligonală închisă care conține toate cele cinci puncte date (la fel segmentele albastre).

**124.** Fie două drepte paralele $d_1$ și $d_2$. Pe $d_i$ se iau $n_i$ puncte, $i = 1,2$ $n_i \geq 1$. Notăm cu $A_j^i$, $j = 1, \ldots, n_i$ punctele de pe dreapta $d_i$. Se unesc puncte de pe $d_1$ cu puncte de pe $d_2$ cu segmente fie de culoare roșie, fie neagră, astfel încît din $A_j^i$ pleacă cîte un segment roșu și cîte un segment negru oricare ar fi $j = 1, \ldots, n_i$ și $i = 1,2$. Să se arate că există $j \neq k$ și $m \neq p$ astfel încît $A_j^1 A_m^2$ negru, $A_m^2 A_k^1$ roșu, $A_k^1 A_p^2$ negru și $A_p^2 A_j^1$ roșu.

**125.** Se poate desena un patrulater împreună cu diagonalele sale fără a ridica creionul de pe hîrtie și fără a parcurge de două ori același segment? Dar un pentagon?

**126.** Fie $R$ o rețea în plan ale cărei vîrfuri le notăm $A_i$ cu $i = 1, \ldots, n$ și care are următoarele proprietăți:

1) dacă segmentul $A_iA_j$ $(i \neq j)$ aparține rețelei atunci oricare ar fi $k \neq i$ și $k \neq j$, $A_kA_i \in \mathbf{R}$ implică $A_kA_j \notin \mathbf{R}$;

2) Dacă $A_iA_j \notin \mathbf{R}$ atunci există exact doi indici $k$, $l$ diferiți de $i$, $j$, astfel încît $A_kA_i \in \mathbf{R}$, $A_kA_j \in \mathbf{R}$, $A_lA_i \in \mathbf{R}$ și $A_lA_j \in \mathbf{R}$.

Să se demonstreze atunci că din orice punct al rețelei pleacă același număr de segmente.

**127.** Fie $n \geq 3$ puncte în plan astfel încît oricare trei să fie necoliniare. Să se arate că se poate construi un cerc care să treacă prin cel puțin 3 din cele $n$ puncte și să nu conțină nici un punct în interior.

**128.** Fie $n \geq 3$ puncte în plan astfel încît oricare trei să fie necoliniare. Să se arate că există un cerc care să treacă prin cel puțin trei din punctele date și să le conțină pe toate celelalte în interior.

**129.** Avem în plan $2n + 3$ puncte astfel încît oricare 3 să fie necoliniare și oricare 4 neconciclice. Se poate duce un cerc prin 3 din puncte care să lase $n$ puncte afară și $n$ puncte în interior?

**130.** Se consideră mulțimile de $2n + 1$ puncte care au proprietatea următoare: oricare ar fi un punct ales, $n$ puncte din celelalte se află la distanță mai mică strict decît 1 și $n$ la distanța mai mare strict decît 1 de el. Să se arate că numai pentru $n$ par există astfel de mulțimi.

**131.** Fie într-un plan 4 000 de puncte astfel încît oricare 3 dintre ele sînt necolineare. Să se demonstreze că în acest caz se pot desena în plan 1 000 de patrulatere fără puncte comune, însă astfel ca vîrfurile lor să fie punctele date.

**132.** Fie 99 de puncte în plan. Să se arate că dacă pe orice direcție există o dreaptă care lasă de fiecare parte a ei același număr de puncte, atunci există 3 puncte coliniare.



**133.** Să se găsească toate mulțimile finite de puncte din spațiu care satisfac proprietățile: oricare patru să fie necoplanare și oricare ar fi o dreaptă în spațiu să existe un plan perpendicular pe aceasta care să împartă mulțimea în două părți cu același număr de puncte.

**134.** Fie în plan 100 de puncte. Să se arate că ele pot fi acoperite cu discuri care să fie două cîte două la distanță $>$ 1 și care să aibă suma diametrelor $<$ 100.

**135.** Să se stabilească dacă există sau nu o mulțime finită $M$ de puncte în spațiu, neconținute în același plan astfel încît oricare ar fi $A$, $B \in M$, există $C$, $D \in M$ astfel încît $AB \parallel CD$ dar $AB \neq CD$ ca drepte.

**136.** Să se demonstreze că pentru orice $m$ natural există o mulțime $E$, finită, nevidă de puncte în plan cu următoarea proprietate: dacă $A$ este un element al mulțimii $E$, există în $E$, $m$ și numai $m$ puncte situate la distanța 1 de $A$.

**137.** Considerăm $n$ puncte în plan aranjate astfel încît numărul segmentelor egale cu 1 obținute unind cele $n$ puncte să fie maxim. Notăm acest număr cu $\tau(n)$.

Să se arate că:

$$\frac{n \ln n}{3} \leq \tau(n) \leq \frac{n^2}{3}$$

**138.** Se dau $n$ puncte, $n > 4$, situate în același plan astfel încît oricare trei dintre ele să nu fie coliniare. Să se demonstreze că există cel puțin $C_{n-3}^2$ patrulatere convexe ale căror vîrfuri să fie în punctele considerate.

**139.** Într-un plan se iau 100 de puncte astfel încît oricare trei să nu fie coliniare. Se consideră toate triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte. Să se arate că printre aceste triunghiuri există cel mult 70 de triunghiuri cu toate unghiurile ascuțite.

**140.** Să considerăm pe o dreaptă $n$ segmente cu proprietatea că oricare două se intersectează. Să se arate că toate segmentele au un punct comun.

**141.** Fie $n$ discuri în plan cu proprietatea că oricare trei au puncte comune. Să se arate că toate discurile au un punct comun.

**142.** Fie $n$ sfere în spațiu cu proprietatea că oricare 4 se intersectează. Să se arate că intersecția tuturor sferelor este nevidă.

**143.** Fie $M$ o mulțime finită de puncte în plan astfel încît pentru fiecare 3 puncte din $M$ există un disc de rază 1 care le conține.

Să se demonstreze că există un disc de rază 1 care conține toate punctele lui $M$.

**144.** Fie $n \geq 4$ puncte în spațiu cu proprietatea că oricare 4 sînt conținute într-o bilă de rază 1. Să se arate că toate punctele sînt conținute într-o sferă cu raza 1.

**145.** Se dau în plan $n$ cercuri de centre $O_1, \ldots, O_n$ și de raze $r_1, \ldots, r_n$. Fie $O_1', \ldots, O_n'$ în același plan astfel încît $O_i'O_j' \leq O_iO_j$, oricare ar fi $i, j = 1, \ldots, n$.

Să se arate că dacă cercurile de centre $O_i$ și raze $r_i$, $i = 1, \ldots, n$ au intersecția nevidă, atunci și cercurile de centru $O_j'$ și rază $r_j$, $j = 1, \ldots, n$ au intersecția nevidă.

**146.** Fie $n$ puncte în plan astfel încît distanța dintre oricare două este mai mică decît 1. Să se arate că există un cerc de rază $\sqrt{3}/3$ care să le conțină pe toate în interior

**147.** Dacă $M$ este o mulțime finită de puncte în plan, cu proprietatea că oricare 3 sînt necoliniare și astfel încît $S_{A_iA_jA_k} \leqslant 1$ oricare ar fi $A_i$, $A_j$, $A_k \in M$ atunci există un poligon convex de arie 15/4 care conține $M$.

**148.** Fie $n$ puncte în plan cu proprietatea că distanța dintre oricare două este mai mare ca 1. Să se arate că raza oricărui cerc care le conține pe toate este mai mare decît $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$.

**149.** Fie $n$ puncte în spațiu astfel încît distanța dintre oricare două să fie mai mare ca 1. Să se arate că raza oricărei sfere care le conține pe toate în interior este strict mai mare decît $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{2}$.

**150.** Fie $A$, $B$, $C$ trei puncte în plan. Știind că distanța dintre oricare două este mai mare decît 1 să se arate că raza oricărui cerc care le conține pe toate în interior este mai mare decît $\sqrt{3}/3$.

**151.** Fie $A_0A_1 \ldots A_n$ o linie frîntă în plan astfel încît:

$$\overline{A_0A_1} < \overline{A_1A_2} < \ldots < \overline{A_{n-1}A} \quad \text{și} \quad 60° \leqslant \widehat{A_0A_1A_2} \leqslant \widehat{A_1A_2A_3} \leqslant \ldots \leqslant \widehat{A_{n-2}A_{n-1}A_n} < 180°.$$

Să se arate dacă linia frîntă se poate întretăia sau nu.

**152.** Fie $A_0, \ldots, A_n$, $n+1$ puncte în plan cu următoarele proprietăți:
1) $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = 1$.

2) $60° \leqslant \widehat{A_0A_1A_2} \leqslant \widehat{A_1A_2A_3} \leqslant \ldots \leqslant \widehat{A_{n-2}A_{n-1}A_n} \leqslant 120°$.

Să se arate că toate punctele se află în interiorul cercului de rază 3 și centru $A_0$.

**153.** Fie $n$ puncte în plan cu proprietatea că dreapta determinată de oricare două mai conține cel puțin încă un punct. Să se arate că punctele sînt coliniare.

**154.** Fie $n$ drepte în plan care nu sînt toate paralele și cu proprietatea că prin intersecția a două drepte trece cel puțin o a treia dreaptă din cele $n$.

Să se demonstreze că dreptele sînt concurente.

**155.** Fie $n \geqslant 3$ puncte necoliniare în plan. Să se arate că există cel puțin $n$ drepte distincte, astfel încît fiecare să treacă măcar prin două din cele $n$ puncte.

**156.** Fie $M$ o mulțime finită de puncte în plan care nu se află toate pe același cerc și astfel încît oricare trei sînt necoliniare.

Este adevărat că orice punct din $M$ se află pe un cerc care trece prin exact alte două puncte din $M$?

**157.** Fie $M$ o mulțime finită de puncte pe o sferă care nu se află toate pe un cerc. Să se arate că prin orice punct trece cel puțin un cerc pe care se află exact alte două puncte din $M$.

**158.** Se dau în plan 25 de puncte, astfel încît din oricare trei se pot alege două cu distanța dintre ele mai mică decît 1. Să se arate că printre punctele date există 13 puncte într-un cerc de rază 1.

**159.** Într-un cerc de rază $n$ ($n \in \mathbb{N}$) considerăm $m$ coarde cu proprietatea că orice punct din interiorul cercului este la distanță mai mică sau egală cu 1 de cel puțin una dintre ele. Să se arate atunci că $m \geqslant n$.

**160.** Fie un pătrat $P$ de latură 1 și în interiorul său o figură $F$. Să se arate că dacă distanța dintre oricare două puncte ale lui $F$ este $\neq 0,001$, atunci aria lui $F$ este strict mai mică decît 0,34.



**161.** Pe suprafața unui cilindru nemărginit în ambele sensuri și de rază $r$ se consideră $n$ puncte arbitrare și o figură avînd aria strict mai mică decît 1. Dovediți că printr-o deplasare constînd dintr-o rotație de unghi arbitrar în jurul axei cilindrului și o translație în direcția axei cilindrului de lungime $\leqslant \frac{n}{4\pi r}$ figura poate fi adusă într-o poziție în care să nu conțină nici unul din cele $n$ puncte date.

**162.** Fie $n$ puncte în plan nu toate coliniare. E posibil ca distanța dintre oricare două să fie un număr întreg?

## VI. PROBLEME DE GEOMETRIE COMBINATORICĂ

**163.** Să se determine numărul de regiuni în care este împărțită o sferă de $n$ cercuri mari oricare trei neavînd puncte comune.

**164.** Pe o sferă se consideră $n$ cercuri trecînd prin același punct. Să se determine numărul maxim de regiuni în care cercurile împart sfera.

**165.** Să se găsească numărul maxim de regiuni în care $n$ sfere trecînd prin același punct $P$ împart spațiul.

**166.** Să se arate că orice patrulater inscriptibil poate fi împărțit în $n \geqslant 4$ patrulatere inscriptibile.

**167.** Fie $P$ un paralelipiped dreptunghic de laturi 6, 5, 4, care este umplut cu paralelipipede dreptunghice de laturi 3, 2, 1.

Să se arate că există un punct $M$ pe o față a paralelipipedului $P$ astfel încît perpendiculara ridicată în $M$ pe acea față să nu intersecteze nici un paralelipiped mic în interior.

**168.** Fie un dreptunghi de laturi 7 și respectiv 10. Din colțurile lui scoatem cîte un pătrat de latură 1. Să se arate că figura rămasă nu poate fi pardosită cu dreptunghiuri de laturi 3 și 1.

**169.** Fie un paralelipiped dreptunghic de laturi $8 \times 8 \times 7$. Din capetele unei diagonale mari scoatem cîte un cub de latură 1. Să se arate că volumul nou obținut nu poate fi umplut cu paralelipipede dreptunghice de laturi 1, 1 și 2.

**170.** Să se arate că un pătrat poate fi împărțit în $n$ pătrate pentru orice $n \neq 2, 3, 5$.

**171.** Fiind dat un cub să se arate că el nu poate fi umplut cu $n$ cuburi oricare două neegale ($n \geqslant 2$).

**172.** Să se arate că un cub poate fi împărțit în $n$ cuburi pentru orice $n \geqslant 58$.

**173.** Să se arate că nu se poate face o pardosire a planului cu poligoane convexe egale, cu mai mult de 16 laturi.

**174.** Se poate înscrie într-o rețea plană de pătrate de latură 1 un dreptunghi de laturi numere întregi, astfel încît vîrfurile sale să fie pe drepte distincte ale rețelei?

**175.** Să se găsească toate poligoanele regulate care pot fi înscrise într-o rețea plană de pătrate.

**176.** Se poate înscrie un tetraedru regulat într-o rețea spațială de cuburi?

## VII. PROPRIETĂȚI ALE TETRAEDRULUI ȘI PROBLEME DIVERSE

**177.** Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unui tetraedru regulat la centrul sferei circumscrise este mai mică decît suma distanțelor acelorași vîrfuri la oricare alt punct al spațiului.

**178.** Fie $T$ un tetraedru. Să se arate că există un vîrf astfel încît cu muchiile care pleacă din el să se poată construi un triunghi.

**179.** Dacă o muchie și numai una a unui tetraedru are lungimea mai mare ca 1, să se demonstreze că volumul tetraedrului nu depășește 1/8.

**180.** Se dă un tetraedru $ABCD$ în care suma a două muchii opuse este aceeași, $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

Să se arate că cercurile înscrise în triunghiurile $\Delta ABC$, $\Delta BCD$, $\Delta ACD$, $\Delta ABD$ sînt două cîte două tangente.

**181.** Pe fețele unui tetraedru regulat $ABCD$ se consideră două puncte $P$ și $Q$. Atunci $\widehat{PAQ} \leqslant 60°$.

**182.** Să se arate că suma unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît $2\pi$.

**183.** Există triunghiuri astfel încît să nu se poată construi tetraedre cu toate fețele triunghiuri egale cu acesta?

**184.** Într-un tetraedru muchiile opuse sînt două cîte două perpendiculare. Să se arate că cele 6 mijloace ale muchiilor se află pe aceeași sferă.

**185.** Să se determine volumul piramidelor posibile în care toate muchiile sînt de lungime 1.

**186.** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ patru puncte în spațiu, oricare trei necoliniare. Atunci $S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CDM} =$ ct. oricare ar fi $M$ pe $AD$, între $A$ și $D$, implică $A$, $B$, $C$, $D$ sînt coplanare.

**187.** Să se arate că dacă proiecțiile unui corp pe două plane sînt cercuri atunci aceste două cercuri sînt egale.

**188.** Considerăm o cale ferată închisă formată din porțiuni de forma unui sfert de cerc de rază $R$ puse cap la cap. Să se arate că numărul de porțiuni folosite e divizibil cu 4.

## VIII. PROBLEME PROPUSE PENTRU REZOLVARE

**189.** Să se arate că un poliedru convex în care oricare două vîrfuri se pot uni printr-o muchie, este tetraedru.

**190.** Să se arate că nu există poliedre convexe cu toate fețele poligoane cu cel puțin șase laturi.

**191.** Să se arate că un poliedru convex are două fețe poligoane cu același număr de laturi.

**192.** Să se arate că o mulțime în spațiu, care intersectată cu orice plan dă un cerc (sau eventual mulțimea vidă) este o sferă.

**193.** Este adevărat că orice poliedru cu toate fețele pătrate este cub?

**194.** Să se arate că nu există poliedre în spațiu cu proprietatea că proiecția lor pe orice dreaptă este un segment de lungime 1. Există și alte corpuri



geometrice cu această proprietate în afară de sferă? Ce se poate spune despre problema analoagă în plan?

**195.** Există poliedre care proiectate pe orice plan să dea un triunghi?

**196.** Să se arate că oricare ar fi un poligon în plan și $2n$ puncte distincte, există un poligon asemenea cu cel dat care lasă $n$ din puncte în interior și $n$ în exterior.

**197.** Să se arate că un poligon convex cu 13 laturi nu poate fi umplut cu un număr finit de paralelograme disjuncte.

**198.** Fie în plan un sistem de axe ortogonale $xOy$ și un poligon, nu neapărat convex, de arie mai mică decît 1 (strict). Să se arate că se poate translata poligonul astfel încît să nu conțină nici un punct de coordonate întregi.

**199.** Fie în plan două mulțimi de puncte $A$ și $B$, $A$ cu $2n$ puncte, iar $B$ cu $2m$ puncte, astfel încît oricare trei în ansamblul lor sînt necoliniare. Să se arate că există o dreaptă care împarte planul în două regiuni, astfel încît fiecare regiune să conțină $n$ puncte din $A$ și $m$ din $B$.

**200.** Fiind date $n^2 + 1$ segmente pe o dreaptă, să se arate că, fie există $n + 1$ printre ele astfel încît oricare două să nu aibă puncte comune, fie există $n + 1$ care să aibă intersecție nevidă.

**201.** Fiind dat un pentagon convex cu toate laturile egale cu 1, să se arate că există un triunghi echilateral de latură 1 în interiorul pentagonului.

**202.** Fiind date două poligoane în plan, $P_1$, $P_2$, să se arate că există $A_1 \in P_1$ și $A_2 \in P_2$ astfel încît $A_1A_2 \leqslant B_1B_2$ oricare ar fi alte două puncte $B_1 \in P_1$ și $B_2 \in P_2$.

**203.** În pătratul de latură 1 se dau $n^2$ puncte. Să se arate că există o linie frîntă cu vîrfurile în aceste puncte și de lungime mai mică decît $3n$.

**204.** Diametrul unui cerc este împărțit de $n + 1$ puncte în $n$ părți egale. Fie $M$ un punct de pe cerc. Să se arate că suma pătratelor distanțelor lui $M$ la cele $n + 1$ puncte nu depinde de poziția lui $M$ pe cerc.

**205.** Fie $A$, $B$, $C$ și $D$ puncte în plan astfel încît pentru orice punct $P$ din plan să avem $PA + PD \leqslant PB + PC$. Să se arate că $A$, $B$, $C$, $D$ sînt coliniare și $AC = BD$, $C$ și $D$ fiind între punctele $A$, $B$.

**206.** Să se arate că există în plan o infinitate de cercuri egale între ele, astfel încît orice dreaptă să taie cel mult două dintre ele.

**207.** Să se arate că există o infinitate de pentagoane convexe neegale astfel încît ariile tuturor triunghiurilor formate de trei vîrfuri consecutive să fie 1. Să se arate că toate aceste pentagoane au ariile egale.

**208.** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că există o infinitate de patrulatere inscriptibile $MNPQ$ cu $M$ pe $AB$, $N$ pe $BC$, $P$ pe $CD$ și $Q$ pe $DA$ și astfel încît $M$, $N$, $P$ și $Q$ să fie distincte de vîrfurile patrulaterului $ABCD$.

**209.** Să se arate că pentru oricare două mulțimi finite, disjuncte, de puncte din plan, există o linie frîntă închisă, care nu se întretaie, avînd segmentele consecutive perpendiculare, astfel încît să lase o mulțime în interior și alta în exterior.

**210.** Să se arate că oricare ar fi $n$ puncte în plan, oricare trei necoliniare, există un poligon avînd drept vîrfuri aceste $n$ puncte, astfel încît laturile sale să nu se întretaie.

**211.** Se dau 5 segmente astfel încît cu oricare trei se poate construi un triunghi. Să se arate că cel puțin unul dintre aceste triunghiuri este ascuțitunghic.

**212.** Se dau în plan un număr finit de puncte, astfel încît distanțele dintre oricare două să fie distincte. Fiecare punct se unește cu cel mai apropiat de el. Să se găsească numărul maxim de segmente care pot pleca dintr-un singur punct. Să se formuleze și să se demonstreze un enunț analog în spațiu.

**213.** Să se arate că într-un cerc de rază 1 nu pot exista mai mult de 5 puncte, astfel încît distanța dintre oricare două să fie mai mare decît 1.

**214.** Fie $a$, $b$, $c > 0$ și astfel încît $a^k$, $b^k$, $c^k$ pot fi mărimile laturilor unui triunghi, oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$. Să se arate că două din numerele date sînt egale.

**215.** Într-un cub de muchie 1 sînt așezate 2 050 puncte. Să se demonstreze că din aceste puncte, măcar 5 se pot plasa într-o sferă de rază 1/9.

**216.** Într-un pătrat de latură 1 km, se găsește o pădure cu 4500 stejari de diametru 50 cm. Să se arate că se poate duce în interiorul pătratului, un dreptunghi de dimensiuni 10 m × 20 m, care să nu intretaie și să nu conțină nici un copac.

**217.** Într-un pătrat de latură 1 sînt desenate cîteva cercuri cu suma lungimilor egală cu 12. Să se arate că se poate duce o dreaptă care să secționeze cel mult patru cercuri.

**218.** Dacă planul este acoperit cu $n$ semiplane, cu $n \geqslant 3$, atunci el poate fi acoperit numai cu trei dintre aceste semiplane.

**219.** Un dreptunghi se pardosește cu bucăți dreptunghiulare $4 \times 1$ și $2 \times 2$. Se poate face o repardosire, înlocuind o placă $4 \times 1$ cu o placă $2 \times 2$?

**220.** Un segment de dreaptă de lungime 1 este acoperit de $n$ segmente. Să se arate că există printre aceste $n$ segmente cîteva, disjuncte, cu suma lungimilor cel puțin 1/2.

**221.** Un poligon regulat cu un număr impar de laturi nu poate fi împărțit prin două drepte, care trec prin centrul cercului circumscris poligonului, în patru poligoane de arii egale.

**222.** Să se arate că dacă un patrulater convex se poate împărți în două patrulatere egale, atunci el este trapez.

**223.** Să se arate că interiorul unui cub poate fi obținut ca o reuniune infinită de bile (nu neapărat disjuncte).

**224.** Se dă un pătrat de latură 1. Să se arate că putem așeza în interiorul pătratului un număr finit de discuri disjuncte, cu razele diferite între ele și de forma $\frac{1}{k}$ cu $k \in \mathbf{N}^*$, astfel încît aria porțiunii rămase neacoperite să fie cel mult 0,0001.

**225.** Poate fi împărțit un poligon convex într-un număr finit de patrulatere concave?

**226.** Să se găsească o curbă de lungime minimă care să împartă un triunghi echilateral în două regiuni de arii egale.

**227.** Să se arate că există un număr natural $n$ astfel încît orice pătrat să poată fi împărțit în $n$ dreptunghiuri oricare două neegale și de arii egale.

**228.** Să se găsească toate numerele naturale $n$ pentru care orice triunghi se poate împărți în $n$ triunghiuri, astfel încît vîrfurile niciunui triunghi să



nu fie pe vreo latură a altui triunghi și nici pe o latură a triunghiului inițial (în interior).

**229.** Să se afle unghiurile diedre dintre fețele alăturate ale fiecărui poliedru regulat.

**230.** Să se arate că toate poliedrele regulate admit o sferă circumscrisă și o sferă înscrisă.

**231.** Să se afle razele acestor sfere în funcție de muchiile poliedrelor (vezi problema anterioară).

**232.** Fie $\alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, măsurile unghiurilor diedre ale unui tetraedru oarecare. Să se afle mulțimea valorilor pe care o poate lua $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i$.

**233.** Să se arate că suma unghiurilor plane din jurul unui vîrf al unui poliedru convex, este mai mică decît $2\pi$.

**234.** Să se arate că orice poliedru convex de volum $V$ poate fi închis într-un paralelipiped dreptunghic de volum $6V$.

**235.** Printr-un coridor în unghi de 90°, lat de 1,5 m, înalt de 2,5 m, vrem să trecem o scîndură de lungime 4,30 m, lățime 20 cm și grosime 7 cm. Este posibil acest lucru?

**236.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$, există un poligon convex cu $n$ laturi, cu toate vîrfurile de coordonate întregi și avînd centrul de greutate tot într-un punct de coordonate întregi.

**237.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 4$ există un poliedru convex cu $n$ vîrfuri de coordonate întregi, cu toate fețele triunghiuri.

**238.** Să se arate că pe orice cerc cu centrul în punctul de coordonate $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ există cel mult un punct de coordonate întregi.

**239.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ există un cerc în plan, care să conțină în interior exact $n$ puncte de coordonate întregi, iar pe circumferință nici un punct de coordonate întregi.

**240.** Fie $A$, $B$, $C$ trei puncte necoliniare, de coordonate întregi în plan astfel încît pe segmentele $AB$, $BC$ și $CA$ să nu se găsească alte puncte de coordonate întregi, iar în interiorul triunghiului $ABC$ să fie exact un singur punct de coordonate întregi $G$. Să se arate că $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

**241.** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_9$, puncte de coordonate întregi în plan, oricare trei coliniare. Să se arate că pe cel puțin unul din segmentele $A_iA_j$, $i \neq j$, există încă un punct de coordonate întregi.

**242.** Fie $a > b > c$ laturile unui triunghi $ABC$ și $O$ un punct interior triunghiului. Notăm cu $D$, $E$, $F$ intersecțiile dreptelor $AO$, $BO$, $CO$ cu $BC$, $CA$ și respectiv $AB$. Să se arate că

$$OD + OE + OF \leqslant a.$$

**243.** Se dă un triunghi $ABC$ și se notează cu $O$ centrul cercului circumscris. Știind că $\widehat{CED} = 30°$ și $\widehat{BDE} = 50°$ să se afle unghiurile triunghiului (unde $D = OB \cap AC$ și $E = OC \cap AB$).

**244.** Se poate construi un tetraedru din patru triunghiuri dreptunghice? Dar din patru triunghiuri dreptunghice egale?

**245.** Se dau în plan $2n$ puncte ($n \geqslant 2$) oricare trei necoliniare. Între aceste $2n$ puncte se duc $n^2 + 1$ segmente. Să se arate că se formează cel puțin un triunghi.

**246.** Fiind date 7 puncte în plan să se arate că există un triunghi neisoscel cu vîrfurile în 3 din aceste puncte.

**247.** Să se arate că o figură plană care are o infinitate de axe de simetrie este un cerc.

**248.** Un cerc este împărțit printr-o linie frîntă în două regiuni de arii egale. Să se arate că lungimea liniei frînte este cel puțin cît diametrul cercului.

**249.** Să se arate că pentru orice $n > 3$, nu putem avea în plan $n$ puncte, cu distanța dintre oricare două număr impar.

**250.** Se dă un dreptunghi $ABCD$ cu laturile numere întregi impare. Să se arate că cel puțin una din lungimile $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ este irațională.

**251.** Se dă o linie frîntă $A_1A_2 \ldots A_n$ astfel încît

$$2A_{i-1}A_i \leqslant A_iA_{i+1}, \text{ pentru } i = 2, \ldots, n-1$$

$$\text{și } A_{i-1}\widehat{A_iA_{i+1}} \leqslant A_i\widehat{A_{i+1}A_{i+2}}, \text{ pentru } i = 2, \ldots, n-2.$$

Să se arate că linia nu se întretaie.

**252.** Să se arate că un triunghi echilateral poate fi înscris într-un pătrat și un pătrat într-un pentagon regulat. Dar un pentagon regulat poate fi înscris într-un hexagon regulat?

**253.** Să se arate că, notînd cu $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ muchiile unui tetraedru și cu $V$ volumul său, avem inegalitatea

$$V \leqslant \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{abcdef}$$

**254.** Fie un pătrat de latură 33,4 și în interiorul său 157 segmente de lungime cel mult $\frac{\pi}{2}$. Să se arate că există un cerc de rază 1 în interiorul pătratului, care să nu intersecteze nici un segment.

**255.** O figură convexă plană are proprietatea că orice coardă care o secționează în două părți echivalente are lungime cel mult 1. Să se arate că figura are arie cel mult 2.

**256.** Care este numărul minim de triunghiuri dreptunghice în care se poate descompune poligonul regulat cu $n$ laturi $(n > 12)$?

**257.** În plan se consideră un poligon cu frontiera o linie frîntă fără puncte de autointersecție, astfel încît laturile sînt exprimate prin numere întregi, iar laturile consecutive sînt perpendiculare. Să se găsească maximul și minimul ariei poligonului, dacă perimetrul este dat și este egal cu $4n$.

**258.** Pentru un poligon convex cu 1970 de laturi se construiesc toate triunghiurile care au vîrfurile printre vîrfurile poligonului. Să se arate că orice punct din interiorul poligonului care nu se află pe nici o diagonală este acoperit cu un număr par de triunghiuri.

**259.** Într-un cub există un corp convex cu proprietatea că proiecțiile sale pe fețele cubului sînt exact aceste fețe. Să se arate că volumul corpului este cel puțin o treime din volumul cubului.

**260.** Să se arate că aria unui pătrat aflat în interiorul unui triunghi nu depășește jumătate din aria acestui triunghi.

**261.** Să se arate că într-un cerc de rază 1 nu pot fi așezate două triunghiuri disjuncte de arie mai mare ca 1.



**262.** Să se arate că într-un poligon convex cu $2n$ laturi $(n \geqslant 2)$ există o diagonală care nu e paralelă cu nici una din laturi.

**263.** Se dau în plan un număr de discuri ce formează o figură de arie 1. Să se arate că se pot alege dintre aceste discuri cîteva, disjuncte cu suma ariilor cel puțin 1/9.

**264.** Într-un cerc de rază $R$ se consideră un poligon înscris de arie $S$. Pe fiecare din laturile sale se consideră cîte un punct. Să se arate că perimetrul acestui nou poligon format este cel puțin $2S/R$.

**265.** Se consideră $n$ segmente în spațiu astfel încît oricare trei să nu fie paralele cu un același plan și astfel încît dreptele care trec prin mijloacele a două segmente să fie perpendiculare pe acestea. Să se găsească toate valorile pe care le poate lua $n$.

**266.** Să se găsească cel mai mic număr $n$ astfel încît orice poligon convex cu 100 de vîrfuri să poată fi obținut ca intersecție de $n$ triunghiuri.

**267.** Într-un poligon convex cu $2n$ laturi se consideră un punct $P$. Se duc toate dreptele care trec prin $P$ și prin cîte un vîrf al poligonului. Să se arate că există o latură a poligonului, care nu se intersectează cu niciuna din aceste drepte, în interior.

**268.** Fie $F$ o figură convexă în plan, care poate fi obținută ca reuniunea unui număr finit de discuri. Să se arate că $F$ este tot un disc.

**269.** Fie $P$ un poligon cu proprietatea că toate dreptele ce împart poligonul în două figuri de arii egale sînt concurente. Rezultă oare de aici că $P$ are un centru de simetrie? Să se studieze același enunț punînd „perimetru" în loc de „arie".

**270.** Fie $P$ un poligon convex. Să se arate că există două drepte perpendiculare care să împartă poligonul în patru poligoane de arii egale.

# SOLUȚII

**1.** Să presupunem că $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

Pentru o implicație este suficient să arătăm că $a \leqslant b + c$, $b \leqslant c + a$ și $c \leqslant a + b$. Inegalitatea din enunț fiind simetrică în $a, b, c$, vom arăta numai că $a < b + c$. Avem succesiv:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 < 4a^2b^2 \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 - c^2 < 2ab \Rightarrow$$
$$(a - b)^2 < c^2$$
$$a < b + c$$

Deoarece $a, b, c$ sînt lungimile laturilor unui triunghi $a < b + c \Rightarrow a - b < c$; deoarece $a - b \geqslant 0$ obținem $(a - b)^2 < c^2$ sau $a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$ și deoarece $a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$ obținem $(a^2 + b^2 - c^2)^2 < 4a^2b^2$ ceea ce reprezintă inegalitatea cerută.

De fapt se observă că: $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 16\ S^2$.

**2.** Problema revine la a rezolva în numere întregi ecuația:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$z^2 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow (z - x)(z + x) = y^2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} m(z - x) = ny \\ \qquad m, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ n(z + x) = my \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mnz = (m^2 + n^2)y \\ 2mnx = (m^2 - n^2)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2mn\alpha \\ z = (m^2 + n^2)\alpha \\ y = 2mn\beta \quad \text{cu } \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \\ x = (m^2 - n^2)\beta \end{cases}$$

$\alpha = \beta = 1$ și

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

Deci toate triunghiurile dreptunghice cu laturi numere intregi sînt cele care au catetele $|2mn|$ și $|m^2 - n^2|$ iar ipotenuza $m^2 + n^2$, $m, n \neq 0$.

*Tripletele de numere întregi cu care se pot forma triunghiuri dreptunghice se numesc numere pitagoreice.*

**3.** Vom considera $x \leqslant y \leqslant z$ și vom încerca să construim un astfel de triunghi. Este clar că $C$ poate fi un punct arbitrar, la distanța $z$ de $O$. Atunci $A$ trebuie să se afle pe circumferința $S_1$ de rază $x$, cu centrul în $O$. Mai departe vom considera că parcurgerea triunghiului în ordinea $A$, $B$, $C$ se efectuează contrar acelor de ceasornic, așa că $B$ trebuie să se afle pe circumferința $S_2$, obținută prin rotirea lui $S_1$ cu 60° contrar acelor de



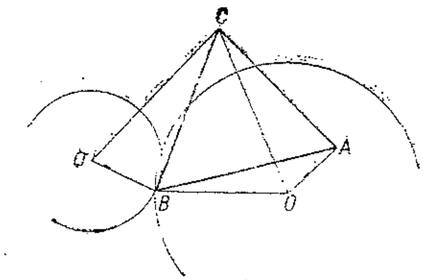


Fig. 3

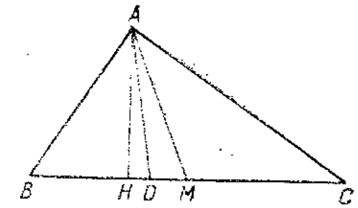


Fig. 4

ceasornic în jurul lui $C$. Dar $OB = y$, așa că construcția nu este posibilă dacă $S_2$ nu conține puncte la distanța $y$ de $O$. Mai departe $OO'$ este egal cu $z$ așa că nu va exista triunghiul dacă nu avem că: $z - x \leqslant y \leqslant z + x$

sau $\qquad z \leqslant x + y$ și $y \leqslant z + x$

dar $\qquad x \leqslant y + z$, (căci $x \leqslant y$).

Invers, dacă $z \leqslant x + y$,

$$y \leqslant z + x \text{ și } x \leqslant y + z$$

va exista un punct (sau chiar două) pe $S_2$ la distanța $y$ față de $O$; luînd oricare din ele ca $B$, prin rotirea lui $CB$ cu un unghi de 60° în sensul acelor de ceasornic obținem punctul $A$ (vezi și prob. 83).

Se observă imediat că nu putem slăbi condiția din ipoteza ($\Delta ABC$ echilateral). Fie de exemplu $\Delta ABC$ cu $BC < AB \leqslant AC$. Luînd $O$ pe latura $BC$ suficient de aproape de $B$ obținem $OA > OB + OC = BC$.

**4.** Fie $H$, $D$ și $M$ intersecțiile înălțimii, bisectoarei, respectiv ale medianei duse din $A$. Dacă $AB = AC$, atunci $H = D = M$. Să presupunem $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$.

