JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

RODRIGUES, OLINDE

Sur le nombre de manières de décomposer un Polygone en triangles au moyen de diagonales.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 547-548.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A43_0>

Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales ;

Par M. Olinde RODRIGUES.

En désignant ce nombre par P_n pour un polygone de n côtés, on a

$$P_{n+1}=\frac{4n-6}{n}P_n,$$

formule que M. Lamé a démontrée dans le dernier cahier de ce Journal, et qui peut être établie plus directement comme il suit.

Le nombre des triangles qui entrent dans chaque figure de décomposition d'un polygone de n côtés, est $n-2$.

Celui des droites, diagonales ou côtés, qui joignent deux à deux les n sommets de chacune de ces figures de décomposition est $2n-3$. Le nombre total de ces droites pour les P_n figures sera donc $(2n-3)P_n$; et comme chacune de ces droites joint deux sommets, on comprend immédiatement que $\frac{4n-6}{n}P_n$ représente le nombre total des droites qui dans les P_n figures, vues ensemble, aboutissent à un sommet désigné du polygone donné.

Il est de plus évident que chacune de ces droites, dont le nombre est $\frac{4n-6}{n}P_n$, se trouve répétée autant de fois dans les P_n figures vues ensemble qu'il y a de décompositions possibles du polygone donné, *rapportées* à cette droite, côté ou diagonale ; en sorte qu'on peut dire encore que $\frac{4n-6}{n}P_n$ exprime le nombre total des décompositions possibles d'un polygone de n côtés, opérées successivement par rapport à l'une et à l'autre des $n-1$ droites qui d'un sommet désigné, vont joindre les autres sommets du polygone.

J'entends ainsi qu'une décomposition s'opère *par rapport* à un côté ou une diagonale donnée, lorsque ce côté ou cette diagonale fait invariablement partie de toutes les figures de décomposition qui restent possibles avec ce côté ou cette diagonale invariable.

Considérons maintenant un polygone de $n+1$ côtés, et dans ce polygone un côté nn' joignant deux sommets n, n'.

Rapportons successivement toutes les décompositions possibles de ce polygone à chacun des $n-1$ triangles qui ont pour base nn' et pour sommet l'un des $n-1$ sommets autres que n et n'; c'est-à-dire, considérons le groupe de ces figures de décomposition, qui ont en commun l'un de ces triangles dont nn' est la base, $nn'k$ par exemple, en désignant ainsi celui dont le sommet est k:

Et remarquons que le même côté nn' ne sert de base qu'à un seul triangle dans chaque figure de décomposition, et qu'en conséquence le nombre total de ces figures sera bien exactement le même que celui des décompositions possibles, opérées successivement par rapport à chacun des $n-1$ triangles qui peuvent avoir nn' pour base.

Maintenant il est aisé de voir que le groupe rapporté au triangle $nn'k$ comprend précisément autant de figures qu'en comprendrait le groupe des figures de décomposition du polygone donné réduit à n côtés par l'annulation du côté nn' ou la confusion de n' en n, les figures de ce second polygone étant rapportées à la droite nk; ou si l'on aime mieux, que chacune des décompositions rapportées dans le premier polygone donné, de $n+1$ côtés, au triangle $nn'k$, correspond rigoureusement à une décomposition semblable dans le polygone composé des mêmes sommets que le premier à l'exception du sommet n', cette décomposition étant opérée par rapport à la droite nk.

Le nombre total des décompositions possibles d'un polygone de $n+1$ côtés est donc égal au nombre total des décompositions possibles d'un polygone de n côtés, en opérant ces dernières successivement par rapport à toutes les $n-1$ droites qui peuvent joindre un sommet donné à chacun des autres.

On a donc $P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n$ relation qui montre en même temps que ce nombre P_{n+1} est égal à celui de toutes les droites qui aboutissent à un sommet désigné dans les P_n figures de décompositions possibles, vues ensemble, pour un polygone de n côtés.