Analyse II

Cours de Sorin Popa[a]

October 15, 2015

[a]rédigé sous LaTeXpar Constantin Piron

Contents

Chapter I

Approximation de fonctions

I.1 Introduction

Soit $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ (*ou* $\mathbb{R}$)

Définition I.1.1 *On dit que* $f_n \to f$ *converge uniformément si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Autrement dit:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon) \ t.q. |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall m \geq n$$

Définition I.1.2 *On dit que* $f_n \to f$ *converge en chaque point si*

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ \forall x \in X$$

Autrement dit:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon, x) \ t.q. |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall m \geq n$$

Exemple I.1.1 *Par Weierstraß si* $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ *est continue alors*
$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists$ *polynôme p(x) t.q.*

$$\sup_{x\in[0;1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Exemple I.1.2

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \leq \frac{1}{n} \\ nx \ si \ 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$$

$f_n(x)$ *converge vers f(x)* $\forall x \in [0;1]$.
En effet si $x = 0$ $f_n(0) = 0$ *et* $f(0) = 0$. *Si* $x > 0(fix\acute{e})$,
$\exists n \geq 1$ *t.q.* $\frac{1}{n} < x$ $f_m(x) = 1$ *pour* $\substack{m\geq n \\ mx\geq nx>1}$ $(f_k(x) = 1$ *pour* $kx \geq 1)$

Donc $\{f_n(x)\}$ *est constante et vaut 1 après un n assez grand.*

$$f_n(x) \to 1 \ \forall x > 0$$

Mais $f_n \not\to f$ *uniformément. En fait: si* $f_n : [0;1] \to \mathbb{C}$ (*ou* $\mathbb{R}$) *est continue et* $f_n \to f$ *uniformément alors f est continue* $\Rightarrow\Leftarrow$

Rappel: $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$est compact ($\iff$ fermé, borné)

$$\iff$$

$\{\mathcal{U}i\}$ est un recouvrement de X par des boules ouvertes,
alors $\exists$ un sous-ensemble fini $\mathcal{U}i_1, ..., \mathcal{U}i_n \in \{\mathcal{U}i_i\}$ t.q.

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}i_j \supset X$$

Notation:

$$C(x) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \ continue\}$$

$$C_{\mathbb{R}}(x) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \ continue\}$$

$$X compact \Rightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$$

$$De \ plus \ \exists \ x_0 \in X \ t.q. |f(x_0)| = sup(|f(x)|) = \|f\| \ (norme \ sup \ de \ f)$$

$$(\exists \ un \ supremum \ atteint)$$

Propriétés de C(X),$\| \ \|$

$$C(X) \ est \ une \ alg\grave{e}bre \begin{cases} C_{\mathbb{R}}(X) \ est \ un \ espace \ vectoriel \ (sur \, \mathbb{C} \ ou \ \mathbb{R}) \\ (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \\ pour \ f, g \in C(X) \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \\ On \ a \ aussi \ une \ op\acute{e}ration \ de \ multiplication \\ de \ facteurs. \\ f, g \in C(X) \ alors \ (fg)(x) = f(x)g(x) \\ f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2) \\ \alpha(fg) = (\alpha f)g \end{cases}$$

$$La \ norme \ satisfait : \begin{cases} \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \\ \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \\ \|fg\| \leq \|f\| \|g\| \end{cases}$$

D'autre part, si $f : X \to \mathbb{C}$ $(ou\mathbb{R})$ est approximée par $f_n \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$i.e.

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ (si \ n \to \infty)$$

$$ou \ \|f_n - f\| \to \ 0$$

alors $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ (exercice).
Si une suite $\{f_n\} \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ est de Cauchy[a] alors $\exists f \in C(X) \ t.q. \ \|f_n - f\| \to 0 \ (si \ n \to \infty)$.

Définition I.1.3 *On dit alors que $C(X)$ est complet par rapport à $\| \ \|$.*

[a] i.e.$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \geq 1 \ \forall n \geq N \ \forall k \geq 1 \ |f_n - f_{n+k}| < \varepsilon$

I.2 Théorème de Stone-Weierstraß

Rappel:

Théorème I.2.1 (Weierstraß) *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) continue, alors $\exists$ une suite de polynômes P_n t.q.$\|f - P_n\| \to 0$.*

Théorème I.2.2 (Stone-Weierstraß) *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Soit A[b] une sous-algèbre de $C_{\mathbb{R}}(X)$[c] qui sépare les points de X.[d]*

Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in A$ t.q. $\|f - g\| < \varepsilon$.

Démonstration *Soit l'adhérence de A*

$$\overline{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X) |\ \exists \{f_n\} \subset A \text{ avec } \|f_n - f\| \to 0\}$$

On doit montrer que $\overline{A} = C_{\mathbb{R}}(X)$.

Etape ① *: $\overline{A}$ est une algèbre qui sépare les points de X.*

Démonstration

$$f, g \in \overline{A},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \|\alpha f_n + \beta g_n - \alpha f - \beta g\| \leq |\alpha|\|f_n - f\| + |\beta|\|g_n - g\| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon \ \Rightarrow (\alpha f + \beta g) \in \overline{A}$$

De plus:

$$\|f_n g_n - fg\| = \|f_n g_n - f_n g + f_n g - fg\| \leq \|f_n\|\|g_n - g\| + \|g\|\|f_n - f\| < M_1\varepsilon + M_2\varepsilon \ \Rightarrow fg \in \overline{A}$$

Comme $A \subset \overline{A}$, on a que $\overline{A}$ sépare les points de X.

Comme $\overline{A}$ est une algèbre, $f^n \in \overline{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $P(f) \in \overline{A})\ \forall P$ (polynôme).

Etape ② *: Si g appartient à l'adhérence de $\overline{A}$, alors $g \in \overline{A}$.*

Démonstration

Soit $\{g_m\} \subset \overline{A}$ t.q. $\|g - g_m\| \to 0$. Comme $\{g_m\} \subset \overline{A}$, $\exists \{f_n\} \subset A$ t.q. $\|f_n - g_m\| \to 0$. Donc:

$$\|g - f_n\| = \|g - g_m + g_m - f_n\| \leq (\|g - g_m\| + \|g_m - f_n\|) \to 0$$

Etape ③ *: Si $f \in \overline{A}$, alors $|f| \in \overline{A}$.*

Démonstration

Montrons d'abord que Si $f \in \overline{A}$ est ≥ 0 (en tout point), alors $\sqrt{f} \in \overline{A}$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $f \in [0;1]$. ($f \geq 0$ et f est bornée, car elle est continue sur un compact).

Par Weierstraß, on a qu'il existe un $P_n(t)$ t.q. $|P_n(t) - \sqrt{t}| < \varepsilon\ \forall \varepsilon,\ \forall t \in [0;1]$.

On a :

$$\|P_n(f) - \sqrt{(f)}\|_\infty = \sup_{x \in X} |P_n(f(x)) - \sqrt{f(x)}| \leq^{e} \sup_{t \in [0;1]} |P_n(t) - \sqrt{t}| \to 0$$

---

[b] A doit contenir des fonctions constantes

[c] $A \subset C(X)$ t.q. si $f, g \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f + \beta g \in A$ et $fg \in A$
Exemple: Ensemble des fonctions polynômiales
$X = [0;1]$, A={ polynômes}

[d] i.e. $\forall x \neq y \in X\ \exists f \in A$ t.q. $f(x) \neq f(y)$
Exemple:
-$f(x) = x$
$-\ X = [0;1] \times [0;1]$ $A = \{$polynômes à 2 variables$\}$. Soit$(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$.
Si $^{x_1 \neq y_1 alors f(x_1,x_2)=x_1}_{x_2 \neq y_2 alors f(x_1,x_2)=x_2}$

[e] f ne couvre pas forcément tout $[0;1]$

Donc $\sqrt{f} \in \overline{\overline{A}}$, *donc, par l'étape* ② , $\sqrt{f} \in \overline{A}$. *Ce qui implique que* $|f| = \sqrt{f^2} \in \overline{A}$.

Etape ④ *Soient* $f, g \in \overline{A}$, *alors:*

$$\max\{f(x), g(x)\} = (f \vee g)(x) = \frac{f + g + |f + g|}{2} \in \overline{A}$$

et

$$\min\{f(x), g(x)\} = (f \wedge g)(x) = \frac{f + g - |f + g|}{2} \in \overline{A}$$

Etape ⑤ *: Soient* $x, y \in X$, $x \neq y$ *et* $a, b \in I\!R$, *alors* $\exists\ f \in \overline{A}$ *t.q.* $f(x)=a$ *et* $f(y)=b$.

Démonstration

Comme $\overline{A}$ *sépare les points de* X, $\exists\ g \in \overline{A}$ *t.q.* $g(x) \neq g(y)$. *En prenant* $f(z) \stackrel{déf}{=} a + (b - a)\frac{g(z)-g(x)}{g(y)-g(x)}$, *on a bien ce qu'on cherchait.*

Etape ⑥ $\forall f \in C_{I\!R}(X)$, $\forall x \in X$ *et* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h_x \in \overline{A}$ *t.q.* $h_x(x) = f(x)$ *et* $h_y(y) \leq f(y) + \varepsilon\ \forall y \in X$.

Démonstration

Soit x *fixé. Par l'étape* ⑤ , *on a qu'* $\exists\ h_{x,y}\overline{A}$ *t.q.* $h_{x,y}(x) = f(x)$ *et* $h_{x,y}(y) = f(y)$. *Par continuité de* $h_{x,y}(z)$ *et de* $f(z)$ *en* y, $\exists V_y$ *t.q.* $|h_{x,y}(z) - f(z)| < \varepsilon^f\ \forall z \in V_y \Rightarrow h_{x,y}(z) \leq f(z) + \varepsilon$.

Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} V_y \stackrel{X\ compact}{\Rightarrow} \exists\ y_1, \ldots, y_n\ t.q.\ X \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

On définit:

$$h_x = \bigwedge_{i=1}^{n} h_{x,y_i}$$

On a que $h_x \in \overline{A}$ *(car tous les* $h_{x,y_i} \in \overline{A}$*). Par le même raisonnement, on a que* $h_x(x) = f(x)$. $\forall z \in X$, *on a que* $z \in V_{y_k}$, *donc* $h_x(z) \leq h_{x,y_k}(z) \leq f(z) + \varepsilon$.

Etape ⑦ $\forall f \in C_{I\!R}(X), \forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in \overline{A}$ *t.q.* $f - \varepsilon \leq h \leq f + \varepsilon$.

Démonstration *Par l'étape* ⑥ , $\forall x \in X$, $\exists h_x$ *t.q.* $h_x(x) = 0$ *et* $h_x \leq f(z) + \varepsilon\ \forall z \in X$.

Par continuité de $h_x(z)$ *et de* $f(z)$ *en* x *et comme* $(h_x - f)(x) = 0$, $\exists$ *un voisinage de* x U_x *t.q.* $(h_x - f)(z) \geq -\varepsilon \Rightarrow h_x(z) \geq f(z) - \varepsilon$.

Comme

$$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x \stackrel{X\ compact}{\Rightarrow} \exists\ x_1, \ldots, x_m\ t.q.\ X \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$$

On définit:

$$h = \bigvee_{i=1}^{m} h_{x_i}$$

On a que $h \in \overline{A}$ *(car tous les* $h_{x_i} \in \overline{A}$*).* $\forall z \in X$, *on a que* $z \in U_{i_k}$, *donc* $h(z) \geq h_{x_k}(z) \geq f(z) - \varepsilon$.

Comme $h_{x_i}(z) \leq f(z) + \varepsilon\ \forall i, h(z) \leq f(z) + \varepsilon$.

Comme:

$$f(z) - \varepsilon \leq h(z) \leq f(z) + \varepsilon$$

$^f(h_{x,y}(y) - f(y)) = 0$

On a que $\|f-h\|_\infty < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. *On a donc que* f *appartient à l'adhérence de* $\overline{A}$. *Ceci implique, par l'étape* ② , *que* $f \in \overline{A}$. *Donc* $\overline{A} = C_{I\!R}(X)$ □

Corollaire I.2.1 *Si* $A_0 \subset C(X)$ *est une sous-algèbre avec la propriété suivante:*
si $f \in A_0$ *alors* $\overline{f} \in A_0$[g] $(\overline{f}(x) = \overline{f(x)})$
et tel que A_0 *sépare les points de X.*
Alors $\forall f \in C(X),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in A_0$ *t.q.* $\|f-g\| < \varepsilon$.

<u>Démonstration</u>

On prend $f_1 = Re(f)$ *et* $f_2 = Im(f),\ \in C_{I\!R}(X)$

$$A_{0,I\!R} := \{Re(g),\ Im(g)\ |g \in A_0\}$$

Alors $A_{0,I\!R}$ *est une algèbre (exercice) et elle sépare les points de* X. *Donc, par Stone-Weierstraß réel, on a :*

$$\exists\ g_1 \in A_{0,I\!R}\ t.q.\ \|f_1 - g_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\ g_2 \in A_{0,I\!R}\ t.q.\ \|f_2 - g_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais alors $\|(f_1 + if_2) - (g_1 + ig_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Définition I.2.1 (Mesure) *Si* $D \subset [0;1]$ *est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints* D_n[h] *alors:*

$$m(D) = \sum_{n=1}^{\infty} l(D_n)$$

Proposition I.2.1

$$Si\ \ f,g : [0;1] \to I\!R \ continues\ et\ si\ \int_0^1 |f(x)-g(x)|\ dx\ \ < \varepsilon^{i}$$

Alors la mesure de $\{t \in [0;1]\ |\ |f-g|(t) < \varepsilon^{\frac{1}{2}}\} > 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

<u>Observation:</u>

$$\mathcal{X}_D = \begin{cases} 1\ si\ x \in D \\ 0\ sinon \end{cases}$$

est intégrable au sens de Riemann et $\int \mathcal{X}_D = m(D)$.
De même que si f *est continue, alors* $f\mathcal{X}_D$ *est Riemann intégrable.*
On a aussi que sur $F \overset{déf}{=} [0;1]\backslash D$ *on a* $t \in F$ *alors* $|f(t)-g(t)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$[j]

<u>Démonstration:</u>

Par l'absurde, on suppose que:

$$m(\underbrace{\{t \in [0;1]\ |\ |f-g|(t) < \varepsilon^{\frac{1}{2}}\}}_{D} \leq 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Mais alors $|f-g|(t) \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ *pour* $t \in F$. *Donc*

$$\varepsilon \overset{par\ hypothèse}{>} \int_0^1 |f-g|(t)\ dt = \int_0^1 1|f(t)-g(t)|\ dt$$

[g] i.e. A_0 est auto-adjoint
[h] sauf ceux qui contiennent 0 ou 1
[i] Intégration de Riemann
[j] Car F est le complémentaire de D

$$= \int_0^1 \underbrace{(\mathcal{X}_D + \mathcal{X}_F)}_{1} |f-g|dt = \underbrace{\int_0^1 \mathcal{X}_D |f-g|dt}_{>0} + \int_0^1 \mathcal{X}_F |f-g|dt$$

$$\geq \int_0^1 \mathcal{X}_F \underbrace{|f(t)-g(t)|}_{\geq \varepsilon^{\frac{1}{2}}} dt \geq \int_0^1 \mathcal{X}_F \varepsilon^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \mathcal{X}_F dt = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-\mathcal{X}_D) dt$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 dt - \int_0^1 \mathcal{X}_D dt) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (1 - m(D))$$

$$Donc\ \varepsilon > \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1-m(D)), donc\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} > 1 - m(D)\ et\ m(D) > 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Rightarrow\Leftarrow \quad \square$$

Conclusion:

Si $\int_0^1 |f-g|dt$ *est "petite", alors l'ensemble* D *des points* $t \in [0;1]$ *où* $|f(t)-g(t)|$ *est "petite" a une mesure "grande". (*D *est presque tout* $[0;1]$*)*

I.3 Théorème de Dirichlet

Définition I.3.1 *Soit $\Phi_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, un ensemble de fonctions continues.*
On l'appelle système orthogonal si :

$$\int_a^b \Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}\, dx = 0 \ \forall\ n \neq m$$

Si de plus

$$\int_a^b \underbrace{\Phi_n(x)\overline{\Phi_n(x)}}_{|\Phi_n|^2} = 1$$

on a affaire à un système orthonormal.

Exemple I.3.1

$$\Phi_0 = 1, \Phi_{2n-1}(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \Phi_{2n}(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$$

forme un système orthogonal sur [-L;L] .
Examinons le cas où L=1.
On sait que $e^{in\pi x} = \cos n\pi x + i \sin n\pi x$, donc

$$\cos n\pi x = \frac{1}{2}(e^{in\pi x} + e^{-in\pi x})$$

$$\sin n\pi x = \frac{1}{2i}(e^{in\pi x} - e^{-in\pi x})$$

Donc, toute fonction

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos n\pi x + B_n \sin n\pi x) : [-1;1] \to \mathbb{C}$$

peut s'écrire comme:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\pi x}$$

Les relations d'orthogonalité sont:

$$\int_{-1}^{1} e^{in\pi x} e^{-im\pi x}\, dx = \begin{cases} 2 \ si\ m = n \\ 0 \ si\ m \neq n \end{cases} \ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$$

Donc $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi x} : [-1;1] \to \mathbb{C}$
est un système orthonormal.
Si $f : [-1;1] \to \mathbb{C}$ alors:

$$c_n = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{\Phi_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} f(x) e^{-in\pi x}\, dx$$

est le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f relativement au système $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$
La série de Fourier est notée:

$$\sum_k c_k \Phi_k$$

Problème

Si on a $\{\Phi_n\}$ assez grand ou complet peut-on écrire toute fonction continue (Riemann-Intégrable) $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ de la manière suivante:

$$\sum_n c_n \Phi_n$$

avec clarification de convergence.