Dar:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} < 1 \Rightarrow DB < DC \Rightarrow DB < BM.$$

Deci $D$ se află între $B$ și $M$. Trebuie să mai arătăm că $D$ se află între $H$ și $C$.

Dacă $B \geqslant 90°$, evident. Considerăm $B < 90°$.

$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \widehat{BAH} < \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{LAH} < \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAD},$$

ceea ce demonstrează problema.

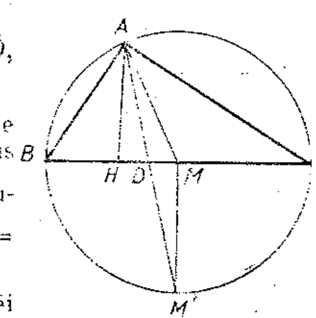


Fig. 5

**5.** Notațiile sînt cele din figura 5. $M'$ este intersecția bisectoarei $AD$ cu cercul circumscris triunghiului $ABC$. Deoarece $\widehat{BM} = \widehat{M'C}$ deducem că $MM' \perp BC$, de unde obținem $\widehat{DM'M} = \widehat{HAD} = \widehat{DAM}$ și mai departe $AM = MM'$.

Perpendiculara pe $AM'$ dusă prin mijlocul ei trece prin centrul cercului circumscris. Pe de altă

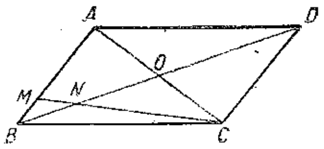


Fig. 6

parte acest centru se află pe $MM'$. Deoarece $AM = MM'$ rezultă că $M$ este centrul cercului circumscris şi deci $\hat{A} = \pi/2 = 90°$.

Evident $\hat{B} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} = 67°30'$.

$$\hat{C} = \frac{\pi}{8} = 22°30'.$$

6. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $OAB$ unde

$$O = BD \cap AC \Rightarrow \frac{BM}{AM} \cdot \frac{ON}{BN} \cdot \frac{AC}{OC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n-1} \cdot \frac{ON}{BN} \cdot 2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{ON} = \frac{2}{n-1} \Rightarrow \frac{BN}{OB} = \frac{2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{1}{n+1}.$$

7. *Soluţia 1.* Mediana $AA'$ intersectează dreapta $MN$ în punctul $G$. Să demonstrăm că $AG/AA' = 2/3$.

Comparînd ariile triunghiurilor $AGN$ şi $AA'C$ şi ţinînd seamă că:

$S_{ABC} = 2S_{AA'C}$ obţinem:

$$\frac{2S_{AGN}}{S_{ABC}} = \frac{AG}{AA'} \cdot \frac{AN}{AC}, \text{ analog}$$

$$\frac{2S_{AGM}}{S_{ABC}} = \frac{AG}{AA'} \cdot \frac{AM}{AB}.$$

Comparînd ariile triunghiurilor $AMN$ şi $ABC$ obţinem:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB\ AC},$$

Se observă imediat că:

$$\frac{2S_{MNA}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{AGN}}{S_{ABC}} + \frac{2S_{AGM}}{S_{ABC}}$$

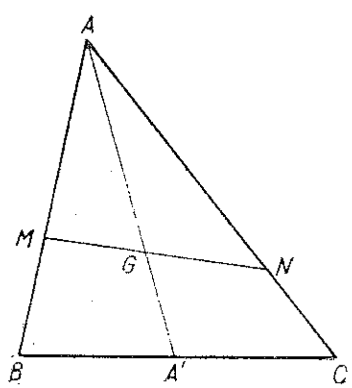


Fig. 7.1

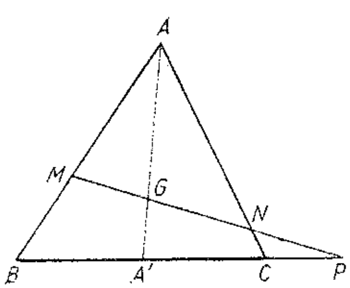


Fig. 7.2



de unde:

$$\frac{AG}{AA'} = \frac{2\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}}{\frac{AN}{AC} + \frac{AM}{AB}} = \frac{2}{\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN}}.$$

Din ipoteză avem:

$$\frac{MB + MA}{MA} + \frac{NC + NA}{NA} = 3 \Leftrightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3.$$

*Soluţia 2.* Mediana $AA'$ taie pe $MN$ în $G$, iar $MN$ pe $BC$ în $P$. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul $ABC$ tăiat de $MNP$ avem:

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PC}{PB} = 1$$

de aici avem:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PB}{PC} + \frac{NC}{NA} = \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PB + PC}{PC}.$$

Rezultă:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{NC}{NA} \cdot \frac{BC + 2PC}{PC} \quad (1)$$

Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul $A'AC$ tăiat de $GNP$ avem

$$\frac{GA'}{GA} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PC}{PA'} = 1$$

sau

$$\frac{GA'}{GA} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{2\ PC}{BC + 2PC} = 1 \quad (2)$$

înmulţind (1) cu (2) rezultă:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{2GA'}{GA}$$

deci $G$ este centru de greutate.

*Soluţia 3.* Fie $AA'$ mediana triunghiului $ABC$. Paralela dusă din $A$ la $BC$ taie pe $MN$ în $D$.

Fie $P = MN \cap BC$. Deoarece triunghiurile $MBP$ şi $MAD$ sînt asemenea iar $\Delta GA'P$ asemenea cu $\Delta GAD$, avem:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{BP}{AD} \text{ şi } \frac{NC}{NA} = \frac{PC}{AD} \text{ de unde:}$$

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{BP + PC}{AD} = \frac{2A'P}{AD} = \frac{2GA'}{GA}.$$

Cum:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$$

rezultă

$\frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2}$ deci $G$ este centrul de greutate al triunghiului $\Delta ABC$.

Reciproca se demonstrează la fel.

**8.** Fie $M, N, P$ intersecțiile dreptei cu laturile $AB, BC, CA$ și presupunem că $M$ și $P$ sînt între $AB$ și respectiv $AC$ iar $N$ în stînga lui $B$. Notăm $= AP/CP \Rightarrow 2 \geqslant k \geqslant 1$. Aplicînd teorema lui Menelaus în $\Delta AA'C$ și în $\Delta AA'B \Rightarrow$

$$\frac{AP}{CP}\cdot\frac{CN}{A'N}\cdot\frac{A'G}{AG} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{A'N}{CN} \Rightarrow$$

$$\frac{A'N}{BN} = \frac{k}{2(k-1)} \text{ și } \frac{AG}{A'G}\cdot\frac{A'N}{BN}\cdot\frac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{BM}{AM} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{k}{2k-1}$$

dar

$$\frac{AP}{AC} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{AM\cdot AP}{AB\cdot AC} = \frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{k^2}{(k+1)(2k-1)}.$$

Dar $k^2 - 4k + 4 \geqslant 0 \Rightarrow 9k^2 \geqslant 8k^2 + 4k - 4 \Rightarrow \dfrac{k^2}{2k^2+k-1} \geqslant \dfrac{4}{9} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} \geqslant \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{S_{BCPM}}{S_{ABC}} \geqslant \frac{5}{9},$$

de unde rezultă enunțul.

**9.** Vom începe cu o observație. Dacă $MN$ este o astfel de dreaptă atunci dreapta $PQ$ unde $AP = AN$ și $AQ = AM$ are aceeași proprietate. Deoarece $MN$ intersectează pe $PQ$ pe bisectoarea dusă din $A$, este normal să încercăm să demonstrăm că punctul de intersecție căutat este centrul cercului înscris. Fie $O = MN \cap AH$ unde $AH$ este bisectoarea interioară a unghiului $A$. Fie $r$ distanța lui $O$ la laturile $AC$ și $AB$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{AMN}\frac{AM\cdot r}{2} + \frac{AN\cdot r}{2} = \frac{1}{2}(AM + AN)r = \frac{1}{2}pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

ceea ce arată că și distanța lui $O$ la $BC$ este egală cu $r$, adică $O$ este intersecția bisectoarelor triunghiului $ABC$.

**10.** Notăm cu $A_1, \ldots, A_6$ vîrfurile hexagonului și cu $B_1, \ldots, B_6$ mijloacele laturilor $A_1A_2, \ldots, A_5A_6$, respectiv $A_6A_1$. Fie $C$ și $D$ picioarele medianelor triunghiurilor $B_2B_4B_6$ respectiv $B_1B_3B_5$, pe $B_2B_4$ respectiv $B_1B_5$. Notăm cu $O$ punctul lor de intersecție. Vom arăta că:

$$\frac{B_3O}{OD} = \frac{B_6O}{OC} = 2$$

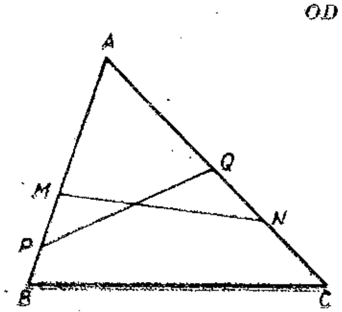


Fig. 9

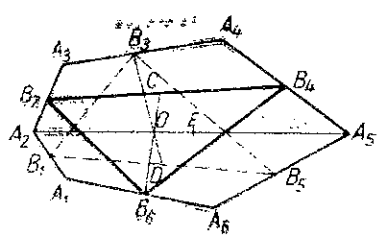


Fig. 10.



ceea ce este echivalent cu a spune că $O$ este centrul de greutate al ambelor triunghiuri.

Fie $E$ mijlocul diagonalei $A_2A_5$. Evident $B_1E \parallel A_1A_5 \parallel B_5B_6$ și $B_1E = B_5B_6 = A_1A_5/2$ ceea ce dovedește că patrulaterul $B_1EB_5B_6$ este paralelogram. Deoarece $B_1D = DB_5$ obținem că $D$ este intersecția diagonalelor acestui paralelogram. Obținem că $B_3D$ este mediană în triunghiul $EB_6B_3$. Analog considerînd paralelogramul $EB_2B_3B_4$ obținem că și $B_6C$ este mediana în triunghiul $EB_6B_3$ și obținem:

$$\frac{B_3O}{OD} = \frac{B_6O}{OC} = 2.$$

**11.** Fie $M$ intersecția medianelor din $A$ și $B$ în triunghiurile $ADK$, respectiv $BEF$. Prin $M$ ducem paralele $PQ \parallel AB$, $SR \parallel BC$, $TU \parallel AC$.

Să mai notăm $AD = BE = c$, $BF = CG = a$, $CH = AK = b$.

Este evident că:

$$\frac{a}{c} = \frac{BQ}{BS} = \frac{MS}{MQ} \text{ și } \frac{b}{c} = \frac{AK}{AD} = \frac{MP}{MT}.$$

Pentru a demonstra că mediana dusă din $C$ în triunghiul $CGH$ trece prin $M$ este suficient să arătăm că:

$$\frac{RC}{CU} = \frac{HC}{CG} = \frac{b}{a}.$$

Avem următoarele relații evidente:

$$\frac{MU}{MQ} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{MQ}{MS} = \frac{c}{a}, \quad \frac{MS}{MT} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{MT}{MP} = \frac{b}{c}, \quad \frac{MP}{MR} = \frac{AB}{BC}.$$

Înmulțind obținem

$$\frac{MU}{MR} = \frac{b}{a}$$

dar

$$\frac{MU}{MR} = \frac{RC}{CU},$$

și deci $HG \parallel RU$. Prin urmare $MC$, care din construcție trece prin mijlocul lui $RU$ (deoarece $MURC$ este paralelogram), va trece și prin mijlocul lui $HG$.

**12.** Deoarece $CD$ nu e diametru rezultă că tangentele în $C$ și $D$ au un punct de intersecție. De asemenea $AC$ și $BD$ au un punct de intersecție. În caz contrar ar trebui ca $AC$ și $BD$ să fie paralele, deci $ABCD$ să fie trapez inscriptibil, adică isoscel, de unde ar urma $AB = CD$, adică $CD$ să fie diametru, ceea ce este contradictoriu.

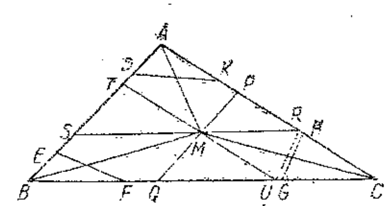


Fig. 11

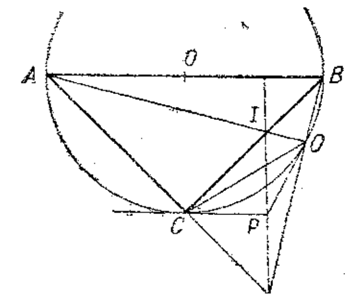


Fig. 12

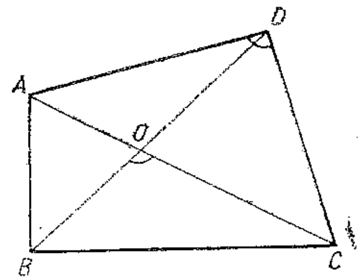

Fig. 13

Analog dovedim că $BC$ şi $AD$ se intersectează. Fie deci $I = AD \cap BC$, $Q = AC \cap \cap BD$ şi $P$ intersecţia tangentelor în $C$ şi $D$. Avem $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$, deci $I$ este ortocentrul triunghiului $QAB$ şi patrulaterul $DICQ$ este inscriptibil, avînd două unghiuri opuse de $90°$.

Vom demonstra că $I, P, Q$ sînt coliniare. Avem întîi că $PD = PC$ şi $\sphericalangle CPD = $
$= 180° - \widehat{CD} = 2(90° - \frac{1}{2}\widehat{CD}) = 2\sphericalangle DQC$.

Deducem de aici că $Q$ se află pe cercul de rază $PD$ şi centru $P$, adică $P$ este centrul cercului circumscris lui $CDQ$. Dar cercul circumscris lui $CDQ$ coincide cu cercul circumscris lui $ICQD$ adică $P$ coincide cu mijlocul lui $IQ$.

**13.** Fie $ABCD$ patrulaterul inscriptibil din enunţ cu $\sphericalangle BOC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC$.

Dar $\sphericalangle BOC = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = \sphericalangle BDC + \sphericalangle ABD \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDA \Rightarrow$
$AB = AD$.

Implicaţia inversă se arată la fel.

**14.** Fie $H$ mijlocul lui $BD$ şi $M$ al lui $AC$. Dreapta $CH$, mediană în triunghiul $BCD$, trece prin mijlocul $A'$ al liniei mijlocii $B_1C_1$ conform teoremei lui Thales $CA' = A'H$. Analog $C'A = C'H$.

Deci în triunghiul $AHC$, $CC'$ şi $AA'$ sînt mediane, deci se taie pe $MH$ la o treime din $MH$ faţă de $M$. Considerînd triunghiul $BMD$ analog $BB'$ şi $DD'$ sînt mediane deci se taie pe $MH$ la o treime de $H$. Notînd $AA' \cap CC' = G_1$ şi $BB' \cap DD' = G_2$, rezultă $G_2H = G_1M = 1/3\ MH$ de unde $MG_1 = G_1G_2 = G_2H$.

**15.** Se observă că patrulaterele $AMOQ$, $BNOM$, $CPON$, $DQOP$ sînt inscriptibile. Deci:

$$\sphericalangle OAM = \sphericalangle OQM$$
$$\sphericalangle OBM = \sphericalangle ONM$$
$$\sphericalangle OCP = \sphericalangle ONP$$
$$\sphericalangle ODP = \sphericalangle OQP$$

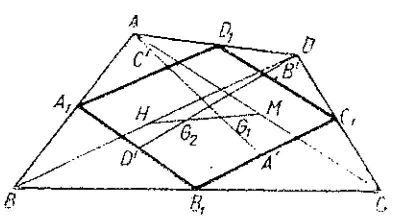

Fig. 14

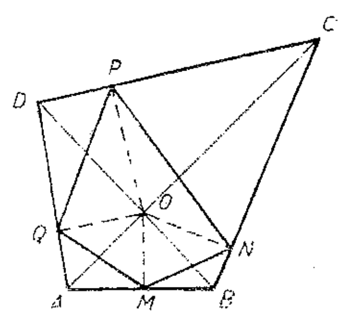

Fig. 15



Adunînd relaţiile obţinem:

$$180° = \sphericalangle MQP + \sphericalangle MNP$$

**16.** Vom presupune că există două laturi opuse care nu sînt paralele, cazul cînd toate laturile opuse sînt paralele fiind trivial ($ABCD$ ar fi romb).

Fie $M_1M_2$ mijloacele diagonalelor $AC$, respectiv $BD$. Atunci avem relaţiile:

(1) $$S_{M_1AB} + S_{M_1CD} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

(2) $$S_{M_2AB} + S_{M_2CD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Vom demonstra că şi

(3) $$S_{AOB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Într-adevăr din egalităţile tangentelor duse din vîrfuri obţinem:

$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow$$

$$S_{AOB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}R(AB + CD) = \frac{1}{2}R(BC + AD) = S_{OBC} + S_{OAB},$$

de unde obţinem egalitatea (3). Vom arăta că locul geometric al punctelor $M$ cu proprietatea $S_{AMB} + S_{CMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ este o dreaptă ceea ce implică evident că $M_1, O, M_2$ sînt coliniare. Fie $N$ punctul de intersecţie al laturilor $AB$ şi $CD$ (le-am presupus neparalele). Fie $P$ un punct pe $NA$ şi $Q$ unul pe $ND$ astfel încît $NP = AB$ şi $NQ = CD$. Vom avea:

$S_{NPM} = S_{ABM}$ şi $S_{NQM} = S_{CDM}$. Fie acum $M$ care îndeplineşte condiţia $S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Dar $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{NPM} + S_{NQM} = S_{MPNQ} = S_{NPQ} + S_{MPQ}$. Ariile $S_{NPQ}$ şi $S_{ABCD}$ fiind constante înseamnă că şi aria triunghiului $PQM$ trebuie să fie constantă ceea ce înseamnă că $M$ se deplasează pe o dreaptă paralelă cu $PQ$ care trece prin $O$, $M_1$, $M_2$.

**17.** În $\Delta ABO$ notăm semiperimetrul cu $p_1$ şi aria cu $S_1$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{S_1}{p_1} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{AB + BO + OA}{OA \cdot OB \sin \sphericalangle AOB}.$$

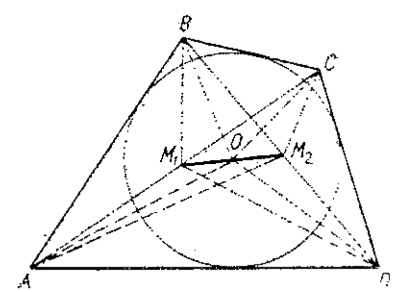

Fig. 16

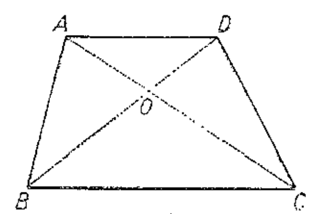

Fig. 17

Făcînd considerații analoage pentru celelalte triunghiuri $BCO$, $CDO$, $DAO$, obținem ținînd cont că $\sin \widehat{AOB} = \sin \widehat{BOC} = \sin \widehat{COD} = \sin \widehat{DOA}$:

$$(x) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \Leftrightarrow \frac{AB + OB - OA}{OA \cdot OB} + \frac{CD + OC - OD}{OC \cdot OD} =$$

$$= \frac{AD + OA - OD}{OA \cdot OD} + \frac{BC + OB - OC}{OB \cdot OC} \Leftrightarrow \frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{CD}{OC \cdot OD} =$$

$$\frac{AD}{OA \cdot OD} + \frac{BC}{OB \cdot OC}$$

dar

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD \text{ și deoarece}$$

$ABCD$ este circumscriptibil $AD + BC = AB + DC$

deci:

$$(x) \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{OA \cdot OB} = \frac{AD + BC}{OD \cdot OC} = \frac{AD}{OA \cdot OD} + \frac{BC}{OB \cdot OC} \Leftrightarrow$$

$$AD + BC = AD \cdot \frac{OC}{OA} + BC \cdot \frac{OD}{OB} = AD \cdot \frac{BC}{AD} + BC \cdot \frac{AD}{BC} = AD + BC.$$

Printr-un șir de echivalențe am ajuns deci la o relație adevărată. Prin urmare relația de la care am plecat este adevărată, adică:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

**18.** Fie $MNPQ$ mijloacele laturilor patrulaterului inscriptibil dat și fie $S = MP \cap NQ \cdot MNPQ$ este paralelogram iar $S$ este centrul său.
De aceea $M$ și $P$, $N$ și $Q$ sînt respectiv simetrice față de $S$. Perpendicularele ridicate în $M$, $N$, $P$, $Q$ pe laturile respective se intersectează în punctul $T$, care este centrul cercului circumscris. Perpendicularele coborîte din $M$, $N$, $P$, $Q$ pe laturile opuse sînt paralele cu cele ridicate pe laturile respective de aceea se intersectează și ele intr-un punct $T'$ și anume simetricul lui $T$ față de $S$.

**19.** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu proprietatea din enunț. $M$, $N$, $P$, $Q$ sînt mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$ respectiv $DA$. Deci

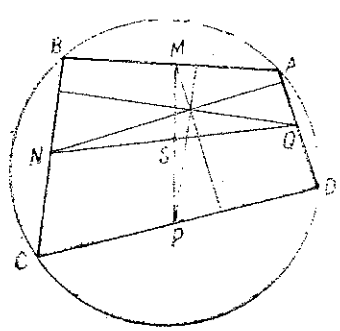


**Fig. 18**

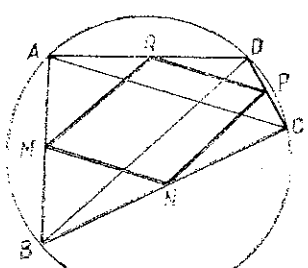


Fig. 19



$MP \perp NQ$. Evident $MN = PQ = AC/2$, $MQ = NP = DB/2$ deci patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. Deoarece $NQ \perp MP$ rezultă că $MNPQ$ este romb $\Rightarrow MN = MQ \Rightarrow AC = BD$. Fie arcul de cerc $\widehat{ABC}$. Din $AC = BD$, deducem că fie $\widehat{BCD} = \widehat{ABC}$, fie $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$. Să presupunem $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADC}$; $\widehat{AB} = \widehat{ABC} - \widehat{BC} = \widehat{BCD} - \widehat{BC} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACB} \Rightarrow AD \parallel BC$, deci condiția necesară ca un patrulater inscriptibil să aibă proprietatea din enunț este ca el să fie trapez isoscel. Evident această condiție este suficientă.

**20.** Fie $E$ și $F$ mijloacele diagonalelor $AC$ și $BD$. Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $BCD$. Demonstrăm că $M = AG \cap EF$ este mijlocul lui $EF$. Intr-adevăr, dacă $H$ este mijlocul lui $CG$, atunci deoarece $AE = EC \Rightarrow EH \| AG$ și cum $FG = GH \Rightarrow FM = ME$. De aceea $MG = 1/2 \cdot EH = 1/4 \cdot AG \Rightarrow MG = 1/3\ AM$. Fie $O$ centrul cercului și $O'$ punctul situat pe dreapta $OM$ astfel încît $O'M = 1/3 \cdot OM$ și $M$ să se afle între $O$ și $O'$ atunci $\Delta OMA \sim \Delta O'MG$

$$\Rightarrow \frac{OA}{AM} = \frac{O'C}{MG} \Rightarrow O'G = \frac{OA}{3} = \frac{R}{3}$$

unde $R$ este raza cercului inițial.
Analog se arată că distanța de la celelalte centre de greutate la $O'$ este $1/3\ R$.

**21.** Să presupunem că: $S_{BCD} \leqslant S_{ABD}$
Fie $AF \perp BD$ și $CE \perp BD$. Atunci $AF \geqslant CE$.
Fie $L \in AF$ cu $LF = \frac{AF - CE}{2}$.
Fie $d \perp AF$, $L \in d$; $O \in d$ în interiorul lui $ABCD$.
Obținem că:

$$S_{OBCD} = S_{BCD} + S_{OBD} = S_{BCD} + \frac{S_{ABD} - S_{BCD}}{2} = S_{OABD}.$$

Deci locul cerut este segmentul din $d$ cuprins între $AB$ și $AD$.
Cazul $S_{BCD} > S_{ABD}$ se tratează analog.

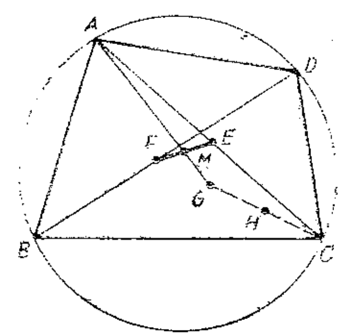


Fig. 20

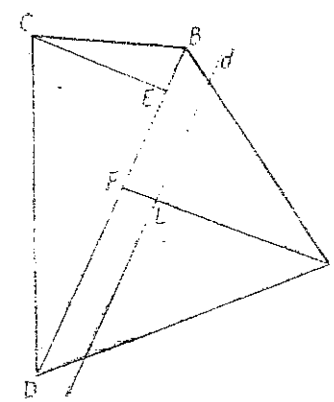


Fig. 21

**22.** Fie $O$ astfel incit $S_{OAB} = S_{OBC}$: dacă notăm cu $d(O, AB)$ şi $d(O, BC)$ distanţele lui $O$ la $AB$ şi $BC$. Atunci:

$$BC \cdot d(O, BC) = AB \cdot d(O, AB) \Rightarrow \frac{d(O, AB)}{d(O, BC)} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$$

$O$ se găseşte pe o dreaptă $b$ ce trece prin $B$ astfel incit $\frac{\sin \sphericalangle (b, AB)}{\sin \sphericalangle (b, BC)} = \frac{BC}{AB}$. Analog din $S_{OBC} = S_{OCD}$ va trebui ca: $\frac{\sin \sphericalangle OCB}{\sin \sphericalangle OCD} = \frac{CD}{CB}$; în acest moment punctul $O$ dacă există este unic determinat. Se observă deci că problema nu are întotdeauna răspuns afirmativ.

**23.** Vom demonstra prin inducţie presupunind doar $\widehat{ABC} < 90°$, că triunghiul $ABC$ poate fi împărţit prin $n - 1$ segmente în triunghiuri isoscele cu laturile lor egale, toate egale cu $BC$.

Pentru $n = 1$ afirmaţia este evidentă: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC \Rightarrow BC = AC$.

Fie $n > 1$. Ducem din $C$ o dreaptă $CC'$ prin interiorul unghiului $ACB$, astfel incit $\sphericalangle BC'C = \sphericalangle C'BC = \sphericalangle ABC$. Acest lucru se poate deoarece $\sphericalangle ABC < 90°$ şi $AC > BC$.
Notăm $\sphericalangle BAC = \alpha$. Vom vedea deci că: $\sphericalangle ACC' = 180° - \alpha - (180° - n\alpha) = (n-1)\alpha$ şi $BC = CC'$. Dar conform inducţiei $\Delta ACC'$ se poate împărţi prin $n - 2$ segmente in $n - 1$ triunghiuri isoscele astfel incit laturile egale să fie toate egale cu $CC'$ deci cu $BC$.

**24.** Unul din puncte este centrul cercului circumscris lui $A_1A_2A_3$.
Vom lua $M_2$ pe bisectoarea interioară din $A_3$ astfel incit $M_2A_3 = A_1A_3 = A_2A_3 \Rightarrow A_1M_2 = A_2M_2$ şi deci $M_2$ satisface condiţiile cerute.

(Am presupus $A_1A_3 = A_2A_3$).

**25.** Ducem cercul circumscris $\Delta ABC$ şi notăm cu $A'$, $B'$, $C'$ intersecţiile cercului cu $AM$, $BM$, $CM$. Avem $\sphericalangle BMA' = \sphericalangle ABC \Rightarrow \widehat{BA'} + \widehat{AB'} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{BA'} = \widehat{B'C} \Rightarrow BB' \parallel A'C$ şi din $\sphericalangle A'MC = \sphericalangle ACB \Rightarrow \widehat{AC'} + \widehat{A'C} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BC'} = \widehat{A'C} \Rightarrow CC' \parallel A'B \Rightarrow MBA'C$ paralelogram şi deci $N = A'M \cap BC$ e la mijlocul lui $BC$.

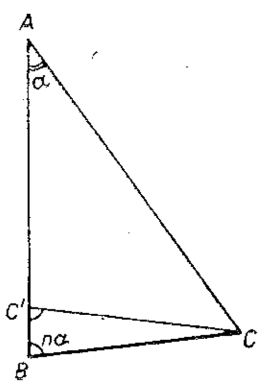

Fig. 23

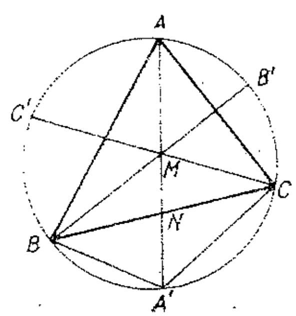

Fig. 25



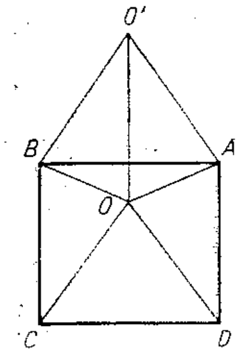

Fig. 26

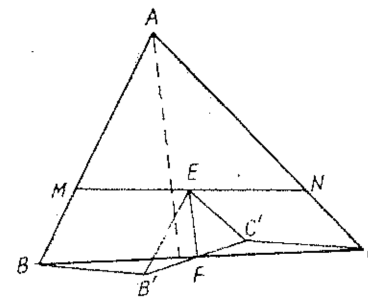

Fig. 27

**26.** Ducem deasupra laturii $AB$, triunghiul echilateral $AO'B$.
Vom avea deci:

$$\sphericalangle BOO' = \sphericalangle AOO' = \sphericalangle BOA/2 = \frac{180° - 30°}{2} = 75° = 60° + 15° =$$

$\sphericalangle O'BA + \sphericalangle ABO = \sphericalangle OBO' = \sphericalangle OAO' \Rightarrow \Delta O'BO$ şi $\Delta O'OA$ isoscele $O'B = O'O = O'A = AB = BC = AD \Rightarrow BC \stackrel{\parallel}{=} OO' \stackrel{\parallel}{=} AD \Rightarrow O'B = OC$ şi $O'A = OD \Rightarrow \Delta OCD$ echilateral.

**27.** Ducem prin $E$, $EB' \stackrel{\parallel}{=} MB$ şi $EC' \stackrel{\parallel}{=} NC \Rightarrow CC' \stackrel{\parallel}{=} EN$ şi $BB' \stackrel{\parallel}{=} ME' \Rightarrow BB' \stackrel{\parallel}{=} CC'$, deci $BB'CC'$ paralelogram $\Rightarrow F \in B'C'$ şi $B'F = C'F$. Dar $EB' = EC' \Rightarrow \Delta B'C'E$ isoscel şi $EF$ mediană, deci bisectoare şi cum $EB' \parallel AB$ şi $EC' \parallel AC$ rezultă că $EF$ e paralelă cu bisectoarea lui $A$.

**28.** Fie $ABC$ triunghiul şi $BE$, respectiv $CF$ cele două bisectoare egale (vezi fig. 28).

Să presupunem că unghiul $\sphericalangle ABC$ este mai mare decit unghiul $\sphericalangle ACB$. Construim atunci $BO$ paralel cu $AC$ şi $CO$ paralel cu $BE$. Deoarece $FC = OC$ şi $\widehat{FCB} \leqslant \widehat{OCB} \Rightarrow FB \leqslant OB \Rightarrow \widehat{BFO} \geqslant \widehat{FOB}$. Deoarece unghiurile $\widehat{OFC}$ şi $\widehat{FOC}$ sint egale rezultă că $\widehat{BFC} \geqslant \widehat{BOC} = \widehat{BEC}$. Considerind aceste unghiuri în triunghiurile $BFM$ respectiv obţinem $\widehat{FBM} \leqslant \widehat{MCE} \Rightarrow \widehat{ABC} \leqslant \widehat{ACB}$ dar $\widehat{ACB} \leqslant \widehat{ABC}$, conform presupunerii $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ triunghiul este isoscel.

**29.** Dintr-un punct $P$, pe cerc se duce un arc de cerc care taie cercul dat în $A$ şi $B$. Cercurile de centru $A$ şi raza $AP$, respectiv $B$ şi $BP$ se taie în $C$. Cercul de rază $CP$ şi centru $C$ taie cercul de centru $P$ şi raza $PA$ în $E$ şi $F$. Cercurile de centre şi raze respectiv $E$, $EP$, $F$, $FP$ se taie în $O$.

Într-adevăr, dreapta $PCO$ trece prin $AB$ şi $EF$ şi le înjumătăţeşte. De asemenea $PCO \perp AB$ şi $PCO \perp EF$. Deci intilneşte cercul dat şi cel

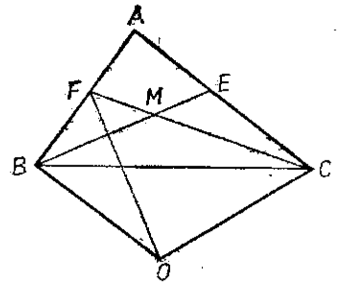


Fig. 28

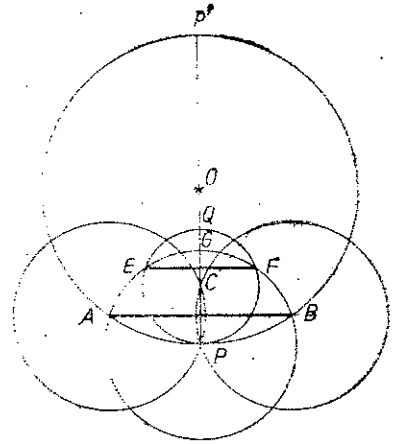


Fig. 29

de centru $C$ și rază $CP$ în punctele diametral opuse $P'$ și $Q$ lui $P$. Fie $G = PC \cap EF$.

$$\Delta PAP' \quad \text{și} \quad \Delta PEQ \quad \text{dau:}$$

$PA^2 = PD \cdot PP'$ și $PE^2 = PA^2 = PG \cdot PQ$. Din construcție $C$ și $O$ sînt simetricele lui $P$ în raport cu $AB$ și respectiv $EF$, deci $PQ = 2PC = 4PD$.

$$PG = PO/2 \Rightarrow PP' = 2PO.$$

**30.** *Soluția 1.* Ducem $BE$ la 20° față de $BC$. Avem $BC = BE$. Din triunghiul isoscel $BCN$ cu unghiurile de 80°, 50°, 50°, $BC = BN$. Însă $\widehat{NBE} = 60°$ deci triunghiul $BNE$ este echilateral. Din triunghiul isoscel $BEM$ (are unghiurile 40°, 100°, 40°) $BE = ME$. Rezultă $NE = ME \Rightarrow$ triunghiul $NME$ este isoscel. Unghiul lui din $E$ fiind de 40°(180° − 60° − 80°) rezultă $\widehat{NME} = 70°$. Scăzînd $\widehat{BME} = 40°$ obținem $\widehat{NMB} = 30°$ (vezi fig. 30.1).

*Soluția 2.* a) Observăm că punctul $M$ se găsește pe perpendiculara ridicată în mijlocul $P$ al laturii $AB$.

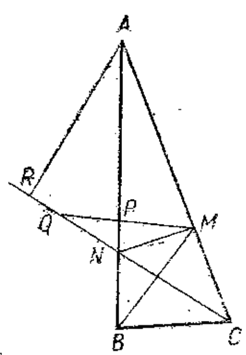


Fig. 30.1

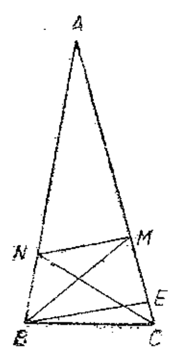


Fig. 30.2



b) Prelungim dreapta $CN$ și din punctul $A$ coborîm o perpendiculară $AR$ pe această dreaptă. Observăm că $AR = 1/2AC = 1/2AB$, unghiul $\widehat{RAC} = 60°$ iar $\widehat{RAB} = 40°$.

c) Prelungim dreapta $PM$ pînă taie pe $CN$ în punctul $Q$ și unim $Q$ cu $A$. Observăm că triunghiurile dreptunghice $ARQ$ și $APQ$ sînt egale, avînd ipotenuzele egale (comune) și catetele $AR = AP$.

