Capitel 9.

Weitere combinatorische Operationen.

§ 120. Nachdem wir die drei wichtigsten combinatorischen Operationen: die Permutationen, Combinationen und Variationen studirt haben, dürfen wir uns zu weiteren wenden, deren es, wie gleich im Anfang unserer Untersuchungen betont worden ist, beliebig viele giebt. Nur wollen wir dabei vermeiden, auf hier sehr nahe liegende Spielereien einzugehen. Schon früher haben wir solche Themata gestreift. Hier mag eine Reihe von anderen noch erwähnt sein, welche durch die Schwierigkeit ihrer Lösung oft genug das Interesse bedeutender Forscher erregt und ihren Geist beschäftigt haben, trotzdem sie weiterer wissenschaftlicher Anwendungen baar sind oder vielmehr bisher noch baar waren. Für Literaturnachweise sei auf das höchst interessante und ausführliche Werk von W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele (Leipzig, Teubner, 1901) verwiesen.

Zu dem Gebiete, auf welches wir wenigstens einen Blick werfen wollen, gehört das schon früher angeführte „Acht-Königinnen-Problem“ (§ 39). In gewisser Weise ein Gegenstück zu diesem bietet die Aufgabe, möglichst wenig Königinnen so auf dem Schachbrette unterzubringen, dass sie jedes Feld des Brettes beherrschen. Fünf Königinnen sind dazu erforderlich. Das erste Problem gehört zu dem der Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung; das zweite geht darüber hinaus und führt auf andere combinatorische Operationen.

Beim Rösselsprungproblem wird gefordert, dass ein Springer jedes Feld des Schachbrettes auf seinem durch die Regeln des Schachspiels eingeengten Wege einmal und nur einmal betrete.

Das Problem der magischen Quadrate verlangt, dass auf einem Schachbrette von n^2 Feldern die n^2 ersten ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ so angeordnet werden, dass die Summe für jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale (auch wohl für jede gebrochene Diagonale) dieselbe ist.

Umfüllungs-, Anordnungs- und Auszählungsaufgaben gehören eben hierher.*)

§ 121. In den Paragraphen 40 und 48 sind wir auf Fragen gestossen, welche eine Anordnung von Elementen auf einer ge-

*) Journ. de Math. (4) 8 (1892) p. 331.

schlossenen Linie ins Auge fassten, also auf Fragen, bei denen die Folge der Elemente cyclisch vom letzten auf das erste zurückführt. Am einfachsten wird die Aufstellung der Elemente durch Anordnung auf einem Kreise veranschaulicht, der in gewisser, bestimmter Richtung durchlaufen werden soll, etwa im entgegengesetzten Sinne der Bewegung des Uhrzeigers.

Ohne tiefer auf diesen Gegenstand einzugehen, wollen wir doch die wichtigsten Resultate, die sich auf solche Kreispermutationen gegenüber den gewöhnlichen geradlinigen Permutationen beziehen, hier ableiten. Eingehend hat sich E. Jablonski*) mit der Theorie beschäftigt.

Bei der Anordnung von n Elementen auf dem Umfange eines Kreises nehmen wir die Abstände der Elemente von einander als gleich an. Ferner betrachten wir zwei Anordnungen als identisch, wenn sie durch Drehung des tragenden Kreises um seinen Mittelpunkt mit einander zur Deckung gebracht werden können. Es ist dies dasselbe, als ob wir ein für alle Mal das Anfangselement an eine bestimmte Stelle brächten und nur die übrigen Elemente permutirten.