Définition I.3.2 *$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux si $\exists\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ t.q. $f_{|(x_{i-1};x_i)}$ est continue $\forall n \geq i \geq 1$ et $\exists\ f(x_i^{\pm})$*

Définition I.3.3 *$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est lisse par morceaux si $\exists\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ t.q. $f_{|(x_{i-1};x_i)}$ est continue, différentiable, et si sa dérivée est continue $\forall n \geq i \geq 1$ et $\exists\ f(x_i^{\pm}),\ \exists\ f'(x_i^{\pm})$*

Théorème I.3.1 (Inégalité de Bessel) *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, soit $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ un système orthonormal sur [a;b]*

$$et\ f \sim \sum_n c_n \Phi_n{}^{k}$$

Alors on a :

$$a) \int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} c_n\Phi_n|^2\ dx \leq \int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n\Phi_n|^2\ dx$$

$$\forall\ \gamma_1, ..., \gamma_N \in \mathbb{C}$$

L'égalité a lieu ssi $\gamma_n = c_n$

$$b) \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f|^2\ dx$$

Démonstration

$$\int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n\Phi_n|^2\ dx = \int_a^b (f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n\Phi_n)\overline{(f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n\Phi_n)}\ dx$$

$$= \int_a^b f\bar{f}\ dx + \sum_{n,m=-N}^{N} \gamma_n\overline{\gamma_m} \underbrace{\int_a^b \Phi_n\overline{\Phi_m}}_{=\delta_{n,m}} - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n \underbrace{\overline{\int_a^b \overline{\Phi_n} f\ dx}}_{=\overline{c_n}} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{\gamma_n} \underbrace{\int_a^b \overline{\Phi_n} f\ dx}_{=c_n}$$

$$= \int_a^b |f|^2\ dx - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n\overline{c_n} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{\gamma_n}c_n + \sum_{n=-N}^{N} |\gamma_n|^2 + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2}_{=0}$$

$$= \int_a^b |f|^2\ dx - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} |c_n - \gamma_n|^2}_{\geq 0} \geq \int_a^b |f|^2\ dx - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

[k] i.e. $c_n = \int f\overline{\Phi_n}$

De l'égalité

$$\int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n \Phi_n|^2 \ dx = \int_a^b |f|^2 \ dx \ - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \ + \sum_{n=-N}^{N} |c_n - \gamma_n|^2$$

Evaluée en $\gamma_n = c_n$, on obtient que:

$$\int_a^b |f|^2 \ dx \ - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} c_n \Phi_n|^2 \ dx$$

On a donc bien

$$\int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n \Phi_n|^2 \ dx \ \geq \ \int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} c_n \Phi_n|^2 \ dx$$

b) on a vu en a) que

$$\int_a^b |f|^2 \ dx \ - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \int_a^b |f - \sum_{n=-N}^{N} c_n \Phi_n|^2 \ dx$$

On en tire:

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \int_a^b |f|^2 \ dx \ - \int_a^b |f - S_N(f)|^2 \ dx \square$$

Lemme I.3.1 *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ continues par morceaux[1] On dénote:*

$$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}}$$

Alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\int_a^b f(x)\overline{g(x)} \ dx| \ \leq \ \|f\|_2 \|g\|_2$$

On a en effet affaire à un produit scalaire (noté " $<,>$ ") (cela sort des propriétés de l'intégrale). Pour $g \neq 0$ on a que:

$$\|f - \frac{<g,f>}{\|g\|^2} g\|^2 = < f - \frac{<g,f>}{\|g\|^2} g, f - \frac{<g,f>}{\|g\|^2} g >$$

$$= <f,f> - \frac{<g,f>}{\|g\|^2} <f,g> - \frac{<f,g>}{\|g\|^2} <g,f> + \frac{<f,g><g,f>}{\|g\|^4} <g,g>$$

$$= \|f\|^2 + \frac{1}{\|g\|^2} |<f,g>|^2 (-1-1+1)$$

$$= \|f\|^2 - \frac{|<f,g>|^2}{\|g\|^2}$$

[1]Il suffit qu'elles soient intégrables au sens de Riemann,et bornées

$$On\ a\ donc\ :|<f,g>|^2=\|f\|^2\|g\|^2-\|g\|^2\|f-\frac{<g,f>}{\|g\|^2}g\|^2\leq\|f\|_2^2\|g\|_2^2\square$$

On en tire l'inégalité du triangle:

$$\|f+g\|_2\leq\|f\|_2\ +\ \|g\|_2$$

de la manière suivante:

$$\|f+g\|^2=<f+g,f+g>=<f,f>+<f,g>+<g,f>+<g,g>=\|f\|^2+2\ Re(<f,g>)+\|g\|^2$$

$$\leq\|f\|^2+2\ |Re(<f,g>)|+\|g\|^2\leq\|f\|^2+2|<f,g>|+\|g\|^2$$

$$\leq\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2\square$$

Corollaire I.3.1 (du théorème de Stone-Weierstraß) *$\forall f:[-1;1]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux $\forall\varepsilon,\exists P:[-1;1]\to\mathbb{C}$, un polynôme trigonométrique $P(x)=A_0+\sum A_n\cos n\pi x+B_n\sin n\pi x$ t.q.$\|f-P\|<\varepsilon$*

__Démonstration__

On prend une fonction g continue telle que g(1)=g(-1) et $\|f-g\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$

On peut interpréter g comme une fonction $\tilde{g}:T\to\mathbb{C}$ (T est un tore)

En prenant $z=e^{in\pi x}$ et $\tilde{g}(z)=g(x)$, on a que $\tilde{g}$ est continue sur T.

De plus, on a en C(T), l'algèbre $A=\sum a_ne^{in\pi x},a_n\in\mathbb{C}$ (ensemble des polynômes en $z,\bar{z}$)

On a que A est une algèbre auto-adjointe ,que $1\in A$ et que A sépare les points de T.

Donc, par Stone-Weierstraß, on a que A est dense en C(T), il en découle que $\exists P\in A$ t.q.

$$\|\tilde{g}-P\|<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow|g(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow(\int_{-1}^{1}|g(x)-P(x)|^2\ dx)^{\frac{1}{2}}\leq(\int_{-1}^{1}(\frac{\varepsilon}{4})^2\ dx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$\|f-P\|_2=\|f-g+g-P\|_2\leq\|f-g\|_2+\|g-P\|_2<\varepsilon\square$$

Théorème I.3.2 (Parseval) *Soit $f:[-1;1]\to\mathbb{C}$ continue par morceaux (carré R-int.) et soit*

$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{in\pi x}$$

La série de Fourier de f en $\{e^{in\pi x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ avec

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f\overline{e^{in\pi x}}\ dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f\ e^{-in\pi x}\ dx$$

$$Soit\ S_N(f,x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{in\pi x}$$

$$Alors\ \lim_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|_2=0\ et\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|f|^2\ dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

De plus, si $g:[-1;1]\to\mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux (carré R-int.), alors

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\bar{g}\ dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\overline{b_n} \text{ où } g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{in\pi x}$$

Démonstration
Par le corollaire précédent, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ P(x) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} \gamma_n e^{in\pi x}\ t.q.\ \|f-P\|_2 < \varepsilon$$

$$\overset{Bessel}{\Rightarrow}\ \|f - S_{N_0}(f)\|_2 \leq \|f-P\|_2 < \varepsilon$$

Pour $N \geq N_0$ *on a* $\|f - S_N(f)\|_2 \overset{Bessel}{\leq} \|f - S_{N_0}(f)\|_2 < \varepsilon$
Donc $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_0\ t.q.\ \|f - S_N(f)\|_2 < \varepsilon\ \forall N \geq N_0$
Cela montre la première partie. Evaluons maintenant

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} S_N(f,x)\bar{g}(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\pi x}}_{S_N(f)}\bar{g}(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} c_n \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{in\pi x}\bar{g}(x)\ dx}_{\overline{e^{-in\pi x} g(x)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-1}^{1} \underbrace{\overline{(g(x)e^{-in\pi x}\ dx)}}_{\overline{b_n}} = \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{b_n}$$

Ce qui donne:

$$|\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\bar{g}\ dx - \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{b_n}| = |\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\bar{g}\ dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} S_N(f,x)\bar{g}\ dx|$$

$$= \frac{1}{2}|\int_{-1}^{1}(f - S_N(f))\bar{g}\ dx| \overset{Cauchy-Schwartz}{\leq} \frac{1}{2}\|f - S_N(f)\|_2\|g\|_2 \overset{N\to\infty}{\to} 0$$

$$Donc\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{b_n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\bar{g}\ dx$$

$$Donc\ \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\overline{b_n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\bar{g}\ dx$$

<u>*Observation*</u>

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n\overline{b_n}| \leq (\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{-\infty}^{\infty}|b_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

En prenant g=f, on obtient:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|f|^2\ dx = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2\square$$

Lemme I.3.2

$$Soit\ D_N = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\pi x}\ \forall x \in I\!R, alors$$

$$a)\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_N(x)\ dx = 1$$

$$b)\ D_N(x) = \frac{\sin{(N+\frac{1}{2})\pi x}}{\sin\frac{n\pi}{2}}\ \forall x \in I\!R$$

$$c)\ S_N(f,x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)D_N(x-t)\ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x-t)D_N(t)\ dt$$

<u>Démonstration</u>

$$a)\ \int_{-1}^{1} e^{in\pi x}\ dx = 0\ \forall n \neq 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_N(x)\ dx =\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\ dx = 1$$

$$b)\ D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\pi t} = e^{-N\pi i t}(1+...+e^{2N\pi i t})$$

$$= e^{-N\pi i t}(\sum_{k=0}^{2N}\alpha^k) = e^{-N\pi i t}\frac{\alpha^{2N+1}-1}{\alpha-1}$$

$$= \frac{e^{(N+1)\pi i t}-e^{-N\pi i t}}{e^{\pi i t}-1} = \frac{e^{(N+\frac{1}{2})\pi i t}-e^{-(N+\frac{1}{2})\pi i t}}{e^{\frac{\pi i t}{2}}-e^{\frac{-\pi i t}{2}}}$$

$$= \frac{2i\sin{(N+\frac{1}{2})\pi t}}{2i\sin\frac{\pi t}{2}}$$

$$c)\ S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\pi x} = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N}\underbrace{\int_{-1}^{1} f(t)e^{-in\pi t}\ dt}_{c_n} e^{in\pi x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{in\pi(x-t)}}_{D_N(x-t)}\ dt) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) D_N(x-t)\ dt$$

On définit f sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité en reproduisant f sur [-1;1].
On effectue un changement de variable:

$$t' = x - t \Rightarrow dt' = -dt.\ t = 1 \Rightarrow t' = x - 1 \ et\ t = -1 \Rightarrow t' = x + 1$$

On obtient donc :

$$-\frac{1}{2}\int_{x+1}^{x-1} f(x-t') D_N(t')\ dt'$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(x-t') D_N(t')\ dt'$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x-t) D_N(t)\ dt$$

(Cf. discussion sur l'extension de f sur $\mathbb{R}$)

Théorème I.3.3 *Soit $f : [-1;1] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux (bornée et R-int.) et soit $x \in (-1;1)$ t.q.*

$$\exists\ \delta > 0,\ \exists\ M > 0 \ avec\ |f(x-t) - f(x)| < M|t|\ \forall t \in (-\delta;\delta)$$

(i.e. f est continue en x)

$$Alors\ S_N(f,x) \overset{N\to\infty}{\to} f(x)$$

Démonstration
Remarque: on utilise ici l'extension de f sur $\mathbb{R}$ (cf. +haut)

$$S_N(f,x) - f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x-t) D_N(t)\ dt - f(x) \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} D_N(t)\ dt}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (f(x-t) - f(x)) D_N(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\frac{\pi t}{2}} \sin{(N+\frac{1}{2})}\pi t\ dt$$

On définit $g : [-1;1] \to \mathbb{C}$ par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin\frac{\pi t}{2}},\ si\ t \neq 0 \\ 0,\ si\ t = 0 \end{cases}$$

On a, par hypothèse, que $|g(t)| \leq \frac{M|t|}{|\sin\frac{\pi t}{2}|}\ \forall t \in (-\delta;\delta)$

Donc, $g : [-1;1] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et bornée sur $[-1;1]$
On a donc:

$$S_N(f,x) - f(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\sin N\pi t \cos\frac{\pi t}{2}\ dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\cos N\pi t \sin\frac{\pi t}{2}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{g(t)\cos\frac{\pi t}{2}}_{G_1(t)}\underbrace{\sin N\pi t}_{\Phi_{1n}(t)}\ dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{g(t)\sin\frac{\pi t}{2}}_{G_2(t)}\underbrace{\cos N\pi t}_{\Phi_{2n}(t)}\ dt$$

D'après Bessel, si G(t) est continue par morceaux (R-int.) sur [-1;1] et que $\{\Phi_n\}_m$ est un système orthonormal (à une constante près) sur [-1;1], alors

$$\int_{-1}^{1} G(t)\overline{\Phi_n(t)}\ dt \to 0$$

Donc: $S_N(f,x) - f(x) \to 0 + 0 = 0$ $\square$

Théorème I.3.4 (Dirichlet) *$\forall f : [-1;1] \to \mathbb{C}$ lisse par morceaux, on a:*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f,x) = \begin{cases} f(x)\ \forall x \text{ point de continuité} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\ \forall x \neq \pm 1 \text{ point de discontinuité} \\ \frac{f(1^+)+f(-1^-)}{2}\quad x = \pm 1 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>
Le cas des points de continuité a été discuté dans le théorème précédent.

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} - S_N(f,x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x-t)D_N(t)\ dt$$

$$= \frac{1}{2}(f(x^+) - \int_{-1}^{0} f(x-t)D_N(t)\ dt) + \frac{1}{2}(f(x^-) - \int_{0}^{1} f(x-t)D_N(t)\ dt)$$

Mais

$$\int_{-1}^{0} D_N(t)\ dt = \sum_{n=-N}^{N}\int_{-1}^{0} e^{n\pi i t}\ dt = -1 + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0} \frac{1}{n\pi i} e^{n\pi i t}|_{-1}^{0}$$

$$= -1 + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0}\frac{1}{n\pi i}(1 - e^{-n\pi i}) = -1 + \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0}(1-(-1)^n)\frac{1}{n\pi i} = -1$$

Donc:

$$1f(x^+) - \int_{-1}^{0} f(x-t)D_N(t)\ dt = -\int_{-1}^{0}(f(x^+) + f(x-t))D_N(t)\ dt$$

On fait de même avec l'autre terme, ce qui implique que

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} - S_N(f,x)$$

peut s'écrire sous la forme:

$$\int_{-1}^{0} g_1(t)\Phi_{1n}\ dt + \int_{0}^{1} g_2(t)\Phi_{2n}\ dt$$

Avec g_i *des fonctions continues par morceaux et* Φ_{in} *des systèmes orthonormaux (à une constante près).*
Ce qui implique, comme on l'a vu plus haut que :

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} - S_N(f,x) \to 0$$

La dernière affirmation suit du fait que, par construction $f(1^-)$ *est donné par* $f(-1^-)$ *et* $f(-1^+)$ *par* $f(1^+)$$\square$

I.4 Différentiation et intégration des séries de Fourier

Théorème I.4.1 (Différentiation) *Soit $f : [-1;1] \to \mathbb{C}$ continue, avec $f(1) = f(-1)$, différentiabilité sauf sur un nombre fini de points, et f' lisse par morceaux.*

Alors $S_N(f,x) \to f(x)$ uniformément et absolument sur [-1;1].

De plus:

$$\lim_{N\to\infty} S'_N(f,x) = \begin{cases} f'(x) \ \forall x \ point\ de\ différentiabilité \\ \frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2} \ \forall x \neq \pm 1 \ point\ de\ non-différentiabilité \\ \frac{f'(1^+)+f'(-1^-)}{2} \ \ x = \pm 1 \end{cases}$$

Avec:

$$S'_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n (e^{n\pi i x})' = \sum_{n=-N}^{N} n\pi i c_n e^{n\pi i x}$$

Démonstration

On montre en premier que:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

Cela suffit pour conclure que $S_N(f,x) \to f(x)$ uniformément.

$$Rappel : \sum_{n=-N}^{N} |c_n e^{n\pi i x}| = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|$$

Comme $f'(x)$ existe et est continue par morceaux, on a, par Parseval

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{n\pi i x},\ a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f'(x) e^{-n\pi i x}\ dx$$

$$avec\ (\int_{-1}^{1} |f'(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{n\pi i x}|^2\ dx)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

$$0 = f(t)e^{-n\pi i t}|_{-1}^{1} \stackrel{intégration}{=} \int_{-1}^{1} f'(t) e^{-n\pi i t}\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)(-n\pi i) e^{-n\pi i t}\ dt$$

On en tire

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f'(t) e^{-n\pi i t}\ dt = n\pi i \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) e^{-n\pi i t}\ dt = n\pi i c_n$$

Par ailleurs, Parseval pour $f'(x)$ donne $\sum |a_n|^2 < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=-N}^{N} |c_n| = |c_0| + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0} \frac{|a_n|}{n}$$

$$\overset{C-S}{\leq} |c_0| + \frac{1}{\pi}(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0}|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N}}_{n\neq 0}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |c_0| + \frac{1}{\pi}(\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} \leq M < \infty \ \forall N$$

La deuxième affirmation sort de Dirichlet, pour $g(x) = f'(x)$.

Théorème I.4.2 (Intégration) *Soit $\varphi(x)$ de carré R-int.,avec $\varphi \sim a_0 + \sum a_n \cos n\pi x + \sum b_n \sin n\pi x$ sa série de Fourier.*

On a

$$\int_0^x \varphi \ dt \sim \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi} + \sum_1^\infty \frac{-b_n}{n\pi}\cos n\pi x + \sum_1^\infty \frac{a_n + 2a_0(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x \quad -1 < x < 1$$

Démonstration *On intègre:*

$$\int_0^x \varphi \ dt \sim a_0\int_0^x dt + \sum_1^\infty a_n \int_0^x \cos n\pi t \ dt + \sum_1^\infty b_n \int_0^x \sin n\pi t \ dt$$

$$= a_0 x + \sum_1^\infty \frac{a_n}{n\pi}\sin n\pi x - \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi}\cos n\pi x + \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi}$$

$$\textit{Comme } x = 2\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}$$

On obtient:

$$2a_0\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n\pi} + \sum_1^\infty \frac{a_n}{n\pi}\sin n\pi x - \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi}\cos n\pi x + \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi}$$
$$= \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\pi} + \sum_1^\infty \frac{-b_n}{n\pi}\cos n\pi x + \sum_1^\infty \frac{a_n + 2a_0(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$$

Corollaire I.4.1 *Soit*

$$(*) = \sum_1^\infty b_n \sin n\pi x$$

une série de Fourier. Si on suppose que $nb_n \to h$ et que

$$\frac{-h}{2} + \sum_1^\infty (nb_n - h)\cos n\pi x$$

est la série de Fourier d'une fonction $\varphi(x)$ de carré R-int,
alors (*) est la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ continue donnée par:

$$f(x) = \pi\int_0^x \varphi(t) \ dt + \frac{\pi h}{2} \quad -1 < x < 1$$

De plus $f'(x) = \pi\varphi(x)$ $\forall x$ point de continuité de φ

Démonstration

On applique le théorème à $\varphi(x)$:

$$\int_0^x \varphi(t)\ dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nb_n - h) - 2(-1)^{n+1}(\frac{h}{2})}{n\pi} \sin n\pi x$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} b_n \sin n\pi x - \frac{h}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$$

$$Mais\ \sum_1^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x = 2\underbrace{\left(\sin \pi + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + ...\right)}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

$$Donc\ \sum_1^{\infty} b_n \sin n\pi x \sim \pi \int_0^x \varphi(x)\ dx + \frac{\pi h}{2}$$

Et

$$(\int_0^x \varphi(x)\ dx)' = \varphi(x)$$

si φ est continu en x.