Rezultă că $AQ$ este bisectoarea unghiului $\widehat{RAB}$. Așadar fiecare din cele trei unghiuri care se formează în vîrful $A$ are 20°. Rezultă că $\widehat{CQA} = 110°$.

d) Unim $Q$ cu $B$. Patrulaterul $AMBQ$ este romb deoarece $QP = PM$ (din egalitatea triunghiurilor dreptunghice $QAP$ și $MAP$ care au cîte o catetă comună și un unghi de 20°), iar $QM$ este perpendiculară pe mijlocul lui $AB$. Rezultă că unghiul $\widehat{AQB}$ are 140°. De aici reiese că $\widehat{BQC} = 30°$. Dar $\widehat{BQC} = \widehat{NMB}$. Așadar $\widehat{NMB} = 30°$ (vezi fig. 30.2).

*Soluția 3.* Ducem din $A$ perpendiculara $AR$ pe $NC$; avem $AC = 2AR$ (triunghiul dreptunghic cu un unghi de 30°) deci:

$$\frac{AC}{AN} = 2\frac{AR}{AN}.$$

Ducem prin $B$ dreapta $BE$ care formează un unghi de 40° cu $BM$. Avem $BE = BC$ (triunghiul $BEC$ are unghiurile de 20°, 80°, 80°) deci $\frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow$ Triunghiul $BME$ este isoscel. Ducîndu-i înălțimea $EF$ avem $BM = 2BF$. Deci $\frac{BM}{BC} = 2\frac{BF}{BE}$. Însă $\frac{AR}{AN} = \frac{BF}{BE}$ (două triunghiuri dreptunghice fiecare cu un unghi de 40°).

Rezultă

$\frac{AC}{AN} = \frac{BM}{BN}$ deci sînt asemenea triunghiurile $ACN$ și $BMN$ de unde rezultă $\widehat{NMB} = 30°$.

**31.** Notăm $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$. Din $A + B + C = 180°$ deducem $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. Fie $T$ punctul de intersecție al dreptelor $AY$ și $BX$.

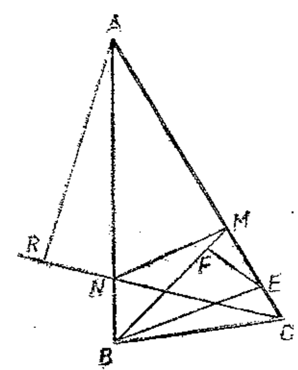


Fig. 30.3

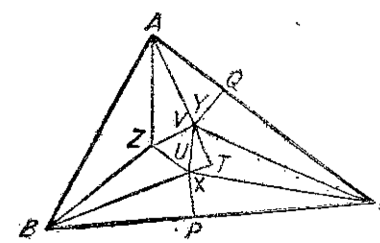


Fig. 31

În triunghiul $ABT$, $AZ$ și $BZ$ sînt bisectoare deci și $TZ$ în plus:

$$\sphericalangle ATZ = \sphericalangle ZTB = \frac{\sphericalangle ATB}{2} = \frac{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = \frac{60^\circ + 2\gamma}{2} = 30^\circ + \gamma.$$

Fie $U$ pe $BT$ și $V$ pe $AT$ astfel încît $\sphericalangle UZT = \sphericalangle TZV = 30^\circ$. Din egalitatea triunghiurilor $ZTV$ și $ZTU$ obținem $ZU = ZV$. Dar $\widehat{VZU} = 60^\circ$, deci triunghiul $ZUV$ este echilateral. Vom arăta că $U = X$ și $V = Y$ ceea ce demonstrează problema. Fie $P$ și $Q$ simetricele punctului $Z$ față de $BU$ și $AV$. Din egalitatea unghiurilor $\widehat{ZBU} = \widehat{UBC}$ și $\widehat{ZAV} = \widehat{VAC}$ deducem că $P$ este situat pe $BC$ și $Q$ pe $AC$. Din simetrie rezultă că $PU = UZ = UV = ZV = VQ$. Unghiul $\widehat{ZVA} = \widehat{VZT} + \widehat{ZTV} = 30^\circ + 30^\circ + \gamma = 60^\circ + \gamma$.

$\widehat{ZVQ} = 2\widehat{ZVA} = 120^\circ + 2\gamma \Rightarrow \widehat{UVQ} = 360^\circ - 60^\circ - (120^\circ + 2\gamma) = 180^\circ - 2\gamma$. Analog $\widehat{PUV} = 180^\circ - 2\gamma$ deci $UVQP$ este trapez isoscel, deci inscriptibil. $\Delta P\hat{U}V$ este isoscel deci:

$$U\hat{P}V = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\gamma)}{2} = \gamma$$

$\widehat{PVQ} = \widehat{UVQ} - \widehat{UVP} = 180 - 2\gamma - \gamma = 180^\circ - 3\gamma$. Dar $\widehat{PCQ} = 3\gamma$ deci și patrulaterul $PVQC$ este inscris în același cerc ca și $PUVQ$. Din $PU = UV = VQ$ obținem $\widehat{UCP} = \widehat{VCU} = \widehat{QCV}$ deci $U = X$ și $V = Y$.

**32.** Pe diagonala care pleacă din unghiul ascuțit ca diametru descriem un cerc. Cele două vîrfuri ale patrulaterului, care mai rămîn, vor cădea în interiorul cercului. Aceasta deoarece din condițiile problemei unghiurile din aceste vîrfuri sînt obtuze. Prin urmare diagonala care trece prin ele este mai scurtă decît diametrul.

**33.** Fie prin absurd $AB \geq AC$ (1) $\Rightarrow \widehat{BCA} \geq \widehat{ABC}$, deoarece în $\Delta ABC$ unghiului mai mare i se opune latura mai mare. Deoarece $ABCD$ este convex și $\widehat{DBC} < \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BCD} > \widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} > \widehat{DBC}$.

Deci avem că în $\Delta BCD$, $\widehat{BCD} > \widehat{DBC} \Rightarrow BD > CD$ (2).
Din (1) și (2) $\Rightarrow AB + BD > AC + CD$ (fals).

**34.** Fie $A$, $B$, $C$ intersecțiile drumului cu $Ox$, $Oy$, $Oz$, muchiile triedrului. Vom desfășura în plan triedrul.

Punem:

$$\sphericalangle y_1O_1z_1 = \sphericalangle yOz \quad \sphericalangle x_1O_1z_1 = \sphericalangle xOz \quad \sphericalangle y_1'O_1x_1 = \sphericalangle yOx$$

și

$\sphericalangle y_1'O_1z_1' = \sphericalangle yOz$. Ducem în $\sphericalangle z_1O_1y_1$ și în $\sphericalangle z_1'O_1y_1'$ punctele $M_1$ și $M_1'$ astfel încît $M_1'O_1 = M_1O_1 = MO$ și $\sphericalangle z_1'O_1M_1' = \sphericalangle z_1O_1M_1 = \sphericalangle zOM \Rightarrow$



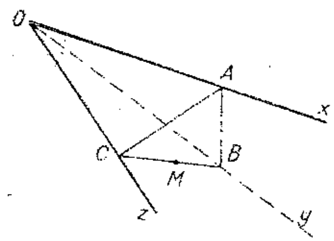


Fig. 34.1

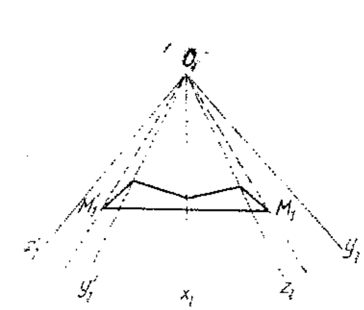


Fig. 34.2

$\Rightarrow$ drumul cel mai scurt cerut în problemă va fi cel mai scurt drum între $M_1$ și $M_1'$ deci segmentul $M_1M_1'$.

**35.** Fie $Ox'$ și $N'$ simetricele lui $Ox$ și $N$ față de $Oy$. Atunci $AM + MN = AM + MN' \geq AN_1'$ unde $AN_1' \perp Ox'$ cu $N_1' \in Ox'$. Fie $M_1 = AN_1' \cap Oy \Rightarrow AM + MN \geq AM_1 + M_1N_1$, $\forall M \in Oy$, $N \in Ox$. Ducem acum $N_1$ simetricul lui $N_1'$ față de $Oy$ și care împreună cu $M_1$, reprezintă punctele dorite.

**36.** Fie $MNPQ$ chiar patrulaterul de perimetru minim. Dacă $\widehat{AMQ} \neq \widehat{NMB}$ am putea micșora $QM + MN$. Într-adevăr, fie $Q'$ simetricul lui $Q$ față de $AB$ și $M' = Q'N \cap AB \Rightarrow QM + MN = Q'M + MN \geq Q'M' + M'N$ cu egalitate doar cînd $M = M'$, adică $\widehat{QMA} = \widehat{Q'MA} = \widehat{BMN} = 1$. Analog trebuie să avem:

$$\widehat{MNB} = \widehat{PNC} = \hat{2}$$

$$\widehat{NPC} = \widehat{DPQ} = \hat{3}$$

$$\widehat{DQP} = \widehat{AQM} = \hat{4}$$

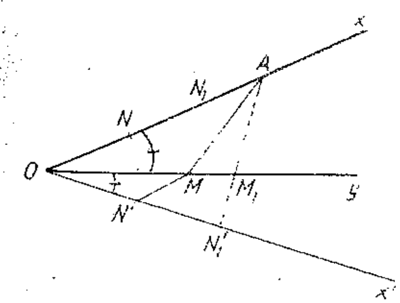


Fig. 35

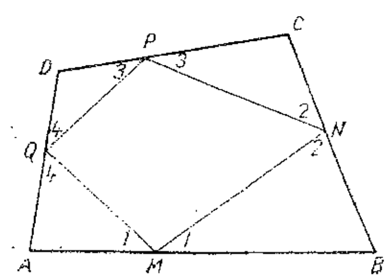


Fig. 36

Avem deci:

$$\hat{1}+\hat{4}+\hat{A}=\pi$$

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{B}=\pi$$

$$\hat{2}+\hat{3}+\hat{C}=\pi$$

$$\hat{3}+\hat{4}+\hat{D}=\pi$$

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{A}+\hat{C}=2\pi=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{B}+\hat{D}\Rightarrow\hat{A}+\hat{C}=$$
$=\hat{B}+\hat{D}$ adică $ABCD$ este inscriptibil.

**37.** Fie $ABC$ triunghiul ascuțitunghic dat și fie $A'$ pe $BC$, $B'$ pe $AC$ și $C'$ pe $AB$. Fie $A_1'$ și $A_2'$ simetricele lui $A'$ față de $AB$ și $AC \Rightarrow A_1'A_2' \leqslant A_1'C'+C'B'+B'A_2' = A'C'+C'B'+B'A'$ cu egalitatea doar cînd $C'=AB\cap A_1'A_2'$ și $B'=AC\cap A_1'A_2'$.

Avem că $AA_1'=AA'=AA_2'$ și $\widehat{A_1'AA_2'}=2\hat{A}$ constant și deci $A_1'A_2'$ va fi minim cînd $AA'$ este minim, deci cînd $AA'\perp BC$.

Triunghiul cu perimetru minim va fi deci $EFG$ cu $AE\perp BC$ și $E_1$, $E_2$ simetricele sale față de $AB$ și $AC$ coliniare cu $G$ și $F$; se observă că acesta este și unic din considerațiile precedente. Dar analog putem face aceeași construcție pornind de la latura $AC$ sau $AB$ în loc de $BC$. Rezultă $BF\perp AC$ și $CG\perp AB$, adică $EFG$ este triunghiul ortic al lui $ABC$.

**38.** Fie $ABC$ triunghiul dat și $P$ un punct în interiorul său. Rotim pe $BA$ respectiv $BP$ în jurul lui $B$ în același sens cu $60°$ și notăm cu $A'$ respectiv cu $P'$ noile poziții ale punctelor $A$ și $P$. Avem $A'P'=AP$, $P'P=BP$ și $\sphericalangle A'BC=\sphericalangle ABC+60°$, deci poziția lui $A'$ nu depinde de $P$, și avem $A'C\leqslant A'P'+P'P+PC=AP+BO+CP$ cu egalitate doar cînd $A'$, $P'$, $P$ și $C$ sînt coliniare.

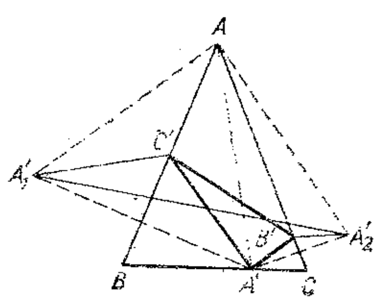
Fig. 37.1

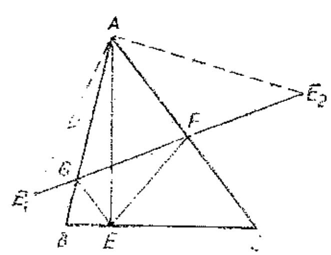
Fig. 37.2



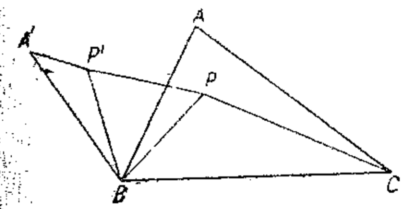
Fig. 38.1

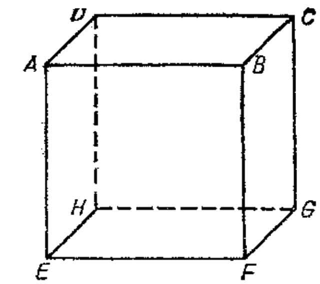
Fig. 39.1

Dar există un unic punct $O$ pe $A'C$ astfel încît:

$$\sphericalangle A'OB=60°$$

și se observă că acesta este punctul căutat.

**39.** Fie $ABCDEFGH$ cubul și $N$ punctul de intersecție al diagonalelor $AC$ și $BD$. Fie $P$ un punct arbitrar pe suprafața cubului. Dacă $P$ se află pe una din fețele alăturate feței $ABCD$, desfășurăm suprafața ca în fig. 39.2 și unim cele două puncte printr-o dreaptă $\Rightarrow NP\leqslant NM\leqslant NG\leqslant NQ+QG=2$. Mai avem de studiat cazul cînd $P$ se află pe fața opusă lui $ABCD$, notată cu $EFGH$.

Ducem în patrulaterul $EFGH$ diagonalele $FG$ și $EH$. Punctul $P$ se va afla într-unul din cele patru triunghiuri $EKF$, $FKG$, $GKH$ și $HKE$ unde prin $K$ am notat intersecția diagonalelor $EH$ și $FG$. Să presupunem că $P$ este în interiorul triunghiului $HKE$. Desfășurăm atunci suprafața cubului ca în figura 39.3. Ducem prin $P$ o perpendiculară la $HK$ care intersectează pe $NK$ în punctul $Q$. Avem succesiv:

$$NP\leqslant NQ+QP\leqslant NQ+QK=NK=2.$$

**40.** Considerăm planul $\pi$ care trece prin centrul $O$ al sferei și care conține și cele două puncte $A$ și $B$ de pe sferă, capetele drumului. Dacă $A$ și $B$ sînt capetele unui diametru al sferei acest plan satisface condițiile problemei. Dacă nu, fie planul $\pi'$ paralel cu $AB$ perpendicular pe primul plan considerat și trecînd prin $O$.

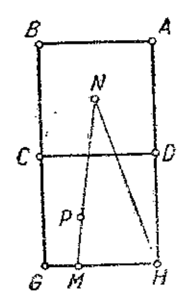
Fig. 39.2

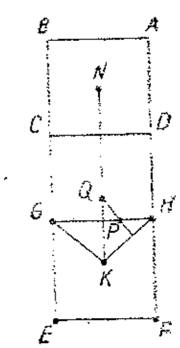
Fig. 39.3

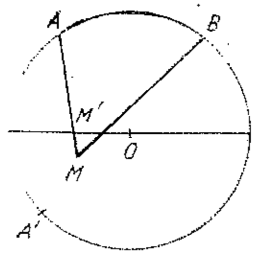

Fig. 40

Presupunem că există un punct $M$ pe drumul considerat astfel încît $MA \cap \pi' \neq \Theta$ și fie $MA \cap \pi' = M' \Rightarrow M'A + M'B \leqslant MA + MB$ cu egalitate doar cînd $M = M' \in \pi'$. Ducem acum $A'$ simetricul lui $A$ față de $\pi' \Rightarrow A'B = 2$ și $A'B \leqslant A'M' + M'B = AM' + M'B$ cu egalitate doar cînd $M' = 0$. Dar $MA + MB \leqslant 2$ cu egalitate doar cînd drumul este chiar $AMB$. În final $2 \leqslant M'A + M'B \leqslant MA + MB \leqslant 2$ deci peste tot în inegalitățile anterioare avem egalitate deci $M = M' = 0$ și tot drumul $AMB$ este de aceeași parte a lui $\pi'$ cu $A$ și $B$.

**41.** Fie $ED \parallel AB$ și $ED = AM$; la fel $FC \parallel AB$ și $FC = MB$. Fie $P = EF \cap DC$. Deoarece $ED = FC$, $\widehat{EDP} = \widehat{PCF}$ și $\widehat{DPE} = \widehat{FPC}$ rezultă că triunghiurile $EDP$ și $PCF$ sînt egale $\Rightarrow N = P$ și $MN$ este mediană în triunghiul $EMF \Rightarrow EM + FM \geqslant 2MN$ dar $EM = AD$ și $FM = BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{AD + BC}{2} \geqslant MN$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $EM$, $MN$ și $MF$ se suprapun adică $AD \parallel MN \parallel BC \Rightarrow ABCD$ trapez.

**42.** $(a + b + c)r = 2S = \dfrac{abc}{2R}$; dar $ac \leqslant \dfrac{(a+c)^2}{4} = b^2$

de unde

$$3br \leqslant \frac{b^3}{2R} \Rightarrow \quad b^2 \geqslant 6rR.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = c = b$ deci dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

**43.** Ducînd perpendiculare din $B$, $M$ și $C$ pe $AD$ și ținînd cont că perpendiculara din $M$ este media aritmetică a celorlalte două, se observă că aria triunghiului $ADM$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor $ANB$ și $NDC$. Scăzînd ariile triunghiurilor $ANP$ și $NQD$ obținem relația din enunț.

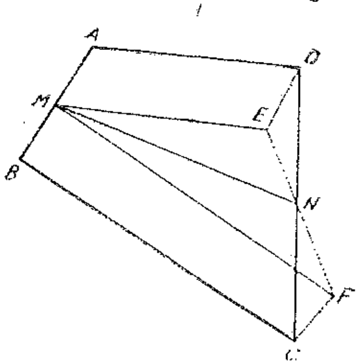

Fig. 41

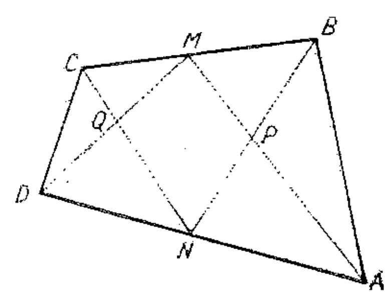

Fig. 43



**44.** Fie $M$, $N$, $P$, $Q$ respectiv mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ ale paralelogramului dat, iar $O$ punctul de intersecție al diagonalelor.

În $\Delta ABC$ medianele $CM$ și $AN$ se întîlnesc pe $BO$, $BO$ fiind la rîndul ei mediană.

Analog pentru toate triunghiurile avînd două laturi formate din laturile paralelogramului, iar a treia dată de diagonală, obținem patru vîrfuri ale octogonului aflate pe cele două diagonale.

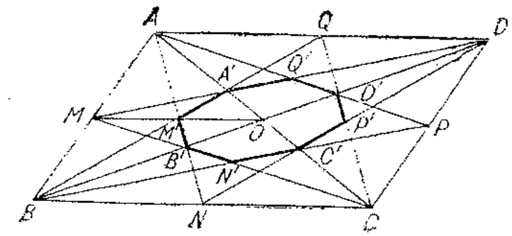

Fig. 44

Patrulaterul $AQNB$ este la rîndul lui paralelogram, deci diagonalele lui $BQ$ și $AN$ se înjumătățesc într-un punct $M'$ aflat la jumătatea lui $MO$.

Analog $N'$ pe $ON$, $P'$ pe $OP$, $Q'$ pe $OQ$.

Octogonul format este deci $A'M'B'N'C'P'D'Q'$.

Avem astfel:

$$\frac{S_{OA'M'}}{S_{OAM}} = \frac{OA' \cdot OM'}{OA \cdot OM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Avem evident:

$$S_{OAM} = S_{OAQ} = S_{ODQ} = \ldots = S_{OBM}$$

de unde deducem că raportul căutat este 1/6.

**45.** Fie $DC' \parallel AB$ și cu $C' \in AC \Rightarrow$ în $ABC'D$ trapez avem:

$$AM/_{AB} = C'N'/_{C'D} = \frac{1}{3} = CN/_{CD}$$

unde $N' = MN \cap DC' \Rightarrow$ în $\Delta C'DC$, $NN' \parallel CC'$ ceea ce nu se poate decît dacă $C' = C$.

*Observație.* În loc de 1/3 putem lua $1 > k > 0$.

**46.** Pentru calculul ariilor unor triunghiuri vom folosi metoda următoare:

$$S_{EFG} = \frac{EF \cdot EG \sin \widehat{FEG}}{2} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} \right|$$

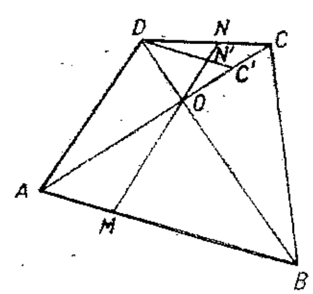

Fig. 45

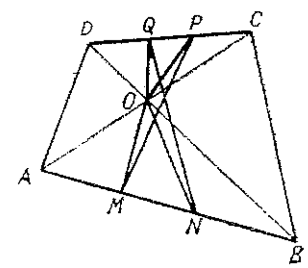

Fig. 46

Se poate renunța la modul dacă avem grijă ca toate ariile calculate astfel să aibă aceeași orientare.

Vom avea deci:

$$\vec{OM} \times \vec{OP} = (2/3\,\vec{OA} + 1/3\,\vec{OB}) \times (2/3\,\vec{OC} + 1/3\,\vec{OD}) = 2/9(\vec{CA} \times \vec{OD} +$$

$$+ \vec{OB} \times \vec{OC}) = (1/3\,\vec{OA} + 2/3\,\vec{OB}) \times (1/3\,\vec{OC} + 2/3\,\vec{OD}) = \vec{ON} \times \vec{OQ}.$$

*Observație.* În loc de 1/3 se poate lua $1 > k > 0$.

47. Evident, dacă $O = AB \cap CD$ (ca în figură) $S_{CPB} > S_{DQM}$

$S_{BNP} > S_{AMD}$ și sumînd $\Rightarrow S_{BNPC} > S_{AMQD}$ absurd $\Rightarrow AB \cap CD = \emptyset$.

48. Folosim aceeași metodă ca în problema 46.

$$\vec{MN} \times \vec{MQ} + \vec{PQ} \times \vec{PN} = \frac{\vec{AB}}{3} \times \vec{MQ} + \frac{\vec{CD}}{3} \times \vec{PN} = \frac{\vec{AB}}{3} \times (\vec{MA} +$$

$$+ \vec{AD} + \vec{DQ}) + \frac{\vec{CD}}{3} \times (\vec{PC} + \vec{CB} + \vec{BN}) = \frac{\vec{AB} \times \vec{AD}}{3} +$$

$$+ \frac{\vec{CD} \times \vec{CB}}{3} \Leftrightarrow 2S_{MNPQ} = \frac{1}{3}(2S_{ABCD}).$$

Elementar se observă că $h_{QMN} = \frac{2}{3}h_{DAM} + \frac{1}{3}h_{CNB}$

$$S_{MNPQ} = \frac{2S_{AMD} + S_{BNC}}{3} + S_{QNP} = \frac{2S_{AMD} + S_{BNC}}{3} +$$

$$+ \frac{2S_{BPC} + S_{ADQ}}{3} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

49. Demonstrăm întîi prima inegalitate.

*Soluția I.*

Avem evident $S_{ABC} \leqslant \frac{ab}{2}$

$$S_{BCD} \leqslant \frac{bc}{2}, \quad S_{CDA} \leqslant \frac{cd}{2}, \quad S_{DAB} \leqslant \frac{da}{2}$$

$$\Rightarrow S \leqslant \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) \leqslant \frac{1}{4}(ab + bc + cd + da) =$$

$$= \frac{(a+c)}{2}\,\frac{(b+d)}{2}.$$

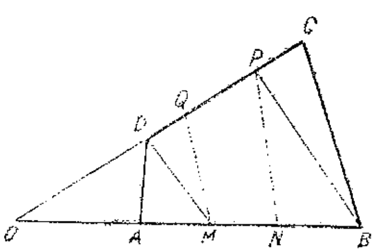

Fig. 47

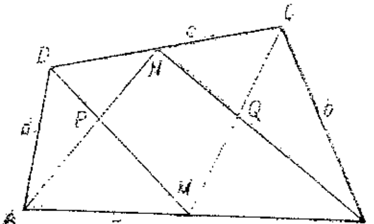

Fig. 49



*Soluția II.*

Fie $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$, respectiv $CD$. Fie $P = DM \cap AN$, $Q = BN \cap CM$.

Din problema 43 rezultă că aria patrulaterului este egală cu suma ariilor triunghiurilor $DMC$ și $ANB$.

$$S_{ABN} \leqslant \frac{a}{2}MN, \quad S_{DMC} \leqslant \frac{c}{2}MN$$

$$\Rightarrow S_{ABN} + S_{DMC} \leqslant \frac{a+c}{2}MN$$

dar

$$MN \leqslant \frac{b+d}{2}$$

conform problemei 41 $\Rightarrow S \leqslant \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$.

Pentru a demonstra a doua inegalitate observăm că luînd patrulaterul $ABC'D$ unde $BC = BC'$ și $CD = BC'$ reducem problema la cazul anterior. S-ar putea întîmpla ca patrulaterul $ABC'D$ să nu fie convex. Este clar însă că prima inegalitate rămîne cu atît mai mult valabilă pentru $ABCD$ neconvex.

50. Alegem punctul $M$ pe latura $AC$. Demonstrația în celelalte cazuri este absolut analoagă. Avem relațiile:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{MA^2}{CA^2}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{MC^2}{AC^2},$$

deoarece triunghiurile formate sînt asemenea cu triunghiul dat. Putem scrie deci, folosind inegalitatea $(a-x)^2 + (a+x)^2 \geqslant 2a^2$

$$\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} = \frac{MA^2 + MC^2}{AC^2} \geqslant \frac{2}{AC^2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

de unde avem $2(S_1 + S_2) \geqslant S$.

51. *Soluția I*

În figura de mai jos aplicînd problema precedentă în triunghiul $BPN$ obținem imediat:

$$2(S_1 + S_2) \geqslant P_3, \text{ unde } P_3 \text{ este aria lui } BPN.$$

Analog obținem relațiile:

$$2(S_2 + S_3) \geqslant P_1$$
$$2(S_3 + S_1) \geqslant P_2$$

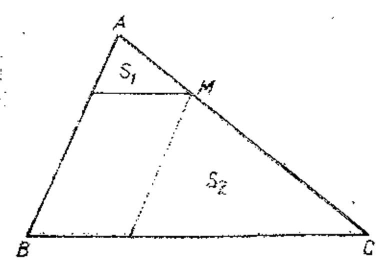

Fig. 50

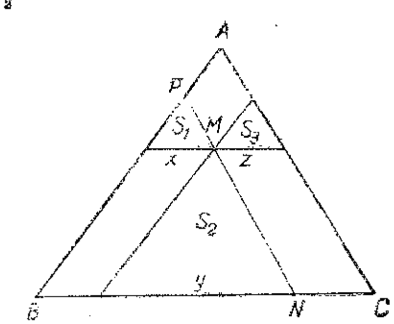

Fig. 51

Sumînd obținem:

$$4(S_1 + S_2 + S_3) \geqslant P_1 + P_2 + P_3.$$

Se observă acum că $P_1 + P_2 + P_3 = S + S_1 + S_2 + S_3$.

Deci $4(S_1 + S_2 + S_3) \geqslant S + (S_1 + S_2 + S_3)$ de unde

$$3(S_1 + S_2 + S_3) \geqslant S.$$

*Soluția 2.*

Fie $BC = a$ și $x$, $y$, $z$ segmentele notate pe figură. Se vede imediat că triunghiurile de arii $S$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ sînt toate asemenea între ele. Putem scrie deci:

$$\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$$

dar $x + y + z = a$ din cauza paralelogramelor ce se formează. Totul revine la a arăta că $3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2$ care este tocmai inegalitatea lui Cauchy.

**52.** $S = S_{KLMNPR} = S_{LMC} + S_{NAP} + S_{RKB} - 2\,S_{ABC} + S_{AKL} + S_{MNB} +$

$$+ S_{PCR} = \frac{1}{2}(a + b)^2 \sin C + \frac{1}{2}(b + c)^2 \sin A + \frac{1}{2}(c+a)^2 \sin B -$$

$$2S_{ABC} + \frac{1}{2}a^2 \sin A + \frac{1}{2}b^2 \sin B + \frac{1}{2}c^2 \sin C.$$

Dar

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

$$\frac{1}{2}(a + b)^2 \geqslant 2ab,$$

$$\frac{1}{2}(b + c)^2 \geqslant 2bc,$$

$$\frac{1}{2}(c + a)^2 \geqslant 2ca \text{ și prin urmare avem:}$$

$$S \geqslant 2\,ab \sin C + 2\,bc \sin A + 2\,ca \sin B -$$

$$-2\,S_{ABC} + \frac{1}{4R}(a^3 + b^3 + c^3).$$

Dar $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3\,abc$,

de unde $S \geqslant 10\,S_{ABC} + \frac{3\,abc}{4R} = 13\,S_{ABC}$,

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

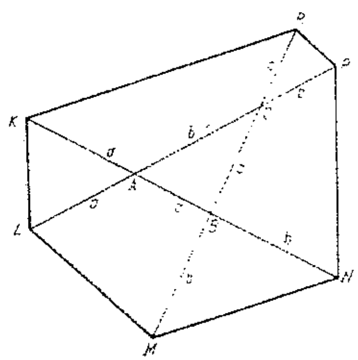


Fig. 52



**53.** Răspunsul este negativ. Într-adevăr, dacă toate regiunile ar avea aceeași arie atunci fiecare coardă împarte discul în două regiuni al căror raport de arii este egal cu 4/3.

Înseamnă că distanțele de la centrul discului $O$ la cele trei coarde sînt egale și deci aceste coarde înfășoară un cerc (vezi fig. 53). Deoarece aria regiunii 1 este $S_c/7$ înseamnă că unghiul făcut de cele două coarde este determinat și egal cu celelalte unghiuri făcute de cele 3 coarde. Înseamnă că triunghiul $ABC$ este echilateral. Dacă rotim figura cu 180° figura se va transforma în figura punctată din figură a cărei arie este strict mai mică decît cea a regiunii $MCBN$.

**54.** În patrulaterul $ABCD$ ducem bisectoarele celor patru vîrfuri (vezi fig. 54). Fie $M$ și $N$ punctele de intersecție a cîte două bisectoare pentru care distanța la latura care nu trece prin vîrfurile din care sînt duse bisectoarele respective este mai mare decît la celelalte laturi. Să notăm cu $R$ distanța punctului $M$ la $AD$ și cu $r$ distanța de la $N$ la $BC$. Să presupunem $R \geqslant r$. Fie $P = MC \cap ND$; $R \geqslant r \Rightarrow S_{CDM} \geqslant S_{CDN} \Rightarrow S_{DMP} \geqslant S_{CNP}$.

Deoarece $\hat{D} < 180°$, $\hat{C} < 180° \Rightarrow \widehat{MDC} < 90°$, $\widehat{NCD} < 90° \Rightarrow S_{DMN} \leqslant \leqslant S_{DMC} \Rightarrow S_{MNP} \leqslant S_{DPC} \Rightarrow S_{MNC} \leqslant S_{CDM}$;

analog

$$S_{MNB} \leqslant S_{AMB} \Rightarrow S = AD \cdot \frac{R}{2} + CD \cdot \frac{R}{2} + AB \cdot \frac{R}{2} + BC \cdot \frac{r}{2} +$$

$$+ S_{MNB} + S_{MNC} \leqslant \frac{R}{2} \cdot (AB + BC + CD + DA) + S_{ABM} + S_{CDM} =$$

$$= \frac{R}{2}(AB + BC + CD + DA) + \frac{R}{2}(AB + CD) < R \cdot P \Rightarrow R > \frac{S}{P}.$$

**55.** Din faptul că $C'$ e între $A$ și $D$ iar $E'$ între $B$ și $D \Rightarrow S_{ABD'} > S_{C'D'E'} \Rightarrow S_{ABCDE} > S_{A'B'C'D'E'} + \Sigma S_{C'D'E'}$ (unde $\Sigma S_{C'D'E'} = S_{C'D'E'} + S_{D'E'A'} + S_{E'A'B'} + S_{A'B'C'} + S_{B'C'D'}$).

Vom arăta că $\Sigma S_{C'D'E'} > S_{A'B'C'D'E'}$

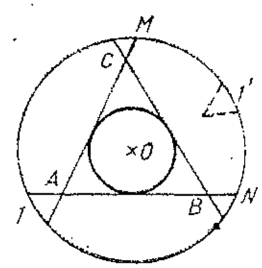


Fig. 53

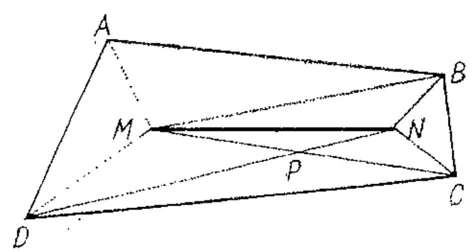


Fig. 54

Presupunem că $B'E' \cap C'D' = P$ şi considerăm $B'$ între $P$, $E'$: fie patrulaterul $A'B'C'D'$. Dacă $B'C' \parallel A'D'$ şi notăm $A'D' \cap B'E' = C_1$ şi $A'D' \cap C'E' = B_1 \Rightarrow S_{A'B'C'} = S_{B'C'C_1}$ iar oricum

$$S_{B_1C_1C'} < S_{B_1D'E'} \Rightarrow S_{A'B'C'D'E'} < S_{A'B'C'} + S_{B_1D'E'} + S_{A'B'E'} +$$
$$+ S_{B_1C_1E'} + S_{C'D'E'} < \Sigma S_{C'D'E'} \quad (S_{B_1D'E'} + S_{B_1C_1E'} < S_{A'D'E'}).$$

Dacă $B'C' \cap A'D' = Q$ şi $D'$ e între $A'$ şi $Q$ se scriu exact aceleaşi inegalităţi doar că $S_{A'B'C'} > S_{B'B'C_1}$.
Dacă $A'$ între $D'$ şi $Q \Rightarrow$

$$S_{B_1'B'C'} < S_{B'C'D'}. \text{ Dar } S_{B_1C_1C'} < S_{B_1D'E'}.$$

Fie $O = C'C_1 \cap B'B_1 \Rightarrow S_{B_1OC'} > S_{B'OC_1} \Rightarrow S_{B'C'D'} + S_{B_1D'E'} > S_{B'C'B_1C_1} \Rightarrow$

$$\Sigma S_{C'D'E'} > S_{A'B'E'} + S_{C'D'E'} + S_{B_1C_1E'} + S_{B_1D'E} + S_{B'C'D'} >$$
$$> S_{A'B'E'} + S_{B'C'E'} + S_{C'D'E'} = S_{A'B'C'D'E'}.$$

Dacă $B'E' \parallel C'D'$ vom avea $S_{B_1D'E} = S_{B_1C_1C'}$, în rest însă totul e la fel.

