ENVMERATIO MODORVM QVIBVS FIGVRAE PLANAE RECTILINEAE PER DIAGONALES DIVIDVNTVR IN TRIANGVLA.

Auctore

IOH. ANDR. DE SEGNER.

Triangulum per diagonalem in alia ſolui non poſſe, vtpote quod ex ſe ipſo vno tantum modo componitur, notum eſt: quadrilaterum autem ita diuidi duplicem in modum poſſe, mox apparet. Neque difficulter perſpicitur, modos, quibus quinque laterum figura per diagonales in triangula ſoluitur, quinque eſſe, quorum quilibet diſcrepat ab altero. Sex autem, vel plurium laterum figurae, quot modis ita ſoluantur enumerare difficilius eſt; eoque difficilius, quo plura, ſunt figurae latera. Soluitur autem hexagonum in triangula 14 modis diuerſis, heptagonum 42, ogdogonum 132, enneagonum 429; quos numeros mecum beneuolus communicauit ſummus *Eulerus*; modo, quo eos reperit, atque progreſſionis ordine, celatis. Vtrumque perſpiciendi cupido, poſt tentamina quaedam inania, eos numeros eliciendi methodus occurrit adeo ſimplex, vt in ea acquieſcendum mihi putauerim, quam hic proponam.

Triangulum prima ordine eſt figurarum planarum rectilinearum, quadrilaterum ſecunda, et ita deinceps, ſic vt index ordinis cuiuslibet reperiatur, a numero laterum figurae vel angulorum duabus vnitatibus ſubtractis. Ex quo ſequitur, quod neminem latet, biangulum, vel lineam rectam figuram non eſſe, vtpote cui index ordinis o reſpondet.

Problema.

Dato indice ordinis figurae planae rectilineae, n, datoque numero modorum, quo quaelibet eius generis figura alia, ordinis, cuius exponens numero n minor eſt, in triangula ſoluitur: reperire numerum modorum, quibus in triangula ſolui poteſt figura illa ordinis n.

Solutio.

Si figura, cuius ordinis index eſt o, in triangula ſolui poſſit modis a, figura autem ordinis 1, modis b, figura ordinis 2, modis c, et ita porro; figura autem ordinis, cuius index eſt $n-1$, modis q, figura ordinis $n-2$, modis p, reliqua; dicaturque numerus modorum quaeſitus, quo figura ordinis proxime ſequentis n in triangula ſoluitur, x: ſcriptis indicibus ab o ad $n-1$, ordine, atque ad quemlibet adſcripto diuiſionum numero, hunc in modum

o	1	2	.	.	$n-3$	$n-2$	$n-1$
a	b	c	.	.	o	p	q

erit numerus omnium indicum ita ſcriptorum, vel par, vel impar: prius quidem ſi $n-1$ impar fuerit, atque n par, poſterius ſi $n-1$ par fuerit, atque n impar. Si par ſit numerus indicum, fac $x=2aq+2bp+2co$, et ita

ita porro, donec terminus intermedius nullus sit reliquus. Sin autem numerus indicum sit impar, iisdem factis, quia terminum intermedium vnum superesse necesse est, qui sit d, huius quadratum factis adde, vt fiat $x = 2aq + 2bp + 2co +$ etc. $+ dd$.

Ad indicem o est $a = 1$. Si enim linea recta concipiatur vt triangulum; figuram istam aliter atque aliter dissolui non posse manifestum est, quia plures vna rectae inter duo puncta non cadunt. Hoc sumpto, si et numerorum illustris *Euleri* quinque priores veri esse ponuntur, sunt autem veri omnes, reperietur numerus modorum, quibus in triangula soluitur figura ordinis sexti, siue ogdogonum, faciendo secundum schema adiectum.

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	84
						+ 28
						+ 20
						132

$x = 2 \times 42 + 2 \times 14 + 2 \times 10$. Sique hinc porro pergere velis ad enneagonum, quae figura est ordinis septimi, erit ex schemate producto,

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	5	14	42	132	264
							+ 84
							+ 56
							+ 25
							429

$x = 2 \times 132 + 2 \times 42 + 2 \times 28 + 5 \times 5$.

Atque ſecundum perpetuam hanc legem, ex ſolo numero modorum ſoluendi 1, qui pertinet ad figuram ordinis 0, numeri eiusdem generis omnes, quorum cuilibet qui reſpondet, ordinis index, vel vnitas eſt, vel numerus vtcunque magnus, ſenſim eliciuntur.

Demonſtratio.

Tab. IV. Fig. 5. Sit in triangula diuidenda figura ACDEFGB. Cum ergo non alia eſſe debeant eorum triangulorum latera, quam quae eadem vel latera ſunt figurae diuidendae, vel diagonales: quodlibet figurae latus, latus fieri vnius triangulorum, debet. Sumatur ergo latus AB, ab eoque diuiſio inchoetur ſic, vt ſupra baſin AB ſtatuatur triangulum, cuius apex vel in C cadat, vel in D, vel in quodcunque huius generis punctorum reliquorum, quorum quidem numerus, cum duabus vnitatibus minor ſit numero angulorum figurae diuidendae, indici ordinis eiusdem figurae n aequalis erit. Quodlibet horum triangulorum vt ADB a figura ACDEFGB reſecebit ſiniſtram ACD, et dextram DEFGB, quarum illa, vel haec linea recta, vel biangulum, erit, ſi apex trianguli ceciderit in puncta aſſumptis A, B vicina, C vel G: ſumma autem indicum, quorum vnus figurae dextrae, alter ſiniſtrae ordinem exponit, ſemper eadem erit, $n-1$; vnde ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 0, erit index ordinis figurae dextrae $n-1$, ſi index ordinis figurae ſiniſtrae ſit 1, erit index ordinis figurae dextrae $n-2$, et ita porro.