Corollaire I.4.2 *Soit*

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

une série. Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin n\pi x$$

est la série de Fourier d'une fonction de carré R-int. $\varphi(x)$, alors (*) est la série de Fourier de:

$$f(x) = \pi \int_0^t \varphi(t)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

De plus $f'(x) = \pi\varphi(x)$ $\forall x$ point de continuité de φ

Démonstration

On applique le théorème à $\varphi(x)$:

$$\int_0^t \varphi(t)\ dt \sim \sum_1^{\infty} \frac{-na_n}{n\pi} + \sum_1^{\infty} \frac{na_n}{n\pi} \cos n\pi x = -\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} a_n + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} a_n\ cos n\pi x$$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n\ cos n\pi x \sim \pi \int_0^t \varphi(t)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Et

$$(\int_0^x \varphi(x)\ dx)' = \varphi(x)$$

si φ est continu en x.

I.5 Transformées de Fourier

Définition I.5.1 *a) Soit* $f \geq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}_+$*) Riemann-intégrable. On dit que* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *existe (ou que l'intégrale converge) si*

$$\lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)\, dx < \infty$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Riemann-intégrable* $\forall\ [a,b]$ *On dit que* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *existe (ou que l'intégrale converge) si*

$$\lim_{D\to\mathbb{R}} \int_{D} f(x)\, dx$$

existe et est finie, où D *est une réunion finie d'intervalles* $[a,b]$ *finis et*

$$\lim_{D\to\mathbb{R}} \int_{D} f(x)\, dx = L$$

veut dire que $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ c > 0$ *t.q. si* $D = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ *avec* $D \supset [-c,c]$ *alors* $|\int\limits_{D} f(x)\, dx - L| < \varepsilon$.

c)$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Riemann-intégrable* $\forall\ [a,b]$ *est absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$ *si* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ *est convergente.*

Lemme I.5.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *existe.*

Démonstration

On montre d'abord le lemme pour f *à valeurs réelles.*
Soit $f_+(x) = \max\{f(X); 0\} \geq 0$
et $f_-(x) = -\min\{f(X); 0\} \geq 0$
$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ *et* $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(x) + f_-(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_+\, dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_-\, dx}_{\geq 0} \overset{par\ hyp.}{<} \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_\pm\, dx < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f_+(x) - f_-(x))\, dx < \infty$$

Pour f *complexe, on pose* $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$*, avec* f_1 *et* f_2 *des fonctions à valeurs réelles. Donc:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, dx < \infty\ \square$$

Corollaire I.5.1 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\, dx$ *est convergente* $\forall x \in \mathbb{R}$

Démonstration

On utilise le lemme pour $g(x) = f(x)e^{-ikx}$ *en constatant que* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty\ \square$

Lemme I.5.2 *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-intégrable, alors*

$$\lim_{|k|\to\infty} |\int_a^b g(x)e^{-ikx}\ dx| = 0$$

Démonstration

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists g_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *t.q.* $\int_a^b |g(x) - g_0(x)|\ dx < \varepsilon$

On commence par calculer

$$|\int_a^b (g(x) - g_0(x))e^{-ikx}\ dx| \leq \int_a^b |(g(x) - g_0(x))| \underbrace{|e^{-ikx}|}_{=1}\ dx < \varepsilon$$

D'autre part,

$$|\int_a^b g_0(x)e^{-ikx}\ dx| \overset{par\ \ parties}{=} |-\frac{1}{ik}g_0(x)e^{-ikx}|_{x=a}^{x=b} + \frac{1}{ik}\int_a^b g_0^{'}(x)e^{-ikx}\ dx|$$

$$\leq |-\frac{1}{ik}g_0(x)e^{-ikx}|_{x=a}^{x=b}| + |\frac{1}{ik}\int_a^b g_0^{'}(x)e^{-ikx}\ dx|$$

$$\leq |-\frac{1}{ik}||g_0(x)e^{-ikx}|_{x=a}^{x=b}| + |\frac{1}{ik}|\int_a^b |g_0^{'}(x)||e^{-ikx}|\ dx \overset{|k|\to\infty}{\to} 0$$

Car g et g_0 sont continues sur $[a,b]$ (donc bornées).

Donc

$$\lim_{|k|\to\infty} |\int_a^b g(x)e^{-ikx}\ dx| \leq |\int_a^b g_0(x)e^{-ikx}\ dx| + |\int_a^b (g(x) - g_0(x))e^{-ikx}\ dx| \leq 2\varepsilon$$

Définition I.5.2 (Transormée de Fourier) *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit*

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\ dx$$

Cela existe par le corollaire **??**.

Proposition I.5.1 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

$$a)\ \hat{f}\ est\ uniformément\ continue\ sur\ \mathbb{R}$$

$$b)\ \lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

En particulier $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

a) Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx < \infty \Rightarrow \exists\ c > 0$ *t.q.* $\int\limits_{|x|>c} |f(x)|\ dx < \varepsilon$. *On pose* $\delta = \frac{\varepsilon}{c\int\limits_{-c}^{c} |f(x)|\ dx}$. *On a :*

$$|\hat{f}(k_1) - \hat{f}(k_2)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x})\ dx| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)||(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x})|\ dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)||(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x})|\underbrace{|e^{ik_2x}|}_{=1}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{i(k_2-k_1)x} - 1|\ dx$$

$$\leq \int\limits_{-c}^{c} |f(x)|\underbrace{|e^{i(k_2-k_1)x} - 1|}_{\leq |k_2-k_1|\underbrace{|x|}_{\leq c}}\ dx + \int\limits_{|x|>c} |f(x)|\underbrace{|e^{i(k_2-k_1)x} - 1|}_{\leq 2}\ dx$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|k_2 - k_1|}_{<\delta} c\int\limits_{-c}^{c} |f(x)|\ dx}_{<\varepsilon} + \underbrace{2\int\limits_{|x|>c} |f(x)|\ dx}_{<2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

$$b)\ \lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = \lim_{|k|\to\infty} |\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\ dx| \leq \lim_{|k|\to\infty} |\int\limits_{-c}^{c} f(x)e^{-ikx}\ dx| + |\int\limits_{|x|>c} f(x)e^{-ikx}\ dx|$$

$$\leq \lim_{|k|\to\infty} |\int\limits_{-c}^{c} f(x)e^{-ikx}\ dx| + \int\limits_{|x|>c} |f(x)|\ dx < \varepsilon$$

La dernière ingalité est obtenue à l'aide du fait que f est absolument Riemann-intégrable sur IR et avec le lemme **??**

Remarque: Si f n'est pas continue, la proposition **??** reste valable, mais $\hat{\text{f}}$ n'est pas nécessairement absolument intégrable sur IR.

Exemple I.5.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad si\ \ -1 \leq x \leq 1 \\ 0\ sinon \end{cases} \quad \Rightarrow \hat{f}(k) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-ikx}\ dx = \frac{e^{-ik} - e^{ik}}{ik} = 2\frac{\sin k}{k}$$

$$et\ \int\limits_{1}^{\infty} |\frac{\sin x}{x}|\ dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2\pi n+\frac{\pi}{4}}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} |\frac{\sin x}{x}|\ dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4} \min(\sin x) \min(\frac{1}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = \infty$$

Observation: On peut construire des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, absolument Riemann-intégrables sur IR telles que $\hat{\text{f}}$ n'est pas absolument Riemann-intégrables sur IR.

Proposition I.5.2 *Soit f absolument Riemann-intégrables sur IR,* $f \in \mathcal{C}^1$ *et telle que* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'| < \infty$, *alors* $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k)\ \forall\ k$. *Plus généralement, si* $f \in \mathcal{C}^n$ *et* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^n| < \infty$, $n \in I\!N$, *alors* $\hat{f}^n(k) = (ik)^n\hat{f}(k)$.

Démonstration

$$\hat{f'}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}\ dx = \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} f'(x)e^{-ikx}\ dx = \lim_{l\to\infty}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_{x=-l}^{x=l} + \int_{-l}^{l} f(x)ike^{-ikx}\ dx\right)$$

$$= \lim_{l\to\infty} ik\int_{-l}^{l} f(x)e^{-ikx}\ dx = ik\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\ dx = ik\hat{f}(k)$$

Car e^{-ikx} est bornée (de norme un) et

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Car f est absolument Riemann-intégrable sur $I\!R$. Le cas général s'obtient par itération.

Corollaire I.5.2 *Si $f \in \mathcal{C}^2(I\!R)$ et f, f', f'' sont Riemann-intégrables sur $I\!R$, alors $\hat{f}$ est absolument Riemann-intégrable sur $I\!R$.*

Démonstration

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|\ dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} |\hat{f}(x)|\ dx}_{①} + \underbrace{\int_{|x|>1} |\hat{f}(x)|\ dx}_{②}$$

① $< \infty$ *car $\hat{f}$ est continue sur $[-1;1]$.*

$$② \ = \int_{|x|>1} \left|\frac{-\hat{f''}(x)}{x^2}\right|\ dx \leq \sup|\hat{f''}| \int_{|x|>1} \frac{1}{x^2}\ dx < \infty$$

Car $\hat{f''}(x)$ est bornée sur $I\!R$. (cf. proposition **??***).*

Lemme I.5.3 *Soit $g : I\!R \to \mathbb{C}$ absolument Riemann-intégrable, alors:*

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\sin ly\ dy = 0$$

(de même pour cos)

Démonstration

$$0 = \lim_{l\to\infty}\frac{\hat{g}(l)-\hat{g}(-l)}{2} = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)e^{-ily}-g(y)e^{ily}}{2}\ dy = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\sin ly\ dy = 0$$

Pour le cos, on met un + à la place du - dans le premier terme.

Lemme I.5.4

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin ly}{y}\ dy = \pi\ \forall\delta>0$$

Démonstration

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin ly}{y}\ dy \overset{z=ly}{=} \int_{-\delta l}^{\delta l} \frac{\sin z}{z}\ dz \Rightarrow \lim_{l\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin ly}{y}\ dy = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y}\ dy$$

Pour R grand, on pose $R = (n+\frac{1}{2})\pi + \theta$, avec $0 \le \theta \le \pi$. On a:

$$\left|\int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y}\ dy - \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\ dy\right| = \left|\int_{-R}^{-(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\ dy + \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{R} \frac{\sin y}{y}\ dy\right|$$

$$= 2\left|\int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{R} \frac{\sin y}{y}\ dy\right| \le 2\underbrace{\max(\sin y)}_{=1}\underbrace{\max(\frac{1}{y})}_{=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}}\underbrace{(R-(n+\frac{1}{2})\pi)}_{\le\pi} \le 2\pi\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Donc:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y}\ dy = \lim_{n\to\infty} \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\ dy$$

$$\int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\ dy \overset{y=(n+\frac{1}{2})z}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{z}\ dz$$

On a vu (noyau de Dirichlet):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{\sin\frac{z}{2}}\ dz = 2\pi \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{2\sin\frac{z}{2}}\ dz = \pi$$

Soit $g(z) = \frac{1}{2\sin\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}$.

Par l'Hospital, g(z) est continue en 0 et donc bornée sur $[-\pi;\pi]$.

On a vu (cf section "Théorème de Dirichlet"), que les coefficients de Fourier d'une telle fonction tendent vers 0, pour $n \to \infty$. Donc:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin{((n+\frac{1}{2})z)}g(z)\ dz = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{2\sin\frac{z}{2}}\ dz - \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{z}\ dz = \pi - \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{z}\ dz$$

On en tire:

$$\lim_{l\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin ly}{y}\ dy = \pi = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{z}\ dz = \pi$$

Théorème I.5.1 (Inversion pour la transformée de Fourier) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolument Riemann-intégrable t.q. $\hat{f}$ soit absolument Riemann-intégrable, alors on a $(\hat{\hat{f}}) = 2\pi f(-x)\ \forall x$ où $f'(x)$ existe. Plus généralement : si $f'(x^{\pm})$ existent, alors $\frac{1}{2\pi}(\hat{\hat{f}})(-x) = \frac{f^+ + f^-}{2}$.*

Démonstration *On veut montrer que:*

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky}\ dy)e^{ikx}\ dk}_{(*)}$$

On a:

$$2\pi(*) = \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ik(y-x)}\ dy)\ dk$$

Comme:

$$\int_{-l}^{l}(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)e^{-ik(y-x)}|\ dy)\ dk = \int_{-l}^{l}(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\ dy)\ dk \leq 2l\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\ dy < \infty$$

(Le résultat de l'intégrale en y est une constante par rapport à k et f est absolument Riemann-intégrable.)

Donc $|f(y)e^{-ik(y-x)}|$ est absolument Riemann-intégrable en (y,k) sur le domaine $-l \leq k \leq l, \infty \leq y \leq \infty$. On peut donc commuter les intégrales, et on a:

$$2\pi(*) = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-l}^{l} f(y)e^{-ik(y-x)}\ dk)\ dy = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(\int_{-l}^{l} e^{-ik(y-x)}\ dk)\ dy = \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)(\frac{e^{-ik(y-x)}}{-i(y-x)}|_{-l}^{l})\ dy$$

$$\overset{y\to y+x}{=} \lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y+x)\frac{2\sin ly}{y}\ dy \overset{\forall\delta\geq 0}{=} \underbrace{\lim_{l\to\infty}\int_{|y|>\delta} f(y+x)\frac{2\sin ly}{y}\ dy}_{1} + \underbrace{\lim_{l\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f(y+x)\frac{2\sin ly}{y}\ dy}_{2}$$

Soit:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2f(y+x)}{y}\ si\ |y| > \delta \\ 0\ sinon \end{cases}$$

On a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\ dy \leq \int_{|y|>\delta}\frac{|2f(y+x)|}{|y|}\ dy \leq \frac{1}{\delta}\int_{|y|>\delta} |2f(y+x)|\ dy < \infty$$

Donc, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est absolument Riemann-intégrable et le lemme **??** *s'applique. On a donc que 1 =0. Donc:*

$$2\pi(*) = \lim_{l\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f(y+x)\frac{2\sin ly}{y}\ dy$$

On évalue:

$$(*) - f(x) \overset{lemme\ \textbf{??}}{=} (*) - f(x)\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{2\sin ly}{y}\ dy = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(y+x)-f(x)}{y}2\sin ly\ dy$$

Soit:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(f(y+x)-f(x))}{y} \ si \ |y| \leq \delta \ et \ y \neq 0 \\ f'(x) \ si \ y = 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

*On a que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est absolument Riemann-intégrable et le lemme **??** s'applique. On a donc que (*)-f(x)=0.*

<u>**Conclusion**</u> On utilise en général, pour la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse les transformations suivantes:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \ dx$$

et

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \ dk$$

Chapter II

Analyse Complexe

II.1 Espaces de Hilbert

Définition II.1.1 *Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel complexe et* $<,>: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C}$.

$$(u,v) \to <u,v> \in \mathbb{C} \ t.q.$$

a) $<\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v> = \alpha_1 <u_1,v> + \alpha_2 <u_2,v>$
b) $<u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2> = \overline{\alpha_1} <u,v_1> + \overline{\alpha_2} <u,v_2>$
c) $<u,v> = \overline{<v,u>}$
d) $<u,u> \geq 0 \ (= 0 \iff u = 0)$
Alors $<,>$ *est appelé produit scalaire (ou produit intérieur).*

Définition II.1.2 *Un espace vectoriel* $\mathcal{H}$ *muni d'un produit scalaire* $<,>$ *complet avec la norme* $\| \ \|_2$ *s'appelle un espace de Hilbert.*

Proposition II.1.1 *Soit* $(\mathcal{H}, <,>)$ *un espace de Hilbert,*$<,>: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *est continue.*
(Si $x_n \to x$, $y_n \to y$ *sur* $\mathcal{H}$ *alors* $<x_n, y_n> \to <x,y>$.*)*

Démonstration

$$| <x_n,y_n> - <x,y> | = | <x_n,y_n> - <x_n,y> + <x_n,y> - <x,y> |$$
$$\leq | <x_n,y_n> - <x_n,y> | + | <x_n,y> - <x,y> | \leq | <x_n, y_n - y> | + | <x_n - x; y> |$$
$$\underset{C-S}{\leq} \underbrace{\|x_n\|_2}_{born\acute{e}\ (\{x_n\}\ conv.)} \underbrace{\|y_n - y\|_2}_{\to 0} + \underbrace{\|x_n - x\|_2}_{\to 0} \underbrace{\|y\|_2}_{born\acute{e}\ (\{y_n\} \to y)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Définition II.1.3 *Soit* $(\mathcal{H}, <,>)$ *un espace de Hilbert. Un ensemble (fini ou non)* $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *de vecteurs de* $\mathcal{H}$ *tel que* $\|h_n\| = 1 \ \forall n$ *et* $<h_n, h_m> = 0$ *si* $n \neq m$, $\forall n, m \geq 1$ *s'appelle un système orthonormal sur* $\mathcal{H}$
Si de plus le système orthonormal $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *satisfait:*

$$h \in \mathcal{H} \ \ <h, h_n> = 0 \ \forall n \geq 1 \ \Rightarrow h = 0$$

alors on appelle $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *une base de* $\mathcal{H}$

Théorème II.1.1 (Pythagore, pour une inifinité d'éléments) *Soit* $(\mathcal{H}, < \ , \ >)$ *un espace de Hilbert et soit* $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *un système orthonormal sur* $\mathcal{H}$ *et soient* $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ *des scalaires.*
On a:

$$\sum_1^\infty \alpha_n h_n \ converge\ sur\ \mathcal{H} \iff \sum_1^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$$

Si c'est le cas, on a:

$$(*)\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n h_n\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha_n h_n\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$$

Démonstration
$\forall n,m$ avec $n<m$ on a, par Pythagore usuel:

$$\|\sum_{k=n}^{m}\alpha_k h_k\|_2^2=\sum_{k=n}^{m}\|\alpha_k h_k\|_2^2=\sum_{k=n}^{m}|\alpha_k|^2$$

$$\text{Donc la suite } \{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k h_k\}_m \text{ est de Cauchy} \iff \{\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^2\}_2 \text{ est de Cauchy}$$

$$\text{Donc la suite } \{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k h_k\}_m \text{ converge} \iff \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 \text{ converge}$$

L'égalité (*) s'obtient en posant $n=1$ et $m\to\infty$

Définition II.1.4 *Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel complexe avec $<,>$, $u,v\in\mathcal{L}$ sont orthogonaux ($\perp$) si $<u,v>=0$.*

Les 3 propositions suivantes sont évidentes, et données sans démonstration.