Daraus ergiebt sich sofort bei n Elementen, die sämmtlich unter einander verschieden sind, als Anzahl aller Kreispermutationen

$$Q = (n-1)!$$

Wir erkennen dasselbe auch folgendermassen: Ist P die Anzahl der in gerader Linie, Q die Anzahl der auf dem Kreise angeordneten Permutationen, so giebt jede zu Q gehörige Complexion, je nach dem Elemente, mit welchem man sie beginnt, n zu P gehörige verschiedene. Also ist

$$Q = \frac{1}{n} P = (n-1)!$$

Sind die Elemente aber nicht alle unter einander verschieden, so kann der letzte Schluss versagen, da man bei einer zu Q gehörigen Complexion auch von verschiedenen Anfangsgliedern aus dieselbe geradlinige Permutation erhalten kann; z. B. bei der cyclischen Folge von $(abcdabcd)$, falls die Anordnung auf dem Kreise einmal mit dem ersten und das andere Mal mit dem zweiten a begonnen wird.

Diese Verhältnisse sollen jetzt untersucht werden. Die Elemente

$$a, \quad b, \quad c, \ldots l$$

mögen entsprechend

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots \lambda$$

-mal auftreten. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ sollen zunächst ausser der Einheit keinen gemeinsamen Theiler besitzen. An geradlinigen, gewöhnlichen Permutationen giebt es

*) Journ. de Math. (4) 8 (1892) p. 331.

$$P = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}$$

unter einander verschiedene; an verschiedenen Kreispermutationen möge es Q geben. Zählt man die Elemente, die zu einer der letzteren gehören, von allen möglichen n Anfangsgliedern aus als lineare Permutationen her, so giebt jede zu Q gehörige n zu P gehörige. Diese sind auch hier sämmtlich unter einander verschieden. Denn wäre dies nicht der Fall und gäbe ein Q von zwei verschiedenen Stellen aus gelesen dasselbe P, dann kämen die Elemente $a, b, \ldots l$ in Gruppen von gleich vielen Elementen vertheilt vor, und $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ hätten einen gemeinsamen Theiler. Folglich ist auch hier

$$Q = \frac{1}{n} P$$

d. h.

$$= \frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

Gesetzt dagegen, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ hätten einen einzigen gemeinsamen Theiler d, der dann eine Primzahl sein muss, so setzen wir

$$\alpha = d\alpha_1, \quad \beta = d\beta_1, \quad \gamma = d\gamma_1, \ldots \lambda = d\lambda_1; \quad n = dn_1.$$

Die Gesammtheit aller geradlinigen, gewöhnlichen Permutationen kann man in zwei und nur zwei Kategorien zerfällen; in solche, welche sich nicht in identische Gruppen von je n_1 Elementen zerlegen lassen, und in solche, bei denen eine derartige Zerfällung möglich ist. Die erste Kategorie möge P Permutationen umfassen, die zweite P_1; dann ist natürlich

$$(\alpha) \qquad P + P_1 = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}.$$

Weil ferner die zweite Kategorie nur von der Anordnung der Elemente ihrer ersten Gruppe abhängt, da jede weitere Gruppe mit der ersten identisch ist, so wird

$$(\beta) \qquad P_1 = \frac{n_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\,\gamma_1!\ldots\lambda_1!}.$$

In gleicher Weise können wir die Kreispermutationen in zwei Kategorien zerlegen, je nachdem sie sich nicht in kleinere unter einander identische Elementengruppen theilen lassen, oder dass solche Theilung möglich ist. Die entsprechenden Anzahlen seien Q und Q_1. Hier entspricht nun wieder jedem Q, je nach der Wahl des Anfangselementes, eine Zahl von n Permutationen P, jedem Q_1 jedoch nur die Zahl von n_1 Permutationen P_1. Folglich ist

$$(\gamma) \qquad Q + Q_1 = \frac{1}{n} P + \frac{1}{n_1} P_1.$$

Da nun durch (α) und (β) die beiden Grössen P und P_1 bestimmt sind, so löst (γ) die vorgelegte Aufgabe.