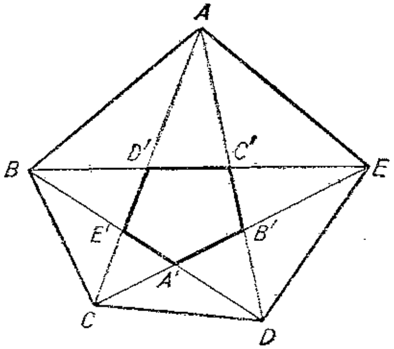

Fig. 55.1

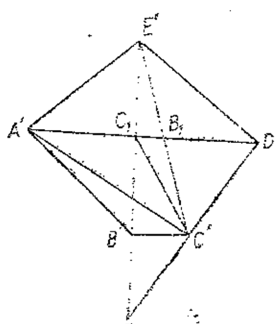

Fig. 55.2

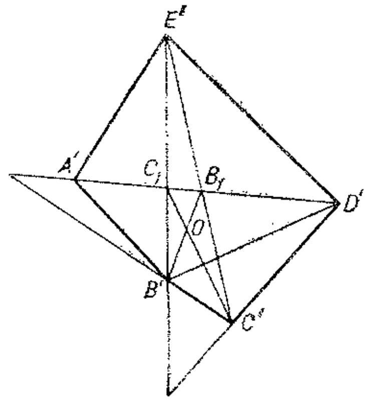

Fig. 55.3



**56.** Fie $P = A_1A_4 \cap A_2A_5$, $Q = A_1A_4 \cap A_3A_6$, $R = A_2A_5 \cap A_3A_6$ (vezi fig. 56), (eventual $P = R = Q$).

Atunci: $S_{A_1A_2A_3Q} + S_{A_3A_4A_5R} + S_{A_5A_6A_1P} \leqslant S$.

Înseamnă că cel puţin unul dintre cele trei patrulatere are aria mai mică decît 1/3 $S$. Fie acesta $A_1A_2A_3Q$. Atunci sau

$$S_{A_1QA_2} \leqslant \frac{1}{2} S_{A_1A_2A_3Q} \leqslant \frac{S}{6} \text{ sau } S_{A_2A_3Q} \leqslant \frac{1}{6} S$$

Să presupunem $S_{A_1QA_2} \leqslant \frac{1}{6} S$ atunci fie $S_{A_1A_2A_4} \leqslant S_{A_1A_2Q}$ sau $S_{A_1A_2A_4} \leqslant S_{A_1A_2Q}$ (deoarece au aceeaşi bază şi vîrfurile pe aceeaşi dreaptă). Dacă $S_{A_2A_3Q} \leqslant \frac{1}{6} S$ soluţia este analoagă.

**57.** Construim paralelogramul $AEBO$ şi notăm cu $N$ mijlocul laturii $AB$. $NC$ este mediană în triunghiurile $ECO$ şi $ABC$ de unde folosind teorema medianei, obţinem:

$$2(b^2 + a^2) - c^2 = 2(OC^2 + EC^2) - OE^2. \tag{1}$$

Lungimea medianei care porneşte din $O$, a triunghiului $OEC$ este mai mare decît $0 \Rightarrow 2\ EO^2 + 2\ OC^2 - EC^2 \geqslant 0$.

Înlocuim pe $EC$ în (1) şi obţinem $2\ EO^2 + 2\ OC^2 - (b^2 + a^2) + 1/2c^2 - 1/2\ OE^2 + OC^2 \geqslant 0$, adică:

$\frac{3}{2} EO^2 + 3\ OC^2 \geqslant a^2 + b^2 - 1/2c^2$. Dar $OE^2 = 2\ OA^2 + 2\ OB^2 - c^2$ ($OE$ este dublul medianei în $\Delta OAB$) $\Rightarrow 3\ OA^2 + 3\ OB^2 - 3/2\ c^2 + 3\ OC^2 \geqslant a^2 + b^2 - 1/2\ c^2$ sau $3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$.

*Observaţie.*

Relaţia din enunţ este mai generală. Ea se enunţă în felul următor: Fie $O$, $A_1, \ldots, A_n$, $n + 1$ puncte în spaţiu, atunci

$$n \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 \geqslant \sum_{i<j} A_i A_j^2$$

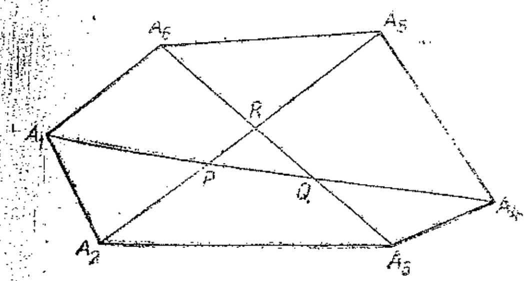

Fig. 56

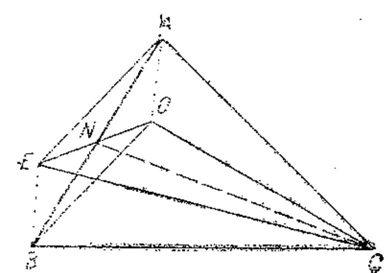

Fig. 57

Într-adevăr:

$$0 \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i^2 + \sum_{i\neq j} \overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} = n\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\overrightarrow{A_iA_j})^2 =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i^2 - \sum_{i<j}(\overrightarrow{A_iA_j})^2 = n\sum_{i=1}^{n} OA_i^2 - \sum_{i<j} A_iA_j^2.$$

**58.** Fie $M'$ simetricul punctului $M$ față de bisectoarea dusă din $A$. Se observă imediat că distanța de la $M'$ la $c$ este egală cu $d_b$ și cea la $b$ cu $d_c$. Fie de asemenea $d'_a$ distanța de la $M'$ la $a$. Avem evident că $d'_a + M'A \geqslant h_a$ ($h_a$ este înălțimea dusă din $A$), de unde deducem $ad'_a + aM'A \geqslant 2S$ ($S$ aria triunghiului). Dar $M'A = MA \Rightarrow ad' + aMA \geqslant 2S$.

Pe de altă parte $2S = cd_b + bd_c + ad'_a$ de unde deducem $aMA \geqslant cd_b + bd_c \Rightarrow MA \geqslant \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$;

analog $MB \geqslant \frac{c}{b}d_a + \frac{a}{b}d_c$ și $MC \geqslant \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$.

Adunăm și obținem: $MA + MB + MC \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)d_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)d_c$ dar $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2$ etc., de unde rezultă inegalitatea din enunț.

**59.** Poziția punctelor este în așa fel încît ele să împartă arcul $A_0A_n$ în $n$ părți egale. Vom arăta că oricum vor fi așezate punctele $A_1, \ldots, A_{n-1}$ lungimea liniei frînte $A_0A_1 \ldots A_n$ va fi mai mică decît cea determinată de punctele în poziția de mai sus.

Va fi suficient să considerăm numai acele poziții pentru care $\widehat{A_{i-1}A_i} \leqslant \pi$ oricare ar fi $i = 1, \ldots, n$ (cu convenția ca arcele să se măsoare întotdeauna pe acel arc $A_0A_n$ fixat de la început). Într-adevăr, dacă $\widehat{A_iA_{i+1}} > \pi$ atunci sau $A_i \neq A_0$ sau $A_{i+1} \neq A_n$. Să presupunem $A_{i+1} \neq A_n$ și să notăm cu $B_{i+1}$ punctul diametral opus lui $A_i$. Atunci $A_iB_{i+1} > A_iA_{i+1}$ și $B_{i+1}A_{i+2} > A_{i+1}A_{i+2}$.

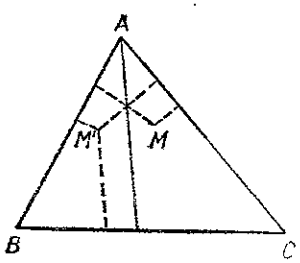


Fig. 58

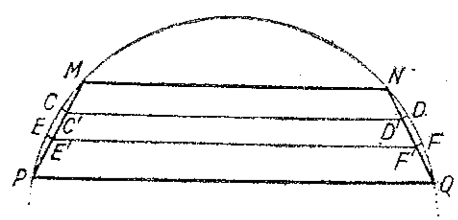


Fig. 59



În acest caz problema este evident echivalentă cu următoarea. Fiind date $n$ coarde $l_i$ paralele între ele și situate în același semicerc și astfel încît $\sum \widehat{l_i} = \widehat{A_0A_n}$ suma lungimilor este maximă atunci și numai atunci cînd $\widehat{l_i} = \widehat{A_0A_n}/n$, $i = 1 \ldots n$ (unele coarde vor putea fi reduse la un punct, caz în care ele vor fi situate în vîrful semicercului). Să facem acum următoarea observație: dacă $MN$ și $PQ$ sînt două coarde paralele într-un semicerc (vezi fig. 59) și considerăm punctele $C', E' \in \widehat{PM}$ și $D, F \in \widehat{NQ}$ astfel $\widehat{CM} = \widehat{EP} = \widehat{DN} = \widehat{FQ}$ atunci $CD + EF \geqslant PQ + MN$ egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $C = M$, $E = P$, $D = N$ și $F = Q$. Într-adevăr, fie $C'$, $E'$, respectiv $D'$, $F'$ proiecțiile punctelor $C$, $E$, $D$, $F$ pe $MP$ respectiv pe $NQ$. Deoarece $\widehat{CM} = \widehat{EP} = \widehat{FQ} = \widehat{DN}$ obținem $MC' = EP' = QF' = ND'$ de unde deducem, considerînd trapezul isoscel $MNPQ$ că $MN + PQ = C'D' + E'F' < CD + EF$ deoarece $\widehat{C'CD} = \widehat{E'EF} = \widehat{MP}/2 < 90$ (observația rămîne evident valabilă și dacă $M = N$, situat în vîrful semicercului).

Cu această observație problema este rezolvată. Luăm $XY$ coarda paralelă cu $l_i$ și astfel încît $\widehat{XY} = \widehat{A_0A_n}/n$.

Deoarece $\sum_i \frac{\widehat{l_i}}{n} = \widehat{XY}$ nu se poate ca toate coardele să se găsească de aceeași parte a lui $XY$, deci pentru $l_1$ există o coardă $l_i$ situată de partea opusă lui $XY$. Conform observației, dacă-l mutăm pe $l_1$ peste $XY$ iar pe $l_i$ în $l'_i$ astfel încît $\widehat{l_i} - \widehat{l'_i} = \widehat{XY} - \widehat{l_1}$ obținem $XY + l'_i > l_1 + l_i$. Continuînd procedeul și observînd că deoarece $\sum \widehat{l_i}/n = \widehat{XY}$ atunci cînd deplasăm pe $l_{n-1}$ peste $XY$, $l_n$ se va suprapune automat peste $XY$, obținem:

$$l_1 + \ldots + \ldots + l_n < nXY \text{ și problema este rezolvată.}$$

**60.** Se știe că: $r_a = \frac{S}{p-a}$, $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$.

Inegalitatea devine deci:

$$\frac{pS^3}{p(p-c)(p-b)(p-a)} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}abc \Leftrightarrow Sp \Leftrightarrow \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}abc$$

însă $abc = 4RS$ și inegalitatea devine $p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$, unde $R$ este raza cercului circumscris triunghiului. Dar $p = 1/2(a + b + c) = 1/2(2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C) = R(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Inegalitatea devine:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

care rezultă conform problemei precedente.

**61.** $S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} - S_{D_1AA_1} - S_{A_1BB_1}\, S_{C_1DD_1} - S_{B_1CC_1} = S -$

$$-\frac{AD_1 \cdot AA_1}{AD \cdot AB} . S_{DAB} - \frac{BA_1 \cdot BB_1}{BA \cdot BC} . S_{ABC} - \frac{B_1C \cdot CC_1}{BC \cdot CD} . S_{BCD} -$$

$$-\frac{DD_1 \cdot DC_1}{DC \cdot DA} . S_{CDA} = S - \frac{(n-1)}{n^2}(S_{DAB} + S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA}) =$$

$$= S - 2S\,\frac{n-1}{n^2} = S\left(1 - \frac{2n-2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{S_1}{S} = 1 - \frac{2n-2}{n^2} \Rightarrow$$

$S_1$ își atinge minimul cînd $\frac{2n-2}{n^2}$ e maxim.

Fie deci $m$ valoarea lui $\frac{2n-2}{n^2}$.

Avem: $mn^2 - 2n + 2 = 0$.
Cum $n$ este real rezultă $0 \leqslant \Delta = 4 - 8\,m$, **deci valoarea maximă a lui** $m$ este $m = \frac{1}{2}$, căreia îi corespunde $n = 2$.

**62.** $S_{MAC} + S_{MBD} = \frac{MA \cdot MC + MB \cdot MD}{2}$.

Din puterea punctului interior față de cerc, avem
$MBMA = MCMD =$ const., deci
$MA \cdot MC \cdot MB \cdot MD =$ const.
În cazul în care $MAMC = MBMD$ suma cerută este minimă.
Se deduce astfel:
$MA = MD$ și $MB = MC$, caz în care coardele fac 45° cu $OM$ și $O$ nu se află nici în $MAC$, nici în $MBD$.

**63.** Scriem aria triunghiului sub forma $S = \frac{ab \sin C}{2}$.

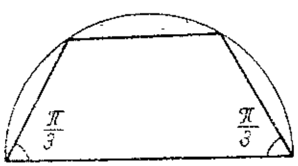

Fig. 63

Evident ar fi suficient să putem realiza maximul fiecărui factor. (Dar $a \leqslant 1$, $b \leqslant 2$ și $\sin C \leqslant 1$). Acest lucru se poate realiza pentru triunghiul dreptunghic în $C$ cu catetele 1 și 2.
Deci max $S = 1$.

**64.** Considerațiile pe care le facem la început privesc ambele puncte ale problemei.
Fie un patrulater $ABCD$ în semicerc astfel încît dreapta $CD$ să lase deoparte pe $O$, centrul semicercului și de cealaltă parte pe $A$ și $B$. Fie $C'$ și $D'$ intersecțiile lui $BC$, respectiv $AD$ cu frontiera semicercului $\Rightarrow$ $ABC'D'$ are aria și perimetrul mai mari decît $ABCD$.

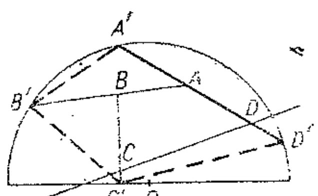

Fig. 64.1

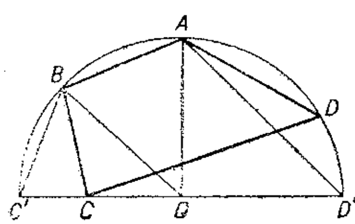

Fig. 64.2



Acum fie $A'$ și $B'$ intersecțiile dreptelor $AD'$ și respectiv $AB$ cu frontiera semicercului. Din $A'B' + A'A \geqslant AB'$ și $B'B + B'C' \geqslant BC'$ rezultă că patrulaterul convex $A'B'C'D'$ are perimetrul mai mare decît $ABC'D'$ și evident are și aria mai mare.

Problema se reduce deci la discuția patrulaterelor cu vîrfurile pe semicerc sau diametru.

Dacă $C$ și $D$ sînt punctele cele mai apropiate de diametru se observă că dacă luăm $ABC'D'$ cu $C'D'$ diametru $\Rightarrow$ (pentru cazul din figura 64.2) $BC' + C'C \geqslant BC$, $AD' \geqslant AD$, $CD' \geqslant CD$ și

$$S_{OBC} \leqslant S_{OBC'} \quad S_{OAD} \leqslant S_{OAD'} \Rightarrow S_{ABC'D'} \geqslant S_{ABCD}$$

și la fel pentru perimetru. Deci putem considera numai patrulatere de acest din urmă tip $\Rightarrow$

$$S_{ABCD} = S_{OBC} + S_{OAB} + S_{OAD} = (\sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma)\,\frac{R^2}{2}$$

$$\text{și}\quad P_{ABCD} = 2R + 2R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\text{cu}\quad \alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \Rightarrow$$

conform problemei 59 maximul lui $S_{ABCD}$ și al lui $P_{ABCD}$ se realizează pentru $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, deci pentru $ABCD$, jumătatea unui hexagon regulat.

**65.** $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin \sphericalangle ACD}{2} \cdot AC$,
unde $\alpha = \sphericalangle ABC$.
Se observă că pentru $\alpha$ fixat $S_{ABCD}$ e maximă pentru $\sphericalangle ACD = 90° \Rightarrow$

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{\sin\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\pi-\alpha) + \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{2} \leqslant \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}$$

și conform problemei 59, deoarece $\pi - \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \pi \Rightarrow$ maximul lui $S_{ABCD}$ se atinge pentru $\frac{\alpha}{2} = \pi - \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ pentru $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ deci patrulaterul căutat este o jumătate dintr-un hexagon regulat.

**66.** Fie $\Delta ABC$ înscris în cerc și $M \in AB$. Notăm cu $\alpha$ unghiul subîntins de coarda ce trece prin $M$, perpendiculară pe $OM \Rightarrow \alpha \leqslant \hat{C} \leqslant \pi - \alpha$ cu $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dar din $2MO \geqslant R \Rightarrow \alpha \leqslant 60°$ și avem aplicînd inegalitatea mediilor aritmetice și geometrice:

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\hat{C}}{2} = 2R^2 \sin\hat{A} \cdot \sin\hat{B} \cdot \sin\hat{C} \Rightarrow S_{ABC} \leqslant$$

$$\leqslant 2R^2\left(\frac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{3}\right)^3$$

(cu egalitate pentru $\sin \hat{A} = \sin \hat{B} = \sin \hat{C}$ cînd și membrul drept e maxim conform problemei 59). Deci triunghiul de arie maximă înscris în cerc cu o latură trecînd prin $M$, este un triunghi echilateral.

**67.** Avem:

$$\frac{d_a}{MC} = \sin \widehat{MCB}; \quad \frac{d_b}{MC} = \sin \widehat{MCA}$$

și analoagele $\Rightarrow$

$$\frac{(d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a)}{MA \cdot MB \cdot MC} = (\sin \widehat{MCA} + \sin \widehat{MCB}) \cdot$$

$$\cdot (\sin \widehat{MAC} + \sin \widehat{MAB})(\sin \widehat{MBA} + \sin \widehat{MBC}) \leqslant (\Sigma \sin \widehat{MCA})^3/27.$$

Dar suma acestor unghiuri este 180°. Deci conform problemei 59, maximul expresiei din dreapta se atinge cînd toate unghiurile sînt egale cu $\frac{\pi}{6}$

$$\frac{(d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a)}{MA \cdot MB \cdot MC} \leqslant \frac{3^3}{27} = 1$$

și egalitate avem pentru $ABC$ echilateral și $M$ centrul său.

**68.** Pentru rezolvarea acestei probleme vom găsi mai întîi o expresie generală pentru aria unui patrulater convex, dată în funcție de laturi și de suma unghiurilor opuse.

Fie acest patrulater $ABCD$, $AB = a$, $CD = c$, $BC = b$, $DA = d$.

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile $ABC$ și $DBC$:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 \cos^2 A + 4b^2c^2 \cos^2 C - 8abcd \cos A \cos C.$$

**Dar**

$$4S = 2ad \sin A + 2bc \sin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16S^2 = 4a^2d^2 \sin^2 A + 4b^2c^2 \sin^2 C + 8abcd \sin A \sin C.$$

Adunînd egalitățile obținute avem:

$$16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd \cdot \cos(A + C) = 4a^2d^2 +$$

$$+ 4b^2c^2 - 16abcd \cos^2\frac{A + C}{2} + 8 \cdot abcd = -16abcd \cos^2\frac{A + C}{2} +$$

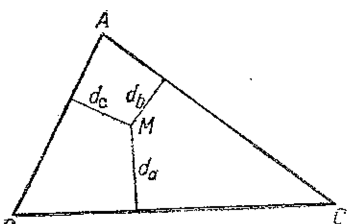


Fig. 67

$$+ (2ad + 2bc)^2 \Rightarrow 16S^2 = (b^2 + c^2 +$$

$$+ 2bc - a^2 - d^2 + 2ad)\ (a^2 + d^2 + 2ad -$$

$$- b^2 - c^2 + 2bc) - 16abcd \cos^2 \frac{A + C}{2} =$$

$$= (a + b + c - d)(-a + b + c + d) \cdot$$

$$\cdot (a + b - c + d)(a - b + c + d) -$$

$$- 16abcd \cos^2\frac{A + C}{2}$$



Și în final notînd semiperimetrul $ABCD$ lui cu $p$ avem:

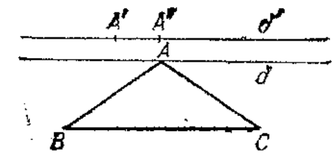


Fig. 69

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) -$$

$$- abcd \cos^2 \frac{A + C}{2}.$$

Deci $S^2$ este maximă cînd $\cos \frac{A + C}{2} = 0$, deci $A + C = 180°$.

Se mai observă că un patrulater inscriptibil de laturi date este unic determinat. Deci există chiar un singur patrulater (inscriptibil) care realizează maximul ariei.

**69.** Să demonstrăm mai întîi că dintre toate triunghiurile avînd o latură constantă $a$ și două variabile $x$, $y$ astfel încît $x + y = 1$ cel de arie maximă se realizează numai pentru $x = y = 1/2$. Fie $\Delta ABC$ cu $BC = a$, $AB = AC = 1/2$.

Presupunem $\exists \Delta A'BC$ cu $S_{A'BC} \geqslant S_{ABC}$, $A'B + A'C = 1$ și $A'B \neq A'C$.

Ducem dreptele $d \ni A$, $d' \ni A'$ cu $d \parallel d' \parallel BC$. Deoarece $S_{A'BC} \geqslant S_{ABC}$ avem că $d$ este între $d'$ și $BC$. Ducem $B'$ simetricul lui $B$ față de $d' \Rightarrow A'B + A'C = A'B' + A'C = 1 \geqslant B'C$ cu egalitate doar cînd $A' = A'' \in d'$ cu $A''B = A''C$. Dar am presupus $A'B \neq A'C$, deci $1 > A''B + A''C > AB + AC = 1$, absurd. Acum să considerăm poligonul cu $n$ laturi de arie maximă și perimetru dat $A_1A_2 \ldots A_n$; dacă unul din triunghiurile $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ ($A_0 = A_n$ și $A_{n+1} = A_1$), nu este isoscel îl putem modifica astfel încît $A_{k-1}A_{k+1}$ constantă și $A_{k-1}A_k + A_kA_{k+1}$ = constantă, pînă la un triunghi isoscel care are aria strict mai mare decît a sa conform rezultatului precedent. Deci cu siguranță laturile poligonului sînt egale. Dacă $n = 3$ avem un triunghi echilateral. Dacă $n > 3$, se consideră patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ și patrulaterul $A_1A_2'A_3'A_4$ inscriptibil, cu $A_1A_2' = A_1A_2 = A_2A_3 = A_2'A_3' = A_3'A_4 = A_3A_4$. Conform prob. precedente $S_{A_1A_2'A_3'A_4} \geqslant S_{A_1A_2A_3A_4}$ cu egalitatea doar cînd patrulaterele sînt egale. Deci $A_1A_2A_3A_4$ e inscriptibil și avînd 3 laturi egale e chiar trapez isoscel, deci $\sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_3A_4$. Se observă deci că poligonul de arie maximă are și unghiurile alăturate egale, deci e regulat.

*Observație.* Această demonstrație nu rezolvă și problema existenței poligonului de arie maximă. Noi am arătat că în cazul în care acesta există, el e cu siguranță poligon regulat. O argumentare a existenței sale se poate da, însă depășește limitele culegerii.

**70.** Se demonstrează prin inducție față de $(n + 1)/2 \in \mathbf{N}$.

Pentru $n = 1$ problema e banală.

$P_p$. problema adevărată pentru $\overrightarrow{OP}_1, \ldots, \overrightarrow{OP}_n$ cu $\frac{n-1}{2} \in \mathbf{N}$ și fie în plus vectorii $\overrightarrow{OP}_{n+1}, \overrightarrow{OP}_{n+2}$.

Rearanjăm indicii astfel încît unghiurile vectorilor cu una din semiaxe să fie crescători.

Fie acum $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{OP}_2 + \ldots + \overrightarrow{OP}_{n+1}$.

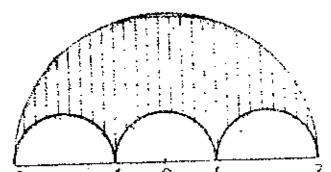


Fig 70.1

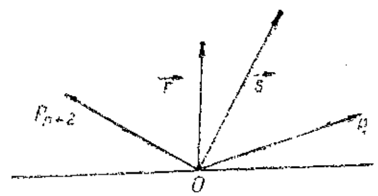


Fig. 70.2

Se observă că $\vec{S}$ e între $\overrightarrow{OP}_i$ şi $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ deci între $\overrightarrow{OP}_i$ şi $\overrightarrow{OP}_{n+2}$, deci face cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle P_iOP_{n+2}$ un unghi ascuţit.

Fie $\vec{R} = \overrightarrow{OP}_i + \overrightarrow{OP}_{n+2}$ care este de-a lungul acestei bisectoare. Dar $|\vec{S}| \geq 1$ şi $\sphericalangle(\vec{R}, \vec{S}) \leq 90° \Rightarrow |\vec{R} + \vec{S}| \geq |\vec{S}| \geq 1$.

*Observaţie:* 1) Se observă că este suficient să arătăm pentru $n = 1$, $n = 3$, restul rezultă prin inducţie imediat.

2) Prin inducţie se poate arăta că locul geometric al lui $M$ cu $\overrightarrow{OM} = \sum_{1}^{r} \overrightarrow{OP}_i$, cu $n \in N$ e format din regiunea din semiplan, dintre un disc de rază $n$ cu centrul in $O$ şi semidiscuri de rază 1 tangente între ele care au centrele in $-n+1, -n+3, \ldots, n-1$.

**71.** Vom da o soluţie bazată pe inegalitatea triunghiului scrisă vectorial $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$.

Avem că $|\overrightarrow{OA}_i| = 1$. $O$ fiind centrul de greutate al poligonului, avem în plus $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i = 0$.

Dacă $M$ este un punct în plan, atunci

$$(*)\quad \sum_{i=1}^{n} MA_i = \sum_{i=1}^{n} |-\overrightarrow{OA}_i + \overrightarrow{OM}| \geq |n\overrightarrow{OM} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA}_i| = n|\overrightarrow{OM}|,$$

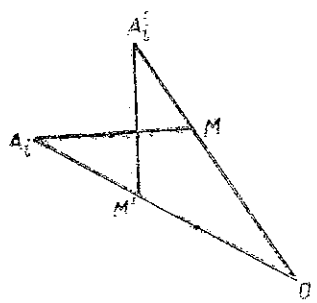


Fig. 71

deci pentru $|\overrightarrow{OM}| \geq 1$, avem inegalitatea cerută.

Pentru $OM = |\overrightarrow{OM}| < 1$ fie $M'$ pe $OA_i$ şi $A_i'$ pe $OM$, astfel incît $OM' = OM$ şi $OA_i = OA_i'$, avem

$$|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}_i| = MA_i = M'A_i' =$$

$$|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA_i'}|,$$



$$\overrightarrow{OA_i'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \text{ şi } OM \cdot \overrightarrow{OA}_i = \overrightarrow{OM'} \Rightarrow \left|\frac{\overrightarrow{OM}}{OM} - OM \cdot \overrightarrow{OA}_i\right| =$$

$$= |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}_i| \Rightarrow \left|\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2} - \overrightarrow{OA}_i\right| = \frac{|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}_i|}{OM}$$

şi aplicînd relaţia (*) pt. $\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{OA}_i - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}\right| \geq n\left|\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}\right| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}_i| \geq n.$$

Această relaţie nu face decît să transpună în formă vectorială soluţia în numere complexe pe care o expunem în continuare:

Vom nota prin $z_i$ respectiv $z$ coordonatele complexe ale lui $A_i$ respectiv $M$ faţă de $O \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = 0$ şi $|z_i| = 1$, $i = 1, \ldots,$ $nz_i^{-1} = \bar{z}_i$.

Avem $\sum_{i=1}^{n}|z - z_i| \geq |nz - \sum_{i=1}^{n} z_i| = n|z|$ (* *), deci pentru $|z| \geq 1$ rezultă problema. Pentru $z = 0$ e evidentă. Fie $0 < |z| < 1$. Avem:

$$\Sigma \bar{z}_i = 0 \text{ şi } |z^{-1} - z_i^{-1}| = |z - z_i|\,|z^{-1}|.$$

Scriind pentru $z^{-1}$ relaţia (* *) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}|z^{-1} - z_i^{-1}| \geq n|z^{-1}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|z - z_i|\,|z^{-1}| \geq n|z^{-1}| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|z - z_i| \geq n.$$

**72.** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vîrfurile poligonului, $O$ un punct în plan şi $\overrightarrow{OB}_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n(A_{n+1} = A_1)$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OB}_i = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = 0 \text{ şi se observă că } \sphericalangle(\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_{k+1}) >$$

$$> \sphericalangle(\overrightarrow{OB}_1, \overrightarrow{OB}_k)\ k = 1, \ldots, n-1$$

Fie $\overrightarrow{OB_i'} = \overrightarrow{OB}_i/2 = -\overrightarrow{OB_i''}$.

Renumerotăm vectorii $\overrightarrow{OB_i'}, \overrightarrow{OB_i''}$ notîndu-i $\overrightarrow{OC}_1, \ldots, \overrightarrow{OC}_{2n}$ astfel încît $\sphericalangle(\overrightarrow{OC}_1, \overrightarrow{OC}_{k+1}) \geq \sphericalangle(\overrightarrow{OC}_1, \overrightarrow{OC}_k)$ $k = 1, \ldots n-1$.

Avem $\sum_{i=1}^{2n}\overrightarrow{OC}_i = 0$ şi deci notînd cu $D_j$ extremitatea vectorului $\sum_{i=1}^{j}\overrightarrow{OC}_i$ obţinem un poligon cu $2n$ laturi unde $D_{2n} = 0$. Din modul cum s-au ordonat

$\overrightarrow{OC_i}$ poligonul este convex iar perimetrul său este egal cu perimetrul poligonului inițial, deoarece

$$P = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{A_iA_{i+1}}| = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{OB_i}| = \sum_{i=1}^{n} (|\overrightarrow{OB'_i}| + |\overrightarrow{OB''_i}|) = \sum_{i=1}^{2n} |\overrightarrow{OC_i}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} |\overrightarrow{D_iD_{i+1}}|.$$

Fie $D_kD_j$ o diagonală a poligonului $D_1 \dots D_{2n}$ $(k < j)$.
Să arătăm că ea e mai mică decît o diagonală a poligonului $A_1 \dots A_n$:

$$D_kD_j = \sum_{i=k}^{2n} \overrightarrow{OC_i}.$$

Fiecare vector $\overrightarrow{OC_i}$ provine dintr-un $\overrightarrow{OB'_\alpha}$ sau $\overrightarrow{OB''_\beta}$. Dar $\overrightarrow{OB'_\alpha} = \frac{\overrightarrow{OB_\alpha}}{2}$ și $\overrightarrow{OB''_\beta} = -\frac{\overrightarrow{OB_\beta}}{2}$. Se observă că indicii $\{\alpha\}$ și $\{\beta\}$ sînt consecutivi.

$$\Rightarrow D_kD_j = \left|\sum \frac{\overrightarrow{OB_\alpha}}{2} - \sum \frac{\overrightarrow{OB_\beta}}{2}\right| \leqslant \left|\sum \frac{\overrightarrow{OB_\alpha}}{2}\right| + \left|\sum \frac{\overrightarrow{OB_\beta}}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \operatorname{Max}\left\{\left|\sum \frac{\overrightarrow{OB_\alpha}}{2}\right|, \left|\sum \frac{\overrightarrow{OB_\beta}}{2}\right|\right\} = \operatorname{Max}\left\{\left|\sum \overrightarrow{OB_\alpha}\right|, \left|\sum \overrightarrow{OB_\beta}\right|\right\} \leqslant \max\{A_iA_j\}.$$

Ar fi suficient acum să arătăm că există o diagonală în poligonul $D_1 \dots D_{2n}$ mai mare decît $\frac{P}{\pi}$. Dar acest poligon convex are laturile opuse paralele și egale (din felul cum a fost construit), deci are un centru de simetrie $O_1$. Considerăm cercul de centru $O_1$ și rază $\operatorname{Max}\{O_1D_i\} = O_1D_{i_0}$. Acest cerc conține poligonul în interior $\Rightarrow$ (vezi problema 88) $P < 2\pi\, O_1D_{i_0} = \pi = D_{i_0}D_{i_0+n}$.

*Observație:* Considerind toate poligoanele regulate de perimetru $P$ se observă că majorarea este cea mai bună posibilă.

**73.** Fie $\overrightarrow{OV} = -\sum_{i=1}^{32} \overrightarrow{OV_i}$. Ca și în problema precedentă construim poligonul convex determinat de vectorii $\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OV_1}, \dots, \overrightarrow{OV_{32}}$. Perimetrul acestui poligon este cel puțin 32. Aplicind problema precedentă obținem rezultatul dorit.

**74.** Într-adevăr dacă notăm coordonatele complexe ale lui $B$, $C$ cu $z_2$, $z_3$ și ale lui $B'$, $C'$ cu $z'_2$, $z'_3$ vom avea, notind $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ pentru coordonatele lui $A$ și $A'$: $(z_3 - z_2)\varepsilon + z_2$ și respectiv $(z'_3 - z'_2)\varepsilon + z'_2$.

Triunghiul obținut prin unirea mijloacelor segmentelor $AA'$, $BB'$, $CC'$ va avea coordonatele: $z''_2 = \frac{z_2 + z'_2}{2}$, $z''_3 = \frac{z_3 + z'_3}{2}$ și $z''_1 = \frac{z_3 + z'_3}{2} - \frac{z_2 + z'_2}{2}\varepsilon + \frac{z_2 + z'_2}{2}$ și se observă că: $z''_1 = (z''_3 - z''_2)\,\varepsilon + z''_2$ adică acesta este un triunghi echilateral.



**75.** Vom considera centrul de simetrie $O$ ca originea axelor din planul complex. Fie $A_1, \dots, A_6$ vîrfurile hexagonului dat. Dacă coordonatele complexe ale lui $A_1$, $A_2$, $A_3$ sînt $z_1$, $z_2$, $z_3$ atunci coordonatele lui $A_4$, $A_5$, $A_6$ vor fi $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$. Fie $A'_1, \dots, A'_6$ celelalte vîrfuri ale triunghiurilor echilaterale construite pe $A_1A_2$ etc. Atunci coordonatele acestor puncte vor fi:

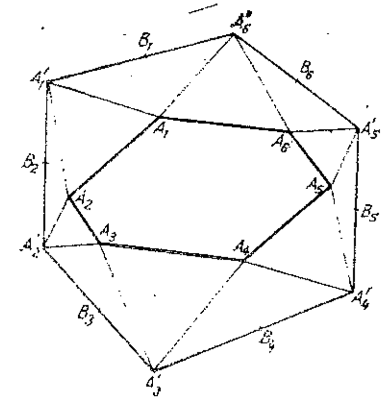


Fig. 75

$A'_1 : z_1\varepsilon + z_2(1 - \varepsilon)$, $A'_2 : z_2\varepsilon + z_3(1 - \varepsilon)$,

$A'_3 : z_3\varepsilon - z_1(1 - \varepsilon)$, $A'_4 : -z_1\varepsilon - z_2(1 - \varepsilon)$,

$A'_5 : -z_2\varepsilon - z_3(1 - \varepsilon)$, $A'_6 : -z_3\varepsilon + z_1(1 - \varepsilon)$

unde $\varepsilon$ reprezintă rotația cu $60°$, deci $\varepsilon = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 \Rightarrow 0 = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1$.
Fie $B_1$ mijlocul lui $A_6A'_1$ și $B_2$ al lui $A'_1A'_2 \Rightarrow$

$$B_1 : \frac{1}{2}(\varepsilon z_1 + (1 - \varepsilon)z_2 - \varepsilon z_3 + (1 - \varepsilon)z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - \varepsilon(z_2 + z_3)).$$

$$B_2 : \frac{1}{2}(\varepsilon z_1 + (1 - \varepsilon)z_2 + \varepsilon z_2 + (1 - \varepsilon)z_3) = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - \varepsilon(z_3 - z_1)).$$

și se observă că $\varepsilon(z_1 + z_2 - \varepsilon(z_2 + z_3)) = \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 - \varepsilon^2 z_2 - \varepsilon^2 z_3 = \varepsilon z_1 + z_2(\varepsilon - \varepsilon^2) - \varepsilon^2 z_3 = \varepsilon z_1 + z_2 + (1 - \varepsilon)z_3 = z_3 - z_2 - \varepsilon(z_3 - z_2)$ deci $OB_2$ se obține prin rotația lui $OB_1$ cu $60°$. Analog se arată pentru $OB_2$ și $OB_3$ etc.
Deci hexagonul este regulat.