Théorème II.1.2 (Pythagore) *Si $f_1,...,f_N$ sont $\perp$, alors*

$$\|\sum_{n=1}^{N}f_n\|_2^2=\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|_2^2$$

Proposition II.1.2 (Règle du parallèlogramme)

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2\|f\|_2^2+2\|g\|_2^2$$

Proposition II.1.3

$$<f,g>=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k<f+i^kg,f+i^kg>$$

Corollaire II.1.1 *Si $(\mathcal{L},\|\ \|)$ est un espace vectoriel normé, avec la norme $\|\ \|$ vérifiant la règle du parallèlogramme, alors $\exists!$ produit scalaire $<\ ,\ >$ t.q $\|u\|=<u,u>^{\frac{1}{2}}$*

Démonstration *L'unicité sort de la proposition précédente. Pour l'existence, on définit le produit scalaire de la manière suivante:*

$$<u,v>:=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\|u+i^kv\|^2$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

Proposition II.1.4 *Soit $(\mathcal{H},<\ ,\ >)$ un espace de Hilbert et $\{h_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{H}$ un système orthonormal. Soit $h\in\mathcal{H}$. Alors la série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}<h,h_n>h_n$$

converge dans $\mathcal{H}$ et on a:

$$a)\ \|\sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n > h_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< h, h_n >|^2$$

$$b)\ < h, h_n > \to 0 \ et\ \sum_{n=1}^{\infty} |< h, h_n >|^2 \leq \|h\|_2^2$$

$$c)\ Si\ h' = \sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n > h_n \ et\ h'' = h - h' \ alors\ h' \perp h'' \ et\ h'' \perp h_n \ \forall n$$

<u>Démonstration</u>

$$Soit\ h'_N = \sum_{n=1}^{N} < h, h_n > h_n \Rightarrow \|h'_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |< h, h_n >|^2 \underbrace{h_n^2}_{=1}$$

Comme

$$Re < h, h'_N >= Re < h, \sum_{n=1}^{N} < h, h_n > h_n >= \sum_{n=1}^{N} \overline{< h, h_n >} < h, h_n >= \sum_{n=1}^{N} |< h, h_n >|^2 = \|h'_N\|_2^2$$

on a : $0 \leq \|h - h'_N\|_2^2 = \|h\|_2^2 + \|h'_N\|_2^2 - 2Re < h, h'_N >= \|h\|_2^2 - \|h'_N\|_2^2$

$$Donc\ \|h\|_2^2 \geq \|h'_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |< h, h_n >|^2$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient la convergence, ainsi que b).
a) sort de Pythagore pour une infinité d'éléments.
c)

$$< h'', h' >=< h - h', h' > \overset{continuité}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{< h, h_k >} < h, h_k > - \sum_{k=1}^{\infty} |< h, h_k >|^2 = 0$$

Donc $h'' \perp h'$.
De même :

$$< h'', h_n >=< h - h', h_n >=< h, h_n > - < h', h_n >=< h, h_n > - \sum_{k=1}^{\infty} < h, h_k > \underbrace{< h_k, h_n >}_{\delta_{k,n}}$$

$$=< h, h_n > - < h, h_n >= 0$$

Donc $h_n \perp h''$.

Corollaire II.1.2 (Parseval) *Soit $\{h_n\}_{n\geq 1}$ une base orthonormale sur $(\mathcal{H}, < , >)$, alors $\forall h \in \mathcal{H}$, on a:*

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{< h, h_n >}_{coeff.\ de\ Fourier\ en \{h_n\}} h_n) \ et\ \|h\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< h, h_n >|^2 . (base\ orthonormale)$$

De plus, si $g \in \mathcal{H}$, alors:

$$< h, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n > \overline{< g, h_n >}$$

<u>Démonstration</u>

Comme $h'' \perp$ à tout h_n et que ceux-ci forment une base, cela implique que $h'' = 0$.

La deuxième partie est obtenue ainsi:

$$< h, g >=< \sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n > h_n, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n >< h_n, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < h, h_n > \overline{< g, h_n >}$$

Théorème II.1.3 *Soit $(\mathcal{H}, < \, , \, >)$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ tel que:*
$\mathcal{K} \neq \emptyset$, fermé, connexe[a] avec $tx + (1-t) \in \mathcal{K} \ \forall \ 0 \leq t \leq 1$

Alors $\exists!\ h \in \mathcal{K}$ t.q. $\|h\|_2 = \inf \{\|x\|_2 \ |x \in \mathcal{K}\}$

<u>Démonstration</u>

<u>Existence</u>

Soit $\delta = \inf \{\|x\|_2 \ |x \in \mathcal{K}\}$ et soit $\{f_n\}_n \subset \mathcal{K}$ t.q. $\|f_n\|_2 \to \delta$, alors on a, par la règle du parallèlogramme:

$$\|\frac{1}{2}(f_n - f_m)\|_2^2 + \|\frac{1}{2}(f_n + f_m)\|_2^2 = 2\|\frac{1}{2}f_n\|_2^2 + 2\|\frac{1}{2}f_m\|_2^2$$

Mais:

$$\frac{1}{2}(f_n - f_m) \in \mathcal{K} \Rightarrow -\|\frac{1}{2}(f_n + f_m)\|_2^2 \leq -\delta^2$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_2^2 = 2\|f_n\|_2^2 + 2\|f_m\|_2^2 - 4\|\frac{1}{2}(f_n + f_m)\|_2^2$$

$$\leq 2\|f_n\|_2^2 + 2\|f_m\|_2^2 - 4\delta^2$$

Donc:

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_2^2 \leq \lim_{n,m\to\infty} 2\|f_n\|_2^2 + 2\|f_m\|_2^2 - 4\delta^2 = 0$$

Donc $\{f_n\}$ est de Cauchy, et comme un espace de Hilbert est complet et que $\mathcal{K}$ est fermé, elle converge vers $h \in \mathcal{K}$.
Et on a:

$$\|h\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2 = \delta$$

<u>Unicité</u>

Soit $f \in \mathcal{K}$ un autre vecteur tel que: $\|f\|_2 = \delta$
On a:

$$\|\frac{1}{2}(h - f)\|_2^2 + \|\frac{1}{2}(h + f)\|_2^2 = 2\|\frac{1}{2}h\|_2^2 + 2\|\frac{1}{2}f\|_2^2$$

On en tire:

$$\|\frac{1}{2}(h - f)\|_2^2 = \delta^2 - \|\frac{1}{2}(h + f)\|_2^2 = \delta^2 - \delta^2 = 0$$

Donc $h = f$

[a] il suffit que $x, y \in \mathcal{K} \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in \mathcal{K}$

II.2 Séries formelles

Définition II.2.1 *Soit K un corps, alors*

$$K[x] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ |a_k \in K, n \geq 0\}$$

K[x] a une structure d'algèbre, i.e une structure d'epace vectoriel (on additionne les termes de même puissance de x), à laquelle on ajoute une multiplication :

$$\sum a_l x^l \sum_j b_j x^j = \sum c_k x^k \text{ avec } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

avec les propriétés suivantes:
i) (PQ)R=P(QR)
ii) PQ=QP
iii) $(\alpha P)Q = \alpha(PQ)$
iv) (P+Q)R=PR+QR
v) 0P=0
vi) 1P=P1=P
Attention, dans v) et vi), $0(= \sum 0x^n)$ *et* $1(= 1 + \sum 0x^n)$ *appartiennent à K[x].*

Définition II.2.2

$$K[[X]] = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ |a_k \in K\}$$

C'est l'ensemble des séries formelles, avec la même structure d'algèbre que pour K[x].

Observations
– $\underbrace{K[x]}_{série\ finie} \not\subseteq \underbrace{K[[x]]}_{série\ infinie}$
$-P \in K[x]$ n'est pas une fonction.

Définition II.2.3 *L'ordre de*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

est le plus petit $k \geq 0$ *t.q.* $a_k \neq 0$ *. Il est noté w(P). Par définition* $w(P) = \infty$

Proposition II.2.1 *Soit w(P)=i et w(Q)=j, alors w(PQ)=w(P)+w(Q).*
Démonstration*Si P=0 ou Q=0, c'est bon car* $\alpha + \infty = \infty$*.*
Si $P \neq 0$ *et* $Q \neq 0$*, on a*

$$P = \sum_{k \geq i} a_k x^k \ Q = \sum_{k \geq j} b_k x^k \Rightarrow P(x)Q(x) = a_i b_j x^{i+j} + \sum_{k > i+j} c_k x^k$$

Comme $a_i, b_j \neq 0$ *(cf. ordres de P et Q) et qu'ils appartiennent à un corps, qui est intègre,* $a_i b_j \neq 0$*, ce qui implique w(PQ)=i+j.*

Conséquence K[[x]] est un anneau intègre.

Définition II.2.4 *Soit*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k \ \ n \geq 1$$

une suite de séries formelles dans K[[x]] avec $w(P_n) \geq n \ \forall n$. *On peut construire:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{k} a_{k,n}) x^k$$

$$\sum_{n=1}^{k} a_{k,n}$$

est finie, car $a_{k,n} = 0$ *pour n suffisamment grand.*

Plus généralement: $S_i \ i \in I$ *une famille de séries formelles t.q.* $\forall n, \{i \in I \ | w(S_i) < n\}$ *soit fini, alors on peut définir :*

$$\sum_{i \in I} S_i, \ \ avec \ \ \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,i} x^k$$

Donc:

$$\sum S_i(x) = \sum c_k x^k \ \ où \ c_k = \sum_{i \in I} a_{k,i}$$

Définition II.2.5 *Soient:*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in K[[x]] \ \ et \ \ T(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j \in K[[y]]$$

avec $w(T) \geq 1$ *(i.e.* $b_0 = 0$*), alors on définit:*

$$S \circ T(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (T(y))^k \in K[[y]]$$

On dit qu'on a substitué T(y) pour x dans S(x). La série $S \circ T$ *est la composition de S et T.*

Proposition II.2.2

$$1) \ (S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$$

$$2) \ (S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T)$$

$$3) \ S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U \ \ avec \ w(T) \ et \ w(U) \geq 1$$

__**Démonstration**__*cf. ex 7, S.17.*

Proposition II.2.3 $S(x) \in K[[x]]$ *possède un inverse par rapport à la multiplication si et seulement si* $S(0) = a_0 \neq 0$

__**Démonstration**__

Soit $A(y) = 1 - y$ *et* $B(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$. *On a que A(y)B(y)=1.*

Posons $a_0^{-1} S(x) = 1 - U(x)$, *avec* $w(U(x)) \geq 1$ *et* $a_0 \neq 0$.

On a :

$$AB = 1 \Rightarrow (A(y)B(y)) \circ U(x) = 1 \circ U(x) = 1$$

Donc, à l'aide de la propriété 2 de la proposition **??***:*

$$(A(y) \circ U(x))(B(y) \circ U(x)) = 1 \Rightarrow (1 - U(x)) \circ B(U(x)) = 1$$

Donc

$$a_0^{-1}S(x)B(U(x)) = 1 \Rightarrow S(x)a_0^{-1}B(U(x)) = 1$$

Donc l'inverse de S(x) est $a_0^{-1}B(U(x))$. *Pour montrer que la condition est indispensable, on procède ainsi:*

$$w(SS^{-1}) \overset{prop.\ ??}{=} w(S) + w(S^{-1})$$

Comme $w(S) \geq 1$ *(on suppose la condition fausse) et que* $w(S^{-1}) \geq 0$ *(par définition), on a que* $w(SS^{-1}) \neq 0 = w(1)$. *Donc* $SS^{-1} \neq 1$ □

Définition II.2.6 (Dérivée d'une série formelle) *Soit*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Alors, on définit :

$$S^{'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Proposition II.2.4

$$a)\ (\alpha P + \beta Q)^{'} = \alpha P^{'} + \beta Q^{'}$$

$$b)\ (PQ)^{'} = P^{'}Q + PQ^{'}$$

$$c)\ si\ S(0) \neq 0\ alors\ (S^{-1})^{'} = \frac{-S^{'}}{S^2}$$

<u>**Démonstration**</u>

$$a)\ (\alpha P + \beta Q)^{'} = (\sum_k (\alpha p_k + \beta q_k)x^k)^{'} = \sum_k k(\alpha p_k + \beta q_k)x^{k-1})$$

$$= \sum_k k\alpha p_k x^{k-1} + \sum_k k\beta q_k x^{k-1} = \alpha P^{'} + \beta Q^{'}$$

b) Montrons d'abord que c'est vrai pour $P_n = x^n$.

$$(P_nQ)^{'} = (X^nQ)^{'} = (\sum_k q_k x^{k+n})^{'} = \sum_k (k+n)q_k x^{k+n-1}$$

$$= \sum_k nq_k x^{k+n-1} + \sum_k kq_k x^{k+n-1} = nx^{n-1}\sum q_k x^k + x^n \sum kq_k x^{k-1} = P_n^{'}Q + P_nQ^{'}$$

Combinons ce résultat avec le précédent:

$$(PQ)^{'} = ((\sum_n \alpha_n P_n)Q)^{'} \overset{a)}{=} \sum_n (\alpha_n P_n Q)^{'} = \sum_n (\alpha_n(P_n^{'}Q + P_nQ^{'})) = P^{'}Q + PQ^{'}$$

$$c)\ (S\frac{1}{S})^{'} = 1^{'} \Rightarrow S^{'}\frac{1}{S} + S(\frac{1}{S})^{'} = 0 \Rightarrow (\frac{1}{S})^{'} = -\frac{S^{'}}{S^2}$$

<u>Observation</u> Si $S(x) = \sum a_k x^k$, alors $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Définition II.2.7 $I(x) = x$ *est l'élément neutre pour la compsosition:* $S \circ I = I \circ S = S\ \forall S \in K[[x]]$

Proposition II.2.5 *Soit* $S(x) = \sum a_n x^n \in K[[x]]$. *Alors il existe* $T(x) \in K[[x]]$ *t.q.* $T(0) = 0$ *et* $S \circ T = I$ *si et seulement si* $a_0 = 0$ *et* $a_1 \neq 0$. *Si c'est le cas, T est unique et l'on a aussi* $T \circ S = I$, *et on dit que T(x) est la série réciproque de S(x).*
<u>**Démonstration**</u>*cf. ex 8, S.17.*

II.3 Convergence de séries formelles

Définition II.3.1 *Soit $z \in K$, on dit que*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$$

est absolument convergente en z, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z^n| < \infty$$

Définition II.3.2 *Soit E un ensemble et $f_n : E \to K$, alors on dit que $\sum f_n$ est normalement convergente sur E si $\sum \|f_n\| < \infty$.*
Où $\|f_n\| = \|f_n\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in E\}$.

Définition II.3.3 *Soit $P(x) = \sum a_n x^n \in K[[x]]$. Si $\sum |a_n||z^n| < \infty$, alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et on dénote sa valeur (limite) par P(z).*

Définition II.3.4 *Soit $P(x) = \sum a_n x^n \in K[[x]]$. On appelle $\rho(P)$ le rayon de convergence de P. Il est défini par:*

$$\rho = \sup\{r \geq 0 \mid \sum |a_n| r^n < \infty\}$$

<u>Remarque</u>
-$\rho \in [0;\infty]$

Lemme II.3.1 *Si $0 < r < r_0$ et si $\exists M > 0$ t.q. $|a_n| r_0^n \leq M, \forall n$, alors $\sum |a_n| r^n < \infty$, et donc $\sum a_n z^n$ est normalement convergente pour $|z| \leq r$.*

<u>Démonstration</u>

$$\sum |a_n| r^n = \sum \underbrace{|a_n| r_o^n}_{\leq M} \underbrace{(\frac{r}{r_0})^n}_{<1} \leq M \sum \underbrace{(\frac{r}{r_0})^n}_{\alpha} = M \frac{1}{1-\alpha} < \infty \ \square$$

Lemme II.3.2 *Si une série converge pour un certain $\tilde{z}$, alors elle converge $\forall z$ avec $|z| < |\tilde{z}|$.*
<u>Démonstration</u> *Comme la série converge pour $\tilde{z}$, $|a_n||\tilde{z_n}| < M, \forall N$, donc, par le lemme* **??** *la série converge pour z.*

Proposition II.3.1 *a) Soit $0 < r < \rho$, alors $\sum a_n z^n$ est normalement convergente pour $|z| \leq r$. (i.e. $\forall r < \rho$, P(x) est normalement convergente sur D_r (disque de rayon r).)*
b) si $r > \rho$, alors $\sum a_n r^n$ diverge.