Gesetzt, der grösste gemeinsame Theiler von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ wäre das Product zweier von einander verschiedener Primzahlen d_1 und d_2, so setzen wir

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 d_1 \quad, \beta = \beta_1 d_1 \quad, \ldots \lambda = \lambda_1 d_1 \quad ; \quad n = n_1 d_1 \quad ,\\
\alpha &= \alpha_2 d_2 \quad, \beta = \beta_2 d_2 \quad, \ldots \lambda = \lambda_2 d_2 \quad ; \quad n = n_2 d_2 \quad ,\\
\alpha &= \alpha_3 d_1 d_2, \beta = \beta_3 d_1 d_2, \ldots \lambda = \lambda_3 d_1 d_2; \quad n = n_3 d_1 d_2 .
\end{aligned}$$

Die geradlinigen Permutationen zerfallen in vier Kategorien:

1°. in solche, welche sich überhaupt nicht in unter einander identische Untergruppen zerlegen lassen. Ihre Zahl sei P;

2°. in solche, welche sich in identische Untergruppen von je n_1 Elementen zerlegen lassen, aber nicht in geringere. Ihre Zahl sei P_1;

3°. in solche, welche sich in identische Untergruppen von n_2, aber nicht von weniger Elementen zerlegen lassen. Ihre Zahl sei P_2;

4°. in solche, welche sich in identische Untergruppen von n_3 Elementen zerlegen lassen. Ihre Zahl sei P_3.

Es ist, wie man sofort erkennt,

$$\begin{aligned}
P + P_1 + P_2 + P_3 &= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!},\\
P_1 \qquad + P_3 &= \frac{n_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!},\\
P_2 + P_3 &= \frac{n_2!}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!},\\
P_3 &= \frac{n_3!}{\alpha_3!\,\beta_3!\ldots\lambda_3!}.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man andererseits mit Q, Q_1, Q_2, Q_3 die den P, P_1, P_2, P_3 entsprechenden Kreispermutationen, so wird

$$Q = \frac{1}{n} P, \quad Q_1 = \frac{1}{n_1} P_1, \quad Q_2 = \frac{1}{n_2} P_2, \quad Q_3 = \frac{1}{n_3} P_3.$$

Durch diese Gleichungen ist die gesuchte Anzahl der Kreispermutationen bestimmt; sie besitzt den Werth $Q + Q_1 + Q_2 + Q_3$.

Man sieht leicht, welche Aenderungen eintreten, falls der grösste gemeinsame Theiler von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ das Quadrat einer Primzahl wird, sowie auch, wie die Methode im allgemeinen Falle sich gestaltet.

Erwähnt werde noch, dass D. André*) die Frage nach den Sequenzen auch bei Kreispermutationen behandelt hat.

§ 122. Auf eine andere Frage combinatorischer Natur führt das Problem, zu bestimmen, auf wie viele Arten eine Summe

*) Bull. Soc. math. de France 23 (1895), p. 122.

von n Gliedern (oder auch ein Product von n Factoren) sich berechnen lasse, wenn die Operationen so vorgenommen werden, dass stets nur zwei auf einander folgende Glieder vereinigt werden und dass diese Vereinigung bei den weiteren Operationen als ein einziges Glied angesehen wird.*) Wir können die Frage auch so darstellen, dass wir zunächst die n Summanden in allen $n!$ Permutationen aufschreiben und dann in jeder Permutation eine Reihe von Klammern so setzen, dass eine jede immer nur zwei Glieder (die auch Klammern sein können) umfasst. So ergeben sich z. B., wenn $a+b+c+d$ als Permutation gewählt wird, die fünf Bildungsweisen der Summe

$$(a+b)+(c+d),\quad [(a+b)+c]+d,\quad [a+(b+c)]+d,$$
$$a+[(b+c)+d],\quad a+[b+(c+d)].$$

Wir können, da die Anzahl $n!$ der Permutationen bekannt ist, die Aufgabe dahin vereinfachen, dass die Folge der Elemente gegeben und nur die Art ihrer Verbindungen gesucht ist. In dieser Gestalt wollen wir die Frage behandeln.