**76.** Considerind $O$ centrul cercului circumscris poligonului drept originea axelor din planul complex, acestea fiind alese astfel încît $A_0$, $A_1$ să aibă coordonatele complexe 1 și respectiv $\varepsilon$, atunci $A_2, \dots, A_{n-1}$ vor avea coordonatele $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$.

Observăm că $\varepsilon^n = 1 \Rightarrow (\varepsilon^n)^k = (\varepsilon^k)^n = 1 \Rightarrow 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ sînt rădăcinile polinomului:

$$P(z) = z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) = (z - 1)(z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2) \dots (z - \varepsilon^{n-1}) \Rightarrow z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2) \dots (z - \varepsilon^{n-1}) \Rightarrow (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{n-1}) = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1 - \varepsilon| \cdot |1 - \varepsilon^2| \dots |1 - \varepsilon^{n-1}| = n.$$

Dar $|1 - \varepsilon| = A_0A_1$, $|1 - \varepsilon^2| = A_0A_2$, ..., $|1 - \varepsilon^{n-1}| = A_0A_{n-1}$.
Deci în final $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \dots A_0A_{n-1} = n$.

**77.** Fie $P_m$ cel mai mic dintre poligoane, avind $m$ vîrfuri. Dar centrul poligoanelor regulate va fi același pentru toate $O$. Luăm în $O$ centrul de coordonate complexe în plan și presupunem că punctul 1 este în unul din vîrfurile poligonului mic $P_m$. Facem pentru toate vîrfurile poligonului $P_n$ transformarea $z_k \to Z_k^m$, $k = 1, \dots, n$. Atunci toate poligoanele regulate, monocolore $P_k$, cu $m < k < n$ se transformă tot în poligoane regulate, deoarece, $m$ este fie prim cu $k$ fie îl divide şi deci îl transformă într-un poligon regulat cu $k/(m, k) \geqslant 2$ laturi cu centrul tot în $O$.

Să luăm un poligon arbitrar cu vîrfurile la fel colorate $P_k$. Suma vîrfurilor sale în coordonate complexe este evident $O$. Dacă $m < k$, atunci şi suma transformatelor acestor vîrfuri prin $z \to z^m$ va fi $O$. Dacă însă $m = k$ suma va fi chiar $m$. De asemenea pentru poligonul $P_n$ suma coordonatelor va fi $O$ şi este în acelaşi timp egală cu suma transformatelor vîrfurilor tuturor poligoanelor la fel colorate. Dacă acum presupunem că nu există două poligoane cu $m$ laturi, vom avea că aceeaşi sumă este o dată $O$ şi altfel calculată $m$, absurd.

**78.** Fie $n$ par. Calculăm numărul triunghiurilor obtuzunghice care au vîrful obtuz în $A_i$, adică numărul triunghiurilor $A_iA_jA_k$, $j < k$. Condiţia $\sphericalangle A_kA_iA_j > \frac{\pi}{2}$ este echivalentă cu condiţia $k - j > n/2$. Calculăm acum numărul perechilor $(j, k)$ de numere naturale pentru care $2 \leqslant j < k \leqslant n$ şi $k - j > n/2$. Dacă $j$ ia valorile $2, 3, \ldots, n/2 - 1$, atunci, corespunzător fiecărui $j$, $k$ poate lua valorile $n/2 - 2, n/2 - 3, \ldots, 1$ adică numărul total al perechilor este

$$\left(\frac{n}{2} - 2\right) + \left(\frac{n}{2} - 3\right) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{(n-2)(n-4)}{8}.$$

Acesta este numărul de triunghiuri obtuzunghice cu vîrful obtuz în $A_i$ iar toate triunghiurile obtuzunghice vor fi de $n$ ori mai multe:

$$\frac{n(n-2)(n-4)}{8}.$$

Fie $n$ impar.

În acest caz calculăm numărul de triunghiuri obtuzunghice $A_iA_jA_k$ cu unghiul obtuz în $A_i$. Obţinem $k - j > \frac{n-1}{2}$.

Numerele $j$, $k$ fiind astfel ca $2 \leqslant j < k \leqslant n$ şi $k - j > \frac{n-1}{2}$, obţinem ca mai sus: $\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{n-1}{2} - 2\right) + \ldots + 1 = \frac{1}{8}(n-1)(n-3)$

iar numărul triunghiurilor va fi $\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$.

**79.** Unim punctul $M$ cu vîrfurile poligonului şi exprimăm aria lui ca suma ariilor triunghiurilor astfel obţinute. Obţinem:

$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2S = \frac{na^2}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}.$$

Ţinînd seamă de faptul că $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$

$$x_1 + \ldots + x_n < \frac{n^2 a}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} > \frac{2\pi}{an^2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant \frac{2\pi}{a}$$

aplicăm inegalitatea lui Cauchy.



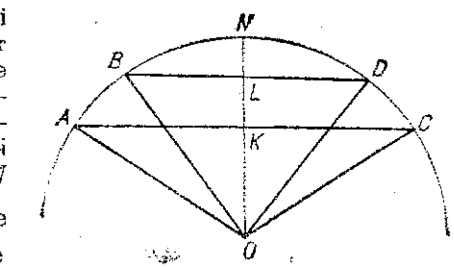


Fig. 80

**80.** Situăm poligoanele cu $n$ şi $n + 1$ laturi astfel încît apotemele lor $h_n = OK$ şi $h_{n+1} = OL$ să se afle pe aceeaşi rază $ON$. Fie $AC$ şi $BD$ laturile poligoanelor cu $n + 1$ laturi corespunzătoare acestor apoteme. Atunci $KL$ este proiecţia coardei $AB$ pe $ON$ care subîntinde arcul $\widehat{AB}$ de mărime $\frac{180°}{n(n+1)}$. Pe arcul $BN$ de mărime $\frac{180°}{n+1}$ pot fi plasate $n$ arce egale, diferite de arcul $AB$. Însă proiecţiile coardelor corespunzătoare lor pe $ON$ vor fi în mod vădit mai mici decît $KL$, care este proiecţia lui $AB$. De aceea suma acestor proiecţii $LN$ este mai mică decît $nLK$, adică $R - h_{n-1} < n(h_{n+1} - h_n)$ sau $(n + 1)h_{n+1} - nh_n > R$.

**81.** Presupunem întîi că $n = 2k$ cu $k \geqslant 2$.

Fie $A_1A_{k+1}$ diagonala mare a poligonului şi $O$ mijlocul lui $A_1A_{k+1}$ centrul de simetrie al poligonului. Fie $OB \perp A_1A_2$.

Dacă $PQ$ este un segment în plan, atunci locul punctelor $N$ cu proprietatea că $NP < NQ$ este semiplanul determinat de mediatoarea lui $PQ$ care-l conţine pe $P$. Punînd pe rînd în loc de $PQ$ pe $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_kA_{k+1}$ şi în loc de $N$ pe $A_1, A_2, \ldots, A_k$ se observă că $A_1$ (de fapt tot triunghiul $OBA_1$) este la intersecţia semiplanelor respective, deci:

$A_1A_1 < A_1A_2 < A_1A_3 < \ldots < A_1A_{k+1}$ deci $M = A_1$ satisface condiţiile. Fie acum $OB' \perp A_{k+1}A_{k+2} \Rightarrow O \in BB'$.

Dacă $M$ este în plan cu proprietatea $MA_1 < MA_2 \Rightarrow M$ este de aceeaşi parte a lui $BB'$ cu $A_1$ deci şi cu $A_{k+2} \Rightarrow MA_{k+2} < MA_{k-1}$. Deci dacă $n$ e par, $n = 2k$, atunci pentru $m \leqslant k + 1$, $\exists\, M$ cu proprietăţile cerute iar pentru $m \geqslant k + 2$ nu există.

Pentru $n = 2k + 1$, dacă $k = 1$ poligonul e un triunghi şi evident $\exists\, M$ pentru $m = 1, 2, 3$.

Dacă $k \geqslant 2$ şi $m = k + 2$ fie la fel ca mai sus $O$ centrul de simetrie al poligonului $\Rightarrow A_{k-2}O \perp A_1A_2$ şi $A_1O \perp A_{k+1}A_{k+2} \Rightarrow$ orice punct strict în interiorul lui $A_1OB$ poate fi luat drept $M$. Dacă $m = k + 3$ la fel ca în cazul $n$ par şi $m = k + 2$ rezultă că nu există puncte $M$ cu proprietăţile cerute. Deci existenţa lui $M$ este echivalentă cu $m \leqslant k + 2$.

**82.** Clar, $n = 3$ satisface. Să arătăm şi pentru $n = 5$.

Fie $\pi$ planul determinat de $A_1A_2$ şi $A_3$. Presupunem că $A_4$ se află deasupra lui $\pi$. Dacă $A_5$ este de cealaltă parte a lui $\pi$ considerăm planul dat de punctele $A_5A_1A_4$ care lasă pe $A_2$ şi $A_3$ de aceeaşi parte. Putem deci presupune acelaşi lucru despre $\pi$.

O dată fixaţi $A_1A_2A_3$ locul geometric descris de $A_5$ astfel încît $1 = A_3A_1 = A_1A_2$ şi $\widehat{A_5A_1A_2} = \widehat{A_1A_2A_3} = \alpha$ este un cerc $C$ cu diametrul în $\pi$ şi $C \perp \pi$. Dar $A_3A_5 = 2l \sin\frac{\alpha}{2}$ deci $A_5$ trebuie să fie şi pe sfera de centru $A_3$ şi rază $2l \sin\frac{\alpha}{2}$. Deoarece $A_5$ e deasupra lui $\pi$ rezultă că poziţia sa e unic

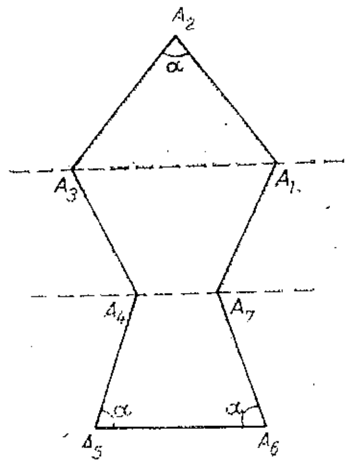

Fig. 82.1

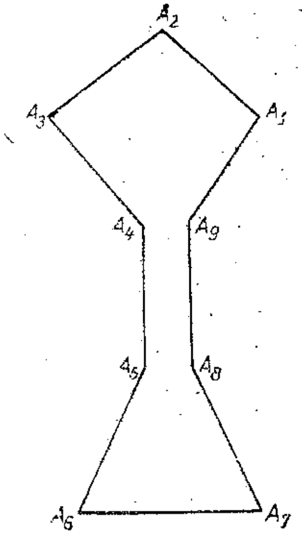

Fig. 82.2

determinată. Analog obţinem şi pentru $A_4$ o poziţie care din motive de simetrie va fi în acelaşi plan cu $A_1$, $A_3$, $A_5$.

Calculînd pe $A_1A_3$ în patrulaterul $A_1A_3A_4A_5$ şi în $\Delta A_1A_2A_3 \Rightarrow 1 - 2\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha$ e determinat unic din această relaţie care este deci aceeaşi şi pentru pentagonul regulat plan

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} \Rightarrow \widehat{A_1A_3A_4} = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{6\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$$

şi

$$\widehat{A_1A_3A_2} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \widehat{A_1A_3A_4} + \widehat{A_1A_3A_2} = \widehat{A_2A_3A_4} \Rightarrow$$

punctele sînt coplanare.

Pentru $n = 4$ avem tetraedrul regulat ale cărui vîrfuri satisfac condiţiile problemei şi nu sînt coplanare. Pe acelaşi model putem construi contraexemple, pentru orice $n$ par sau mai general pentru $n$ neprim. Astfel pentru $n = 6$ luăm un triunghi echilateral, fixăm liniile mijlocii şi îndoim figura după ele pînă cînd $\widehat{A_1A_2A_3} = 60°$. Evident acest lucru se poate:

Pentru $n = 2k$ se procedează la fel. Se ia un poligon regulat cu $k$ laturi, se unesc mijloacele laturilor consecutive şi se îndoaie figura după ele pînă cînd toate unghiurile sînt egale.

Pentru $n = 6$ se poate proceda astfel: se ia un dreptunghi de laturi 1 şi 2, se împarte în două pătrate şi se îndoaie figura pînă cînd toate unghiurile sînt de 90°. Este astfel sugerată o altă construcţie pentru $n$ neprim pe care nu o mai detaliem.



Pentru $n$ impar dăm o altă construcţie. Fie $n = 7$. Considerăm în plan $90° \geqslant \widehat{A_1A_2A_3} = \alpha > 60°$, fixat iar $A_4A_5A_6A_7$ în acelaşi plan simetrice faţă de bisectoare a unghiului $A_1A_2A_3$ astfel încît $\widehat{A_4A_5A_6} = \widehat{A_1A_2A_3}$, acest lucru se poate deoarece cu $A_1A_2A_3$ fixe putem strîmba figura în $A_4$ şi $A_7$ astfel încît $\widehat{A_4A_5A_6}$ să varieze de la 60° la 90°. Acum îndoim figura după segmentele $A_3A_1$ şi $A_4A_7$ pînă facem ca unghiurile să fie egale. Analog şi pentru $n$ impar şi $n > 7$ se intercalează în $A_4$ şi $A_7$ în număr egal şi paralele între ele celelalte $n - 7$ laturi.

**83.** Construim poligonul $P_1, \ldots, P_n$ în felul următor. Prelungim latura $A_nA_1$ iar prin $P$ ducem o paralelă la $A_1A_2$; punctul lor de intersecţie va fi $P_1$; prelungim pe $A_1A_2$ iar prin $P$ ducem o paralelă la $A_2A_3$; punctul lor de intersecţie va fi $P_2$, şi aşa mai departe.

Vom arăta $P_iP_{i+1} = PA_i$ (unde $P_{n+1} = P_1$). Considerăm patrulaterul $PP_iP_{i+1}A_i$. Din construcţie $PP_i \parallel P_{i+1}A_i$. Deci patrulaterul este trapez. Din egalitatea unghiurilor poligonului regulat deducem că acest trapez este isoscel. $P_iP_{i+1}$ şi $PA_i$ apar în acest trapez fie ca laturile opuse neparalele, deci egale, fie ca diagonale, deci din nou egale.

*Observaţie.* Problema 86 rezolvă cazul general al existenţei unui poligon cînd se dau laturile sale. Însă această demonstraţie ne dă o metodă efectivă de construcţie a poligonului.

**84.** Să presupunem că o diagonală din cele $n$ nu trece prin centrul cercului circumscris. Atunci cel puţin pe o parte a acestei diagonale se găsesc mai puţin de $n - 2$ vîrfuri ale poligonului. Din principiul cutiei deducem că din cele $n - 1$ diagonale rămase cel puţin 2 pornesc din acelaşi vîrf, ceea ce nu se poate deoarece ele se intersectează şi în $O$. Am ajuns astfel la o contradicţie ceea ce înseamnă că toate diagonalele trec prin centrul cercului circumscris.

**85.** Să arătăm întîi că numărul $n$ se atinge. Într-adevăr, $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_n$ şi $A_nA_2$ satisfac condiţiile problemei. Vom arăta prin inducţie că $n$ este numărul maxim. Pentru $n = 3$ problema este evidentă. Să presupunem problema demonstrată pentru $n$. Fie deci $A_1 \ldots A_{n+1}$ un poligon convex cu $n + 1$ laturi şi o mulţime $M$ de diagonale şi laturi cu proprietăţile din enunţ. Există două cazuri.

I. Din fiecare vîrf al poligonului pornesc cel mult două laturi sau diagonale din mulţimea $M$ (spre exemplu pentagonul stelat înscris în pentagonul convex). Dar atunci numărul lor este cel mult $n + 1$.

II. Există un vîrf din care pornesc cel puţin trei laturi sau diagonale din mulţimea $M$. Să presupunem că acest vîrf este $A_1$ iar $A_1A_k$, $A_1A_l$, $A_1A_m$ cele trei segmente ($k < l < m$). Atunci prin $A_l$ nu trece decît $A_1A_l$. Într-adevăr, $A_iA_l$ nu intersectează pe $A_1A_m$ dacă $1 < i < l$, iar dacă $l < i < n + 1$ atunci $A_iA_l$ nu intersectează pe $A_1A_k$. Considerăm poligonul convex $A_1 \ldots A_{l-1}\ A_{l+1} \ldots A_{n+1}$ care are $n$ laturi iar $M - \{A_1A_l\}$ este formată numai din laturi sau diagonale ale acestui poligon. Conform pasului de inducţie mulţimea $M - \{A_1A_l\}$ are mai puţin de $n$ elemente, deci mulţimea $M$ are mai puţin de $n + 1$ elemente.

86. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sînt laturile unui poligon, clar inegalitățile sînt satisfăcute.

Vom demonstra afirmația inversă prin inducție după $n$.

Cazul $n = 3$ se cunoaște.

Presupunem rezolvată problema pentru $n - 1$.

Fie acum $a_1, \ldots, a_n$ satisfăcînd inegalitățile pentru $n > 3$. Atunci există $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît:

$$a_i + a_{i+1} \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_i + a_{i+1})$$

$$\text{cu } a_1 = a_{i+1}$$

Dacă nu am avea:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+1}) > n(a_1 + \ldots + a_n) - \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+1})$$

$$\Rightarrow 4(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > n(a_1 + \ldots + a_n) \Rightarrow 4 > n,$$

absurd.

Să presupunem $a_1 + a_2 \leqslant a_3 + \ldots a_n$.

Dar:

$$a_3 < (a_1 + a_2) + a_4 + \ldots + a_n = S_3$$

$$a_4 < (a_1 + a_2) + a_3 + \ldots + a_n = S_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n < (a_1 + a_2) + a_3 + \ldots + a_{n-1} = S_n$$

Fie $\varepsilon_i = S_i - a_i$ pentru $i = 3, \ldots n$, $\varepsilon_1 = a_1$, $\varepsilon_2 = a_2$ și $\varepsilon$ cel mai mic $\varepsilon_i$.

Atunci avem:

$$a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2} < a_3 + \ldots + a_n$$

$$a_3 < \left(a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + a_4 + \ldots + a_n$$

$$a_n < \left(a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + a_3 + \ldots + a_{n-1}$$

Deci

$$a_1' = a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2}, a_3 \ldots a_n$$

satisfac ipoteza de inducție, deci se poate construi un poligon cu $n - 1$ laturi $A_1A_3A_4 \ldots A_n$, unde $A_1A_3 = a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2}$,

$$A_iA_{i+1} = a_i \text{ cu } i = 3, \ldots, n (A_{n+1} = A_1).$$

Dar $a_1, a_2, a_1 + a_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ satisfac cazul $n = 3$. Deci există $A_2$ astfel încît $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$.

87. Notăm laturile consecutive ale patrulaterului $ABCD$, cu $a, b, c, d$. Avem: $a^2 + d^2 - 2ad \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cos C$.



Pentru ca $\hat{B} + \hat{C} = 180°$ este necesar ca ecuația:

$$a^2 + d^2 - 2adx = c^2 + b^2 + 2bcx$$

să aibă o soluție în intervalul $(-1, 1)$.

Dar:

$$x = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2ad + 2bc} \text{ și}$$

$$x < 1 \Leftrightarrow a^2 + d^2 - b^2 - c^2 - 2ad - 2bc = (a - d)^2 - (b + c)^2 =$$

$$= (a - d - b - c)(a - d + b + c) < 0,$$

și această relație e adevărată din faptul că $ABCD$ patrulater. La fel și $a^2 + d^2 - c^2 - b^2 + 2ad + 2bc = (a + d - c + b)(a + d + c - b) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > -1$.

Deci $-1 < x < 1$. Această condiție e și suficientă deoarece luînd unghiul $A = \arccos \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$ construim triunghiul $ABD$ cu $AB = a, AD = d \Rightarrow$

$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - A) \Rightarrow (b + c)^2 > BD^2 > (b - c)^2 \Rightarrow BD > BC - CD = b - c$ și $BD > CD - BC = c - b$, $b + c = BC + CD > BD$, deci putem construi și triunghiul de laturi $BD$, $BC = c$, $CD = d$ care are unghiul $\hat{C} = \pi - \hat{A}$.

Observăm că n-am folosit din ipoteză faptul că patrulaterul e convex. De fapt se poate observa cu ușurință că orice poligon se poate deforma la un altul convex cu laturile egale cu ale sale. E suficient să ne imaginăm laturile poligonului ca bare rigide articulate mobil între ele. Cu un asemenea suport intuitiv putem da o justificare simplă și problemei de mai sus. Deformăm pe $ABCD$ pînă cînd să formeze un triunghi, de exemplu, $A$, $B$, $C$ să fie coliniare $\Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \pi + \hat{D} > \pi$. Apoi deformăm figura pînă cînd $ABD$ sau $BCD$ sînt coliniare. Deci în această situație $\hat{A} + \hat{C} > \pi \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} < \pi$ și cum deformarea este continuă trebuie ca la un moment dat în trecerea de la o poziție la alta să avem $\hat{B} + \hat{D} = \pi$.

Și pentru poligoane arbitrare $A_1A_2 \ldots A_n$ afirmația e adevărată. Pentru a justifica acest rezultat să considerăm un cerc de centru $O$. Ducem pe el coardele $A_1'A_2' = A_1A_2$, $A_2'A_3' = A_2A_3$, ..., $A_{n-1}'A_n' = A_n'A_{n+1}' = A_nA_1$.

Cercul e ales suficient de mare astfel încît:

$$\overset{\frown}{A_1'A_2'} + \overset{\frown}{A_2'A_3'} + \ldots + \overset{\frown}{A_{n-1}'A_n'} + \overset{\frown}{A_n'A_{n+1}'} \leqslant 2\pi$$

Micșorăm acum cercul păstrînd coardele egale ($A_1', \ldots, A_{n+1}'$ alunecă pe cerc), pînă cînd $A_1'$ se suprapune peste $A_{n+1}'$ sau pînă cînd una din coardele $A_i'A_{i+1}'$ devine diametru. În acest din urmă caz mărim cercul păstrînd $A_i' \ldots A_{i+1}'$ pe același semicerc pînă cînd, de asemenea $A_{n+1}' = A_i'$.

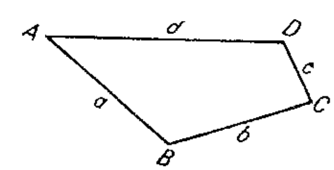

Fig. 87

**88.** Fie $L$ linia poligonală și $A_1A_2 \dots A_n$ poligonul convex. Din $A_i$ ducem semidreptele $d_i'$ și $d_i''$ cu $d_i' \perp A_{i-1}A_i$ și $d_i'' \perp A_iA_{i+1}$ $i = 1, 2, \dots, n$ $(A_1 = A_{n+1})$, în exteriorul poligonului. Poligonul fiind convex, unghiurile sale sînt $< 180°$, deci semidreptele nu se intersectează.

Dar porțiunea din linia $L$ cuprinsă între două drepte $d_i''$ și $d_{i+1}'$ este mai mare decît $A_iA_{i+1}$ deci perimetrul lui $A_1A_2 \dots A_n$ este mai mic decît lungimea lui $L$.

Se observă că proprietatea rămîne adevărată înlocuind $L$ cu un drum oarecare închis care să înconjoare poligonul convex.

**89.** La fel ca și în problema precedentă se ridică în vîrfuri semidrepte perpendiculare pe fețe.

Apoi se ține cont că proiecția unui poligon $P$ dintr-un plan $\pi$ pe un plan $\pi'$ este $S_P \cos \measuredangle(\pi, \pi')$. Acest lucru rezultă imediat descompunînd poligonul în triunghiuri.

**90.** Fie $A_1, \dots, A_n$ vîrfurile poligonului convex. Să presupunem că are patru unghiuri ascuțite. Vîrfurile acestor unghiuri formează un patrulater convex $A_lA_kA_mA_n$.

Deoarece poligonul este convex, segmentele $A_lA_k$, $A_kA_m$, $A_mA_n$, $A_nA_l$ se află în interiorul poligonului. Obținem că și unghiurile patrulaterului sînt ascuțite, ceea ce este absurd, deoarece suma lor trebuie să fie 360°.

**91.** *Soluția I.* Considerăm distanțele punctului $P$ la laturile poligonului. Fie $A_iA_{i+1}$ latura poligonului pentru care această distanță este minimă. Să presupunem că proiecția punctului $P$ pe $A_iA_{i+1}$ nu se află în interiorul segmentului $A_iA_{i+1}$. Atunci distanța de la $P$ la $A_{i+1}A_{i+2}$ este evident mai mică (vezi fig. 91.1), decît distanța de la $P$ la $A_iA_{i+1}$, deoarece $PM < PR \leqslant PN$. Am ajuns la o contradicție, de unde deducem că punctul $P$ se proiectează în interiorul segmentului $A_iA_{i+1}$.

*Soluția II.* Vom rezolva problema tot prin reducerea la absurd. Unim punctul $P$ cu toate vîrfurile poligonului. Am împărțit astfel poligonul în $n$ triunghiuri: $\Delta A_1PA_2$, $\Delta A_2PA_3$, ..., $\Delta A_n PA_1$. Dacă proiecția lui $P$ nu se află pe segmentul $A_1A_2$ înseamnă că unul din unghiurile $\widehat{PA_1A_2}$, $\widehat{PA_2A_1}$ este mai mare decît 90°. Să presupunem că $\widehat{PA_2A_1} \geqslant 90°$. Deoarece poligonul este convex avem $\widehat{PA_2A_3} < 90°$, iar presupunerea că proiecția lui $P$ nu se află nici pe $A_2A_3$ implică că $\widehat{PA_3A_2} \geqslant 90°$. Obținem astfel pentru orice $i$, $\widehat{PA_iA_{i-1}} \geqslant 90°$ și $\widehat{PA_{i-1}A_i} < 90°$, de unde deducem $PA_{i-1} > PA_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ (unghiului mai mare $i$ se opune latura mai mare). Dacă scriem această relație desfășurat obținem:

$$PA_1 > PA_2 > PA_3 > \dots PA_n > PA_1$$

adică $PA_1 > PA_1$ ceea ce este absurd.

Să mai observăm că pentru $n = 4$ (adică pentru patrulatere) proprietatea are loc și fără condiția de convexitate deoarece un patrulater nu poate avea decît un singur unghi mai mare decît 180° (suma unghiurilor fiind 360°) și atunci el se împarte în două triunghiuri (vezi fig. 91.2), $\Delta A_1A_2A_4$ și $\Delta A_2A_3A_4$ unde unghiurile $\hat{A}_1$, $\hat{A}_4$, $\hat{A}_3$ sînt ascuțite. Atunci punctul $P$ se proiectează fie în interiorul lui $A_1A_4$ fie în interiorul lui $A_3A_4$. Pentru $n \geqslant 5$ această proprietate nu mai are loc.

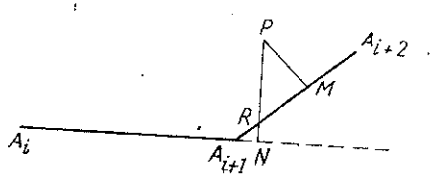

Fig. 91.1

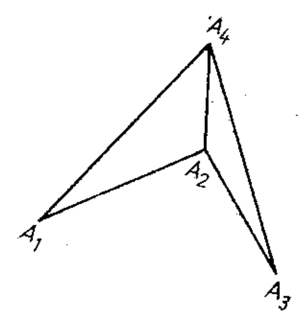

Fig. 91.2

**92.** Considerăm acea față $S$ a poliedrului $P$ pentru care distanța lui $O$ la $S$ este mai mică decît distanța de la $O$ la orice altă față a lui $P$, și continuăm raționamentul ca în problema precedentă soluția I-a.

**93.** Pentru problema plană considerăm cea mai mare dintre laturile poligonului, $A_iA_{i+1}$. Ridicăm în $A_i$ și $A_{i+1}$ dreptele $d$ și $d' \perp A_iA_{i+1}$. Dacă toate celelalte vîrfuri ale poligonului sînt în dreapta lui $d' \Rightarrow A_iA_{i-1} > A_iA_{i+1}$, imposibil. La fel nu se poate ca toate vîrfurile să fie la stînga lui $d$ sau de o parte și de alta a lui $d$ și $d'$ și nici unul între $d$ și $d'$.

Rezultă deci că există cu siguranță un vîrf $A_j$, $j \neq i$, $i+1$ între cele două drepte $d$ și $d'$. Acest vîrf se proiectează pe latura $A_iA_{i+1}$. Dacă problema cerea să existe un vîrf care să se proiecteze în interiorul unei laturi răspunsul ar fi fost negativ. Demonstrația de sus ne sugerează următorul contraexemplu: hexagonul regulat.

Pentru poliedre problema se pune în felul următor: vîrful să se proiecteze pe o față a poliedrului. Răspunsul e negativ chiar pentru tetraedre. Dacă $A$, $B$, $C$, $D$, sînt vîrfurile tetraedrului e suficient ca unghiurile diedre corespunzătoare muchiilor $AC$ și $BD$ să fie obtuze.

**94.** Ducem prin toate vîrfurile poligonului paralele la o latură fixată a pătratului. Aceste paralele împart poligonul în triunghiuri și trapeze. Dacă intersecțiile acestor drepte cu poligonul ar fi toate mai mici decît 1/2, aria poligonului ar fi $< 1/2$, deoarece suma înălțimilor nu poate depăși lungimea laturii pătratului, care este egală cu 1.

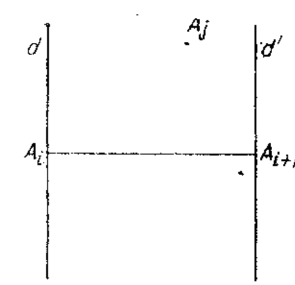

Fig. 93

**95.** Se observă imediat că locul geometric al punctelor din plan care se găsesc la distanță mai mică decît 1 de linia frîntă $L$, este banda rotunjită $B$, de lățime 2 ca în fig. 95.1. Condițiile problemei sînt echivalente cu faptul că această bandă acoperă în întregime pătratul $\Rightarrow$ $\Rightarrow S_B \geqslant S_{\text{pătrat}}$.

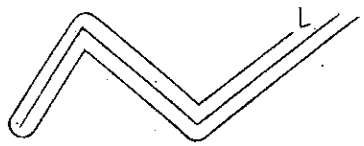


Fig. 95.1

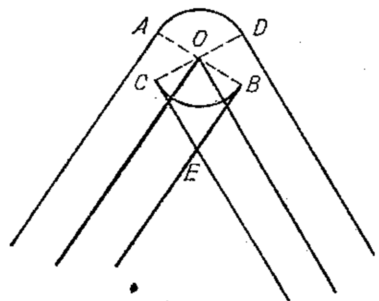


Fig. 95.2

Să arătăm că $S_B < 2l + 4$ unde $l$ este lungimea lui $L$. Într-adevăr, $2l$ este suma ariilor dreptunghiurilor construite pe laturile liniei $L$ (vezi fig. 95.2).

Pentru a obține aria $S_B$ trebuie ca din această sumă să scădem ariile patrulaterelor de forma $OCEB$, să adăugăm ariile sectoarelor de cerc $OAD$ și cele două semicercuri care apar la capetele liniei $L$. Dar deoarece $OC = OB = OD = OA = 1$ și $OC \perp CE$, $OB \perp BE$ și $\sphericalangle COB = \sphericalangle AOD$ rezultă că sectorul de cerc $OCB$ este egal cu $AOD$ și inclus în patrulaterul $OCBE$ și deci $S_B \leqslant 2l + \pi < 2l + 4 \Rightarrow 50 \cdot 50 < 2l + 4 \Rightarrow 1248 < l$.

**96.** Pentru un poligon convex arbitrar să găsim locul punctelor din același plan cu el la distanță $\leqslant 1$.

Se observă fără dificultate că el este poligonul „rotunjit" la capete ca în figură.

Construim pentru fiecare din poligoanele din problemă locul geometric corespunzător. Aria fiecăruia va fi $\leqslant \pi + \pi + 2\pi$, unde este $\pi$ aria poligonului inițial, al doilea $\pi$ este aria sectoarelor de cerc care se adaugă la „colțuri" iar $2\pi$ este aria dintre benzile paralele. Dacă luăm acum în pătratul mare altul mai mic cu **laturile** de 36 cm $\Rightarrow S' = S_{A'B'C'D'} = 36^2$ iar suma ariilor poligoanelor va fi: $S \leqslant 4 \cdot \pi \cdot 100 < 4 \cdot 320$ și avem $S' = 36^2 > 36^2 - 4^2 = (36 - 4)(36 + 4) > S$. Deci $S' > S \Rightarrow \exists$ în $A'B'C'D'$ un punct neacoperit de poligoane. Acesta e punctul dorit.

**97.** Fie $l_i$ un segment al liniei frînte și $pr_j l_i$, $j = 1, 2, 3$ proiecțiile sale pe cele trei direcții date de laturile cubului, care pleacă din același vîrf. Avem:

$$l_i < pr_1 l_i + pr_2 l_i + pr_3 l_i$$

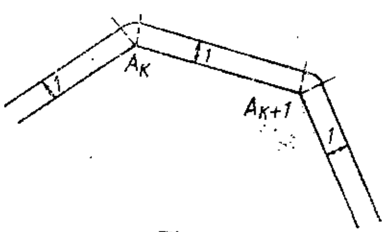


Fig. 96.1

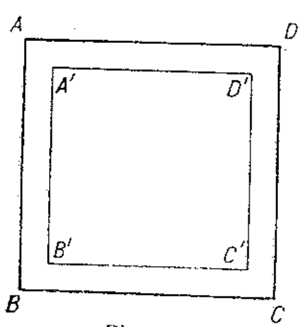


Fig. 96.2



cu inegalitate strictă deoarece în caz de egalitate segmentul ar fi paralel cu una din laturile cubului și planul paralel la una din fețe și care-l conține satisface condițiile $\Rightarrow$

$$300 = \sum_i l_i < \sum_i pr_1 l_i + \sum_i pr_2 l_i + \sum_i pr_3 l_i$$

Deci $\exists_j$ astfel încît $\sum_i pr_j l_i > 100$.

Considerăm un plan variabil perpendicular pe această latură a cubului. Dacă oricare asemenea plan taie linia în cel mult 100 de puncte ar însemna că pe latura cubului considerată se suprapun în fiecare punct proiecțiile a cel mult 100 de puncte de pe linie și deci:

$$\Sigma pr_j l_i \leqslant 100, \text{ absurd.}$$

**98.** Fie $A$ și $B$ capetele lui $L$. Fie $d_1 \parallel d_1' \parallel AB$ și $d_2 \parallel d_2' \perp AB$ astfel încît $L$ să fie între $d_1$ și $d_1'$, între $d_2$ și $d_2'$ și toate aceste drepte să conțină puncte de pe linia frîntă $L$.