<u>Démonstration</u>

a) Soit $0 < r < \rho$, alors $\exists r < \tilde{r} < \rho$ tel que la série converge pour $\tilde{r}$, donc, par le lemme **??***, elle converge aussi pour r.*

b) Soir $r > \tilde{r} > \rho$. Si $\sup |a_n| r^n < \infty$, alors par le lemme **??***, on a convergence pour r, et donc, par le lemme* **??***, convergence pour $\tilde{r}$, ce qui contredit la définition* **??** *(car $\tilde{r} > \rho$). Donc on a que $\sup |a_n| r^n = \infty$.*

Théorème II.3.1 (Hadamard)

$$\rho(P) = (\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

Avec: $\infty^{-1} = 0$ et $0^{-1} = \infty$

<u>Démonstration</u>

Soit:

$$0 < r < (\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} \Rightarrow r(\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}) < 1 \Rightarrow (\limsup_{n\to\infty} (r^n |a_n|)^{\frac{1}{n}}) = \alpha < 1$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \ t.q. \ \forall n \geq n_0, \ (r^n|a_n|)^{\frac{1}{n}} < \frac{1+\alpha}{2} \in]\alpha; 1[$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|r^k = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|r^k + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|r^k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|r^k + \sum_{k=n_0}^{\infty} \underbrace{\frac{(1+\alpha)^k}{2}}_{<1} < \infty$$

Donc:

$$r \leq \rho \Rightarrow (\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} \leq \rho$$

Regardons le cas où on a inégalité stricte.

$$\rho(\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}) > 1 \Rightarrow (\limsup_{n\to\infty} \rho^n (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} > 1 \Rightarrow \rho^n|a_n| \not\to 0 \ \Rightarrow\Leftarrow$$

En effet, dans ce cas, la série ne peut converger, ce qui contredit la définition **??**.

Proposition II.3.2 *Si $A(x), B(x) \in K[[x]]$ et $\rho \leq \rho(A), \rho(B)$, alors $\rho(A+B) \geq \rho, \rho(AB) \geq \rho$ et $\forall |z| < \rho$, on a $(A+B)(z) = A(z) + B(z)$ et $(AB)(z) = A(z)B(z)$.*

Démonstration

*Cela sort de la définition (**??**) du produit est de la somme de 2 séries, en remarquant que l'on est assuré de la convergence de la somme (et du produit), pour le* $\min\{\rho(A); \rho(B)\} \geq \rho$.

Proposition II.3.3 *Si $U(x), V(x) \in K[[x]], w(V) \geq 1$ et si $\rho(U), \rho(V) > 0$, alors $\rho(U \circ V) > 0$. En fait $\exists r > 0$ t.q. $\sum |b_n|r^n < \rho(U)$ et $\forall r$, on a $\rho(U \circ V) \geq r$.*

Démonstration

V(z)=$\sum b_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < \rho(V)$, en particulier V(z) est continue en 0 et V(0)=0. Donc, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. si $r = |z| < \varepsilon$, alors:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||z^k| < \rho(U)$$

On a:

$$U \circ V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (V(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k)^n$$

Donc:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \underbrace{(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k||z^k|)^n}_{<\rho(U)} < \infty$$

Donc $\rho(U \circ V) \geq r$ □

Proposition II.3.4 *Si $S \in K[[x]]$, $S(0) \neq 0$ et $T \in K[[x]]$, avec ST=1, alors $\rho(S) > 0 \Rightarrow \rho(T) > 0$*

Démonstration

Soit $S_0 = a_0^{-1}S$, donc $S_0(0) = 1$. Et soit $V(x) = 1 - S_0(x)$, et soit $T_0(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

*On a (cf proposition **??**), que $S_0(x)(T_0 \circ V) = 1$*

*Comme $\rho(V) = \rho(S) > 0$, par hypothèse, et que $\rho(T_0) = 1 > 0$, on a, par la proposition **??**, que $\rho(T_0 \circ V) > 0$. Donc, si on prend $T = a_0^{-1}T_0 \circ V$, qui est bien l'inverse de S, on a $\rho(T) > 0$* □

Proposition II.3.5 *Si*

$$S(x) \in K[[x]] \text{ et } S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

alors $\rho(S) = \rho(S^{'}) = \rho$.
Démonstration

$$\rho(S^{'}) \overset{??}{=} (\limsup_{n\to\infty} (n|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} (\limsup_{n\to\infty} (n)^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}})^{-1} 1 = \rho(S) \ \square$$

Corollaire II.3.1 *Soient* S_1, S_2 *deux séries formelles, avec* $\rho(S_1), \rho(S_2) > 0$.
Si $S_1(z) = S_2(z)$ $\forall |z|$ *assez petit, alors* $S_1 = S_2$.
Démonstration *Par la proposition* **??**, *on a que S(z) est infiniment différentiable.*
Donc on peut déterminer les coefficients de S(z) par : $a_n = \frac{(S(0))^{(n)}}{n!}$.
Considérons $S = S_1 - S_2$, $S(z) = 0$ $\forall z$ *dans un voisinage de 0* $\Rightarrow S^{(n)} = 0 \Rightarrow S = 0$

Proposition II.3.6 *Si* $\rho = \rho(S) > 0$ *et* $|z| < \rho$,*alors*

$$S^{'}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$$

Démonstration

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n((z+h)^n - z^n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j h^{n-j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} = S^{'}(z)$$

Définition II.3.5 *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$, *avec* $D \subset K$ *un ouvert. On dit que f est développable en série entière en* $z_0 \in D$ *si* $\exists S(x) \in K[[x]]$ *t.q.* $\rho(S) > 0$ *et* $\exists V \subset D$ *un voisinage de* z_0 *t.q.*

$$f(z) = S(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n), \ \forall z \in V$$

Observation: S(x), si elle existe, est unique par le corollaire **??**.

Définition II.3.6 $f : D \to \mathbb{C}$ *est analytique sur D, si f est développable en série entière* $\forall z_0 \in D$.

Proposition II.3.7 *Soit* $S(x) = \sum a_n x^n$, $\rho = \rho(S) > 0$. *Si* $|z_0| < \rho$, *alors* $S_{z_0}(x) = \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0) x^n$ *a un rayon de convergence* $\geq \rho - |z_0|$. *De plus, si* $|z - z_0| < \rho - |z_0|$, *alors on a :* $S(z) = \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = S_{z_0}(z - z_0)$.
Démonstration *Soit* $r_0 = |z_0|$. *On a :*

$$S^{(p)}(z_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q \Rightarrow |S^{(p)}(z_0)| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| r_0^q$$

Pour $r_0 \leq r < \rho$, *on a alors :*

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(z_0)|(r - r_0)^p \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| r_0^q)(r - r_0)^p = \sum_{p=0}^{\infty} (\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| r_0^q (r - r_0)^p)$$

$$\overset{p+q=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (\sum_{q=0}^{n} \frac{n!}{(n-q)!q!} r_0^q (r-r_0)^{n-q}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$$

Donc $S_{z_0}(x) = \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(z_0) x^n$ *converge pour* $r - r_0$, *avec* $r_0 \leq r < \rho$. *En faisant tendre r vers* ρ, *on a convergence pour* $\rho - r_0$, *ce qui nous assure que* $\rho(S_{z_0}) \geq \rho - r_0$, *ce qui démontre la première partie. Par ailleurs, on a que:*

$$(*) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p$$

est absolument convergente $\forall z$ *t.q.* $|z - z_0| < \rho - |z_0|$. *On peut donc sommer dans n'importe quel ordre. On a:*

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{q=0}^{n} \frac{n!}{(n-q)!q!} z_0^q (z-z_0)^{n-q}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z)$$

Et:

$$(*) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^p}{p!} (\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S^{(p)}(z_0)(z-z_0)^p}{p!} = S_{z_0}(z-z_0) \ \square$$

Corollaire II.3.2 *Soit* $S(x) = \sum a_n x^n$, $\rho(S) > 0$, *alors* $S(z)$ *est analytique sur* $|z| < \rho(S)$.
C'est une conséquence immédiate de la proposition **??**.

Définition II.3.7 *Soit f analytique. On a* $f^{'}(z_0)$ *défini par :*

$$\frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Si $K = \mathbb{R}$, *c'est la dérivée usuelle. (Ce n'est pas le cas pour* $\mathbb{C}$*).*

Corollaire II.3.3 *Soit D un ouvert* $\subset K$ *.*
Si $f : D \to \mathbb{C}$ *est analytique sur D, alors pour chaque* $z_0 \in D$ $f(z) = S_{z_0}(z - z_0)$, *où:*

$$S_{z_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} x^n$$

Théorème II.3.2 *Soit* $f : D \to \mathbb{C}$ *analytique avec D un ouvert connexe.*
Alors les conditions suivantes sont équivalentes:
a) $\exists z_0 \in D$ *t.q.* $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \geq 0$
b) f s'annule sur un voisinage d'un $z_0 \in D$
c) $f \equiv 0$ *sur D*
Démonstration
c) $\Rightarrow$ *a): banal*
a) $\Rightarrow$ *b) par la proposition* **??**.
b $\Rightarrow$ *c): Soit* $D' := \{z \in D \mid \exists V \subset D$ *un voisinage de z t.q.* $f_{|V} \equiv 0\}$.
D' est, par définition, ouvert. On va montrer qu'il est aussi fermé.
En effet $z_n \in D' \Rightarrow f^{(k)}(z_n) = 0$ $\forall k$, $\forall n$. *Cela implique*

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n \to \infty} f^{(k)}(z_n) = 0$$

On en tire, par le même argument que pour a) $\Rightarrow$ *b), que* $f \equiv 0$ *sur un voisinage de z, donc* $z \in D'$, *ce qui montre la fermeture.*
Comme D' est ouvert et fermé en D connexe, on a que D'=D, et que $f \equiv 0$ *sur D.* $\square$

Remarque Si $K = \mathbb{R}$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui ne sont pas analytiques. Par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \; x \neq 0 \\ 0 \; x = 0 \end{cases}$$

Alors $\exists f^{(n)}(x)\ \forall n, \forall x$ et on a $f^{(n)}(0) = 0, \forall n$. Mais $f \not\equiv 0$.

Corollaire II.3.4 *$A = \{f : D \to \mathbb{C}\ |f$ est analytique $\}$ est un anneau intègre.*
Démonstration*Soit $z_0 \in D$. Soient $f, g \in A = \{f : D \to \mathbb{C}\ |f$ est analytique $\}$ t.q. fg=0 sur D.*
Alors $\exists \rho > 0$ et $S_1(x), S_2(x)$ t.q. $\rho(S_{1,2}) \geq \rho$ et t.q. $f(z) = S_1(z - z_0)$, $g(z) = S_2(z - z_0)$ pour $|z - z_0| < \rho$.

$$\Rightarrow S_1(z - z_0)S_2(z - z_0) = 0 \Rightarrow (S_1S_2)(z - z_0) = 0 \Rightarrow S_1(x)S_2(x) = 0$$

*Comme $K[[x]]$ est un anneau intègre (cf. conséqunce de la proposition **??**),*
on a que soit $S_1 = 0$ soit $S_2 = 0$. □

Corollaire II.3.5 *Soient $f, g : D \to \mathbb{C}$ (D connexe), si f,g sont analytiques, et si $\exists V \subset D$ avec $f_{|V} = g_{|V}$, alors $f \equiv g$ sur D.*
Démonstration
*(f-g) s'annule sur le voisinage V. Donc, par le théorème **??**, on a que $(f - g) \equiv 0$ sur D.*

Corollaire II.3.6 *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ analytique. Si $f \not\equiv 0$, alors $\forall z_0$ t.q. $f(z_0) = 0$ $\exists$ un voisinage V tel que $f(z_0) \neq 0$ $\forall z \in V$, $z \neq z_0$*
Démonstration
Soit $z_0 \in f^{-1}(0)$, alors $\exists S(x)$ et $\rho > 0$ t.q. $\rho \leq \rho(S)$ avec $f(z) = S(z - z_0)$ pour $|z - z_0| < \rho$ et $D_\rho(z_0) \subset D$.
$D_\rho(z_0)$ est un disque de rayon ρ centré en z_0. $S(x) = \sum a_n x^n$.
*Comme $f \not\equiv 0$, on a par le théorème **??** que $S \not\equiv 0$, donc $\exists n$ t.q. $a_n \neq 0$. Soit n_0 le plus petit n t.q. $a_n \neq 0$.*
On a alors:

$$S(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n = x^{n_0} \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{n-n_0}}_{S_0(x)}$$

*avec $\rho(S_0) = \rho(S)$ par Hadamard (th. **??**). Donc $S_0(z - z_0)$ converge pour $|z - z_0| < \rho$ avec $S_0(0) = a_{n_0} \neq 0$.*
Donc, si on pose $g(z) = S_0(z-z_0)$ pour $|z-z_0| < \rho$, on a que g est analytique dans le voisinage $D_\rho(z_0)$ et $g(z_0) \neq 0$. Ce qui implique, par continuité des fonctions analytiques que $\exists \rho' > 0$, $\rho' < \rho$ t.q. $g(z) \neq 0$ pour $|z - z_0| < \rho'$.
Mais on a aussi que $(z - z_0)^{n_0} \neq 0$ pour $z \neq z_0$. Donc pour $|z - z_0| < \rho' < \rho$ que $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z) \neq 0$ pour $|z - z_0| < \rho'$ et $z \neq z_0$, donc $D_{\rho'}(z_0) \cap f^{-1}(0) = \{z_0\}$.

II.4 Fonctions holomorphes

Définition II.4.1 *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ (D ouvert $\subset \mathbb{C}, \neq \emptyset$, et $z_0 \in D$.*
Si :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \ (z \in D)$$

existe, alors on appelle cette limite la dérivée de f en z_0 par rapport à la variable complexe.
On dénote cette limite par $\frac{df}{dz}(z_0)$ ou $f^{'}(z_0)$.

Définition II.4.2 *Si f a une telle dérivée en z_0, on dit que f est holomorphe en z_0.*

Définition II.4.3 *Si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe $\forall z_0 \in D$, alors f est dite holomorphe sur D.*

Corollaire II.4.1 *Du corollaire* **??**, *on a que: si $f : D \to \mathbb{C}$ est analytique sur D, alors f est holomorphe sur D. (La réciproque est le corollaire* **??**.*)*

Proposition II.4.1 *Soit $D \neq \emptyset$ un ouvert $\subset \mathbb{C}$, soit f=u+iv, avec u et v à valeurs réelles, et soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Si f est holomorphe en D, alors:*

a) $a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent. En fait f est différentiable en z_0. (i.e. $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) = ah + bk + \alpha\sqrt{h^2 + k^2}$, où $\alpha = \alpha(h, k) \to 0$ quand $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. (a,b) s'appelle la différentielle de f en z_0.
b) $\frac{df}{dz}(z_0) = f^{'}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

En fait, on a les conditions de Cauchy-Riemann:
$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$

<u>Démonstration</u> *Par hypothèse,*

$$\exists \frac{df}{dz}(z_0) = f^{'}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{h + ik}$$

et on peut s'approcher de (0;0) comme on veut. Si on s'approche de (0;0) avec k=0 (sur l'axe O_x). On a que.

$$\exists \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}$$

Mais ceci est aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, ce qui implique que $\frac{df}{dz}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
Si on s'approche de (0;0) avec h=0 (sur l'axe O_y). On a que:

$$\exists \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

On a donc que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent, et que $\underbrace{f^{'}(z_0)}_{=c} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Donc:

$$c = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{h + ik}$$

Ce qui implique que : $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) = ah + bk + \alpha\sqrt{h^2 + k^2}$
où $\alpha = \alpha(h, k) \to 0$ quand $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Ceci démontre a).

b) $f^{'}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Donc: $0 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}) = (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Définition II.4.4

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})(z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})(z_0)$$

Corollaire II.4.2 *Si f est holomorphe en z_0, alors:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

Démonstration *Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, on a immédiatement la première affirmation.*
*On en tire également que $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})(z_0) = \frac{1}{2}(2\frac{\partial f}{\partial x})(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$ (cf proposition **??**).*

Proposition II.4.2 *Soit $f : \Omega \to C$, $z_0 \in \Omega$.*
*Si f est différentiable en z_0 et qu'on a les conditions de Cauchy-Riemann, alors f est holomorphe en z_0. (C'est la réciproque de la proposition **??**).*
Démonstration
Comme f est différentiable en z_0, $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) = ah + bk + \alpha\sqrt{h^2 + k^2}$, où $\alpha = \alpha(h, k) \to 0$ quand $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$, avec $a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. Soit c=a.
Par Cauchy-Riemann b=ic. On obtient donc $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) = c(h + ik). + \alpha\sqrt{h^2 + k^2}$, où $\alpha = \alpha(h, k) \to 0$ quand $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Alors:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{h + ik} = c$$

Donc $f^{'}(z_0) = c$ existe.

Définition II.4.5 *Ω est connexe si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_{1,2}$ ouverts et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \Rightarrow \Omega_1 = \emptyset$ ou $\Omega_2 = \emptyset$*

Lemme II.4.1 *Soit Ω connexe, alors chaque paire de points $z_1, z_2 \in \Omega$ peut être jointe par un chemin borné de segments parallèles aux axes O_x, O_y (notés CSP).*
Démonstration
On note Ω_1 l'ensemble des points qui peuvent être reliés à $z \in \Omega$ par un CSP.
On note Ω_2 l'ensemble des points qui ne peuvent pas être reliés à $z \in \Omega$ par un CSP.
On a $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
Soit $z_1 \in \Omega_1$ et soit $\varepsilon > 0$ t.q. chaque point ϕ de $B_\varepsilon(z_1)$ peut être joint à z_1 par un CSP. ϕ peut donc être relié par un CSP à z, donc $B_\varepsilon(z_1) \subset \Omega_1$. Ce qui implique que Ω_1 est ouvert.
Soit $z_2 \in \Omega_2$ et soit $\varepsilon > 0$ t.q. chaque point ψ de $B_\varepsilon(z_2)$ peut être joint à z_2 par un CSP. On ne peut pas joindre ψ à z par un CSP (si c'était le cas, on pourrait joindre z_2 à z par un CSP). Donc $B_\varepsilon(z_2) \subset \Omega_2$.Ce qui implique que Ω_2 est ouvert.
Comme Ω est connexe, que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et Ω_1, Ω_2 sont ouverts, on a que soit $\Omega_1 = \emptyset$,soit $\Omega_2 = \emptyset$. Comme $z \in \Omega_1 \Rightarrow \Omega_2 = \emptyset$ □

Proposition II.4.3 *Soit $f : \Omega \to C$ holomorphe sur Ω connexe.*
a) Si $f^{'}(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$, alors $f \equiv cte$ sur Ω.
b) Si $Re(f) \equiv cte$ sur Ω, alors $f \equiv$cte sur Ω.
Si $Im(f) \equiv cte$ sur Ω, alors $f \equiv$cte sur Ω.
(Re(f)≡cte $\iff$ $f(\Omega) \subset$ droite // à O_y, de même pour Im(f)).
Plus généralement, si Image(f)=f(Ω)⊂ une droite dans $\mathbb{C}$, alors $f \equiv$cte sur Ω.

c) Si $|f| \equiv$cte, alors $f \equiv$cte.