Wir bezeichnen mit u_n die Zahl, welche angiebt, auf wie viele Arten eine Summe von n Summanden ohne Aenderung in der Folge dieser Summanden gebildet werden kann. Wir leiten eine Recursionsformel für u_{n+1} her. Die letzte Operation, welche bei der Summenbildung ausgeführt wird, möge die $\varkappa$ ersten mit den $(n-\varkappa+1)$ letzten Summanden vereinigen. Die ersten können auf $u_\varkappa$, die letzten auf $u_{n-\varkappa+1}$ Arten aus ihren einzelnen Elementen zusammengefügt sein; es giebt also $u_\varkappa u_{n-\varkappa+1}$ Arten. Da $\varkappa$ von 1 bis n laufen kann, so wird,

$$(1)\qquad u_{n+1}=u_1u_n+u_2u_{n-1}+\cdots+u_\varkappa u_{n-\varkappa+1}+\cdots+u_nu_1\qquad (u_1=1).$$

Nimmt man $u_2=1$ hinzu, dann folgt

$$u_3=u_2+u_2=2,\quad u_4=u_3+u_2u_2+u_3=5,\quad n_5=u_4+u_3u_2+u_2u_3+u_4=14,$$

u. s. w.

Um allgemein und independent u_{n+1} zu bestimmen, setzen wir die erzeugende Function

$$f(z)=u_1z+u_2z^2+u_3z^3+u_4z^4+\cdots.$$

Nach den Ueberlegungen in § 49 ist es nicht nöthig, in eine Untersuchung über die Convergenz der Reihe einzugehen. Durch Erhebung in das Quadrat findet man

*) Dies Problem ist wohl zuerst von E. Catalan behandelt, Journ. de Math. 3 (1838), p. 515; vgl. O. Rodrigues, ibid. p. 549; Catalan, ibid. 6 (1841), p. 74. Später kam, unabhängig von diesen Untersuchungen, E. Schröder, Zeitschr. f. Math. 15 (1870), p. 361, auf denselben Gegenstand und behandelte (l. c.) vier ihrem Wesen nach zusammengehörige Aufgaben über die Zusammenfassung von Elementen, bei welchen das associative und das commutative Gesetz gilt.

$$f^2(z) = u_1^2 z^2 + (u_1 u_2 + u_2 u_1) z^3 + (u_1 u_3 + u_2 u_2 + u_3 u_1) z^4 + \cdots$$
$$= u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4 + \cdots$$
$$= f(z) - u_1 z,$$

und also, da $u_1 = 1$ wird,

$$f^2(z) - f(z) + z = 0$$
$$f(z) = \frac{1}{2}\left[1 \pm (1-4z)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Hier ist das untere Vorzeichen zu wählen, weil beim oberen Zeichen sich negative Werthe für die u_λ ergeben würden. Man hat demnach das Schlussresultat

$$u_n = \frac{1}{2}\left[1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}}\right]_n$$

(2) $$= (-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n} 2^{2n-1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\,2^{n-1}$$
$$= \frac{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

für die gesuchte Zahl.

Aus (2) folgt die Recursionsformel

$$u_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1}\,u_n.$$

Nimmt man nun die Verschiedenheiten in der Stellung der Summanden hinzu und bezeichnet mit U_n die verschiedenen Möglichkeiten, eine Summe von n Summanden zu berechnen, dann wird

(3) $$U_n = n!\,u_n = 2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-6).$$

Die Summanden waren bisher als verschieden vorausgesetzt; kommen α gleiche einer Art, β gleiche einer andern Art vor u. s. w., so giebt der bekannte Schluss bei Permutationen das Resultat

$$\frac{U_n}{\alpha!\,\beta!\ldots}.$$

§ 123. Das letzte Resultat und damit natürlich auch das erste lässt sich auf kürzerem Wege herleiten.*) Zunächst bemerken wir, dass, um ein Product von n Factoren auszuführen, $(n-1)$ Multiplicationen nöthig sind, wenn immer nur je zwei Glieder vereinigt werden dürfen.