Fie $a_1$, $a_2$ distanța dintre $d_1$ și $d_1'$, respectiv $d_2$ și $d_2'$.

Fiind dat un segment $l_i$ al liniei frînte, notăm cu $pr_1 l_i$ proiecția pe $d_1$ și cu $pr_2 l_i$ pe $d_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow pr_1 l_i + pr_2 l_i < \sqrt{2} l_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i pr_1 l_i + \sum_i pr_2 l_i \leqslant \sqrt{2} \sum_i l_i = \sqrt{2} \cdot 2l$$

$$\Rightarrow 2pr_1 l + 2pr_2 l \leqslant 2\sqrt{2} l.$$

Dar

$$2pr_1 l \geqslant a_2 \quad \text{și} \quad 2pr_2 l \geqslant 2a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 + a_2 \leqslant \sqrt{2} \cdot 2l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \leqslant a_1(2\sqrt{2}l - 2a_1) \leqslant l^2$$

deci dreptunghiul căutat e tocmai cel determinat de dreptele $d_1$, $d_1'$, $d_2$, $d_2'$.

**99.** Vom arăta mai întîi că putem înscrie poligonul într-un paralelogram de arie cel mult 2.

Fie $A_k$ un vîrf al poligonului, fixat. Ducem prin $A_k$ o dreaptă $d$ care să nu taie poligonul.

Ducem acum o dreaptă $d' \parallel d$ care să lase poligonul **între** $d$ și $d'$ astfel încît $d' \cap P \neq \varnothing$.

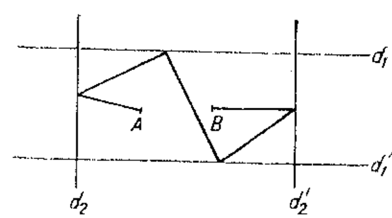


Fig. 98

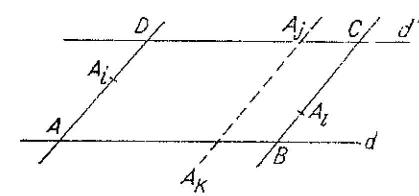


Fig. 99

Fie $A_j \in d' \cap P$. Ducem acum $d_1 \parallel d_1' \parallel A_kA_j$ astfel încît $P$ să se găsească între $d_1$ şi $d_1'$ şi $d_1 \cap P \ni A_i$, $d_1' \cap P \ni A_l$. Fie $ABCD$ paralelogramul determinat de $d, d', d_1, d_1' \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{A_iA_jA_kA_l} \leqslant 2S_p = 2$.

Considerăm acum cea mai mare dintre distanţele între două vîrfuri ale poligonului. Fie aceasta $A_j'A_k'$. Ducem $l \perp A_j'A_k'$, $A_k' \in l$ şi $l' \perp A_j'A_k'$ cu $A_j' \in l' \Rightarrow$

$P$ se află între $l$ şi $l'$.

Acum luăm în demonstraţia de mai sus:

$A_j' = A_j$ şi $A_k' = A_k$, $l = d$ şi $l' = d'$,

rezultă enunţul.

**100.** a) Considerăm pentru fiecare latură $A_iA_{i+1}$ a poligonului $A_1 \dots A_n$ o dreaptă $d_i \parallel A_iA_{i+1}$ astfel încît $P$ să fie între $d_i$ şi $A_iA_{i+1}$ cu $P \cap d_i \neq \varnothing$. Se ia cea mai mică distanţă între distanţele dintre $d_i$ şi $A_iA_{i+1}$. Fie aceasta $a$. Luăm acum $d' \parallel d''$ astfel încît $P$ să fie între ele şi notăm distanţa dintre ele cu $b$.

Fie $d' \cap P = A_j$, $d'' \cap P = A_k$.

Fie $A_k' \in d''$ cu $A_jA_k' \perp d'$.

Considerăm latura $A_jA_{j+1}$ de cealaltă parte a lui $A_jA_k$ faţă de $A_k$ şi $A_kA_{k+1}$ de aceeaşi parte cu $A_k'$. Presupunem $\sphericalangle(d', A_jA_{j+1}) \leqslant \sphericalangle(d'', A_kA_{k+1})$ şi considerăm dreptele $A_jA_{j+1}$ şi $d_j$. Distanţa dintre acestea este mai mică decît $b$.

Deci $a \leqslant b$.

b) Vom observa întîi că dacă minimul se realizează pentru $A_jA_{j+1}$ şi $d_j$ atunci $\exists\, A \in d_j \cap P$ şi $B \in A_jA_{j+1}$ între $A_j$ şi $A_{j+1}$ astfel încît $AB \perp d_j$. Dacă nu s-ar întîmpla acest lucru, printr-un raţionament de tipul a) s-ar obţine o contradicţie.

Fie acum $d_j'$ şi $d_j'' \perp d_j$ astfel încît $P$ să fie între $d_j'$ şi $d_j''$, $d_j' \cap P \neq \varnothing$, $d_j'' \cap P \neq \varnothing$. Fie $d_j' \cap d_j = C$, $d_j' \cap A_jA_{j+1} = D$, $d_j'' \cap d_j = E$, $d_j'' \cap A_jA_{j+1} = F$ şi

$$BC \cap AD = M$$

$$BE \cap AF = N \Rightarrow$$

$M$ şi $N$ sînt în interiorul lui $P$. În plus $CE^2 \geqslant CD \cdot CE \geqslant S \Rightarrow CE \geqslant \sqrt{S} \Rightarrow MN \geqslant \frac{\sqrt{S}}{2}$ şi $MN \perp AB$. Luăm acum patrulaterul obţinut prin unirea mijloacelor lui $AM$, $MB$, $BN$, $AN$ şi se observă că el satisface condiţia cerută.

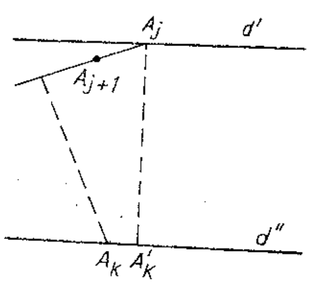


Fig. 100.1

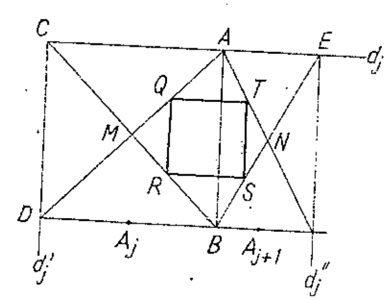


Fig. 100.2



**101.** Fie $P$ pentagonul obţinut din pentagonul $P_1$ prin omotetia $H$ de centru $A_1$ şi raport 2. Acest pentagon este convex şi de arie $S = 2^2S_1 = 4S_1$ (unde prin $S_i$ am notat aria pentagonului $P_i$).

Notăm cu $A_{ij}$ transformatul lui $A_j$ prin translaţia $A_1 \to A_i$. Să observăm că punctele $A_{ii}$ coincid cu punctele obţinute aplicînd punctelor $A_i$ omotetia $H$, deci $A_iA_j \parallel A_{ii}A_{jj}$. Din definiţia translaţiei avem:

$$A_jA_{ij} \parallel A_iA_{ii} \text{ şi } A_iA_{ii} = A_jA_{ij} = A_1A_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ii}A_{ij} \parallel A_iA_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ij} \in A_{ii}A_{jj}$$

$P$ fiind convex, odată cu $A_{ii}$ şi $A_{jj}$ conţine şi segmentul $A_{ii}A_{jj}$ deci şi pe $A_{ij}$. Punctele $A_i$ sînt şi ele conţinute în $P$ pentru că se află pe segmentele $A_1A_{ii}$. Astfel toate punctele se găsesc în interiorul sau pe frontiera lui $P$. Să presupunem acum că condiţia din enunţ ar fi greşită. Aceasta ar atrage că:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \leqslant S = 4S_1$$

dar

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 5S_1$$

ceea ce este evident o contradicţie.

**102.** Soluţia e analogă cu a problemei preced. considerînd volumul poliedrului. Contradicţia la care se ajunge este:

$$9V_1 = V_1 + \dots + V_9 \leqslant V = 2^3V_1.$$

**103.** *Soluţia 1.* Se arată întîi că intersecţia a două axe de simetrie se găseşte în interiorul poligonului. Fie $m$ şi $n$ două axe de simetrie care nu se intersectează în interiorul poligonului. Atunci (vezi fig. 103):

$$S_M = S_a + S_N \text{ şi } S_N = S_M + S_a \Rightarrow S_M < S_N < S_M$$

şi se ajunge la o contradicţie.

Să presupunem că există trei axe de simetrie care nu sînt concurente. Atunci ele formează un triunghi $ABC$ cu vîrfurile în interiorul poligonului. Fie $K$ un punct arbitrar din interiorul acestui triunghi, şi $N$ vîrful poligonului situat la distanţă maximă de $K$. $N$ este situat în exteriorul triunghiului $ABC$ şi există o axă de simetrie astfel încît punctele $N$ şi $K$ să fie situate

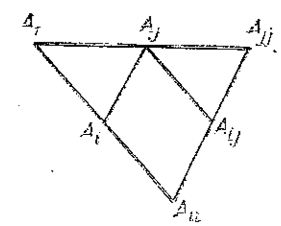


Fig. 101

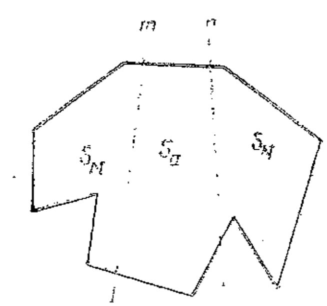


Fig. 103

de aceeaşi parte a ei. Fie această axă $AB$. Ducem $N_1$ şi $K_1$ simetricele lui $N$ respectiv $K$ faţă de $AB$. Perpendiculara din $N$ pe $KK_1$ este paralelă cu $AB$, deci $H$, piciorul înălţimii din $N$ pe $KK_1$ se află pe aceeaşi parte a lui $AB$ cu $N$ şi $K$; aşadar $NK < NK_1 = N_1K$. Dar $N_1$ este tot un vîrf al poligonului; contradicţie.

*Soluţia 2.* Clar axele de simetrie sînt în număr finit şi oricare două axe de simetrie se intersectează, altfel figura ar fi nemărginită. Fie $d_1$ şi $d_2$ axe de simetrie, astfel încît $\sphericalangle(d_1, d_2)$ să fie minim $\Rightarrow$ simetricul lui $d_1$ faţă de $d_2$ este axă de simetrie, fie aceasta $d_3$. Analog fie $d_4$ simetricul lui $d_2$ faţă de $d_3$, etc. $\Rightarrow \sphericalangle(d_1, d_2) = \frac{\pi}{n} = \sphericalangle(d_2, d_3) = \ldots = \sphericalangle(d_n, d_1)$ şi fie $O = \bigcap_i d_i$. Dacă $\exists\, d' \not\ni O$, axă de simetrie, ducem prin $O$, $d'' \parallel d' \Rightarrow d''$ cade între un $d_i$ şi $d_{i+1} \Rightarrow \sphericalangle(d_i, d'') < \frac{\pi}{n}$ absurd.

Se observă că prima soluţie este mai generală ea fiind valabilă pentru figuri plane mărginite.

În soluţia a doua intervine esenţial în demonstraţie faptul că numărul axelor de simetrie ale unui poligon este finit (fiecare axă de simetrie este sau bisectoarea unui unghi, sau mediatoarea unei laturi a poligonului).

În schimb această soluţie ne dă informaţii precise în legătură cu poziţia axelor de simetrie.

**104.** În problema prec. am văzut că axele de simetrie trebuie să fie concurente şi fie $O$ intersecţia lor.

Din soluţia a doua a aceleiaşi probleme se observă că axele de simetrie se succed din $\frac{\pi}{n}$ în $\frac{\pi}{n}$.

Fie $d_1, d_2, \ldots d_{2n}$ cele $2n$ semidrepte cu capătul în $O$ determinate de axele de simetrie, numerotate astfel ca pentru $1 \leqslant k \leqslant 2n - 1, \sphericalangle(d_k, d_{k+1}) = \frac{\pi}{n}$ şi $\sphericalangle(d_{2n}, d_1) = \frac{\pi}{n}$.

Fie acum $A_1$ un punct de pe frontiera poligonului şi care se găseşte pe bisectoarea lui $\sphericalangle(d_1, d_2)$. Se construieşte acum inductiv $A_{k+1}$ simetricul lui $A_k$ faţă de $d_{k+1}$ $\forall$ $k = 1, \ldots, 2n - 1$. Evident $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ este regulat şi toate vîrfurile sale se află pe frontiera poligonului.

Acum, pentru orice $d \mid 2n$ se unesc vîrfurile poligonului $A_1 \ldots A_{2n}$ din $2n/d$ în $2n/d$ şi se obţin şi celelalte poligoane regulate.

**105.** Notăm cu $P$ frontiera poligonului şi cu $d'$ axa de simetrie. În continuare, pentru rezolvarea problemei ne vom folosi de un argument de analiză matematică şi anume de faptul că funcţiile continue au proprietatea lui Darboux.

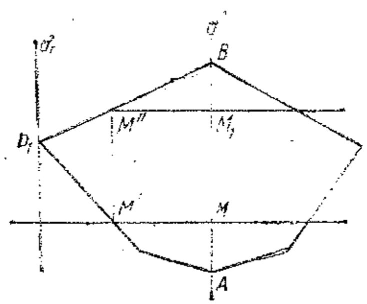

Fig. 105

Fie deci $\{A, B\} = d' \cap P$ şi $d_1 \parallel d_2 \parallel d'$ astfel încît $d_1$ şi $d_2$ să-l lase pe $P$ între ele. Presupunem acum că $A$ şi $B$ sînt vîrfuri ale poligonului şi că $d_1 \cap P = D_1$. Pentru fiecare $0 \leqslant x \leqslant AB = 1$ fie $M$ pe $d'$ între $A$ şi $B$ cu distanţa între $M$ şi $A$, $d(M, A) = x$ şi $M' \in P$ astfel încît $M'M \perp d$.



Deoarece $P$ e convex şi din presupunerea făcută pentru $A$ şi $B$ rezultă $M'$ e unic determinat, abstracţie făcînd de o simetrie.

Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = d(M, M')$ şi se observă cu uşurinţă continuitatea acestei funcţii.

Fie acum $M'M'' \parallel d'$ cu $M'' \in P$ şi $M''M_1 \perp d'$ cu $M_1 \in d'$.

Definim $f_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ prin $f_1(x) = d(M'M'')$ care este de asemenea continuă.

Deci şi $F = f_1 - 2f$ e continuă.

Deoarece există $D \in d'$, între $A$ şi $B$, astfel încît $D_1D \perp d' \Rightarrow d(D_1D) = l_1 \in f[(0, 1)]$. Fie $x_1 \in [0, 1]$ cu $f(x_1) = l_1 > 0$; se observă că $x_1$ este unic determinat cu această proprietate $\Rightarrow f_1(x_1) = 0$.

Avem deci $F(0) = 1 > 0$ şi $F(x_1) = -2l_1 < 0$ şi F avînd proprietatea lui Darboux, există $x_2 \in [0, 1]$ astfel încît $F(x_2) = 0 \Rightarrow f_1(x_2) = 2f(x_2)$ şi fie $M_2 \in AB$ cu $d(M_2A) = x_2$; $M_2'$ şi $M_2'' \in P$ cu $M_2'M_2 \perp d'$ şi $M_2'M_2'' \parallel d' \Rightarrow M_2'M_2'' = 2M_2'M_2 \Rightarrow M_2'$, $M_2''$ şi simetricele lui $M_2'$ şi $M_2''$ faţă de $d'$ formează pătratul cerut.

Cazurile cînd $D_1$, $A$ sau $B$ se găsesc în interiorul uneia din laturile poligonului se demonstrează asemănător, definind funcţii convenabile.

Dacă $P$ nu ar fi convex se poate da uşor un contraexemplu cu ajutorul problemei 106 şi luînd $P \cap d' = B$.

Această rezolvare (neelementară) reprezintă o metodă puternică pentru rezolvarea unor probleme de existenţă în geometrie. Deficienţa ei constă în faptul că nu se dă şi o metodă pentru construcţia efectivă a figurilor respective.

Deşi pare dificilă, demonstraţia este foarte intuitivă şi doar formalizarea ei este puţin greoaie.

**106.** *Soluţia I.* Fie $P$ un punct în interiorul uneia din laturile poligonului. Considerăm o rotaţie de 60° a poligonului în jurul lui $P$.

Evident frontiera poligonului rotit mai intersectează frontiera poligonului dat în cel puţin încă un punct. Fie acesta $Q$ şi fie $R$ preimaginea lui $Q$ prin rotaţia considerată. Atunci $\Delta PQR$ îndeplineşte condiţiile problemei deoarece $QP = RP$ şi $\sphericalangle QPR = 60°$.

*Soluţia II.* Vom mai da o soluţie asemănătoare cu a problemei precedente.

Se consideră o latură arbitrară a poligonului, $A_kA_{k+1}$ şi pe această latură se construieşte de aceeaşi parte cu poligonul un triunghi echilateral $\Delta AA_kA_{k+1}$.

Dacă pe $AA_k$ sau pe $AA_{k-1}$ există puncte de pe frontiera poligonului, fie $M$ unul din acestea, pe $AA_k$ de exemplu. Atunci $\Delta MA_kM'$ cu $M'$ pe $A_kA_{k-1}$ şi $MA_k = M'A_k$ satisface condiţiilor.

Dacă nu se întîmplă acest lucru, considerăm $d$ şi $d'$ două semidrepte de aceeaşi parte a lui $A_kA_{k+1}$ cu poligonul, avînd capetele în punctul $B$ de pe $A_kA_{k+1}$ şi astfel ca unghiul dintre ele să fie de 60°. Presupunem de asemenea că $d$ este interioară unghiului dintre $BA_k$ şi $d'$ fie $\alpha = \sphericalangle(BA_k, d)$. Fie $M$ şi $M'$ celelalte intersecţii ale lui $d$ şi $d'$ cu frontiera poligonului $\Rightarrow MB$ şi $M'B$ depind continuu de $\alpha$ şi pentru $\alpha = 0$, $M'B > MB = A_kB$ iar pentru $\alpha = 120°$, $MB > M'B =$

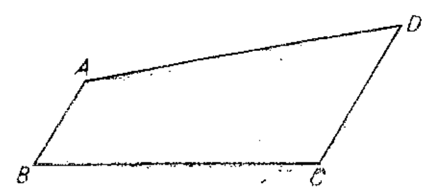

Fig. 106

$= A_{k+1}B$ deci $\exists$ o poziție a lui $\alpha$, între 0 și 120° astfel încît $M_1B = M_1'B$ și cum $\sphericalangle M_1BM_1' = 60° \Rightarrow \Delta M_1BM_1'$ e triunghiul căutat. În ambele soluții nu este esențial ca poligonul să fie convex.

Pentru pătrat răspunsul e negativ chiar dacă poligonul e un patrulater.

Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle ABC < 90°$, $\sphericalangle CDA < 90°$ $AB < CD$, se observă cu ușurință că dacă $BC$ și $AD$ sînt suficient de mari față de $AB$ și $CD$ acest patrulater este contraexemplul dorit.

**107.** Problema se reduce la a arăta că dacă un triunghi $EFG$ e inscris într-un paralelogram $ABCD$ de arie 2 atunci el are aria $2S_{EFG} \leqslant S_{ABCD}$.

Presupunem că $F$ este pe $AB$ și $E, G \in AB$.

Fie $FF' \parallel BC$ cu $F'$ pe $CD \Rightarrow$

$$S_{EFG} \leqslant S_{EFG} + S_{EF'G} = S_{EFGF'} = S_{FGF'} + S_{EFF'} =$$

$$= \frac{1}{2} S_{BCFF'} + \frac{1}{2} S_{ADFF'} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

**108.** Împărțim pătratul în patru pătrate egale de latură $1/2$. $\Rightarrow$ 3 dintre cele 9 puncte sînt în unul din cele patru pătrate mici. Problema se reduce deci la a arăta că avînd un triunghi $T$ într-un pătrat $P$, deci $T \subset P$, $\Rightarrow 2S_T \leqslant S_P$ lucru care s-a demonstrat la problema precedentă într-un cadru mai general.

**109.** Împărțim fiecare latură în trei părți egale și ducînd prin aceste puncte plane paralele la fețele cubului îl umplem cu 27 de cuburi de latură $1/3$. Conform principiului cutiei există un astfel de cub în care se află două puncte (din cele 28). Evident, distanța dintre ele este mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**110.** Dacă triunghiul este ascuțitunghic, ortocentrul este strict în interiorul său. Dacă este obtuzunghic atunci vîrful unghiului obtuz este strict în interiorul triunghiului format de ortocentru și celelalte două vîrfuri. Avem deci în ambele cazuri un triunghi $MNP$ și un punct $O$ strict în interiorul său, $M$, $N$, $P$ pe laturile unui poligon convex $\Rightarrow O$ este strict în interiorul poligonului, absurd.

Deci triunghiul nu poate fi decît dreptunghic și se observă că în acest caz ortocentrul e chiar unul din vîrfurile sale, deci e satisfăcută condiția.

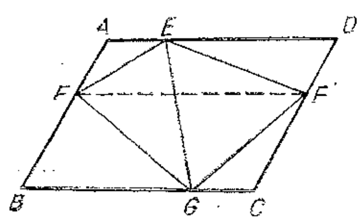


Fig. 107

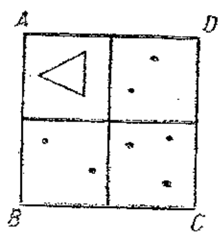


Fig. 108



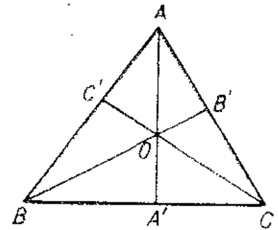


Fig. 111.1

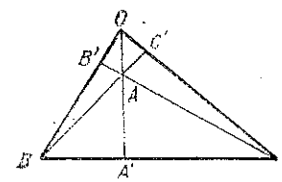


Fig. 111.2

**111.** Fie în triunghiul $ABC$, $BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$. Fie $O = AA' \cap BB' \cap CC'$. Avem trei cazuri.

I. (fig. 111.1.) $\hat{A} < 90°$. Fie $\Delta BOC'$ și $\Delta BOA'$ dreptunghice. În ele avem: $\widehat{BOA'} = \hat{C}$ și $\hat{A} = \widehat{BOC'} \Rightarrow \widehat{BOA'} < \widehat{BOC'} \Rightarrow \widehat{OBA'} > \widehat{OBC'}$.

Dar $OC'$ este distanța de la $O$ la $AB$ și $OA'$ cea de la $O$ la $BC$.

Deoarece patrulaterul $OC'BA'$ este inscriptibil $\Rightarrow OC' < OA'$.

II. $\hat{A} = 90° \Rightarrow O = A$ și $C' = A \Rightarrow C' = O$, iar $OA' = h$ este distanța de la $A$ la ipotenuză.

III. $\hat{A} > 90° \Rightarrow \widehat{BOC'} = 2 \cdot 90° - \hat{A}$.

Dar, $2 \cdot 90° - \hat{A} = 180° - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$, etc.

**112.** Să presupunem că $O$, centrul cercului inscris, nu se află în interiorul pătratului. Atunci el se află în interiorul sau pe frontiera unuia din triunghiurile $AED$, $EBF$, $GFC$. Dacă punctul $O$ se află în interiorul $\Delta EBF$, atunci perpendiculara $OK$ pe $AC$ taie întotdeauna ambele laturi ale pătratului și de aceea $OK > NK = FE > OM$ (fals).

Să presupunem că $O$ se află în $\Delta AED$. Perpendiculara $OK$ ce se coboară din $O$ pe $BC$ poate sau să intersecteze două laturi alăturate ale pătratului sau două laturi paralele.

În cazul al doilea, evident, segmentul de perpendiculară închis în interiorul pătratului, nu este mai mic decît laturile, de aceea $OK \geqslant DE > OH = OM$.

În primul caz fie $OK \cap EF = L$. Fie $O'$ punctul de intersecție al bisectoarei $\hat{A}$ cu latura $ED$, fie $K'$ proiecția lui $O$ pe $BC$. Atunci $OH \leqslant O'D' < O'L' < O'K' \leqslant OK \Rightarrow OH < OK$. De aceea $OK > OH$ în ambele cazuri (fals).

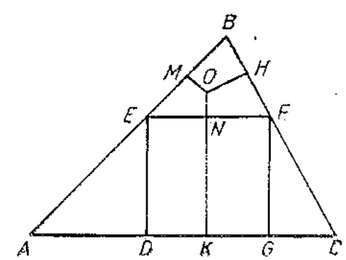


Fig. 112.1

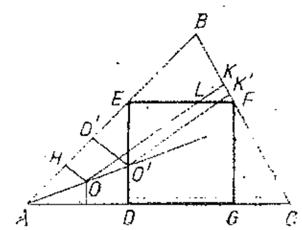


Fig. 112.2

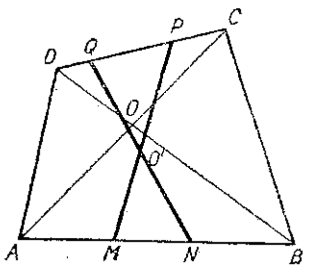

Fig. 113

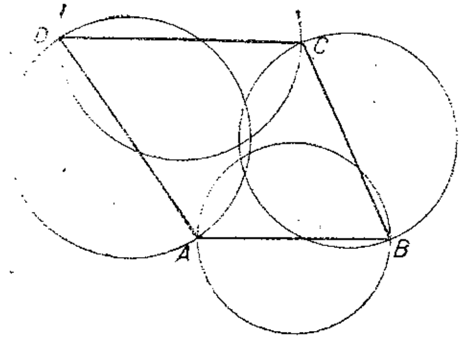

Fig. 114

**113.** Din prob. 46 am obținut relația vectorială:

$$(*)\ \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OQ}$$

Se observă în fig. 113 că dacă luăm pe $O$ în $\Delta O'QP$ (și analog în $\Delta O'MN$) vectorii rezultați din produsele vectoriale (*) sînt de sens opus $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OQ} = 0 \Rightarrow O \in MP,\ O \in NQ \Rightarrow O = O'$$

și conform unei probleme anterioare, (45) $\Rightarrow AB \parallel CD$.

**114.** Fie $O$ un punct arbitrar în interiorul patrulaterului.

$$\widehat{AOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COB} + \widehat{BOA} = 360°$$

Cel puțin unul dintre unghiuri este mai mare sau egal cu 90°. Să presupunem $\widehat{AOB} \geqslant 90° \Rightarrow O$ este acoperit de discul de diametru $AB$. $O$ fiind arbitrar, rezultă ceea ce era de demonstrat.

**115.** Este suficient să arătăm pentru cazul în care baza piramidei e un triunghi $ECD$. Fie $A$ vîrful piramidei. Ducem $AM \perp ECD$ cu $M$ în planul $BCD$. Se observă că sfera cu diametrul $AB$ (respectiv $AC$, $AD$) taie planul $BCQ$ după un cerc de diametru $MB$ (respectiv $MC$, $MD$).

Problema se reduce astfel la a arăta că $\Delta BCD$ e acoperit de cercurile de diametre $MB$, $MC$, $MD$, unde $M$ e un punct arbitrar în planul $BCD$.

Notăm cu $B'$, $C'$, $D'$ perpendicularele din $M$ pe laturile $DC$, $BD$, $BC$ ale triunghiului. Observăm imediat că indiferent de poziția lui $M$, patrulaterele

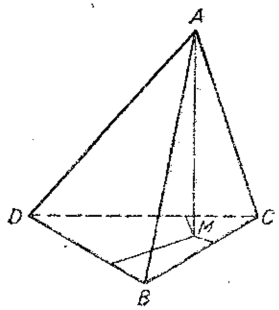

Fig. 115.1

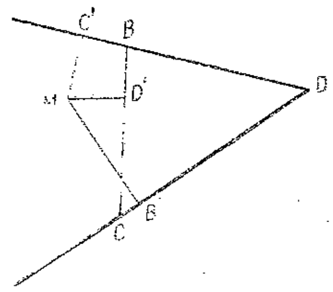

Fig. 115.2



$MBC'D$, $MB'CD'$, $MB'C'D$ acoperă $\Delta BCD$. Aceste patrulatere sînt înscrise în cercurile de diametre $MB$, $MC$, $MD$, care deci acoperă $\Delta BCD$.

**116.** Să notăm cu $O$ un punct din intersecția celor 6 discuri. Fie $A_j$, $j = 1, \ldots, 6$ o numerotare a centrelor discurilor astfel încît în porțiunea de plan determinată de unghiul $\widehat{A_jOA_{j+1}}$ (cu $\widehat{A_jOA_{j+1}} \leqslant 180°$) să nu se găsească alt centru.

$\widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \ldots + \widehat{A_6OA_1} = 360° \Rightarrow$ Există un unghi $A_jOA_{j+1} \leqslant$ $\leqslant 60°$ (eventual $\widehat{A_6OA_1}$).

În triunghiul $A_jOA_{j+1}$ cel puțin unul din unghiurile $\widehat{A_{j+1}A_jO}$ și $\widehat{A_jA_{j+1}O}$ este mai mare sau egal cu 60°.

Să presupunem $A_j\hat{A}_{j+1}O \geqslant 60°$. Deoarece $A_j\widehat{O}A_{j+1} \leqslant 60°$ rezultă că $A_jA_{j+1} \leqslant OA_j \leqslant R_j$ unde prin $R_j$ am notat raza discului cu centrul în $A_j \Rightarrow A_{j+1}$ este inclus în discul cu centrul în $A_j$. Analog, dacă $A_{j+1}\hat{A}_jO \geqslant 60°$, obținem că $A_j$ este inclus în discul cu centrul în $A_{j+1}$.

**117.** Fie 1 și 2 puncte arbitrare din mulțimea $E_1$ (vezi fig. 117).

Dacă punctele 3 sau 4 ar aparține aceleiași mulțimi problema ar fi rezolvată. Să presupunem deci că punctele 3 și 4 aparțin mulțimii $E_2$. Raționînd la fel obținem pe rînd că $5 \in E_1$, $6 \in E_2$ și $7 \in E_1$. Atunci punctele 1, 5, 7 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

**118.** Punctul $A_1$ aparține uneia dintre mulțimile partiției.

Fie aceasta $E_1$. Dacă punctul $B_1$ care se află pe mijlocul segmentului $A_2A_3$ s-ar afla în $E_1$ problema ar fi rezolvată. Să presupunem că $B_1 \in E_2$. Analog presupunem $A_1 \in E_1$, $\Rightarrow B_2 \in E_2 \Rightarrow A_3 \in E_1 \Rightarrow$ punctele $A_1$ și $A_3$ se află la distanța mai mare decît $\sqrt{5}/2$.

**119.** Se rezolvă analog cu prob. precedentă.

**120.** Să notăm cele patru puncte cu $A$, $B$, $C$, $D$. Din formula cosinusului deducem că orice triunghi format cu trei din cele patru puncte, este ascuțitunghic:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geqslant 0 \Rightarrow A \leqslant 90° \Rightarrow$$

cele patru puncte formează un patrulater convex.

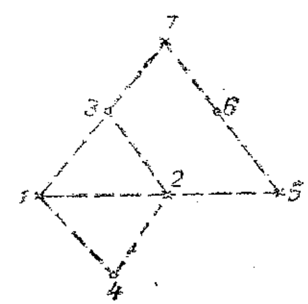

Fig. 117

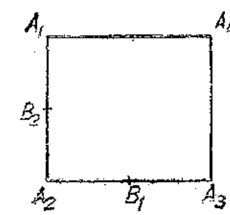

Fig. 118

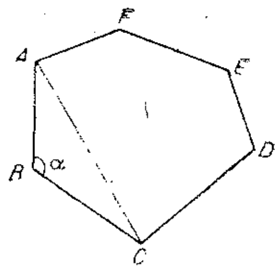

Fig. 121.1

Dar avem:

$\hat{A} \leqslant 90°$, $\hat{B} \leqslant 90°$, $\hat{C} \leqslant 90°$, $\hat{D} \leqslant 90°$ și $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \Rightarrow \hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 90°$, $\hat{D} = 90° \Rightarrow$ cele patru puncte sînt conciclice.

*Observație.* Se poate arăta că patrulaterul obținut e un patrat.

**121.** Se observă că se pot întîmpla 4 cazuri:

*Cazul 1.* (fig. 121.1)

Cînd punctele formează un hexagon convex $\Rightarrow \exists$ un unghi $\alpha$ al hexagonului, între laturile $AB$ și $BC$, astfel încît $\alpha \geqslant 120°$. Presupunem $AB \geqslant BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} \geqslant \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC}}{BC} = \sqrt{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \frac{AB}{BC} + 1} \geqslant \sqrt{3}$$

*Cazul 2.* (fig. 121.2)

Cînd al șaselea punct e în interiorul unui pentagon convex și fie acesta $F$ în pentagonul $ABCDE$. Dacă $F$ e în $\Delta ABC$ din $\widehat{BFC} + \widehat{BFA} + \widehat{AFC} = 360° \Rightarrow$ $\Rightarrow$ unul din ele este mai mare ca $120°$ și deci rezultă din cazul 1.

Presupunem deci că $\widehat{AFC} = \widehat{AFB} + \widehat{BFC} < 180°$ și analoagele. Dar:

$\widehat{AFC} + \widehat{BFD} + \widehat{CFE} + \widehat{DFA} + \widehat{EFB} = 2 \cdot 360° \Rightarrow$ unul din ele, de exemplu $\widehat{AFC} \geqslant \frac{2 \cdot 360°}{5} = 144° > 120°$ deci rezultă la fel ca în cazul 1.

*Cazul 3.* (fig. 121.3)

2 din puncte sînt în patrulaterul convex determinat de celelalte 4. Fie primul dintre ele $E \Rightarrow F$ este în unul din triunghiurile $\Delta EAB$, $\Delta EBC$, $\Delta ECD$, $\Delta EAD$, și rezultă la fel ca în cazurile 1 și 2.

$$F \in \Delta AED \Rightarrow \widehat{EFD} \geqslant 120° \text{ (de exemplu)} \Rightarrow ED/EF \text{ sau } ED/FD \geqslant \sqrt{3}.$$

*Cazul 4.* (fig. 121.4)

Cînd trei puncte sînt în triunghiul format de celelalte trei, este imediat, cu același raționament, considerînd chiar numai triunghiul și unul din cele trei puncte din interior.

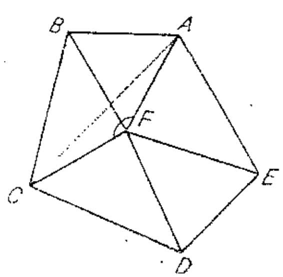

Fig. 121.2

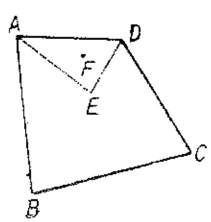

Fig. 121.3

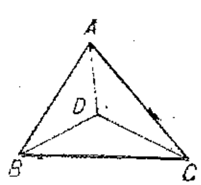

Fig. 121.4



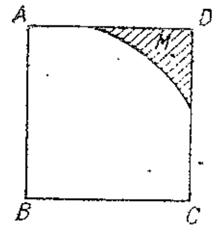

Fig. 122.1

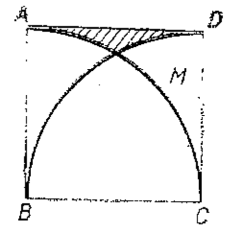

Fig. 122.2

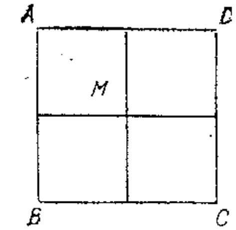

Fig. 122.3

**122.** Vom nota în cele ce urmează $P$ mulțimea punctelor din pătrat și cu $S(N, r)$ discul cu centrul în $N$ și de rază $r$.