Démonstration

a) $f^{'}(z) = 0\ \forall z$. Donc, par Cauchy-Riemann, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ce qui implique que u et v (donc f) sont constants sur chaque segment $\subset \Omega$ et // à O_x ou O_y.

On fixe $z_0 \in \Omega$. Puis on prend $z \in \Omega$ arbitraire, alors, comme Ω est connexe, il existe un chemin allant de z_0 à z, en passant par des segments // à O_x ou O_y (cf lemme **??***).*

Cela implique que $f(z) = f(z_0)\ \forall z \in \Omega$, donc que $f \equiv$ cte.

b) 1) $u \equiv Re(f) \equiv cte \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Par Cauchy-Riemann, on a $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, donc $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, donc $f^{'}(z) = 0\ \forall z \overset{a)}{\Rightarrow} f \equiv$ cte. De même pour Im(f)$\equiv$ cte.

2) Si $f(\Omega) \subset$ droite $\overset{ex.}{\iff}$ $\exists \alpha, \underbrace{\beta}_{\neq 0} \in \mathbb{C}$ t.q. $\beta(f(z) - \alpha) \subset O_x$. Donc Im(g(z))$\equiv$ cte, avec g(z)=$\beta(f(z) - \alpha) \overset{1)}{\Rightarrow}$ $g(z) = cte$, donc f(z) est constante.

c) $|f(v)|^2 \equiv u^2(z) + v^2(z) \equiv cte$

On dérive:

$$\begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \overset{Cauchy-Riemann}{\Rightarrow} \begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Donc si:

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0$$

(i.e. $u^2(z)+v^2(z) \neq 0$), le système admet une solution unique. Celle-ci s'obtient facilement: $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0\ \forall z$. Donc u est constante, ce qui implique par b) que $f \equiv$ cte.

Si $\exists z$ t.q. $u^2(z) + v^2(z) = 0$, on a que $u^2(z) + v^2(z) = 0\ \forall z$, car $|f| \equiv$ cte. Donc $f \equiv 0$. Donc $f \equiv$ cte. $\square$

Chapter III

Intégrales le long d'un chemin

III.1 Intégrales le long d'un chemin

Définition III.1.1 *Soit $\gamma = (z : [a;b] \to \mathbb{C})$ un chemin continu, lisse par morceaux sur $\mathbb{C}$.*
Si $f : \Omega^a \to \mathbb{C}$ continue, alors l'intégrale le long du chemin γ est définie par:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt$$

Lemme III.1.1 *$\int_\gamma f(z)\ dz$ ne dépend pas de la paramétrisation de γ, i.e. si $t : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ est bijective,croissante et lisse par morceaux, alors on a:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma \circ t} f(z)\ dz$$

On a, en effet :
$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt$ et $\int_{\gamma \circ t} f(z)\ dz = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))\frac{d}{dz}(z(t(\tau)))\ d\tau$, avec $\tau : [\alpha;\beta] \to z(t(\tau)) \in \Omega$
sont égaux par le théorème de changement de variable (cf. Analyse I).

Définition III.1.2 (Opérations sur les chemins)

Addition
Soit: $\gamma_1 = (z : [a;b] \to \mathbb{C})$ et $\gamma_2 = (z : [b;c] \to \mathbb{C})$, avec $z_{\gamma_1}(b) = z_{\gamma_2}(b)$, alors $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ est donné par $z : [a;c] \to \mathbb{C}$, avec $z_{|[a;b]} = \gamma_1$ et $z_{|[b;c]} = \gamma_2$.
Opposé d'un chemin
Soit $\gamma = (z : [a;b] \to \mathbb{C})$, alors $-\gamma = (\xi : [a;b] \to \mathbb{C})$, avec $\xi(t) = z(-t)$.

Propriétés

$$① \quad \int_\gamma (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_\gamma f dz + \beta \int_\gamma g dz$$

[a] $\Omega \neq \emptyset$

$$② \quad \int_{\gamma_1+\gamma_2} f\ dz = \int_{\gamma_1} f\ dz + \int_{\gamma_2} f\ dz$$

$$③ \quad \int_{-\gamma} f\ dz = -\int_{\gamma} f\ dz$$

$$④ \quad |\int_{\gamma} f\ dz| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\ dt \leq \max_{t\in[a;b]} |f(z(t))| \underbrace{\int_a^b |z'(t)|\ dt}_{=l(\gamma)\ longueur\ du\ chemin} = \max |f| l(\gamma)$$

(cf. ex7, S21)

Proposition III.1.1 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. S'il existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe t.q. $\frac{dF}{dz} = f(z)\ \forall z \in \Omega$, alors $\forall\gamma$ chemin lisse par morceaux à valeurs dans Ω on a $\int\limits_{\gamma} f(z)\ dz = F(z(b)) - F(z(a))$ avec $\gamma = z : [a;b] \to \mathbb{C}$.*

Donc la valeur de $\int\limits_{\gamma} f(z)\ dz$ ne dépend que des 2 bouts de γ et si γ_1 et γ_2 ont mêmes bouts, alors $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\ dz$.

<u>Démonstration</u>

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\ dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}(z)z'(t)\ dt$$

Mais:

$$\frac{d}{dt}(F(z(t)) = \lim_{t\to t_0} \frac{F(z(t)) - F(z(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{F(z(t)) - F(z(t_0))}{z(t) - z(t_0)} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(z(t)) - F(z(t_0))}{z(t) - z(t_0)} \lim_{t\to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \frac{dF}{dz}(z)z'(t)$$

Donc:

$$\int_{\gamma} f\ dz = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(z(t)))\ dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

.

La dernière égalité sort du théorème fondamental de l'Analyse.

Corollaire III.1.1 *Sous les hypothéses de la proposition* **??***, on a:*

a)Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue et si γ est fermé, alors $\int\limits_{\gamma} f = 0$

b)Si f(z)=P(z) un polynôme et si γ est fermé, alors $\int\limits_{\gamma} f = 0$ (Dans ce cas les hypothèses (existence d'une primitive holomorphe) sont satisafites).

Définition III.1.3 *Soit R un rectangle aux côtés // à O_x et O_y, et soit ∂R le bord (ou la frontière) de R. Si $f : \partial R \to \mathbb{C}$ est continue, alors :*

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz \overset{déf}{=} \int_{\gamma} f(z)\ dz$$

Où γ est le chemin qui parcourt ∂R une fois, dans le sens trigonométrique [b].

Lemme III.1.2 *Si f est holomorphe, en z_0, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, avec $|z - z_0| < \delta$, avec $|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| < \varepsilon$. Donc $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$.*

Théorème III.1.1 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et $R \subset \Omega$ un rectangle, alors $\mu(R) = \int_{\partial R} f(z)\ dz = 0$. (Remarque: on ne peut pas utiliser le corollaire **??**, car on ne sait pas si f admet une primitive holomorphe).*

<u>**Démonstration**</u>

On partage R en 4 rectangles plus petits $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$, alors:

$$\int_{\partial R} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial R^{(k)}} f(z)\ dz$$

En effet, les parcours intérieurs s'annulent, car on intègre dans les deux sens (cf propriété 3). Donc:

$$\mu(R) = \sum_{k=1}^{4} \mu(R^{(k)})$$

On a que $\exists$ un k t.q. $\frac{1}{4}|\mu(R)| \leq |\mu(R^{(k)})|$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\frac{1}{4}|\mu(R)| > |\mu(R^{(k)})|\ \forall k$, ce qui impliquerait que:

$$4\frac{1}{4}|\mu(R)| > \sum_{k=1}^{4} |\mu(R^{(k)})| \geq |\sum_{k=1}^{4} \mu(R^{(k)})|$$

Donc que: $|\mu(R)| > |\mu(R)|$.

On note R_1 un des k pour lesquels $\frac{1}{4}|\mu(R)| \leq |\mu(R^{(k)})|$.

On recommence le processus pour obtenir une suite de rectangles $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots$, avec $diag(R_{n+1}) = \frac{1}{2} diag(R_n)$ et $\frac{1}{4}|\mu(R_n)| \leq |\mu(R_{n+1})|$.

Par le théorème d'Heine-Borel (Analyse I (p.281)), on a que $\exists! z_0 \in R \subset \Omega$ t.q.

$$\bigcap_{n\geq 1} R_n = \{z_0\}$$

Donc $\exists$ n t.q. si $z \in \partial R_n$, alors $|z - z_0| < \delta$.

On a: $\mu(R_n) = \int_{\partial R_n} f\ dz = \int_{\partial R_n} f\ dz - \underbrace{\int_{\partial R_n} \underbrace{f(z_0)}_{=cte}\ dz}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial R_n} \underbrace{f'(z_0)}_{=cte} \underbrace{(z - z_0)}_{polynôme}\ dz}_{=0} = \int_{\partial R_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\ dz$

Donc:

$$\frac{1}{4^n}|\mu(R)| \leq |\mu(R_n)| \leq \max_{z\in\partial R_n} (|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|) l(\partial R_n) \overset{lemme\ ??}{<} \varepsilon \underbrace{\max_{z\in\partial R_n} |z - z_0|}_{\leq diag\ R_n = \frac{1}{2^n} diag\ R} \underbrace{l(\partial R_n)}_{=\frac{1}{2^n} l(\partial R)}$$

[b] inverse des aiguilles d'une montre

$$\leq \frac{1}{4^n}\varepsilon \underbrace{diag\ R}_{=d}\underbrace{l(\partial R)}_{=L}$$

Donc: $|\mu(R)| < \varepsilon \underbrace{diag\ R}_{=d}\underbrace{l(\partial R)}_{=L}\ \forall\varepsilon > 0.$

$\Rightarrow \mu(R) = 0$ □

Théorème III.1.2 *Soit* Ω *un disque ouvert* $\subset \mathbb{C}$ *et soit* γ *un chemin fermé en* Ω*. Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est holomorphe, alors* $\int\limits_{\gamma} f\ dz = 0$

Démonstration

Définissons σ_{1z} *et* σ_{2z} *deux chemins* $\subset \Omega$ *reliant un point* $(x_0; y_0)$ *à* z*, définis ainsi: pour* σ_{1z}*, on garde d'abord* x *constant et on fait varier* y *jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur en* y *de* z*, puis on garde* y *constant en faisant varier* x *(et vice-versa pour* σ_{2z}*).*

On pose: $F(z) := \int\limits_{\sigma_{1z}} f\ dz \overset{thm.\ ??}{=} \int\limits_{\sigma_{2z}} f\ dz$

On peut considérer que nos deux chemins ne dépendent que d'une variable au point z [c] *(respectivement* x *et* y*). On peut donc appliquer le théorème fondamental de l'analyse:*

$$Pour\ \sigma_{1z}\ \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

$$Pour\ \sigma_{2z}\ \frac{\partial F}{\partial y} = if(z)$$

Donc F(z) posséde des dérivées partielles continues, ce qui implique (cf. Analyse I) que F est différentiable sur Ω *. De plus ses dérivées partielles satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, ce qui implique (prop.* **??***) que F est holomorphe. Comme* $\frac{dF}{dz} = f$*, on a par le corollaire* **??***, que* $\int\limits_{\gamma} f\ dz = 0$.

Théorème III.1.3 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert non-vide,* $R \subset \Omega$ *un rectangle, et* $X \subset \overset{\circ}{R}$ *un ensemble fini. Soit* $f : \Omega\backslash X \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe t.q.*

$$\lim_{z\to\xi} f(z)(z-\xi) = 0\ \forall \xi \in X$$

Alors $\int\limits_{\partial R} f(z)\ dz = 0.$

Démonstration

En utilisant un découpage de R en rectangles $R^{(k)}$ *t.q.* $\overset{\circ}{R}{}^{(k)} \cap X$ *possède au plus un point* $\forall k$*, et en tenant compte du fait que:*

$\int\limits_{\partial R} f(z)\ dz = \sum_k \int\limits_{\partial R^{(k)}} f(z)\ dz$*, on en conclut qu'il suffit de démontrer l'énoncé pour* $X = \{\xi_0\}$.

On procède de la façon suivante: on découpe R en 9, avec $R^{(0)} \subset R$ *un carré avec* ξ_0 *comme centre. On a:*

$$\int\limits_{\partial R} f(z)\ dz = \sum_{k=0}^{8} \int\limits_{\partial R^{(k)}} f(z)\ dz$$

Mais $\int\limits_{\partial R^{(k)}} f(z)\ dz = 0\ \forall k \in \{1; \ldots; 8\}$ *par le théorème* **??***. Donc* $\int\limits_{\partial R} f(z)\ dz = \int\limits_{\partial R^{(0)}} f(z)\ dz$*. Renommons* $R^{(0)}$ R_0.

[c] $\in \gamma$

On utilise l'algorithme suivant: On découpe R_0 en 9 carrés. L'intégrale est nulle sur chaque carré, sauf sur celui du milieu, que l'on appelle R_1. En répétant cet algorithme, on obtient une suite de carrés $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$, avec $l(\partial R_{n+1}) = \frac{1}{3} l(\partial R_n) = \frac{1}{3^{n+1}} l(\partial R_0)$ et $\int\limits_{R_0} f(z)\ dz = \int\limits_{R_n} f(z)\ dz\ \forall n \in \mathbb{N}$.

On a, par hypothèse, que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ t.q. si $|z - \xi_0| < \delta$, alors $|f(z)(z - \xi_0)| < \varepsilon$. Donc $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-\xi_0|}$, avec $0 < |z - \xi_0| < \delta$.

On en tire que $\exists n$ t.q. si $z \in \partial R_n$, alors $|z - \xi_0| < \delta$. Donc, si $z \in \partial R_n$, alors $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-\xi_0|}$. On en tire:

$$|\int\limits_{R_0} f(z)\ dz| = |\int\limits_{R_n} f(z)\ dz| \leq \int\limits_{R_n} |f(z)|\ |dz| \leq \int\limits_{R_n} \frac{\varepsilon}{|z - \xi_0|}\ |dz| \leq \varepsilon l(\partial R_n) \max_{z \in \partial R_n} \frac{1}{|z - \xi_0|}$$

$$= \varepsilon l(\partial R_n) \frac{1}{\min_{z \in \partial R_n} |z - \xi_0|} = \varepsilon 4c \frac{1}{\frac{1}{2}c} = 8\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$$

Avec c=côté de R_n. Donc $\int\limits_{\partial R} f(z)\ dz = 0$ □

Théorème III.1.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, $D \subset \Omega$ un disque fermé, et $X \subset \overset{\circ}{D}$ un ensemble fini. Soit $f : \Omega \backslash X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.*

Alors $\int\limits_{\gamma} f(z)\ dz = 0$ ($\gamma \in D \backslash X$).

Démonstration

*On utilise un peu la même strtégie que pour le théorème **??**.*

Soit $z_0 \in \overset{\circ}{D} \backslash X$. Pour tout $z \in \overset{\circ}{D} \backslash X$. On considère des chemins γ_z de z_0 à z formés de CSP. On prend γ_{1z} avec un segment final // à O_x et γ_{2z} avec un segment final // à O_y. On définit $F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi$. On a donc:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} F(z) = \int\limits_{\gamma_{1z}} f(\xi)\ d\xi = f(z)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F(z) = \int\limits_{\gamma_{2z}} f(\xi)\ d\xi = if(z)$$

*Donc F est holomorphe sur $D \backslash X$ et F'(z)=f(z). Donc (cf th. **??**) $\int\limits_{\gamma} f(z)\ dz = 0$ ($\gamma \in D \backslash X$). □*

III.2 Formule intégrale de Cauchy

Lemme III.2.1 *Soit deux points a et b à l'intérieur d'un disque. On a que $I(\gamma, a) = I(\gamma, b)$. Où γ est le chemin qui parcourt le bord du disque, et:*

$$I(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - c}$$

En fait cela est valable pour n'importe quel chemin fermé, et si a et b appartiennent à un ouvert connexe contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Démonstration

Comme a et b appartiennent à un ouvert connexe (p.ex. l'intérieur d'un disque), il existe un chemin qui relie a et b est qui n'intersecte pas γ . On peut recouvrir ce chemin par un nombre fini de boules (elles n'intersectent pas γ) . Il suffit de montrer que $I(\gamma, c)$ sur une boule quelconque. (On va prendre la première, sans perte de généralité).

Soit h t.q. $a + h \in B_1$. On a:

$$I(\gamma, a+h) - I(\gamma, a) = \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{z(t) - a + h} - \frac{1}{z(t) - a}\right) z'(t)\ dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{z(t) - a}\left(\frac{1}{1 - \frac{h}{z(t)-a}} - 1\right) z'(t)\ dt$$

On a :

$$|z(t) - a| \geq \inf_{z \in \gamma} |z - a| > h \to \left|\frac{h}{z(t) - a}\right| < 1$$

On obtient:

$$I(\gamma, a+h) - I(\gamma, a) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{z(t) - a}\left(\sum_0^\infty \frac{h^n}{(z(t) - a)^n} - 1\right) z'(t)\ dt = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta \frac{h^n}{(z(t) - a)^{n+1}} z'(t)\ dt$$

$$= \sum_1^\infty h^n \int_\alpha^\beta \frac{1}{(z(t) - a)^{n+1}} z'(t)\ dt = \sum_1^\infty h^n (z(t) - a)^n \Big|_\alpha^\beta = 0$$

Car $z(\alpha) = z(\beta)$ (chemin fermé).

Théorème III.2.1 (Formule intégrale de Cauchy) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide et $D \subset \Omega$ un disque fermé. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si γ est donné par $\xi(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$ (γ est le contour ∂D parcouru une fois dans le sens trigonométrique), alors:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi\ \forall z \in \mathring{D}$$

Démonstration*Soit $z \in \mathring{D}$ fixé. Soit $g : \Omega \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$, $g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$. On a que g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ (c'est un produit de fonctions holomorphes). De plus:*

$$\lim_{\xi \to z} g(\xi)(\xi - z) = 0$$

Les hypothèses du théorème **??** *sont donc vérifiées. On a donc:*

$$\int_\gamma g(\xi)\ d\xi = 0 = \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\ d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi - \int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\ d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\ d\xi = 0$$

D'où:

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z)\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi \overset{lemme\ \textbf{??}}{=} f(z)\int_\gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi = f(z)\int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{z_0 + re^{2\pi i t} - z_0} d\xi = f(z_0)2\pi i$$

Corollaire III.2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors f est analytique sur Ω. (La réciproque est le corollaire **??**.).*

De plus, soit $z \in \Omega$ et soit $r = d(z; \mathcal{C}(\Omega))$ (distance entre z et le complémentaire de Ω. On a que le rayon de la série entière de f(z) est $\geq r$.