Wird nun ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Factor eingeführt, so kann man ihn mit dem Systeme der übrigen n Factoren auf eine der folgenden beiden Arten verbinden: 1. entweder als Multiplicator oder als Multiplicandus des schon fertigen Productes von n Factoren; das giebt $2\,U_n$ Arten der Vereinigung; oder 2. als Multiplicator oder als Multi-

*) O. Rodrigues (l. c.) p. 549.

plicandus eines der beiden Factoren, welche bei der Herstellung des Productes von n Factoren auftreten. Solcher Factoren sind $(n-1)$ vorhanden; je nachdem der $(n+1)^{\text{te}}$ Factor als Multiplicator oder als Multiplicand entweder des Multiplicators oder des Multiplicands auftritt, giebt es $(4n-4)$ Arten; also liefert dieser zweite Fall $(4n-4)\,U_n$. Im Ganzen hat man daher $(4n-2)\,U_n$ Möglichkeiten, und es wird

(4) $$\begin{aligned} U_{n+1} &= (4n-2)\,U_n = (4n-2)(4n-6)\,U_{n-1} = \cdots \\ &= (4n-2)(4n-6)\ldots 6\cdot 2. \end{aligned}$$

§ 124. E. Catalan*) hat darauf aufmerksam gemacht, dass das besprochene Problem mit der geometrischen Frage zusammenhängt: Auf wie viele Arten kann man durch Diagonalen ein ebenes Polygon in Dreiecke zerlegen?

Wir nehmen an, ein $(k+1)$-Eck liesse v_k verschiedene Zertheilungsweisen zu, und betrachten jetzt ein $(n+2)$-Eck

$$A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n+1}.$$

Bei jeder Art der Zerlegung wird A_0A_1 die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Spitze auf eine der Ecken $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ fallen kann. Liegt sie auf A_2, dann liefert $A_2A_3\ldots A_{n+1}A_0A_2$ als $(n+1)$-Eck v_n Möglichkeiten der Zertheilung. Liegt die Spitze auf A_3, so giebt es über A_1A_3 das Dreieck $A_1A_2A_3$ und über A_3A_0 das n-Eck $A_3A_4\ldots A_{n+1}A_0A_3$; hier giebt es v_{n-1} Möglichkeiten der Zertheilung. Liegt die Spitze in A_{k+1}, dann liefert $A_1A_2\ldots A_{k+1}A_1$ als $(k+1)$-Eck v_k Möglichkeiten und $A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{n+1}A_0A_{k+1}$ als $(n+2-k)$-Eck v_{n+1-k} Arten der Zertheilung. Setzt man $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, so wird demnach

$$v_{n+1} = v_1v_n + v_2v_{n-1} + \cdots + v_kv_{n+1-k} + \cdots + v_{n-1}v_2 + v_nv_1.$$

Die Form, sowie die Anfangswerthe stimmen hier mit (1) überein. Demnach ist der Zusammenhang beider Fragen durch die Gleichung gegeben

$$v_n = u_n.$$

§ 125. Die Formel aus § 122

(2) $$u_n = \frac{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

lässt sich umgestalten. Der Zähler ist

$$\begin{aligned} 2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-6) &= 2^{n-1}\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3) \\ &= 2^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n-1} \end{aligned}$$

*) (l. c.) p. 515.

und also folgt

$$u_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-2)}{n!\,(n-1)!}$$
$$= \frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)\,n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n}$$
$$= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{(n-1)}.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so entsteht

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} + \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}\cdot\frac{1}{2}\binom{2}{1} + \frac{1}{n-2}\binom{2n-6}{n-3}\cdot\frac{1}{3}\binom{4}{2}$$
$$+\cdots+\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

In § 28 haben wir die n^{te} figurirte Zahl der Ordnung k mit

$$F_n^{(k)} = C_{n+k-1}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

bezeichnet. Die u_n stehen daher mit den figurirten Zahlen in der Verbindung, welche gegeben wird durch

$$u_n = \frac{1}{n}F_n^{(n-1)}.$$

Man kommt daher auf u_n, wenn man in der Tabelle des § 28 die n^{te} von Null verschiedene Zahl der n^{ten} Spalte durch n dividirt.