Pentru cazul întîi dacă $MB > \sqrt{5}/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M \in P \cap \complement S(B, \sqrt{5}/2) \Rightarrow MD \leqslant 1/2 < \sqrt{5}/2,$$

deoarece $S(B, \sqrt{5}/2) \cap AD = E$ cu $AE = DE$ și $S(B, \sqrt{5}/2) \cap DC = F$ cu $DF = FC \Rightarrow \complement S(B, \sqrt{5}/2) \cap \complement S(A, \sqrt{5}/2) = \varnothing \Rightarrow$ cel mult $MB > \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pentru cazul doi fie $MB > 1$ (fig. 122.2) $\Rightarrow M \in P \cap \complement S(B, 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow MD \leqslant 1$ și se observă că $P \cap \complement S(B, 1) \cap \complement S(A, 1) \neq \varnothing$ dar $P \cap \complement S(B, 1) \cap \complement S(A, 1) \cap \complement S(C, 1) = \varnothing$.

Pentru cazul trei împărțim pătratul în 4 pătrate egale.

Dacă $M$ e în același pătrat cu $A$ putem avea $MB$, $MC$, $MD > \sqrt{2}/2$ dar $MA \leqslant \sqrt{2}/2$ cu alte cuvinte sigur una din distanțe e mai mică decît $\sqrt{2}/2$. Pentru $M = A$ avem $MD = MB = 1$, $MC = \sqrt{2}$, toate mai mari strict decît $\sqrt{2}/2$ deci e posibil ca trei să fie mai mari decît $\sqrt{2}/2$.

**123.** a) Notăm punctele date cu $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ și presupunem că din $A$ pleacă 3 linii roșii. Fie de exemplu segmentele $AB$, $AC$, $AD$. Atunci, după condiție, segmentele $BC$, $DB$, $CD$ trebuie să fie albastre și prin urmare $\Delta DBC$ devine albastru, ceea ce contrazice ipoteza.

b) Observăm că din fiecare punct pleacă exact două linii de fiecare culoare. Deoarece dacă ar pleca mai puțin de două linii roșii ar pleca mai mult de două linii albastre. Considerăm liniile de culoare roșie. $A$ este unit cu două puncte $B$ și $C$. $B$ nu poate fi unit cu $C$, deci $B$ este unit cu $D$; $C$ nu poate fi unit cu $D$, deoarece cel puțin din unul din punctele $A$, $B$, $C$, $D$, ar pleca mai mult de 3 drepte, deci $C$ este unit cu $E$. La fel $B$.

**124.** Prin inducție după $n_1$. Pentru $n_1 = 2$ e banal.

Pentru $n_1 + 1$ separăm pe $A'_{n_1+1}$ ștergînd segmentele ce pleacă din el.

Pentru restul $A^1_j$, $j = 1, \ldots, n_1$ nu se strică rețeaua.

Presupunem că se strică pentru $A^2_p \Rightarrow$ de exemplu în el vin numai segmente negre $\Rightarrow A^2_p A^1_{n_1+1}$ este roșu.

Fie $A^1_{n_1+1} A^2_m$ segmentul negru din $A^1_{n_1+1}$ și $A^2_m A^1_k$ segmentul roșu din $A^2_m$. Dar $A^1_k A^2_p$ este negru $\Rightarrow$ luînd $j = n_1 + 1$ avem conformația cerută.

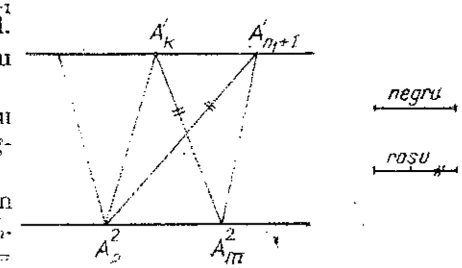


Fig. 124

Dacă nu se strică rețeaua scoțînd pe $A^1_{n+1}$, rezultă din inducție.

**125.** Pentru un pentagon se observă imediat că este posibil.

Dacă problema s-ar putea rezolva pentru patrulatere atunci din fiecare punct care nu este începutul său capătul liniei trase cu creionul, trebuie să pornească un număr par de segmente (pentru fiecare pe care ne apropiem de punct trebuie să existe unul pe care plecăm din punct). Deci nu putem avea mai mult de două puncte din care să plece un număr impar de segmente, iar la patrulater avem 4.

**126.** Fie $A_i$ și $A_j$ două puncte distincte ale rețelei, astfel încît $A_iA_j \notin \mathbf{R}$.

Fie $A_k$ un punct astfel încît $A_kA_i \in \mathbf{R}$. Conform proprietății 1), $A_kA_j \notin \mathbf{R}$. Conform proprietății 2) există exact un $A_l$ cu $l \neq i$, astfel încît $A_lA_j \in \mathbf{R}$. Am obținut astfel că numărul segmentelor care pleacă din $A_j$ este mai mare decît acela al segmentelor care pleacă din $A_i$. Analog se arată și inegalitatea inversă înlocuind în raționamentul anterior pe $i$ cu $j$.

Să presupunem $A_iA_j \in \mathbf{R}$. Atunci există $k$ astfel încît $A_iA_k \in \mathbf{R}$ și $A_kA_j \in \mathbf{R}$. Conform celor demonstrate mai sus numărul segmentelor rețelei care pleacă din $A_i$ este egal cu acela al segmentelor care pleacă din $A_k$ care la rîndul său este egal cu numărul segmentelor care pleacă din $A_j$.

**127.** Există două puncte din cele $n$, astfel încît toate celelalte să se afle situate de o singură parte a dreptei determinate de ele. Aceste puncte se pot obține în felul următor: mulțimea de puncte fiind finită, există o dreaptă astfel încît toate punctele să fie situate într-un singur semiplan determinat de ea. Această dreaptă o translatăm pînă atinge un punct și o rotim în jurul acestui punct pînă trece prin alt punct. Aceste puncte sînt cele căutate, să le notăm cu $A$ și $B$.

Considerînd toate unghiurile $A\widehat{X}B$, unde $X$ aparține mulțimii de puncte date, alegem punctul $C$ astfel încît $\widehat{ACB}$ să fie maxim.

Vom arăta că cercul care trece prin $A$, $B$, $C$ este cel căutat. Într-adevăr, fie $D$ alt punct din cele $n$. Din felul cum a fost ales $C$ rezultă că $\widehat{ADB} \leqslant \widehat{ACB} < 180°$ (deoarece $A$, $B$, $C$, necoliniare). Dacă $D$ s-ar afla în interiorul cercului, măsura unghiului $ADB$ ar fi $\left(\widehat{AB} + \frac{\widehat{XY}}{2}\right)$ unde $X$ este punctul de intersecție al lui $AD$ cu cercul și analog $Y$, deci strict mai mare decît unghiul $\widehat{ACB}$. Deci $D$ se află în exteriorul cercului. Cum punctul $D$ era arbitrar, problema este rezolvată.

**128.** Analog cu problema precedentă numai că se alege punctul $C$ astfel încît unghiul $\widehat{ACB}$ să fie minim.

**129.** Facem aceleași considerații ca în problema precedentă. Luăm o dreaptă care trece prin 2 din cele $2n + 3$ puncte și care lasă toate celelalte $2n + 1$ puncte de aceeași parte. Notăm cu $B$, $C$ cele două puncte și cu $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ pe celelalte, numerotate astfel încît: $\widehat{BA_1C} < \widehat{BA_2C} \ldots < \widehat{BA_{2n-1}C}$. Considerăm cercul determinat de $A_{n+1}$, $B$, $C$. Acesta va lăsa punctele $A_1, \ldots, A_n$ în afară și pe $A_{n+2}, \ldots, A_{2n-1}$ înăuntrul său.

**130.** Să numărăm segmentele de lungime mai mică strict decît 1. Din fiecare punct pornesc $n$ segmente și avem $2n + 1$ puncte. În felul acesta



însă numărăm fiecare segment de două ori, după cele două capete ale sale. Avem deci $\frac{n(2n+1)}{2}$ astfel de segmente $\Rightarrow n$ este par.

Pentru $n$ par considerăm poligoanele regulate cu $2n + 1$ laturi. Fie $l$ latura și $R$ raza cercului circumscris, deci $\frac{l}{2} = R \sin \frac{\pi}{2n+1}$. Dacă considerăm în fiecare vîrf al poligonului un cerc de rază $R\sqrt{2}$ el lasă $n$ din vîrfurile poligonului înafară. Luînd deci $R\sqrt{2} = 1 \Rightarrow \frac{l\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{2n+1}} = 1 \Rightarrow l = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2n+1}$, condițiile problemei sînt satisfăcute.

**131.** Cele 4 000 de puncte determină cel mult $C^2_{4000}$ direcții. Fie $d$ o dreaptă care lasă toate punctele de aceeași parte și de direcție diferită de cele considerate. Distanțele de la puncte la dreapta $d$ sînt distincte. Putem deci să ducem drepte paralele cu $d$ care să lase între ele cîte 4 puncte din cele 4 000.

Proprietatea se poate generaliza astfel: Fie $kn$ puncte în plan cu $k, n \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 3$, oricare trei necoliniare. Atunci se pot construi din ele $n$ poligoane de cîte $k$ laturi, disjuncte. Demonstrația este exact la fel.

**132.** Presupunem că oricare trei puncte sînt necoliniare și în loc de 99 considerăm $n$ puncte. Dacă $n$ este impar, fie $A$ un punct fixat dintre cele $n$ și $d$ o dreaptă, $d \ni A$ aleasă ca să împartă mulțimea în două părți egale ca număr. Evident acest lucru se poate. Rotim acum pe $d$ pînă cînd întîlnește primul punct din mulțime, $B \neq A$. Dreapta $AB$ împarte mulțimea în două părți cu $\frac{n-1}{2}$ și respectiv $\frac{n-1}{2} - 1$ puncte. Direcția dată de $AB$ contrazice enunțul problemei. Deci $n$ e par, absurd. Deci proprietatea din enunț este mai generală, putem lua un număr impar oarecare, nu neapărat 99.

**133.** Mulțimile cu 1 sau 2 puncte satisfac condițiile.

Ca și în problema precedentă rezultă neapărat că $n$ trebuie să fie par.

Într-adevăr dacă $n$ e impar și $n \geqslant 3$ fie un plan care lasă $k$ puncte de o parte a sa și $k + 1$ puncte de cealaltă, unde $2k + 1 = n$. Deplasăm acest plan paralel cu el spre mulțimea mai bogată, pînă cînd se întîlnește cu primul punct din această mulțime $P$. Se pot întîmpla 3 posibilități în această poziție $\pi$ a planului:

el să lase $k$ puncte de o parte și

1). $k - 2$,

2) $k - 1$

3) $k$, de cealaltă.

Primele două cazuri duc la o contradicție considerînd planul $\pi$.

Pentru cazul 3) rotim planul $\pi$ în jurul lui $P$ pînă cînd întîlnește un al doilea punct din mulțimea $M$. Singura dificultate care s-ar putea ivi poate să fie aceea cînd în această poziție, $\pi$ întîlnește 2 puncte care erau de o parte și de alta a lui $M$ și $N$. În acest caz rotim puțin $\pi$ în jurul lui $PM$ pînă cînd în el se găsesc doar $P$ și $M \to \pi$ lasă $k$ puncte de o parte și $k - 1$ la cealaltă parte, deci cazul 2). Deci $n$ nu poate fi impar.

La fel se arată că $n$ nu poate fi par ($n > 2$).

Rezultă deci că mulțimile cu proprietățile din enunț au 1 sau 2 puncte.

6*

**134.** Fie două cercuri $C_1, C_2$ cu diametrele $d_1, d_2 \Rightarrow$ cercul care are diametrul $d$ pe linia centrelor lui $C_1, C_2$ și tangent la $C_1$ și $C_2$ are diametrul $d \leqslant d_1 + d_2 + 1$, dacă distanța dintre $C_1$ și $C_2$ este $\leqslant 1$. Din acest fapt rezultă imediat prin inducție următoarea afirmație: fie $m$ cercuri $C_k$, $k = 1, \ldots, m$ de diametre $d_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$; atunci ele pot fi acoperite cu niște cercuri care au distanțele între ele $> 1$ și $S =$ suma diametrelor $\leqslant \sum_{k=1}^{m} d_k + (m - 1)$. Într-adevăr, presupunem că distanța dintre $C_1$ și $C_2 \leqslant 1 \Rightarrow$ le înlocuim cu un cerc $C_{1;2}$ de diametru $d_1 + d_2 + 1$. Acum avem doar $m - 1$ cercuri $\Rightarrow$ pot fi acoperite în condițiile problemei astfel încît $S \leqslant (d_1 + d_2 + 1) + \sum_{k=3}^{m} d_k + (m - 2) = \sum_{i=1}^{m} d_i + (m - 1)$. Acum afirmația problemei rezultă banal considerînd cercurile $C_1, \ldots, C_m$ cele 100 de puncte $(m = 100)$, cu $d_k = 0$, $\forall k \Rightarrow$ cele 100 de puncte se pot acoperi cu discuri avînd suma diametrelor $\leqslant 99 < 100$ și cu distanța dintre ele $> 1$.

**135.** Răspunsul este afirmativ. Vom da următoarea construcție:

$M$ formată din vîrfurile unui cub și de simetricile centrului său față de două fețe opuse ale cubului.

Singura dificultate este pentru $AC'$, $A'C$ etc. (diagonalele) dar $A'C \parallel AE \parallel E'C'$.

**136.** Prin inducție. Pentru $m = 1$, $E$ este formată din două puncte la distanța 1. Să presupunem că există o mulțime $E$, avînd $k$ elemente care satisfac condițiile din enunț pentru $m \in \mathbf{N}$. Să considerăm mulțimea $E'$ obținută prin translatarea lui $E$ într-o anumită direcție cu modulul 1. Există cel mult $k \cdot m$ direcții pentru care $E$ și $E'$ nu sînt disjuncte. Există cel mult $2k(k - 1)$ direcții pentru care un punct din $E'$ se află la distanța 1 de alt punct din $E$ decît acela al cărui imagine prin translație este. (Deoarece cercurile de rază 1 cu centrele în două puncte au cel mult 2 puncte de intersecție; deci pentru un punct $2(k - 1)$ direcții: pentru $k$ puncte $2k(k - 1)$ direcți). Deoarece mulțimea direcțiilor din plan este infinită există una pentru care $E$ și $E'$ sînt disjuncte și pentru care orice punct din $E$

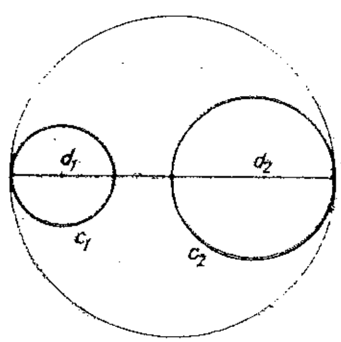


Fig. 134

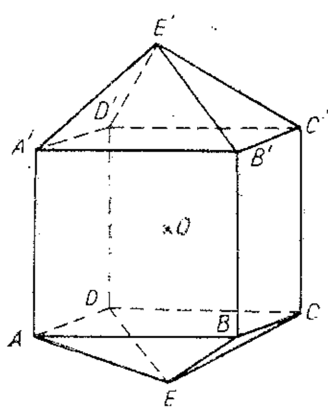


Fig. 135



se află la distanța 1 de un singur punct din $E'$ (imaginea sa prin translația respectivă). Deci mulțimea punctelor din $E$ și $E'$ satisface condițiile problemei pentru $m + 1$.

**137.** Evident $\tau(3) = 3$ și $\tau(4) \geqslant 5$. Fie $n + 1$ puncte în plan. Există $C_{n+1}^{n} = n + 1$ grupe distincte de $n$ puncte. Fiecare segment egal cu 1 este numărat în $n - 1$ grupe, deoarece singurele grupe în care nu este numărat sînt acelea din care lipsește unul dintre cele două capete ale segmentului. Deducem că $\tau(n + 1) \leqslant \left[\frac{n+1}{n-1}\tau(n)\right]$ unde prin $[x]$ am notat cel mai mare întreg mai mic sau egal cu $x$.

Demonstrăm prin inducție că $\tau(n) \leqslant \frac{n^2}{3}$. Pentru $n = 3$ relația este evidentă. Să presupunem că $\tau(n) \leqslant \frac{n^2}{3}$. Atunci, evident $\tau(n) \leqslant \left[\frac{n^2}{3}\right]$, dar

$$\tau(n + 1) \leqslant \left[\frac{n+1}{n-1}\tau(n)\right] \leqslant \left[\frac{n+1}{n-1}\left[\left(\frac{n^2}{3}\right)\right]\right]$$

Trebuie să mai demonstrăm că $\left[\frac{n+1}{n-1}\left[\frac{n^2}{3}\right]\right] \leqslant \frac{(n+1)^2}{3}$

Într-adevăr, pentru $n = 3k$:

$$\left[\frac{n+1}{n-1}\left[\frac{n^2}{3}\right]\right] = \left[\frac{3k+1}{3k-1}\left[3k^2\right]\right] = \left[3k^2 + \frac{6k^2}{3k-1}\right] =$$

$$= 3k^2 + \left[2k + \frac{2k}{3k-1}\right] = 3k^2 + 2k < \frac{(3k+1)^2}{3} = \frac{(n+1)^2}{3}$$

Pentru $n = 3k + 1$:

$$\left[\frac{n+1}{n-1}\left[\frac{n^2}{3}\right]\right] = \left[\frac{3k+2}{3k}(3k^2 + 2k)\right] = \left[3k^2 + 4k + \frac{4}{3}\right] =$$

$$= 3k^2 + 4k + 1 < \frac{(3k+2)^2}{3} = \frac{(n+1)^2}{3}.$$

Pentru $n = 3k - 1$:

$$\left[\frac{n+1}{n-1}\left[\frac{n^2}{3}\right]\right] = \left[\frac{3k}{3k-2}(3k^2 - 3k)\right] = 3k^2 = \frac{(n+1)^2}{3}$$

Am demonstrat astfel că: $\tau(n) \leqslant \frac{n^2}{3}$.

Pentru a demonstra că $\frac{n \ln n}{3} \leqslant \tau(n)$ vom observa urmărind demonstrația problemei precedente că $\tau(2n) \geqslant 2\tau(n) + n \Rightarrow \tau(2^n) \geqslant 2\tau(2^{n-1}) + 2^{n-1} \geqslant \ldots \geqslant$ $\geqslant 2^{n-2}\,\tau(4) + (n - 2)2^{n-1} \geqslant 5 \cdot 2^{n-2} + (n - 2)2^{n-1} = (2n + 1)2^{n-2}$.

Fie $p$ natural astfel încît $2^n < p \leqslant 2^{n+1} \Rightarrow \log_2 p - 1 \leqslant n < \log_2 p$. Deoarece funcția $\tau$ este strict crescătoare $\tau(2^n) < \tau(p) \leqslant \tau(2^{n+1})$.

Pe de altă parte, evident $\tau(a+b) \geqslant \tau(a) + 2b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau(p) \geqslant \tau(2^n) + 2(p - 2^n) \geqslant (2n+1)2^{n-2} + 2(p-2^n) =$$

$$= (2n-7)2^{n-2} + 2p \geqslant (2\log_2 p - 9)2^{\log_2 p - 3} + 2p =$$

$$= \frac{2\log_2 p - 9}{8} \cdot p + 2p = \frac{p\log_2 p}{4} - 9/8 \cdot p + 2p \geqslant \frac{p \ln p}{4 \ln 2} > \frac{p \ln p}{3}.$$

**138.** Demonstrăm întîi pentru $n = 5$, că există un patrulater convex cu vîrfurile în 4 din cele 5 puncte. Ca și în problema 121 se poate întîmpla ca cele 5 puncte să formeze un pentagon convex, un patrulater convex care să conțină cel de-al cincilea punct sau un triunghi care conține celelalte două puncte. Mai rămîne de studiat deci ultimul caz. Fie $A_1A_2A_3$ triunghiul și $A_4$ și $A_5$ în interior $\Rightarrow A_4A_5$ intersectează două laturi ale lui $\Delta A_1A_2A_3$; fie acestea $A_1A_3$ și $A_2A_3 \Rightarrow A_1A_2A_4A_5$ formează un patrulater convex.

Pentru $n \geqslant 6$ observăm că se pot face $C_n^5$ grupuri distincte de cîte 5 puncte și în fiecare dintre acestea există un patrulater convex. Un asemenea patrulater convex poate să apară în toate cele $n-4$ grupări de cîte 5 puncte care se pot face ca să conțină și patrulaterul respectiv.

Există deci cel puțin $\left[\frac{C_n^5}{n-4}\right]$ patrulatere convexe cu vîrfurile în cele $n$ puncte. Să arătăm că $n \geqslant 6 \Rightarrow C_n^5 \geqslant (n-4)C_{n-3}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(n-4)^2(n-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \geqslant 6 \cdot 10(n-4).$$

Dar $n \geqslant 6$ deci e suficient ca: $(n-1)(n-2) \geqslant 10n - 40 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2 - 13n + 42 \geqslant 0 \Leftrightarrow (n-6)(n-7) \geqslant 0, \text{ cu } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 6$$

și acest lucru este adevărat.

Observăm că aceasta e o aproximare mult mai bună decît $C_{n-3}^2$ pentru valori mari ale lui $n$. Problema aceasta în cazul $n = 5$ reprezintă o restrîngere a următoarei probleme mai generale: dîndu-se în plan $2^{n-2}+1$ puncte oricare trei necoliniare, există un poligon convex cu $n$ vîrfuri în punctele respective. Deși elementară. această problemă n-a fost încă rezolvată pentru cazul $n > 5$ iar soluția pentru $n = 5$ este destul de complicată.

**139.** Date fiind $n$ puncte într-un plan vom nota cu $T_n$, $V_n$ numărul triunghiurilor, respectiv numărul triunghiurilor obtuzunghice cu vîrfurile în aceste puncte. E clar că este suficient să arătăm că $V_n/T_n \geqslant 3/10$, pentru $n \geqslant 5$.

1. Pentru început considerăm 4 puncte în plan: atunci $V_4 \geqslant 1$. Într-adevăr dacă punctele formează un patrulater convex și cum suma unghiurilor sale este $2\pi$ există cel puțin un unghi $\geqslant \frac{\pi}{2}$. Dacă punctele formează un patrulater concav $ABCD$, astfel încît punctul $D$ se află în interiorul triunghiului $ABD$ avem $\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA = 2\pi$, și obținem că cel puțin unul din aceste unghiuri este mai mare decît $2\pi/3 > \pi/2$ deci $V_4 \geqslant 1$.

Fie 5 puncte în plan. Deoarece cu orice 4 puncte din cele 5 se poate forma cel puțin un triunghi obtuzunghic, în total $C_5^4 = 5$ și deoarece orice triunghi dintre acestea poate aparține cel mult la $C_{5-3}^{4-3} = 2$ grupe distincte de 4 puncte — adică poate fi socotit de cel mult 2 ori, urmează că

$$V_5 \geqslant \frac{C_5^4}{C_{5-3}^{4-3}} = 5/2 \Rightarrow V_5 \geqslant 3$$

Fie $n \geqslant 5$ puncte în plan. Printr-un raționament analog celui anterior și folosind rezultatele obținute acolo, avem:

$$\frac{V_n}{T_n} \geqslant \frac{V_5 C_n^5}{C_{n-3}^2} \cdot \frac{1}{C_n^3} \geqslant \frac{3C_n^5}{C_{n-3}^2 \cdot C_n^3} = \frac{3}{10}.$$

*Observație.* Metoda expusă anterior poate fi aplicată în continuare pentru $n = 6, 7$ ... și obținem recursiv limite mai bune pentru raportul din enunț.

**140.** Prin inducție. Pentru $n = 2$ evident.

Fie acum $n$ segmente. Să notăm cu $\wedge$ intersecția a $n-1$ segmente ($\wedge$ este un segment) și conform pasului de inducție $\wedge \neq \varnothing$. Să notăm cu $I_n$ al $n$-lea segment și să presupunem că $\wedge \cap I_n = \varnothing$. Fie $A_0 \in I_n$ punctul cel mai apropiat de $\wedge$. Deoarece $A_0 \notin' \wedge$, există $I \neq I_n$ un segment din mulțimea considerată astfel încît $A_0 \notin I$. Pe de altă parte $I \cap \wedge \neq \varnothing$ și $I \cap I_n \neq \varnothing$. Fie $A_1 \in I \cap \wedge$ și $A_2 \in I \cap I_n$ atunci segmentul $A_1A_2 \subset I$ dar $A_0 \in A_1A_2$, contradicție.

**141.** Fie $m$ numărul maxim de discuri cu intersecția nevidă, evident $m \geqslant 3$. Să notăm cu $\wedge_1, \ldots, \wedge_m$ discurile corespunzătoare și cu $\Gamma$ intersecția lor. Să presupunem $m < n$. Înseamnă că există un disc $\wedge$ astfel încît $\wedge \cap \Gamma = \varnothing$.

$\Gamma$ fiind convexă, există o dreaptă $d$ care separă discul $\wedge$ de $\Gamma$, adică $d \cap \wedge = \varnothing$, $d \cap \Gamma = \varnothing$ și $d$ intersectează orice segment determinat de un punct din $\Gamma$ și unul din $\wedge$. Conform problemei anterioare există $i$ și $j$ astfel încît $(\wedge_i \cap d) \cap (\wedge_j \cap d) = \varnothing$. Altfel ar rezulta că $(\wedge_1 \cap d) \cap (\wedge_2 \cap d) \cap \ldots \cap (\wedge_m \cap d) \neq \varnothing$ adică $d \cap \Gamma \neq \varnothing$ ceea ce este fals. Conform ipotezei $\wedge \cap \wedge_i \cap \wedge_j \neq \varnothing$; fie $A$ un punct din $\wedge \cap / \wedge_i \cap \wedge_j$ și $B$ un punct din $\Gamma$ iar $AB$ segmentul determinat de ele $\Rightarrow AB \cap d \neq \varnothing$. Fie $C = AB \cap d$, $\wedge_i$ convexă $\Rightarrow AB \subset \wedge_i$, la fel $AB \subset \wedge_j \Rightarrow C \in \wedge_i \cap \wedge_j$. Dar $C \in d \Rightarrow$ $\Rightarrow C \in (\wedge_i \cap d) \cap (\wedge_j \cap d)$, ceea ce este fals. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și deci că $m = n$.

**142.** Soluția este analoagă cu problema precedentă. Se consideră numărul maxim de sfere care au intersecția nevidă. Fie acestea $\wedge_1, \ldots, \wedge_m$. Să presupunem $m \neq n \Rightarrow \wedge_1 \cap \ldots \cap \wedge_m = \Gamma \neq \varnothing$, este convexă și disjunctă de $\wedge_{m+1}, \ldots, \wedge_n$.

Ducem atunci un plan $\pi$ care să separe pe $\Gamma$ de $\wedge_{m+1}$. Conform problemei anterioare există $i$, $j$, $k$ astfel încît

$$(\wedge_i \cap \pi) \cap (\wedge_j \cap \pi) \cap (\wedge_k \cap \pi) = \varnothing$$

Altfel ar rezulta că $(\wedge_1 \cap \pi) \cap \ldots, \cap (\wedge_m \cap \pi) \neq \varnothing$ adică $\pi \cap \Gamma \neq \varnothing$ ceea ce este fals. Conform ipotezei $\wedge_i \cap \wedge_j \cap \wedge_k \cap \wedge_{m+1} \neq \varnothing$, deci există un punct $A \in \wedge_i \cap \wedge_j \cap \wedge_k \cap \wedge_{m+1}$.
Fie $B$ un punct din $\Gamma \Rightarrow AB \cap \pi \neq \varnothing$
Fie $C = AB \cap \pi$. $\wedge_i$ convexă $\Rightarrow AB \subset \wedge_i \Rightarrow C \in \wedge_i$;
analog $C \in \wedge_j$, $C \in \wedge_k \Rightarrow C \in \wedge_i \cap \wedge_j \cap \wedge_k \cap \pi$
ceea ce este fals. Rezultă $m = n$.

**143.** Faptul că o mulțime de puncte este conținută într-un disc de rază 1 este evident echivalent cu faptul că discurile cu centrele în punctele respective și de rază 1 au intersecția nevidă. Conform ipotezei, oricare 3 astfel de discuri au intersecția nevidă, rezultă conform problemei 141 că toate au intersecția nevidă, deci există un disc de rază 1 care le conține pe toate.

**144.** Analog cu problema precedentă, aplicînd problema 142.

**145.** Vom arăta că afirmația este adevărată pentru $n = 3$, pentru $n = 2$ ea fiind banală.

Fie deci $O_1$, $O_2$, $O_3$ și $O$ în triunghiul $\Delta O_1O_2O_3$ punct comun celor 3 cercuri. Se observă cu ușurință că ar fi suficient să arătăm că cercurile de centre $O_1'$, $O_2'$, $O_3'$ și raze $r_1$, $r_2$, $r_3$ acoperă triunghiul $\Delta O_1'O_2'O_3'$. Să presupunem că nu s-ar întîmpla acest lucru și fie $O'$ în $\Delta O_1'O_2'O_3'$ astfel încît $O'O_1' > r_1$, $O'O_2' > r_2$, $O'O_3' > r_3$. Dar $O_1\hat{O}O_2 + O_2\hat{O}O_3 + O_3\hat{O}O_1 = 2\pi = O_1'\hat{O}'O_2' + O_2'\hat{O}'O_3' + O_3'\hat{O}'O_1'$

putem presupune $O_1\hat{O}O_2 \leqslant O_1'\hat{O}'O_2' \Rightarrow O_1O_2 < O_1'O_2'$, absurd.

Acum din problema 141 rezultă imediat afirmația și pentru $n > 3$.

**146.** Conform problemei 141 este suficient să arătăm că oricare 3 puncte, pot fi acoperite de un disc de rază $\sqrt{3}/3$. Să notăm cele trei puncte cu $A_1A_2A_3$. Să presupunem că $A_2A_3$ este latura cea mai mare a triunghiului $\Delta A_1A_2A_3 \Rightarrow \sphericalangle A_2A_1A_3 \geqslant 60°$. Construim pe $A_2A_3$ triunghiul echilateral $\Delta A_2BA_3$ astfel încît $B$ să se afle de aceeași parte a lui $A_2A_3$ cu $A_1$ și ducem cercul circumscris acestui triunghi. Acest cerc are rază $\leqslant A_2A_3\sqrt{3}/3 \leqslant \sqrt{3}/3$, iar $A_1$ va fi în interiorul cercului, deoarece $\sphericalangle A_2A_1A_3 \geqslant 60°$.

**147.** Ne fixăm atenția asupra a 3 din punctele lui $M$, $A_i$, $A_j$, $A_k$ cu proprietatea că $S_{A_iA_jA_k}$ e maximă. Ducem prin $A_i$, $A_j$, și $A_k$ dreptele $d_i$, $d_j$, $d_k$ astfel încît $d_i \parallel A_jA_k$, $d_j \parallel A_iA_k$, $d_k \parallel A_iA_j$. Punctele din $M$ vor fi de aceeași parte cu $A_iA_jA_k$ față de $d_i$, $d_j$ și $d_k \Rightarrow M \subset \Delta B_iB_jB_k$ cu $B_i = d_j \cap d_k$, $B_j = d_i \cap d_k$, $B_k = d_i \cap d_j$ și avem că: $S_{B_iB_jB_k} = 4S_{A_iA_jA_k} \leqslant 4$.

Fie acum pe $B_iB_j$: $B_iC = CA_k = A_kD = DB_j$,
pe $B_jB_k$: $B_jE = EA_i = A_iF = FB_k$,
pe $B_kB_i$: $B_kG = GA_j = A_jH = HB_i$
Notînd cu $S$ aria unui triunghi cu cîte un vîrf în $\Delta B_jDE$, $\Delta B_kGF$, $\Delta B_iCH$

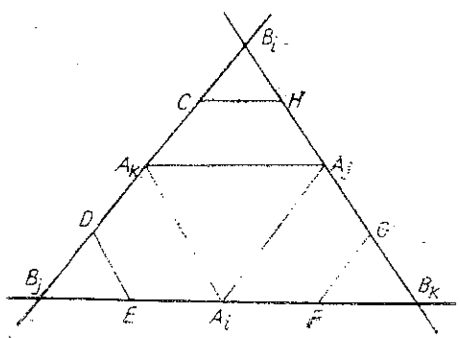

Fig. 147



avem

$$S > \frac{EF \cdot d(D, CH)}{2} = S_{A_iA_jA_k},$$

deci nu pot exista puncte din $M$ în toate cele 3 triunghiuri, de exemplu în $\Delta B_iCH$ nu se găsesc $\Rightarrow M \subset B_jB_kHC$ și

$$S_{B_jB_kHC} = S_{A_iA_jA_k} - S_{B_iHC} = \left(4 - \frac{1}{4}\right)S_{A_iA_jA_k} \leqslant \frac{15}{4}.$$

*Observație.* Continuînd cu această metodă, se poate da o aproximare și mai bună pentru aria unui poligon convex de arie minimă care să acopere mulțimea $M$.

**148.** Fie $S$ un cerc de rază $R$ care conține toate punctele în interior. Dacă considerăm cercurile de rază $\frac{1}{2}$ cu centrele în punctele date atunci toate aceste cercuri vor fi disjuncte și cuprinse în cercul $L$ concentric cu $S$ și de rază $R + 1$. Scriind faptul că suma ariilor cercurilor este strict mai mică decît aria cercului $L$ obținem:

$$n\frac{\pi}{4} < \pi\left(R + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow R > \frac{\sqrt{n} - 1}{2}.$$

**149.** La fel cu problema precedentă considerind volumul sferelor.

**150.** Fie $O$ și $R$ centrul respectiv raza unui astfel de cerc. Conform problemei $57 \Rightarrow 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) \geqslant AB^2 + BC^2 + CA^2$. Dar $OA^2 \leqslant R^2$, $OB^2 \leqslant R^2$, $OC^2 \leqslant R^2$, $AB^2 \geqslant 1$, $BC^2 \geqslant 1$, $CA^2 \geqslant 1$, înlocuim și obținem că $R \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Observație:* folosind relația demonstrată la observația prob. 57 se poate arăta că dacă $n$ puncte sînt situate în spațiu astfel încît distanța dintre oricare două este mai mare decît 1 atunci raza oricărei sfere care le conține este mai mare decît $\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$. Trebuie să observăm însă că în cazul planului pentru $n \geqslant 4$ problema 148, dă o aproximare mai bună, dar că în spațiu de abia pentru $n \geqslant 10$ aproximarea problemei 149 este mai bună.

**151.** Se observă din figura de mai jos, că răspunsul este afirmativ.

**152.** Vom arăta că $A_0A_k < 3$ oricare ar fi $k$ cuprins între 1 și $n$. Pentru $k = 1$, $A_0A_1 = 1 < 3$. Fie $k > 1$. Pentru orice $l$ cuprins între 1 și $k - 1$

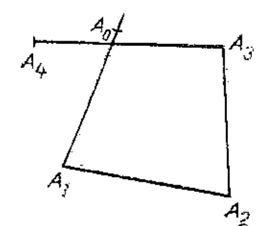

Fig. 151

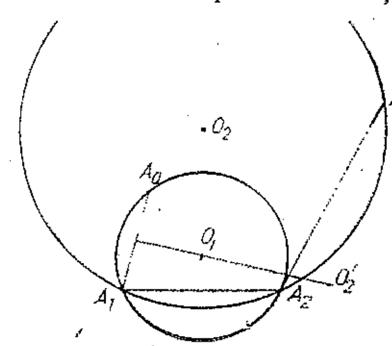

Fig. 152

notăm cu $\Gamma_i$ cercul determinat de punctele $A_{i-1}$, $A_i$ și $A_{i+1}$ și cu $O_i$ centrul său. Evident $A_0A_k \leqslant A_0O_1 + O_1O_2 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1} + O_{k-1}A_k$.