Démonstration

On doit démontrer qu'il existe une série entière $P(x) = \sum a_n x^n$ t.q. $f(\xi) = \sum a_n(\xi - z)^n$ $\forall \xi \in \overset{\circ}{D}_r\ (z)$ et avec $\rho_P \geq r$.

*D'après la définition du rayon de convergence (**??**), on doit démontrer cela $\forall r_0 < r$ (le rayon de convergence est un sup).*

*Soit un $r_0 < r$ fixé et soit r_1 t.q. $0 \leq r_0 < r_1 < r$ (Donc $\frac{r_0}{r_1} < 1$). Soit γ donné par $\mu(t) = z + r_1 e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$ (cf thm. **??** (on est bien sur un disque)), on a :*

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\mu)}{\mu - \xi}\, d\mu\ \forall \xi \in \overset{\circ}{D}_{r_1}\ (z)\ (|\xi - z| \leq r_0 < r_1)$$

Pour μ sur γ (donc $|\mu - z| = r_1$ et $|\xi - z| \leq r_0$), on a :

$$\frac{1}{\mu - \xi} = \frac{1}{(\mu - z) - (\xi - z)} = \frac{1}{(\mu - z)(1 - \frac{\xi - z}{\mu - z})} = \frac{1}{\mu - z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\xi - z}{\mu - z})^n$$

La somme est normalement convergente, car $|\frac{\xi - z}{\mu - z}| \leq \frac{r_0}{r_1} < 1$. Donc:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\mu)}{\mu - z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\xi - z}{\mu - z})^n\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\mu)}{\mu - z}(\frac{\xi - z}{\mu - z})^n\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\int_\gamma \frac{f(\mu)}{(\mu - z)^{n+1}}\, d\mu}_{=a_n}(\xi - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi - z)^n$$

On a convergence normale $\forall \xi$ avec $|\xi - z| \leq r_0$. On a donc développé $f(\xi)$ en série entière autour de z, avec un rayon de convergence $\geq r_0$ $\forall r_0 < r$. $\square$

Corollaire III.2.2 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et $D = D_{R_0}(z_0)$ un disque fermé $\subset \Omega$, alors:*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\ \forall z \in \overset{\circ}{D}$$

Avec $\gamma = \partial D$ $\xi(t) = z_0 + R_0 e^{2\pi i t}$ $0 \leq\ t \leq 1$.

Démonstration

Soit $z \in \overset{\circ}{D}$ fixé, alors $G(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ est holomorphe sur $\Omega\backslash\{z\}$ (c'est un produit de fonctiond holomorphes). On a:

$$\frac{d}{d\xi}(\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}) = \frac{f'(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi) - f(z)}{(\xi - z)^2} \overset{déf}{=} g(\xi)$$

*Donc $g(\xi)$ possède une primitive holomorphe sur $\Omega\backslash\{z\}$. Ce qui implique, par la proposition **??**, que sur un chemin fermé γ, on a:*

$$0=\int_\gamma g(\xi)\ d\xi=\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{\xi-z}-\frac{f(\xi)-f(z)}{(\xi-z)^2}\ d\xi=\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{\xi-z}\ d\xi-\int_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{(\xi-z)^2}\ d\xi \Rightarrow \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{\xi-z}\ d\xi=\int_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{(\xi-z)^2}\ d\xi$$

Mais f holomorphe $\iff$ f analytique $\Rightarrow$ f' analytique $\iff$ f' holomorphe. On a donc:

$$① \ = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{\xi-z}\ d\xi=2\pi i f'(z)$$

$$② \ = \int_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{(\xi-z)^2}\ d\xi=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi-\int_\gamma \frac{f(z)}{(\xi-z)^2}\ d\xi=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi-f(z)\int_0^1 \frac{1}{(z_0+R_0e^{2\pi it}-z)^2}R_0 2\pi i e^{2\pi it}\ dt$$

$$=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi+f(z)\frac{1}{z_0-z+R_0e^{2\pi it}}\Big|_0^1=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi$$

Donc, comme ① =② , on a :

$$2\pi i f'(z)=\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi \iff f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi \ \square$$

Corollaire III.2.3 (Théorème de Liouville) *Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors $f\equiv$ cte.*

<u>Démonstration</u>

*$\forall z\in\mathbb{C}$, on a, par le corollaire **??** $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R(0)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\ d\xi\ \forall |z|<R$. Donc:*

$$|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_R(0)}\frac{|f(\xi)|}{|(\xi-z)^2|}\ |d\xi|\le\frac{1}{2\pi}\sup_{\xi\in\partial D_R(0)}\frac{|f(\xi)|}{|(\xi-z)^2|}2\pi R\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{(R-|z|)^2}2\pi R=\frac{MR}{(R-|z|)^2}\ \forall R>|z|$$

On fait tendre R vers l'infini $\Rightarrow \frac{MR}{(R-|z|)^2}\to 0\Rightarrow |f'(z)|=0\Rightarrow f'(z)=0\ \forall z\Rightarrow f\equiv$ cte. $\square$

Corollaire III.2.4 (Théorème fondamental de l'algèbre) *Soit P(z) un polynôme en z à coefficients complexes. Si P(z) n'est pas constant, alors $\exists z_0\in\mathbb{C}$ t.q. $P(z_0)=0$.*

<u>Démonstration</u>

On suppose, par l'absurde, que $P(z)\neq 0\ \forall z\in\mathbb{C}$. Donc $f(z)=\frac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme réciproque d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Mais:

$$\lim_{|z|\to\infty}f(z)=\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{P(z)}=0$$

*Car le degré de P est ≥ 1. Ceci implique que $\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ existe, car $\exists$ un disque à l'intérieur duquel f est borné (à cause de sa continuité), et à l'extérieur duquel $|f(z)|<\varepsilon$. Donc, par Liouville (corollaire **??**), $\frac{1}{P(z)}=f(z)\equiv cte\Rightarrow P(z)=cte\ \Rightarrow\Leftarrow$.* $\square$

Corollaire III.2.5 *Soit D un disque fermé dans $\mathbb{C}$ et soit $f : D \to \mathbb{C}$. Si f est holomorphe sur $\overset{\circ}{D}$, alors:*

$$a)\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi\ \forall z \in \overset{\circ}{D}$$

*Remarque: dans la formule intégrale de Cauchy (théorème **??**), f devait être holomorphe sur un ouvert $\Omega \supset D$.*

$$b)\ \max_{z\in D} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|$$

De plus, si $\exists z_1 \in \overset{\circ}{D}$ t.q. $|f(z_1)| = \max_{z\in D} |f(z)|$, alors $f_{|D} \equiv$ cte.

Démonstration

a) f est continue sur D compact, donc f est uniformément continue sur D. De même, si on a un z fixé $\in \overset{\circ}{D}$, alors $\forall R < R_0$ avec $|z - z_0| < R$ (z_0 centre de D), on a que $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ est continue sur l'anneau compact $D \setminus \overset{\circ}{D}_R(z_0)$. Donc $g(\xi)$ est uniformément continue sur l'anneau. Donc:

$$\lim_{R\to R_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi \overset{ex.4,S.24}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{R_0}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi$$

*Mais $\forall R$ avec $|z - z_0| < R < R_0$, on a par la formule intégrale de Cauchy (thm. **??**) ($D_R \subset$ un ouvert) que:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi$$

Donc :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{R_0}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\ d\xi$$

*b) Soit $z_1 \in \overset{\circ}{D}$ t.q. $|f(z_1)| = \max_{z\in D} |f(z)|$. Pour $D_r(z_1) \subset \overset{\circ}{D}$ (qui est ouvert, cf. Analyse I), on applique la formule intégrale de Cauchy (thm. **??**), avec $\gamma = \partial D_r(z_1)$ donné par $\xi(t) = z_1 + re^{2\pi i t},\ 0 \le t \le 1$. On a.*

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_1}\ d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_1 + re^{2\pi i t})}{z_1 + re^{2\pi i t} - z_1} r 2\pi i e^{2\pi i t}\ dt = \int_0^1 f(z_1 + re^{2\pi i t})\ dt$$

$$\Rightarrow |f(z_1)| \le \int_0^1 |f(z_1 + re^{2\pi i t})|\ dt \le \max_{|\xi - z_1| = r} |f(\xi)| \le |f(z_1)|$$

On n'a donc que des égalités. D'autre part si $\exists t$ t.q. $|f(z_1 + re^{2\pi i t})| < |f(z_1)|$, on aurait, par continuité de f, $\int_0^1 |f(z_1 + re^{2\pi i t})|\ dt < |f(z_1)|$ (faire le calcul si vous n'êtes pas convaincu(e)), ce qui serait une contradiction.

Donc: $|f(\xi)| = |f(z_1)|\ \forall \xi \in \partial D_r(z_1)$. Mais, comme r est arbitraire, $|f(z)| = |f(z_1)|\ \forall z \in$ voisinage de $z_1 \Rightarrow f \equiv$ cte dans ce voisinage $\Rightarrow f \equiv$ cte sur D.

Corollaire III.2.6 (Théorème de Morera) *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue sur Ω et $\int_\gamma f(z)\ dz = 0\ \forall\gamma$ chemin fermé en Ω, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration *On a vu (cf théorèmes **??** et **??**), que $\int_\gamma f(z)\ dz = 0\ \forall\gamma$ impliquait qu'il existait un F holomorphe tel que $F'(z)=f(z)$. Comme F est holomorphe, F est analytique, donc F' est analytique et par conséquent, on a que $F'=f$ est holomorphe.*

III.3 Singularités

Proposition III.3.1 (Ordre d'un zéro de f) *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\not\equiv 0$ et z_0, alors $\exists n$ t.q. $f^{(j)}(z_0) = 0 \ \forall 0 \leq j < n$, mais $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.*

De plus, $\exists! f_1 : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $f_1(z_0) \neq 0$ et $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z) \ \forall z \in \Omega$.

Démonstration *Comme $f \not\equiv 0$, $\exists n < \infty$ t.q. $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, avec $f^{(j)}(z_0) = 0 \ \forall 0 \leq j < n$ (cf. corollaire **??**). De plus,*

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z - z_0)^m}_{(*)}$$

*Le rayon de convergence de (*) est égal à celui de f (cf. théorème **??** et proposition **??**) (il est notamment >0). Soit:*

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \ si \ z \in \Omega \backslash \{z_0\} \\ \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \ si \ z = z_0 \in \Omega \end{cases}$$

On a que f_1 est holomorphe sur $\Omega \backslash \{z_0\}$. Elle l'est aussi en z_0. En effet, par définition, on a que pour un voisinage de z_0:

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z - z_0)^m$$

avec un rayon de convergence > 0. f_1 est donc analytique en z_0, donc holomorphe en z_0.

Montrons à présent l'unicité de f_1. Soit f_2 t.q. $f_2(z_0) \neq 0$ et $f(z) = (z - z_0)^k f_2(z)$.

On a $(z - z_0)^k f_2(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$.

Supposons $k \geq n$. On a $(z - z_0)^{k-n} f_2^{(k)}(z) = f_1^{(n)}(z)$. Comme $f_1^{(n)}(z) \neq 0$, on ne peut avoir $k > n$.

Supposons $n \geq k$. On a $(z - z_0)^{n-k} f_1^{(n)}(z) = f_2^{(k)}(z)$. Comme $f_2^{(k)}(z) \neq 0$, on ne peut avoir $n > k$.

On en conclut que k=n, ce qui implique que $\forall z \neq z_0$, on a $f_1(z) = f_2(z)$. Par continuité de ces 2 fonctions (elles sont supposées holomorphes), c'est aussi le cas pour $z = z_0$.

Définition III.3.1 *Le n de la proposition précédente s'appelle l'ordre du zéro z_0 pour f.*

Définition III.3.2 *Soit $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, alors z_0 s'appelle singularité isolée de f.*

Corollaire III.3.1 *Soit $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$$

alors $\exists g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe t.q. $g_{|\Omega \backslash \{z_0\}} \equiv f$.

Démonstration

$$Soit \ F(z) = \begin{cases} f(z)(z - z_0)^2 \ si \ z \neq z_0 \\ 0 \ si \ z = z_0 \end{cases}$$

F(z) est holomorphe sur Ω. En effet, elle l'est pour $z \neq z_0$ (produit de fonctions holomorphes), et:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)(z - z_0)^2}{z - z_0} = 0$$

par hypothèse.

Donc, par la proposition **??** $F(z) = (z - z_0)^n F_1(z)$*, avec* $F_1(z_0) \neq 0$ *et* $F_1(z)$ *holomorphe sur* Ω*. Donc* $f(z)(z - z_0)^2 = (z - z_0)^n F_1(z)$ $\forall z \neq z_0 \Rightarrow n > 1$*. En effet, si* $n \leq 1$*, on a* $F_1(z) = f(z)(z - z_0)$ $\forall z \neq 0$*. Si on fait tendre* $z \to z_0$*, on obtient* $0 = F_1(z_0) \neq 0$*. (Le cas pour n=0 est similaire (on a un* $(z - z_0)^2$*)). Donc* $f(z) = (z - z_0)^{n-2} F_1(z) \stackrel{\text{déf}}{=} g(z)$*. L'égalité entre f et g est vraie* $\forall z \neq z_0$*, mais g est holomorphe sur tout* Ω*.*

Corollaire III.3.2 *Soit* $z_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe. Si f est bornée dans un voisinage de* z_0 *alors* $\exists g : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorphe t.q.* $g_{|\Omega \backslash \{z_0\}} \equiv f$*.*

Démonstration

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)(z - z_0)| \leq M \lim_{z \to z_0} |z - z_0| = 0$$

et on peut appliquer le corollaire **??***.*

Conséquence

Pour que $z_0 \in \Omega$ soit une vraie singularité (non-supprimable) il faut et il suffit que:

$$\limsup_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Définition III.3.3 *Soit* $z_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe, avec:*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Alors z_0 *s'appelle un pôle de f.*

Corollaire III.3.3 (Ordre d'un pôle) *Soit* $z_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe, avec* z_0 *pôle de f (donc* $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$*). Alors* $\exists! n \geq 1$ *et* $f_1 : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorphe avec* $f_1(z_0) \neq 0$ *et* $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^n}$ $\forall z \in \Omega \backslash \{z_0\}$*.*

Démonstration

Comme $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$*,* $\exists \delta > 0$ *t.q.* $D_\delta(z_0) \subset \Omega$ *et* $f(z) \neq 0$ $\forall z \in D_\delta(z_0) \backslash \{z_0\}$*. On définit:*

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} \text{ si } 0 < |z - z_0| \leq \delta \\ 0 \text{ si } z = z_0 \end{cases}$$

F(z) est holomorphe sur $\mathring{D}_\delta(z_0) \backslash \{z_0\}$ *et est continue en* z_0*, donc on peut l'identifier à une série entière, et (cf. proposition* **??***) F(z) est holomorphe sur* $\mathring{D}_\delta(z_0)$ *et* $F(z_0) = 0$ *et on a* $F(z) = (z - z_0)^n F_1(z)$ *avec* $n \geq 1$ *et* $F_1(z)$ *holomorphe sur* $\mathring{D}_\delta(z_0)$ *et* $F_1(z_0) \neq 0$*. (i.e. F a un zéro d'ordre n en* z_0*). Donc* $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n F_1(z)$ $\forall 0 < |z - z_0| < \delta$*.*

Donc $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n F_1(z)}$*. Si on dénote* $f_1(z) = \frac{1}{F_1(z)}$ $\forall |z - z_0| < \delta$*, alors* f_1 *est holomorphe sur* $|z - z_0| < \delta$*,* $f_1(z_0) \neq 0$ *et* $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^n}$ $\forall 0 < |z - z_0| < \delta$*. L'unicité se démontre de la même manière que dans la proposition* **??***.*

Définition III.3.4 *Soit* $z_0 \in \Omega$ *un pôle pour* $f : \Omega \backslash \mathbb{C}$ *holomorphe. Le n obtenu dans le corollaire* **??** *s'appelle l'ordre du pôle.*

Définition III.3.5 *On dit que f est méromorphe sur* Ω*, si f est holomorphe, sauf sur un ensemble de points isolés de* Ω *où f a des pôles. (*$\exists \{x_n\}_n \subset \Omega$ *sans points d'accumulation sur* Ω*, avec f holomorphe sur* $\Omega \backslash \{x_n\}_n$ *et chaque* x_n *est un pôle pour f).*

Propriétés Si f_1 et f_2 sont méromorphes sur Ω, alors $\alpha f_1 + \beta f_2, f_1 f_2$ sont aussi méromorphes sur Ω. De plus, si $f_2 \not\equiv 0$, alors $\frac{f_1}{f_2}$ est méromorphe sur Ω.