§ 126. Schröder hat (l.c.) noch weitere drei Aufgaben behandelt. Die erste dieser drei setzt voraus, dass bei der Addition von $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Summation von beliebig vielen Summanden gleichfalls als elementare Operation angesehen werden solle, wie man z B. die Summe $2+2+1$, ohne im Bewusstsein Zwischenstufen zu durchlaufen, direct bestimmt. Die vorige Aufgabe wird dann so modificirt, dass in eine jede Klammer auch mehrere Summanden aufgenommen werden können. Die Anordnung der Summanden sei vorgeschrieben.

Die Anzahl der Arten, in denen jetzt n Summanden verbunden werden können, wollen wir mit u'_n bezeichnen. Wir setzen $u'_1 = 1$; es wird $u'_2 = 1$, da nur $a_1 + a_2$ möglich ist; $u'_3 = 3$ wegen

$$a_1 + a_2 + a_3,\quad (a_1 + a_2) + a_3,\quad a_1 + (a_2 + a_3)$$

$u'_4 = 11$ wegen der zu den 5 Möglichkeiten aus § 122 noch tretenden 6 neuen Möglichkeiten

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\quad (a_1 + a_2 + a_3) + a_4,\quad a_1 + (a_2 + a_3 + a_4),$$
$$(a_1 + a_2) + a_3 + a_4,\quad a_1 + (a_2 + a_3) + a_4,\quad a_1 + a_2 + (a_3 + a_4).$$

Wir leiten eine Reductionsformel für das Symbol u'_{n+1} her. Die letzte Operation bei unserer Summirung wird die Vereinigung von Theilsummen sein, von denen k_1 ein einziges Element a_λ enthalten mögen, k_2 andere zwei Elemente $a_\lambda, \ldots$ Wir betrachten dabei zuerst $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ als fest gegeben.

Natürlich muss

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = n + 1$$

sein. Die Aufeinanderfolge der Theilsummen kann willkürlich gewählt werden; da es $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$ Theilsummen sind, unter denen k_1 gleichberechtigte einer Art (mit einem Elemente), k_2 gleichberechtigte einer zweiten Art (mit zwei Elementen) u. s. w. vorkommen, so giebt es

$$\frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

Möglichkeiten für die Anordnung der Klammern in der gegebenen Folge der a_λ, unter denen k_1 Klammern ein Element enthalten, k_2 Klammern zwei, u. s. f. Die Berechnung jeder Theilsumme von q Elementen lässt u'_q Ausführungen zu. Also ist, wenn man nun auch den k alle erlaubten Werthe giebt,

$$(5) \qquad u'_{n+1} = \sum_{(k)} \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} u_1'^{k_1} u_2'^{k_2} \ldots u_n'^{k_n}; \qquad (k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n + 1).$$

Hiernach ist somit

$$u'_2 = \frac{2!}{2!} u_1'^2 = u_1'^2;$$

$$u'_3 = \frac{3!}{3!} u_1'^3 + \frac{2!}{1!\,1!} u'_1 u'_2 = u_1'^3 + 2u'_1 u'_2;$$

$$u'_4 = u_1'^4 + 3u_1'^2 u'_2 + 2u'_1 u'_3 + u_2'^2;$$

$$u'_5 = u_1'^5 + 4u_1'^3 u'_2 + 3u_1'^2 u'_3 + 3u'_1 u_2'^2 + 2u'_1 u'_4 + 2u'_2 u'_3;$$

. . . .