Fie $S_1$ mijlocul segmentului $A_0A_1$. În triunghiul dreptunghic $\Delta A_1S_1O_1$ avem:

$$A_0O_1 = A_1O_1 = \frac{A_1S_1}{\cos \widehat{O_1A_1S_1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{\widehat{A_2A_1A_0}}{2}} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{120^\circ}{2}} = 1.$$

Analog $A_kO_{k-1} \leqslant 1$.

Ducem prin punctele $A_0$ și $A_1$ cercurile $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{k-1}$ astfel încît centrele lor $O'_1, \ldots, O'_{k-1}$ să fie situate toate de aceeași parte a lui $A_0A_1$ și astfel încît raza lui $\Gamma'_i$ să fie egală cu raza lui $\Gamma_i$. Deoarece toate segmentele $A_iA_{i+1}$ sînt egale obținem că $O'_iO'_{i+1} = O_iO_{i+1}$ (vezi fig. 152).

(Deoarece $O'_iO'_{i+1} = O'_{i+1}S_1 - O'_iS_1 = O_{i}S_{i+1} - O_{i+1}S_{i+1} = O_iO_{i+1}$).

Obținem $O_1O_2 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1} = O'_1O'_2 + \ldots + O'_{k-2}O'_{k-1}$

$$O'_iS_1 = O_iS_i = A_iS_i \operatorname{tg} \widehat{O_iA_iS_i} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\widehat{A_{i+1}A_iA_{i-1}}}{2};$$

deoarece $60^\circ \leqslant \widehat{A_0A_1A_2} \leqslant \ldots \leqslant \widehat{A_{k-2}A_{k-1}A_k} \leqslant 120^\circ$ deducem că $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 30^\circ \leqslant$

$$\leqslant O'_1S_1 \leqslant \ldots \leqslant O'_{k-1}S_1 \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

$$\text{Deci } O'_1O'_2 + \ldots + O'_{k-2}O'_{k-1} = O'_1O'_{k-1} = O'_{k-1}S_1 - O'_1S_1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_0A_k \leqslant A_0O_1 + (O_1O_2 + \ldots + O_{k-2}O_{k-1}) + O_{k-1}A_k \leqslant 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 < 3.$$

**153.** Să presupunem că punctele nu sînt coliniare. Considerăm distanțele de la cele $n$ puncte la dreptele determinate de aceste puncte și alegem punctul și dreapta pentru care această distanță este minimă și nenulă. (Acest minim există deoarece avem cel mult $nC_n^3$ altfel de distanțe). Pe această dreaptă se găsesc cel puțin trei puncte distincte, pe care le notăm $A$, $B$, $C$ și fie $O$ punctul ales.

Să presupunem că $B$ este situat între $A$ și $C$. Unul din unghiurile $\widehat{OBA}$ și $\widehat{OBC}$ este obtuz. Să presupunem că $\widehat{OBA}$ este obtuz. Rezultă că distanța de la $B$ la dreapta $OA$ este mai mică decît distanța de la $O$ la $AB$. Am ajuns la o contradicție. Rezultă că punctele sînt coliniare.

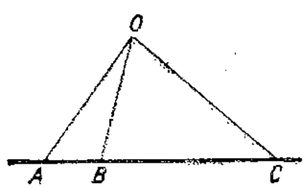

Fig. 153

**154.** *Soluția 1.* Se obține prin dualitatea din problema precedentă.

*Soluția 2.* Prin reducere la absurd. Se consideră analog cu problema precedentă distanțele de la punctele de intersecție la cele $n$ drepte. Se alege dreapta și punctul pentru care se atinge minimul distanțelor. Prin acest punct trec trei drepte distincte care intersectează dreapta aleasă în trei puncte distincte. În continuare analog cu problema precedentă.

**155.** Prin inducție.

Pentru $n = 3$ evident.

Fie $n + 1$ puncte necoliniare. Conform problemei 153, există o dreaptă care să treacă numai prin două puncte ale mulțimii. Le notăm cu $P_n$ $P_{n+1}$.

Conform pasului de inducție există $n$ drepte distincte determinate de punctele $P_1, \ldots, P_n$.

La aceste drepte adăugăm dreapta $P_nP_{n+1}$ care nu coincide cu nici una din cele $n$ drepte, din felul cum au fost alese punctele $P_n$ și $P_{n+1}$.

**156.** Răspunsul este afirmativ. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că există un punct $O$ astfel încît pe orice cerc determinat de el și încă două din $M$ se află un al patrulea punct din $M$. Efectuînd o inversiune de centru $O$, cercurile se vor transforma în drepte (deoarece trec prin $O$). Obținem astfel, considerînd transformatele lui $M$ din care am scos punctul $O$, o mulțime finită de puncte în plan cu proprietatea că pe dreapta determinată de oricare două se găsește cel puțin încă un punct. Conform problemei 153 aceste puncte sînt coliniare ceea ce este echivalent cu faptul că punctele din $M$ sînt conciclice ceea ce este contrar ipotezei problemei.

**157.** Să presupunem că ar exista un punct $O$ care nu are proprietatea cerută. Considerînd ca în problema precedentă o inversiune de centru $O$, sfera se va transforma într-un plan iar cercurile în drepte conținute în acest plan. Aplicînd din nou problema 153 obținem că aceste drepte coincid, ceea ce înseamnă că punctele din $M$ sînt conciclice, absurd.

**158.** Fie $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{25}$ punctele date și să presupunem că $A_1$ are proprietatea că există cît mai multe puncte la distanță cel mult 1 față de el. Să presupunem că acestea sînt în număr de cel mult 11 și că ele se găsesc printre punctele $A_2, A_3, \ldots, A_{12}$. Luînd cîte două puncte arbitrare dintre punctele $A_{13}, A_{14}, \ldots, A_{25}$ împreună cu $A_1$ și aplicînd enunțul, rezultă că distanța dintre aceste puncte este mai mică decît 1. Înseamnă că $A_{13}$ este la distanță cel mult 1 față de $A_{14}, A_{15}, \ldots, A_{25}$ și că aceste puncte se găsesc toate în cercul de rază 1 cu centrul în $A_{13}$.

**159.** Condiția din enunț poate fi interpretată și astfel: benzile de lățime 2 construite pe cele $n$ coarde acoperă cercul. Ducem o sferă de rază $n$ avînd diametrul comun cu al cercului dat. Porțiunile din sferă care se proiectează pe cîte una din benzi au ariile $\leqslant 2 \cdot 2\pi_n$ și ele acoperă sfera, deci avem $m \cdot 4\pi n \geqslant 4\pi n^2 \Rightarrow m \geqslant n$.

Ne-am folosit aici de proprietatea remarcabilă a ariei porțiunilor de sferă cuprinse între 2 plane paralele de a depinde numai de distanța dintre plane.

Acest fapt ne-a permis o aplicare a principiului cutiei care în plan nu era posibilă.

**160.** Considerăm două translații ale lui $F$ amîndouă de lungime 0,001 și de direcții făcînd între ele un unghi de 60°. Notăm cu $F_1$ și $F_2$ cele 2 figuri noi obținute. Se observă că $F \cap F_1 = F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F = \varnothing$. Clar că e suficient să arătăm doar $F \cap F_1 = \varnothing$.

Dacă $A \in F \cap F_1$ fie $A'$ punctul din $F$ care prin prima translație cade peste $A$. Atunci $A$ și $A' \in F$ și $AA' = 0{,}001$.

Deci dacă vom construi pătratul $P'$ cu laturile la distanța 0,001 de laturile primului pătrat, în afara acestuia, vom avea:

$$S_F + S_{F_1} + S_{F_2} \leqslant S_{P'} < 1 + 0{,}005 \Rightarrow$$

$$S_F \leqslant \frac{1{,}005}{3} < 0{,}34$$

**161.** Să ne închipuim că figura este fixă iar punctele se mișcă pe cilindru, toate odată, legate rigid între ele. Fie $P$ unul dintre cele $n$ puncte; cînd un punct descrie figura de pe cilindru, punctul $P$ va descrie o figură egală cu ea. Deci cînd toate cele $n$ puncte descriu figura, punctul $P$ va descrie o figură $F$ de arie strict mai mică decît $n$. Pe de altă parte dacă deplasăm punctul $P$ ca în enunțul problemei el va descrie o suprafață cilindrică de arie $n$. Alegem un punct de pe această suprafață cilindrică mărginită care să nu se găsească în $F$. Deplasăm punctul $P$ în acest punct. Faptul că $P \notin F$ este echivalent cu faptul că nici unul dintre cele $n$ puncte nu se află în figura inițială.

**162.** Răspunsul este afirmativ pentru orice $n$. Fie o dreaptă $d$ în plan și $A_2, ..., A_n \in d$ și $A_1 \notin d$, $A_1A_2 \perp d$.

Ideea este de a găsi o valoare pentru $A_1A_2$ astfel încît el să formeze perechi de numere pitagoreice cu $A_2A_j$, $j = 3, ..., n$ (vezi problema 2). Fie $A_2A_j = a^2_j - b_j^2$ cu $a_j$, $b_j \in \mathbb{N}$ și trebuie ca:

$A_1A_2 = 2a_jb_j$, constant $\forall\ j = 3, ..., n$.

Luînd $A_1A_2 = 2^n = 2 \cdot 2^{n-j+1} \cdot 2^{j-2}$,

vom obține

$$a_j = 2^{n-j+1} \quad \text{și} \quad b_j = 2^{j-2}$$

pentru

$$j = 3, ..., n \Rightarrow A_1A_j = a_j^2 + b_j^2 \in \mathbb{N}.$$

**163.** Fie $n$ cercuri cu proprietatea din enunț. Dacă mai considerăm pe sferă încă un cerc mare care să nu treacă prin punctele de intersecție ale celor $n$ cercuri, atunci el le intersectează pe fiecare în cîte două puncte, toate distincte, deci pe el vor fi $2n$ puncte distincte care determină $2n$ arce de cerc. Fiecare arc va împărți cîte o regiune determinată de primele $n$ cercuri, în două. Dacă notăm cu $P_n$ numărul căutat, pentru $n$ puncte vom avea deci:

$$P_{n+1} = P_n + 2n \Rightarrow P_n = 2(n - 1 + n - 2 + ... + 1) + P_1 =$$
$$= n(n - 1) + 2 \text{ care este numărul cerut.}$$

**164.** Fie $P_n'$ numărul de regiuni în care $n$ cercuri oarecare trecînd prin același punct $A$, împart sfera. Ducem al $n+1$-lea cerc prin $A$ astfel încît să intersecteze a doua oară cercurile în puncte distincte. Pe el se vor găsi $n + 1$ arce distincte care vor determina un plus de $n + 1$ regiuni. Dacă notăm cu $P_n$ numărul cerut de problemă

$$\Rightarrow P_{n+1} \geqslant (n + 1) + P_n' \quad \forall n \text{ și } \forall P_n' \Rightarrow$$

$$P_{n+1} \geqslant (n + 1) + n + (n - 1) + ... + 2 + P_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

Evident $P_{n+1}$ se poate realiza, fapt care rezultă din rezolvarea problemei.



**165.** Fie $S_n'$ numărul de regiuni în care $n$ sfere oarecare trecînd prin $P$ împart spațiul. A $(n-1)$-a sferă o ducem astfel încît să intersecteze toate cele $n$ sfere. Urmele lăsate de cele $n$ sfere pe ea vor fi deci $n$ cercuri care împart sfera în cel mult $P_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ regiuni, conform problemei precedente. Dacă notăm deci cu $S_n$ numărul cerut de problemă, vom avea:

$$S_{n+1} \geqslant S_n' + P_n = S_n' + \frac{n(n+1)}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$S_{n+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right) + S_1' = n + n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} +$$
$$+ \frac{n(n+1)}{4} + 2 = n + 2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

**166.** Ideea este următoarea: Împărțim patrulaterul inscriptibil $ABCD$ ca în fig. 166 unde $EI \parallel AB$, $IH \parallel BC$ iar $IF$ și $IG$ sînt alese astfel încît patrulaterele $AFIE$ și $HIGC$ să fie trapeze isoscele, deci inscriptibile. Pe de altă parte $EI \parallel AF$ și $HI \parallel BC$ implică faptul că patrulaterul $DEIH$ este inscriptibil. $(\widehat{DEI} = \widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB} = 180° - \widehat{DHI})$. Atunci: $\widehat{IFA} = \widehat{EAF} = 180° - \widehat{DCB} = \widehat{IGB}$, deci și patrulaterul $IFBG$ este inscriptibil. Deoarece $EAFI$ este trapez isoscel orice dreaptă paralelă la $AB$ îl împarte în două trapeze isoscele deci inscriptibile și problema este demonstrată $\forall n \geqslant 4$. Mai rămîne să demonstrăm că împărțirea făcută în figură este efectiv posibilă. Fie $\hat{A}$ unghiul cel mai mic al patrulaterului. Să arătăm că nu putem avea $\hat{C} \geqslant 2\hat{D}$ și $\hat{C} \geqslant 2\hat{B}$. Într-adevăr ar rezulta $\hat{C} \geqslant \hat{B} + \hat{D} = 180°$ ceea ce este absurd.

Fie spre exemplu $D$ vîrful pentru care avem $\hat{C} < 2\hat{D}$. Ducem prin $B$ o dreaptă $BN$ astfel încît $\widehat{DAB} = \widehat{NBA}$ ($N$ se află în același semiplan determinat de $AB$ ca și $ABCD$). Deoarece $\hat{B} \geqslant \hat{A}$, $BN$ intersectează pe $ABCD$. Ducem prin $C$ paralela $CM$ la $AB$. Deoarece $\hat{A}$ este cel mai mic unghi al patrulaterului $\Rightarrow \hat{C}$ este cel mai mare $\Rightarrow \widehat{MCB} = 180° - \hat{B} = \hat{D} \leqslant \hat{C}$, deci $CM$ intersectează patrulaterul $ABCD$. Mai ducem prin $C$ o dreaptă $CP$ astfel încît

$$\widehat{PCM} = \widehat{MCD};$$

avem $\widehat{PCD} = 2(\hat{C} - \widehat{MCB}) =$
$= 2\hat{C} - 2\hat{D} < 2\hat{C} - \hat{C} = \hat{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{PCB} > 0.$

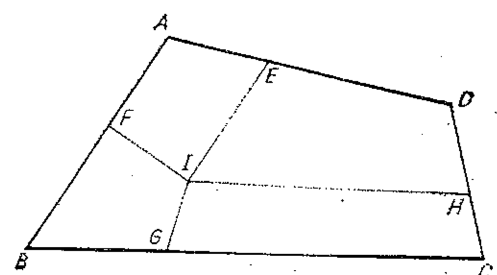


Fig. 166

Paralela $DR$ dusă prin $D$ la $BC$ intersectează pe $AB$ deoarece

$$\widehat{RDC} = 180° - \widehat{DCB} = \hat{A} \leqslant \hat{D}.$$

Există deci în interiorul patrulaterului $ABCD$ puncte care se află între dreptele $DR$, $CP$, $BN$. Fie $I$ un punct din această mulțime. Atunci ducînd $IE \parallel AB$, $IH \parallel BC$ și $IF$, $IG$ astfel încît patrulaterele $AFIE$, $HIGC$ să fie trapeze isoscele se obține efectiv construcția din fig. 166.

**167.** Împărțim fiecare față a lui $P$ în pătrățele de latură 1.

Pe vîrfurile lor care se găsesc în interiorul feței ridicăm perpendiculare. Obținem astfel: $(6-1)(5-1)+(5-1)(4-1)+(6-1)(4-1)=47$, drepte distincte. Să presupunem că fiecare dreaptă intersectează interiorul unui paralelipiped mic. Observăm însă că fiecare paralelipiped poate fi intersectat de exact 2 drepte din cele construite, de unde deducem că numărul paralelipipedelor este mai mare decît $47/2$ ceea ce este absurd, deoarece numărul lor este 20.

**168.** Împărțim dreptunghiul într-o rețea de pătrate de latură 1.

Numerotăm fiecare pătrat ca în figură cu 0, 1 sau 2. Se observă că orice dreptunghi $3 \times 1$ va acoperi un 0, un 1 și un 2.

Dar numărul de 0, 1, 2 după scoaterea celor 4 pătrate este: 20 de 0, 23 de 1, 23 de 2. Dacă pardosimea ar fi posibilă numărul ar trebui să fie același.

**169.** Împărțim paralelipipedul în $8 \times 8 \times 7$ cuburi de latură 1, pe care le colorăm în alb sau în negru, astfel încît oricare două cuburi alăturate să aibă culori diferite. (Evident acest lucru se poate realiza pentru un pătrat de latură 8 obținem chiar o tablă de șah.) Orice paralelipiped de laturi 1, 1, 2 acoperă un cub negru și unul alb. Inițial numărul cuburilor albe și negre este același. Dar cuburile din capetele unei diagonale au aceeași culoare. Deci prin scoaterea lor rămîn mai puține decît din cealaltă culoare și deci umplerea nu mai e posibilă.

**170.** Pentru $n = 4$ se poate.

Pentru $n = 6$ împărțim pătratul în 9 pătrate egale, apoi 4 dintre acestea le unim într-un singur pătrat.

Pentru $n = 7$ împărțim pătratul în 4 pătrate egale și unul dintre aceste în încă 4 pătrate egale.

Pentru $n = 8$ împărțim pătratul în 16 pătrate egale apoi 9 din acestea le unim într-un singur pătrat.

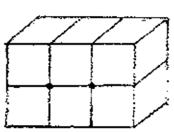

Fig. 167

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

Fig. 168



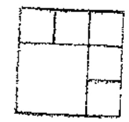

Fig. 170.1

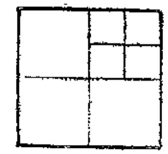

Fig. 170.2

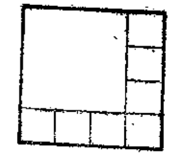

Fig. 170.3

Pentru $n > 8 \Rightarrow n \equiv 6 \pmod 3$ sau $n \equiv 7 \pmod 3$ sau $n \equiv 8 \pmod 3$ și mai observăm că dacă se poate face cu $n$ împărțirea, atunci și cu $n + 3$ se poate face, împărțind unul din cele $n$ pătrățele în 4 pătrate egale deci: $(n-1)+4 = n+3$ pătrate.

**171.** Presupunem că poate fi făcută o astfel de umplere. Alegem cel mai mic cub din cele care apar pe fețe. Se observă că el apare pe o singură față, și alegem cel mai mic cub care se sprijină pe fața acestui cub ales, opusă feței respective. El se află strict în interiorul acestei fețe. Făcînd considerații analoage, ajungem în cele din urmă pe o altă față a cubului mare, cu un cub strict mai mic decît primul ales. Contradicție.

**172.** Ca și în problema 170 ținînd cont că un cub se poate înlocui cu 8 sau cu 27 cuburi mai mici $\Rightarrow$ dacă putem umple cubul cu $n$ cuburi îl putem umple și cu $n + 7$ sau cu $n + 26$ cuburi. Va fi suficient să arătăm pentru 58, ..., 64.

Pentru $n = 58 \equiv 2 \pmod 7$ împărțim întîi cubul în 27 de cuburi egale, apoi opt dintre ele le înlocuim cu un cub. Dintre cuburile mici rămase, împărțim două în cîte 27 de cuburi fiecare, apoi în fiecare din ele unim cîte 8 cuburi. Vom avea deci:

$$(27-7)+2\cdot 26-2\cdot 7=58$$

Pentru $n = 59$ împărțim cubul în 64 cuburi egale, apoi 27 din acestea le unim într-un cub și din cele rămase 3 le împărțim în cîte 8 cuburi egale, deci: $64 - 26 + 3 \cdot 7 = 59$.

Pentru $n = 60$ împărțim cubul în 27 cuburi egale apoi cîte unul din acestea în 27 și respectiv 8 cuburi deci: $27 + 26 + 7 = 60$.

Pentru $n = 61$ împărțim cubul în 27 cuburi egale, apoi 4 din cuburile care apar pe una din fețe, formînd un pătrat pe această față le împărțim în cîte 27 cuburi egale. Aceste din urmă cuburi se pot uni cîte 8 ca să formeze 9 cuburi (fig. 172).

Din celelalte cuburi de la împărțirea inițială se mai pot de asemenea uni 8 cuburi ca să formeze un singur cub și avem în final: $27 + 4 \cdot 26 - 10 \cdot 7 = 61$.

Pentru $n = 62$ avem $62 \equiv 27 \pmod 7$.

Pentru $n = 63$ se face o împărțire analoagă cu $n = 61$:

$$63 = 27 + 3 \cdot 26 - 6 \cdot 7, \text{ și } 64 = 4^3.$$

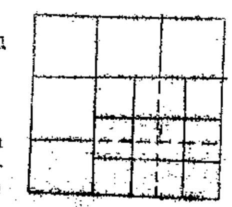

Fig. 172

**173.** Analog cu problema 90 se obține că un poligon cu cel puțin 7 laturi nu poate să aibă mai mult de 5 unghiuri mai mici decît $2\pi/3$. Presupunem că se poate face o pardosire cu poligoane egale și cu $n$ laturi, acestea for-

mînd o rețea plană. În fiecare nod al rețelei avem cel mult două unghiuri mai mari decît $2\pi/3$. Deci raportul dintre numărul unghiurilor mai mari decît $2\pi/3$ și cele mai mici decît $2\pi/3$ în fiecare nod al rețelei este cel mult 2. Trecînd în revistă toate nodurile rețelei, parcurgem toate unghiurile poligoanelor. Deci ar rezulta că raportul total dintre unghiurile mai mari decît $2\pi/3$ și cele mai mici decît $2\pi/3$ este cel mult 2. Deci acest raport este cel mult 2 și pentru unghiurile unui singur poligon. Luînd însă $n$ astfel încît $\frac{n-5}{5} > 2 \Leftrightarrow n > 15$
obținem o contradicție conform primei afirmații.

**174.** Răspunsul e afirmativ. Vom arăta mai mult, că putem face acest lucru cu un pătrat. Fie $A$ unul din nodurile rețelei.

Considerăm un triunghi dreptunghic $\Delta ABC$ cu $AB$ și $AC$ pe drepte ale rețelei iar $AB = 3$, $AC = 4 \Rightarrow BC = 5 \in \mathbf{N}$.

Considerăm un alt triunghi $A'B'C'$ cu $A'B'$ pe $AC$ și astfel ca $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$, $B' = C$ și $\widehat{C'CB} = 90°$.

Punctele $C'$, $C$, $B$ vor determina pătratul căutat.

*Observație.* Se poate porni în rezolvare de la alte numere pitagoreice, nu neapărat 3, 4, 5 (vezi problema 2).

Se observă că, cu ajutorul metodei de mai sus, se poate înscrie în rețea un dreptunghi asemenea cu un dreptunghi oarecare dar avînd laturile numere întregi, astfel ca vîrfurile sale să fie pe drepte distincte ale rețelei.

**175.** Evident pătratul se poate înscrie. Vom arăta că el e singurul poligon regulat cu această proprietate.

Pentru $n = 3, 5$ vom arăta mai general că nu există unghiuri de $2\pi/3$ și $3\pi/5$ cu vîrful într-un nod al rețelei care să aibă amîndouă laturile trecînd prin vîrfuri ale rețelei. Dacă nu, fie $A$ și $B$ noduri ale rețelei și $\widehat{AMB} = \frac{2\pi}{3}$ (respectiv $3\pi/5$) $\Rightarrow$ verticala sau orizontala) din $M$ trece prin interiorul lui $AMB$ $\left(\text{deoarece } \widehat{AMB} > \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \widehat{AMB} = \alpha + \beta$ cu

$$\alpha = \sphericalangle(AM, \text{ verticala din } M) \text{ și}$$

$$\beta = \sphericalangle(BM \text{ verticala din } M) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta \in \mathbf{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \in \mathbf{Q}.$$

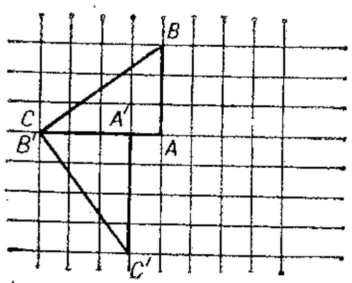

Fig. 174

Dar $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ și $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$ se calculează din ecuația obținută la problema 82 care ne dă $\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} \notin \mathbf{Q}$.

Deci $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ în contradicție cu rezultatul anterior, obținut în ipoteza că $A$, $M$, $B$ sînt noduri ale rețelei.



Pentru $n > 6$ fie $A_1, \ldots, A_n$ poligonul regulat înscris în rețea avînd latura cea mai mică dintre toate poligoanele cu această proprietate și fie $O$ centrul său.

Fie $O'$ un nod al rețelei. Fie $\overrightarrow{O'B_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ pentru $i = 1, \ldots, n+1$ și $\overrightarrow{O'B_n} = \overrightarrow{A_nA_1} \Rightarrow B_1 \ldots B_n$ poligon regulat cu vîrfurile în rețea și $B_iB_{i+1} < A_iA_{i+1}$ deoarece $\Delta O'B_iB_{i+1} \sim \Delta O'A_iA_{i+1}$, isoscele și $\widehat{A_iOA_{i+1}} < 60° \Rightarrow B_iB_{i+1} < O'B_i = A_iA_{i+1}$ absurd, deoarece contrazice minimilitatea lui $A_iA_{i+1}$.

Deci un asemenea poligon nu există nici pentru $n \geq 7$.

**176.** Răspunsul e afirmativ și rezultă imediat din faptul că un cub se poate înscrie într-o astfel de rețea.

Considerăm în acest cub două fețe opuse. De pe prima față luăm două puncte opuse pe o diagonală iar de pe cealaltă față două puncte opuse pe o diagonală neparalelă cu prima. Aceste 4 puncte formează un tetraedru regulat.

**177.** Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul dat și $O$ centrul sferei circumscrise. Fie $B_1B_2B_3B_4$ tetraedrul avînd fețele tangente acestei sfere în $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Să arătăm că suma distanțelor unui punct $M$ oarecare (interior lui $B_1B_2B_3B_4$ sau situat pe fețele sale) la fețele lui $B_1B_2B_3B_4$ este constantă. Tetraedrul $B_1B_2B_3B_4$ se descompune în 4 tetraedre avînd vîrful $M$ comun și ca baze fețele $B_1B_2B_3$ etc. Atunci $V = \frac{1}{3} \cdot a \sum_{i=1}^{4} MM_i$

unde $V = V_{B_1B_2B_3B_4}$,

$a$ = aria unei fețe a lui $B_1B_2B_3B_4$ (tetraedru regulat)

$M_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) proiecțiile lui $M$ pe fețele lui $B_1B_2B_3B_4$.

Deci $\sum_{i=1}^{4} MM_i = \frac{3V}{a}$ = constant.

Dacă $M = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} MM_i = \sum_{i=1}^{4} OA_i$. Dar $MM_1 \perp B_2B_3B_4$ etc. $\Rightarrow MA_i \geq MM_i$, $I = 1, 2, 3, 4$.

Adunînd: $\sum_{i=1}^{4} MA_i \geq \sum MM_i = \sum_{i=1}^{4} OA_i$.

Dacă $M'$ este exterior lui $B_1B_2B_3B_4 \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{4} M'A_i > \sum_{i=1}^{4} MA_i > \sum_{i=1}^{4} OA_i.$$

**178.** Fie un tetraedru $T$ cu vîrfuri în $ABCD$.

Fie $AB$ latura cea mai mare a tetraedrului. Presupunem $AC + AD \leq AB$. Dar $AB < AC + BC$ și $AB < AD + BD \Rightarrow$

$$2AB < AC + BC + AD + BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB < BC + BD \Rightarrow$$

din $BA$, $BC$ și $BD$ se poate construi un triunghi deoarece avem în plus $BA \geq BC \Rightarrow BD + BA > BC$ și $BA \geq BD \Rightarrow BC + BA > BD$.

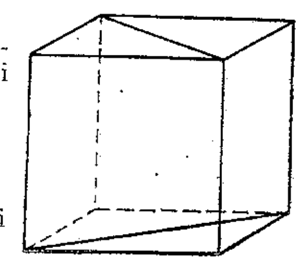
Fig. 176

**179.** Fie $ABCD$ tetraedrul şi $AB$ cea mai mare muchie a sa. Atunci triunghiurile $\Delta ACD$ şi $\Delta BCD$ au toate laturile mai mici sau egale cu 1.

Fie $AF \perp CD$ şi $BK \perp CD \Rightarrow AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$,

unde $a = DC$.

Într-adevăr avem: $AF^2 = AC^2 - CF^2 \leqslant 1 - CF^2$ şi

$$AF^2 = AD^2 - FD^2 \leqslant 1 - FD^2.$$

Deci $2AF^2 \leqslant 2 - (CF^2 + FD^2) = 2 - a^2 + 2CF \cdot FD$.

Din $(CF - FD)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (CF + FD)^2 - 4CF \cdot FD \geqslant 0$

$$\Rightarrow CF \cdot FD \leqslant a^2/4.$$

Deci

$$AF^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = 1 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

Analog $BK \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

Înălţimea tetraedrului $= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot AS \cdot \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$

$$= \frac{1}{24} a(4 - a^2).$$

Faptul că $a(4 - a^2) \leqslant 3$ se poate arăta fie folosind derivata pentru $f(x) = x(4 - x^2)$, fie observînd că polinomul: $a^3 - 4a + 3 = (a - 1)(a^2 + a - 3) \geqslant 0$ în intervalul $(0, 1)$ deci că $3 \geqslant 4a - a^3 = a(4 - a^2)$.

**180.** E suficient să ne fixăm atenţia asupra a două din triunghiuri de exemplu $\Delta ABC$ şi $\Delta BCD$ şi putem să le presupunem coplanare.

Fie $A'$, $B'$, $C'$ punctele de contact ale cercului înscris în $ABC$ cu $BC$, $AC$, $AB$ şi $x = BA' = BC'$, $y = AC' = AB'$ şi $z = CA' = CB' \Rightarrow$

$$x + y = AB$$
$$y + z = AC$$
$$z + x = BC \Rightarrow$$

$$x = \frac{AB + AC + BC}{2} - AC = \frac{AB - AC + BC}{2} = \frac{BD - CD + BC}{2}$$

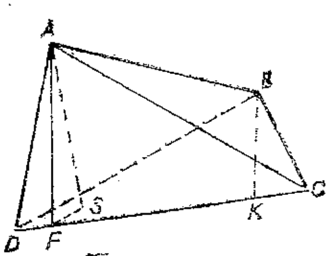

Fig. 179

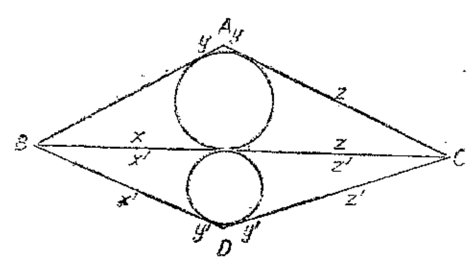

Fig. 180



şi

$$z = \frac{AB + AC + BC}{2} - AB = \frac{-AB + AC + BC}{2} = \frac{CD - BD + BC}{2}.$$

Punînd acum $D$ în loc de $A$ şi $x'$, $y'$, $z'$ în loc de $x$, $y$, $z$ obţinem pentru punctul de contact al cercului înscris în $\Delta BCD$ cu $BC$

$$x' = \frac{BD + DC + BC}{2} - DC = \frac{BD - DC + BC}{2} = x$$

$$z' = \frac{DB + DC + BC}{2} - DB = \frac{-DB + DC + BC}{2} = z$$

deci cercurile înscrise în triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta BCD$ sînt tangente.

**181.** Evident problema se reduce la cazul în care $P$ şi $Q$ se află pe feţele triedrului cu vîrful în $A$. Putem presupune că $P$ se află pe $BC$ şi $Q$ pe $CD$. Fie $AB = BC = CD = DA = AC = BD = 1$ şi $PC = l_1 \cdot QC = l_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \widehat{PAQ} = \frac{AP^2 + AQ^2 - PQ^2}{2AP \cdot AQ} \geqslant \frac{PC^2 + AC^2 - PC \cdot AC + AC^2 + CQ^2}{2} -$$

$$- \frac{AC \cdot CQ + PC^2 + CQ^2 - PC \cdot CQ}{2} = \frac{1}{2}(l_1^2 + 1 - l_1 + l_2^2 + 1 - l_2 - l_1^2 -$$

$$- l_2^2 + l_1 l_2) = \frac{1}{2} + \frac{(1 - l_1)(1 - l_2)}{2} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{PAQ} \leqslant 60°.$$

**182.** Vom observa mai întîi că suma unghiurilor diedre ale unui triedru $Oxyz$ este mai mare decît $\pi$.

Într-adevăr, ducem dreapta bisectoare interioară a unghiului triedru (intersecţia planelor bisectoare interioare ale diedrelor) şi considerăm un plan perpendicular pe ea. Acest plan intersectat cu triedrul ne dă un triunghi. Fiecare din unghiurile diedre este mai mare decît unghiul corespunzător al triunghiului deci suma unghiurilor diedre ale triedrului este $> \pi$. Însumînd după cele 4 triedre ale tetraedrului şi ţinînd seama că fiecare unghi diedru e numărat de două ori obţinem relaţia din enunţ.

**183.** Vom arăta că se poate construi un tetraedru cu toate feţele egale cu un triunghi dat dacă şi numai dacă acest triunghi e ascuţitunghic.

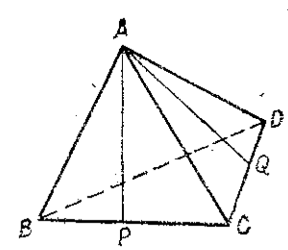

Fig. 181

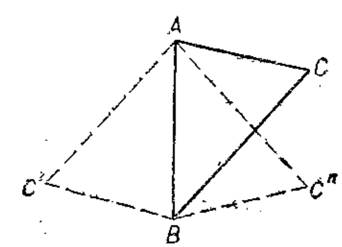

Fig. 183


Fig. 188

Va fi suficient să arătăm că $d_1$ și $d_2$ coincid. Vom observa mai întîi că dacă proiectăm un punct din spațiu întîi pe planul $\pi_1$, iar această proiecție o proiectăm pe $\Delta$ obținem același punct ca atunci cînd proiectăm punctul întîi pe $\pi_2$ iar această proiecție pe $\Delta$. Într-adevăr din teorema celor trei perpendiculare rezultă că aceste puncte coincid cu proiecția punctului din spațiu pe $\Delta$. Cu această observație problema s-a terminat, deoarece dacă luăm $M \in d_1$ atunci el va fi proiecția unui punct $N \in C_1$ care va fi la rîndul său proiecția unui punct al corpului, care proiectat pe $\pi_2$ va aparține lui $C_2$ iar acesta proiectat pe $\Delta$ va fi egal cu $M \Rightarrow M \in d_2 \Rightarrow d_1 \subset d_2$; analog $d_2 \subset d_1$.

Observînd că $d_1$ este diametrul lui $C_1$ iar $d_2$ diametrul lui $C_2$ problema este demonstrată.

**188.** Presupunem $R = \frac{1}{2}$ și înlocuim fiecare șină cu un unghi drept de laturi $\frac{1}{2}$ ca în figura 188.

Obținem o linie poligonală închisă, trasată pe rețeaua plană de pătrate de latură 1, ale cărei vîrfuri au coordonate întregi. Este suficient să arătăm că numărul laturilor poligonului se divide cu 4. Putem presupune că un vîrf al poligonului are coordonatele (0, 0). Deoarece laturile poligonului sînt toate egale cu 1, se observă că pornind dintr-un punct de coordonate întregi pare, de abia după parcurgerea a exact 4 laturi ne aflăm din nou într-un punct de coordonate pare. Deci pentru a ajunge din (0, 0) tot în (0, 0) parcurgînd toată linia poligonală trebuie să trecem prin $4k$ laturi.

## CUPRINS