Si

Si iam a triangulo deſcripto ADB diuiſio figurae ita abſoluatur, vt primo figurarum reſectarum ſiniſtra ACD tot modis in triangula diuidatur, quot modis diuidi poteſt, tum et dextra: earum diuiſionum tot conſtitui poſſunt genera, quot ſuper AB triangula poſſunt conſtitui, id eſt, numero n; cumque diuiſio figurae dextrae nullo modo pendeat, a diuiſione figurae ſiniſtrae, cuiuslibet eorum generum tot ſumi poſſunt ſpecies, quot modis ſecari poteſt figura ſiniſtra, quarum cuilibet tot ſuberunt diuiſiones ſingulares, quot modis figura dextra in triangula ſecatur. Vnde ſequitur in qualibet eiusdem generis ſpecie eundem fore ſectionum ſingularium numerum, atque numerum ſectionum ſingularium cuiuslibet generis proditurum, numero modorum, quibus in triangula diuidi poteſt figura ſiniſtra, per numerum modorum, quibus dextra poteſt diuidi, multiplicato.

Litteris ergo a, b, c, vt et d, et o, p, q eadem hic notantibus, quae notabant initio, ad primum genus, quo apex trianguli ſuper AB deſcripti, cadit in C, cum ſit index ordinis figurae ſiniſtrae $=0$, et index ordinis figurae dextrae $n-1$; erit aq numerus ſectionum eius generis ſingularium. Ad vltimnm autem genus, quo apex trianguli cadit in G, cum index ordinis figurae ſiniſtrae ſit $n-1$, et index ordinis figurae dextrae $=0$, idem prodit numerus ſectionum ſingularium huius generis aq, vt duo haec genera, primum et vltimum, coniuncta, ſectiones ſingulares comprehendant numero $2aq$. Ad alterum diuiſionum genus,

genus, quo trianguli apex in D cadit, est index ordinis figurae sinistrae $=1$, et index ordinis figurae dextrae $n-2$, hinc numerus sectionum singularium huius generis $=bp$. Verum ad penultimum sectionum genus, quo apex trianguli cadit in F, cum sit index ordinis figurae sinistrae $n-2$, et index ordinis figurae dextrae 1, idem sectionum singularium numerus bp et huic generi suberit, atque genus secundum cum penultimo sectiones numero $2bp$ comprehendet. Patetque, eodem modo si pergamus, donec genera, quae ita combinari possint, nulla relinquantur, collectis in summam factis $2aq$, $2bp$, $2co$ ex reliquis, vniuersum sectionum singularium numerum, quae omnibus generibus subsunt, obtineri. Id autem futurum est, si n numerus fuerit par. Si vero impar fuerit hic exponens ordinis n, combinatis ita duobus quibus libet generibus, quae aequaliter ab extremis distant, vnum relinquetur in medio punctum E, ad quod, ductis AE, BE rectis, eiusdem ordinis figura resecabitur vtrinque. Vnde si d sit numerus modorum, quibus vna harum figurarum diuiditur in triangula, idem numerus ad alteram aeque pertinebit, eritque numerus sectionum omnium generis in medio relicti, quadratus dd; quo ad summam priorem $2aq+2bp+2co$ etc addito, omnium figurae propositae sectionum singularium numerus prodibit.

Vehementer crescunt modorum, quibus figurae plane rectilineae in triangula diuidi possunt, numeri, sic, vt viginti laterum figura ita secari possit plus quam

469,

469, 000000 modis. Appoſui tabellam, quo id declaratur, cuius prima ſeries habet numerum laterum cuiuslibet figurae, altera indicem ordinis, tertia numeros ſectionum generis primi et vltimi, coniunctos, quarta, numeros ſectionum generis ſecundi et penultimi, et ita porro, ad quos apud indices impares accedit numerus ſectionum generis intermedii. Vltima tandem ſeries numeros iſtos in ſummam collectos. atque numeros vniuerſorum modorum, ſectionum omnis generis earum figurarum, quarum indices illis imminent, complectitur.

II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	XI	XII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724
.	.	.	1	4	10	28	84	264	858	2860
.	.	.	.	.	4	20	56	168	528	1716
.	.	.	.	.	. .	. .	25	140	420	1320
.	.	.	.	.	. .	. .	. .	. .	196	1176
1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

XIII	XIIII	XV	XVI	XVII
11	12	13	14	15
33592	117572	416024	1503800	5384880
9724	33592	117572	416024	1503800
5720	19448	77184	235144	832048
4290	14300	48620	167960	587860
3696	12012	39040	136136	470288
1764	11088	36036	120120	408408
. . . .	. . . . .	17424	113256	377520
. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . . .	184041
58786	208012	751900	2692440	9748845

XVIII	XVIIII	XX
16	17	
19497690	69016140	252827580
5384880	19497690	69016140
3007600	10769760	38995380
2080120	7519000	26924400
1646008	5824336	21053200
1410864	4938024	17473008
1283568	4434144	15519504
197340	4171596	14410968
. . . .	243100	1390532[illegible]
345[illegible]8070	126413790	469925500

METHO