Wir setzen wieder, um u'_{n+1} independent zu bestimmen, die erzeugende Function an

$$g(z) = u'_1 z + u'_2 z^2 + u'_3 z^3 + u'_4 z^4 + \cdots;$$

dann wird die $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz hiervon

$$g(z)^\varkappa = \sum_{(k)} \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \cdots)!}{k_1!\, k_2!\, k_3! \ldots} u_1'^{k_1} u_2'^{k_2} u_3'^{k_3} \ldots z^{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots} \qquad (k_1 + k_2 + k_3 + \cdots = \varkappa),$$

und wenn man über $\varkappa = 2, 3, 4, \ldots$ summirt,

$$\sum_{\varkappa=2}^{\infty} g(z)^\varkappa = \sum_{(k,\lambda)} \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \cdots)!}{k_1!\, k_2!\, k_3! \ldots} u_1'^{k_1} u_2'^{k_2} u_3'^{k_3} \ldots z^\lambda \qquad (\lambda = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots).$$

Denkt man sich dies nach der steigenden Grösse von λ geordnet und wendet (5) an, dann entsteht

$$\sum_{\varkappa=2}^{\infty} g(z)^{\varkappa} = \frac{g(z)^2}{1-g(z)} = u'_2 z^2 + u'_3 z^3 + \cdots = g(z) - z,$$

oder

$$2g^2(z) - (1+z)\,g(z) + z = 0. \tag{6}$$

Diese Relation zeigt die Existenz einer einfacheren Recursionsformel an als (5) ist, nämlich der Formel

$$\frac{u_{n+1} + u'_n}{2} = u'_1 u'_n + u'_2 u'_{n-1} + \cdots + u'_\varkappa u'_{n+1-\varkappa} + \cdots + u'_n u'_1; \tag{5a}$$

vielleicht ist es möglich, diese direct zu beweisen. Aus (6) folgt

$$g(z) = \frac{1}{4}\left[1 + z \pm \sqrt{1 - 6z + z^2}\right],$$

und die Berechnung von $u'_1 z$ zeigt, dass das untere Zeichen genommen werden muss. Also hat man als Werth der erzeugenden Function

$$g(z) = \frac{1}{4}\left[1 + z - \sqrt{1 - 6z + z^2}\right]. \tag{7}$$

Entwickelt man nach dem polynomischen Satze die Wurzel, so wird

$$u'_n = \frac{1}{4}(-1)^{n-1} \sum \binom{\frac{1}{2}}{n-\varkappa} \binom{n-\varkappa}{\varkappa} 6^{n-2\varkappa} \tag{8}$$

$$\left(\varkappa = 0, 1, \ldots E\left(\frac{n}{2}\right)\right). \qquad (n > 1)$$

§ 127. Schröder formulirt die dritte der vier combinatorischen Aufgaben, mit denen er sich beschäftigt, folgendermassen: Es seien n Elemente gegeben. Von diesen kettet man irgend zwei aneinander und betrachtet ihre Vereinigung als neues Element. Auf die jetzt vorhandenen $(n-1)$ Elemente wendet man dasselbe Verfahren an, bis der ganze Complex schliesslich zu einem eingliedrigen geworden ist. Es fragt sich, auf wie viele Arten dieser Process vollzogen werden kann, wenn die Stellung zweier Summanden keinen Unterschied bedingt, sondern nur die Art der Zusammenkettung.

Den Gegensatz dieses Problems zu dem ersten wird man am besten kennzeichnen, wenn man das erste als ein Problem der geordneten, das jetzige dagegen als ein Problem der freien Association hinstellt.

Wir bezeichnen mit v_n die Anzahl der möglichen Arten der Verkettung bei n Elementen. Dann ist $v_2 = 1$, $v_3 = 3$, $v_4 = 15$; wir setzen $v_1 = 1$.