Corollaire III.3.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe. Si f est méromorphe en Ω, alors $\exists\ g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes, avec $g_2 \not\equiv 0$ t.q. $f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$, $\forall z \in \Omega$ t.q. $g_2(z) \neq 0$.*

<u>Démonstration</u>

*Soient : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ des ouverts avec $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ t.q. $\exists n$ pôles de f dans Ω_n. On a, par le corollaire **??** que:*

$$f_{|\Omega_n} = \frac{g_1(z)}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_n)^{m_n}}$$

Lemme III.3.1 *Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ un chemin. Si $F_n(z) \to F(z)$ uniformément sur γ, alors $\int\limits_\gamma F_n(z)\ dz = \int\limits_\gamma F(z)\ dz$.*

<u>Démonstration</u>

$$|\int\limits_\gamma F_n(z)\ dz - \int\limits_\gamma F(z)\ dz| = |\int\limits_\gamma F_n(z) - F(z)\ dz| \leq \int \varepsilon|z'(t)|\ dt = \varepsilon l(\gamma)\ \forall \varepsilon > 0\ \square$$

Théorème III.3.1 (Application ouverte) *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$, avec Ω connexe, f holomorphe et $\neq$ cte, alors $\forall U \subset \Omega$ ouvert, f(U) est ouvert. De plus, si $z_0 \in \Omega$, avec $f'(z_0) \neq 0$, alors $\exists D_\delta(z_0) \subset \Omega$ t.q. $f : \overset{\circ}{D}_\delta\ (z_0) \to f(\overset{\circ}{D}_\delta\ (z_0))$ est bijective, avec un inverse holomorphe.*

<u>Démonstration</u>*Il suffit de démontrer que $f(\Omega)$ est ouvert. Suppsons par l'absurde que ce n'est pas le cas . Soit $\omega_0 = f(z_0)$, avec $\omega_n \to \omega_0$ t.q. $f(z) \neq \omega_n\ \forall z \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $f(z) - \omega_0 \neq 0\ \forall z \in \Omega$ avec $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ et t.q. $g(z) \neq 0$, avec $f(z) - \omega_0 = (z - z_0)^n g(z)$, o'u n est l'ordre du pôle pour $f(z) - \omega_0$ $(n \geq 1)$. Comme $f(z) - \omega_n$ ne s'annule pas sur $D_\varepsilon(z_0)$, on a que $\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_n}$ est holomorphe sur $D_\varepsilon(z_0)$. Donc, par le théorème **??**, on a : $\int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)-\omega_n} = 0$.*

*En utilisant le lemme **??**, on a:*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)-\omega_n} = \int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}$$

Mais: $f'(z) = (f(z) - \omega_0)' = ((z - z_0)^n g(z))' = (z - z_0)^n g'(z) + n(z - z_0)^{n-1} g(z)$. Donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0} = \frac{(z-z_0)^n g'(z) + n(z-z_0)^{n-1} g(z)}{(z-z_0)^n g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{n}{z-z_0}$$

. Ce qui implique:

$$\int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0} = \underbrace{\int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{holomorphe}}_{=0} + n \int\limits_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i n \neq 0$$

On a donc une contradiction, et $f(\Omega)$ est ouvert.
Pour la deuxième partie, on a f=u+iv et $f'(z_0) \neq 0$. Donc, par Cauchy-Riemann:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = |\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}|^2 = |\frac{\partial f}{\partial x}|^2 \overset{C.-R.}{=} |\frac{df}{dz}|^2 \neq 0 \text{ en } z_0$$

Donc, par le théorème d'inversion locale (cf. cours de Hairer) ,f est bijective, et f^{-1} est différentiable, et donc holomorphe.

Corollaire III.3.5 *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*, avec* Ω *connexe,* f *holomorphe et si* $z_0 \in \Omega$ *est t.q.* $|f(z_0)| \geq |f(z)|\ \forall z \in \Omega$*, alors* $f \equiv$ *cte sur* Ω*.*

Démonstration

Si $f \not\equiv$ *cte, alors* $f(\Omega)$ *est ouvert et* $f(z_0) \in f(\Omega) \Rightarrow \exists w \in f(\Omega)$ *t.q.* $|w| > |f(z_0)|$ *(par définition d'un ouvert). Mais* $\nexists z \in \Omega$ *avec* $f(z) = w \Rightarrow\Leftarrow$*.*

III.4 Forme générale du théorème de Cauchy

Définition III.4.1 *Soit $\Omega \in \mathbb{C}$ ouvert et soit $\gamma_0, \gamma_1 \subset \Omega$ des chemins (lisses par morceaux) donnés par:$z_0, z_1 : [0;1] \to \Omega$.*

On dit que γ_0 et γ_1 sont homothopes en Ω (on note $\gamma_0 \sim_\Omega \gamma_1$) si $\exists z : [0;1] \times [0;1] \to \Omega$ continue t.q.: $z_0(t) = z(0,t)$ et $z_1(t) = z(1,t)$ $\forall 0 \leq t \leq 1$ et $z_s(t) \overset{déf}{=} z(s,t)$ $\forall 0 \leq s \leq 1$ est un chemin lisse par morceaux, avec:

$$\lim_{s \to s_0} (\sup\{|z'_s(t) - z'_{s_0}(t)| \; |t \in [0;1], \; \exists z'_s(t), \; \exists z'_{s_0}(t)\}) = 0$$

On dit aussi que z(s,t) est une homotopie de γ_0 à γ_1.

Définition III.4.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et doit $\gamma_0 \subset \mathbb{C}$ un chemin (lisse par morceaux). Si γ_0 est homotope en Ω à un chemin constant γ_1 (i.e. un point $z_1(t)$=cte), alors on note:$\gamma_0 \sim_\Omega \cdot$*

Proposition III.4.1 *Si z(s,t) est une homotopie de γ_0 à γ_1 et si f:$\bigcup_{n\geq 0} \gamma_n \to \mathbb{C}$ est uniformément continue, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(z) \; dz = \int_{\gamma_0} F \; dz$$

($s \to \int_{\gamma_s} f(z) \; dz$ est continue en s).

<u>**Démonstration**</u>*Pour un n grand, on a:*

$$\int_{\gamma_n} F(z) \; dz - \int_{\gamma_0} F(z) \; dz = \int_0^1 F(z_n(t)) z'_n(t) \; dt - \int_0^1 F(z_0(t)) z'_0(t) \; dt$$

$$= \int_0^1 F(z_n(t))(z'_n(t) - z'_0(t)) + (F(z_n(t)) - F(z_0(t))) z'_0(t) \; dt$$

Donc:

$$|\int_{\gamma_n} F(z) \; dz - \int_{\gamma_0} F(z) \; dz| \leq \varepsilon \sup_{t\in[0;1]} |F(z_n(t)| + \varepsilon \sup_{t\in[0;1]} |z_0(t)| \leq M\varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \; \square$$

Théorème III.4.1 (Cauchy généralisé) *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$, soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes et soit $\gamma_0, \gamma_1 \subset \Omega$ des chemins fermés. S'ils sont homotopes, alors $\int_{\gamma_0} f(z) \; dz = \int_{\gamma_1} f(z) \; dz$*

<u>**Démonstration**</u>

Soit:

$$E = \{s \in [0;1] \mid \int_{\gamma_0} f(z) \; dz = \int_{\gamma_s} f(z) \; dz\}$$

Soit $s_n \in E$ et $s_n \to s_0 \in [0;1]$. On a:

$$\int_{\gamma_{s_n}} f(z) \; dz = \int_{\gamma_s} f(z) \; dz$$

par définition de E. Et:

$$\int_{\gamma_{s_n}} f(z) \; dz \overset{n\to\infty}{\to} \int_{\gamma_{s_0}} f(z) \; dz$$

par la proposition **??**

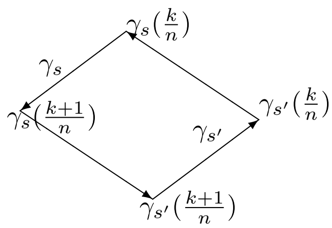
$$\Rightarrow \int_{\gamma_{s_0}} f(z)\ dz = \int_{\gamma_s} f(z)\ dz \Rightarrow s_0 \in E$$

E est donc fermé.

Soit maintenant $3\varepsilon = \inf |x - x'|$, *avec* $x \in$ *Image(z) et* $x' \in \mathcal{C}\Omega$.

Comme z est continu, on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *t.q. si* $|s' - s''| < \delta$ *et* $|t' - t''| < \delta$, *alors* $|z(s';t') - z(s'';t'')| < \varepsilon$.

On prend alors n t.q. $\frac{1}{n} < \delta$. *Pour chaque* $1 \le k \le n$, *on considère* D_k *la boule de centre* $\gamma_s(\frac{k}{n})$ *et de rayon* 2ε. *Si on dénote par* $\tilde{\gamma}_k$ *le chemin suivant:*



Alors, on a $D_k \subset \Omega$ *(le rayon est plus petit que la distance entre l'image de z et le complémentaire de* Ω *(resp.* 2ε *et* 3ε*)) et* $\tilde{\gamma}_k \subset \overset{\circ}{D}_k$ *(tous les points de* $\tilde{\gamma}_k$ *sont compris dans une boule de rayon plus petit que celui de* D_k *(resp.* ε *et* 2ε*)).*

Mais, par Cauchy classique (thm. **??***), on a* $\int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\ dz = 0\ \forall k$. *Donc:*

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\ dz = \int_{\gamma_s} f(z)\ dz - \int_{\gamma_{s'}} f(z)\ dz =$$

(cf. dessin). Donc $s' \in E$ *et E est ouvert.*

Comme E est ouvert et fermé sur $[0;1]$, *on a que* $E = [0;1]$. *Donc:* $\int_{\gamma_0} f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz$ $\square$

Corollaire III.4.1 *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorphe et* $\gamma_0 \subset \Omega$ *un chemin fermé. Si* $\gamma_0 \sim_\Omega \cdot$ *(si* γ_0 *est homotope à un point), alors* $\int_{\gamma_0} f(z)\ dz = 0$

<u>Démonstration</u> *On remarque que* $\int_{\cdot} f(z)\ dz = 0$ *et on appplique le théorème* **??**

Proposition III.4.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* $\gamma_0, \gamma_1 \subset \Omega$ *des chemins fermés simples (non auto-intersectés et parcourus en sens direct (trigo)). Si* $\overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \overset{\circ}{\gamma}_0$ *et* $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ *et* $\overset{\circ}{\gamma}_0 \setminus \overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \Omega$, *alors* $\gamma_0 \sim_\Omega \gamma_1$.

<u>Démonstration</u> *cf. ex 9 b), S.25*

Corollaire III.4.2 (Formule intégrale de Cauchy générale) *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorphe,* $\gamma_0 \subset \Omega$ *un chemin fermé non-auto intersecté, parcouru en sens direct (trigo), avec* $\overset{\circ}{\gamma}_0 \subset \Omega$. *Soit* $z \in \overset{\circ}{\gamma}_0$, *alors* $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\ d\xi$.

<u>Démonstration</u>

Soit γ_1 *un petit cercle autour de z t.q.* $\overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \overset{\circ}{\gamma}_0$, $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ $\Rightarrow \overset{\circ}{\gamma}_0 \setminus \overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \Omega \backslash \{z\}$. *Donc, par la proposition* **??** $\gamma_0 \sim_{\Omega\backslash\{z\}} \gamma_1$. *Donc* $\int_{\gamma_0} g(\xi)\ d\xi = \int_{\gamma_1} g(\xi)\ d\xi$, $\forall g : \Omega\backslash\{z\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe.Soit* $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$. *Elle est holomorphe sur* $\Omega\backslash\{z\} \to \mathbb{C}$. *Donc:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\ d\xi \overset{th.??}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\ d\xi \overset{th.??}{=} f(z)\ \square$$

Corollaire III.4.3 *Soit $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, avec z_0 point singulier pour f (f ne s'étend pas analytiquement en z_0), alors $\int\limits_C f(z)\ dz \equiv cte$, $\forall C$ cercle parcouru en sens direct autour de z_0 t.q. $\overset{\circ}{C} \subset \Omega$. Plus généralement :$\int\limits_\gamma f(z)\ dz \equiv cte$ $\forall \gamma \subset \Omega\backslash\{z_0\}$ chemin fermé, non auto-intersecté, parcouru en sens direct, avec $\overset{\circ}{\gamma} \subset \Omega$ et $z_0 \in \overset{\circ}{\gamma}$.*

<u>Démonstration</u>

*On a:$\int\limits_C f(z)\ dz = \int\limits_{C'} f(z)\ dz$ (ici $z(s,t) = z_0 + (r + s(r'-r))e^{2\pi i t}$). En général , pour C un cercle, et γ un chemin fermé , on a $\gamma \sim_{\Omega\backslash\{z\}} C$ (un dessin suffit à s'en convaincre), alors par le théorème de Cauchy généralisé, (**??**), on a $\int\limits_C f(z)\ dz = \int\limits_\gamma f(z)\ dz$*

Définition III.4.3 *Soit $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, avec z_0 singularité de f (i.e. $\limsup_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$), alors le nombre $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\ dz$ pour C cercle parcouru en sens direct autour de z_0 t.q. $\overset{\circ}{C} \subset \Omega$ s'appelle le résidu de f en z_0, noté $Res(f, z_0)$.*

Théorème III.4.2 (des résidus) *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ et f holomorphe sur Ω , sauf sur des points isolés de Ω, où f a des singularités effectives. Soit $\gamma \subset \Omega$ un chemin fermé non auto-intersecté, parcouru en sens direct, avec $\overset{\circ}{\gamma} \subset \Omega$ ($\overset{\circ}{\gamma}$ ne contient qu'un nombre fini de singularités) et t.q. $\nexists$ de points de singularité de f sur γ, alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

où $\{z_k\} \subset \overset{\circ}{\gamma}$ est l'ensemble des points de singularité.

<u>Démonstration</u>*Par récurrence sur n. Si n=0, γ est homotope à un point (un dessin suffit à s'en convaincre), donc par le corollaire **??**,$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(z)\ dz = 0$. Si n=1, on utilise le corollaire **??** et la définition **??**. Pour $n \geq 2$, on partage γ en γ_1 et γ_2 t.q. $z_1 \in \overset{\circ}{\gamma}_1$ et $\{z_2, z_3, \ldots, z_n\} \in \overset{\circ}{\gamma}_2$. Alors:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} f(z)\ dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} f(z)\ dz = Res(f, z_1) + \sum_{k=2}^{n} Res(f, z_k)$$

<u>Calcul de résidus</u>

Soit $f : \Omega\backslash\{z_0\}$ avec $z_0 \in \Omega$ une singularité effective. On a

$$soit\ \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty\ et\ z_0\ est\ un\ pôle\ de\ f$$

$$soit\ \exists z_n \to\ z_0\ t.q.\ \lim_{z\to z_0} |f(z)| < \infty$$

Si z_0 est un pôle, on sait par le corollaire **??**, on a que : $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ (n est l'ordre du pôle et g est holomorphe ($g(z_0) \neq 0$).

On a :

$$f(z) = \sum_{k\geq -n} a_k (z - z_0)^k$$

qui est la série de Laurent de f en z_0, dans un voisinage de z_0, $\forall z \neq z_0$. En effet:

$$g(z) = \sum_{m\geq 0} b_m (z-z_0)^m$$

avec $b_0 \neq 0$ et $a_k = b_{k+n}$ $\forall k \geq -n$. Donc:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\sum_{k\geq -n} a_k(z-z_0)^k)\ dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k\geq -n} a_k \int_C (z-z_0)^k\ dz = a_{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-z_0}\ dz = a_{-1}$$

En effet:

$$(z-z_0)^k = \frac{d}{dz}(\frac{1}{k+1}(z-z_0)^{k+1}) \Rightarrow \int_C (z-z_0)^k\ dz = (\frac{1}{k+1}(z-z_0)^{k+1})|_a^b\ \forall k \neq -1$$

Comme nous parcourons un cercle, les bornes a et b sont égales, et l'intégrale est nulle.

Cas particuliers

1) Dans le cas où z_0 est un pôle simple (n=1), i.e. $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ avec $g(z_0) \neq 0$, alors $a_{-1} = g(z_0) = b_0 = Res(f, z_0)$ et $g(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

2) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec P,Q des polynômes, t.q. $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, et z_0 est un zéro simple (donc $Q'(z_0) \neq 0$).

$$\Rightarrow Res(f, z_0) \overset{cf\ 1)}{=} \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)(z-z_0)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)(=0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Exemple III.4.1 *Soit* $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. $P(z) = e^{iz}$ *et* $Q(z) = z^2+1$, f *a des pôles simples en* $\pm i$. *On a donc que* $Res(f, \pm 1) = \frac{e^{\mp 1}}{\pm 2i}$. *Donc:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1}\ dz = \frac{e^{-1}}{2i} - \frac{e}{2i} = \frac{e^{-1}-e}{2i}$$

Application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales définies

Type 1 :

On veut calculer $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t; \cos t)\ dt$ avec R(x,y) est rationnelle, sans pôle sur le cercle unité (i.e. $R(\sin t;\cos t) \neq \infty\ \forall 0 \leq t \leq 2\pi$). Alors on pose $z = e^{it}$ et $z' = ie^{it} = iz \Rightarrow \sin t = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$ et $\cos t = \frac{z+\bar{z}}{2i} = \frac{z+z^{-1}}{2}$.

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} R(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz}\ dz = \int_0^{2\pi} G(z(t); z'(t))\ dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{i}\int_{C_1} R(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2})\frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{i}2\pi i \sum_k Res(R(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2})\frac{1}{z}; z_k)$$

$$= 2\pi \sum_k Res(R(\frac{z-z^{-1}}{2i}; \frac{z+z^{-1}}{2})\frac{1}{z}; z_k)$$

Où les z_k sont les pôles à l'intérieur du cercle unité.

Exemple III.4.2

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}\ dt$$

$$R(\frac{z-z^{-1}}{2i};\frac{z+z^{-1}}{2})\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{1}{5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}} = \frac{2i}{10iz+3z^2-3}$$

Les solutions de $z^2+2\frac{5}{3}iz-1=0$ sont $z_1=-3i$ et $z_2=-\frac{i}{3}$. Seule z_2 est dans le cercle unité. Donc:

$$I = 2\pi Res(R(\frac{z-z^{-1}}{2i};\frac{z+z^{-1}}{2})\frac{1}{z};-\frac{i}{3}) = \frac{2i}{\frac{d}{dz}(10iz+3z^2-3)}|_{z=-\frac{i}{3}} = \frac{4\pi i}{10i+6(-\frac{i}{3})} = \frac{4\pi i}{8i} = \frac{\pi}{2}$$

Type 2 :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx$$

où $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, Q(x) n'a pas de racines réelles et $deg(Q)\geq 2+deg(P)$, donc $\lim_{|x|\to\infty} xR(x)=0$.

Soit Ω un demi-cercle dans le semi-plan supérieur centré á l'origine et de rayon r. On a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} R(x)\ dx = \lim_{r\to\infty}(\int_{-r}^{r} R(x)\ dx + \int_{\partial\Omega} R(x)\ dx)$$

En effet :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial\Omega} R(x)\ dx = 0$$

car:

$$|\int_{\partial\Omega} R(x)\ dx| \leq \sup_{|x|=r}|R(x)|\pi x \to 0$$

On prend γ: le chemin qui suit le bord de Ω, puis qui va de -r à r. On a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx = \lim_{x\to\infty}\int_{\gamma} R(x)\ dx = 2\pi i\sum_k Res(R(x);x_k)$$

Les x_k sont les zéros de Q(x) dans le semi-plan supérieur.

Exemple III.4.3

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\ dx$$

Les zéros de z^6+1 dans le semi-plan supérieur sont: $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$. Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\ dx = 2\pi i\sum_{k=1,3,5}\frac{1}{6z_k^5}$$

avec $z_k = e^{\frac{k\pi i}{6}}$.