Die letzte Operation, welche bei der Zusammenfassung ausgeführt wird, möge $\varkappa$ mit den übrigen $(n+1-\varkappa)$ ursprünglich gegebenen Elementen vereinigen. Das giebt, wenn der Complex der $\varkappa$ Elemente schon bestimmt ist (wie in der ersten Aufgabe), $v_\varkappa \cdot v_{n+1-\varkappa}$ Möglichkeiten; kann er dagegen beliebig gewählt werden (wie hier), so ist das auf $\binom{n+1}{\varkappa}$ Arten möglich, und es giebt also $\binom{n+1}{\varkappa} v_\varkappa \cdot v_{n+1-\varkappa}$ Arten der Verkettung. Nun kann $\varkappa$ von 1 bis n laufen. Dabei kommt jede Zusammenfassung doppelt vor, weil es dasselbe ist, ob wir $\varkappa$ an die erste oder an die zweite Stelle setzen. Demnach ist

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \binom{n+1}{\varkappa} v_\varkappa \cdot v_{n+1-\varkappa}. \tag{9}$$

Setzen wir

$$v_n = n!\, w_n,$$

so nimmt (9) die einfachere Gestalt an

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} w_\varkappa w_{n+1-\varkappa}. \tag{9a}$$

Ist nun die erzeugende Function

$$h(z) = w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + w_4 z^4 + \cdots,$$

so folgt aus (9a) der Reihe nach bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel

$$\begin{aligned} & h^2(z) - 2h(z) + 2z + 0, \\ & h(z) = 1 - (1-2z)^{\frac{1}{2}}, \\ & w_n = (-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n} 2^n = 2^{-n+1} \cdot u_n, \\ & v_n = (-1)^{n-1} n! \binom{\frac{1}{2}}{n} 2^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n-3). \end{aligned} \tag{10}$$

Aus der letzten Formel ergiebt sich die Recursionsbeziehung

$$v_{n+1} = (2n-1)\, v_n. \tag{11}$$

Die Ueberlegungen aus § 123, welche zur Formel (4) führten, bringen uns auch hier schneller zum Ziele. Die nothwendigen Aenderungen gegen die dort angestellten Betrachtungen bestehen einfach darin, dass die Unterscheidung zwischen Multiplicator und Multiplicand fortfällt, so dass aus einer zu v_n gehörigen Zusammenfassungsweise hier $(2n-1)$ solche für v_{n+1} entstehen. Das liefert sofort (11) und damit den independenten Ausdruck (10).

§ 128. Die vierte von Schröder behandelte Aufgabe steht zur dritten in der gleichen Beziehung wie die zweite zur ersten: die Zusammenfassung der gegebenen Elemente beschränkt sich bei ihr nicht auf die Anzahl zwei, sondern es können beliebig viele derselben gleichzeitig verkettet werden, und bei dieser Verkettung ist die Aufeinanderfolge indifferent. Es handelt sich also um die Bestimmung, auf wie viele Arten dieser Process vollzogen werden kann. Wir bezeichnen die Zahl für n Elemente mit v'_n.

Dann ist $v'_2 = 1$; $v'_3 = 4$; $v'_4 = 26$. Das letzte Resultat ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung, bei der wir der Bequemlichkeit halber Producte schreiben

$$\begin{array}{llllll}
abcd; & (abc)d; & (abd)c; & (acd)b; & (bcd)a; & \\
[(ab)c]d; & [(ac)b]d; & [(bc)a]d; & [(ab)d]c; & \ldots\ldots; & \text{(6 Arten)} \\
[(ac)d]b; & \ldots\ldots & \ldots\ldots; & [(bc)d]a; & \ldots\ldots; & \text{(6 Arten)} \\
(ab)(cd); & (ac)(bd); & (ad)(bc); & & & \\
(ab)cd; & (ac)bd; & (ad)bc; & & & \\
ab(cd); & ac(bd); & ad(bc). & & &
\end{array}$$

Wir leiten eine Recursionsformel für v'_{n+1} ab. Die letzte durchzuführende Verkettung möge k_1 Theilsummen mit je einem Elemente, k_2 Theilsummen mit je zwei Elementen, ... k_n Theilsummen mit je n Elementen unter einander verbinden. Dabei muss wieder

$$(\alpha) \qquad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = n + 1$$

sein. Gesetzt, eine solche Eintheilung der Elemente läge vor, dann gäbe es für sie

$$(\beta) \qquad {v'_1}^{k_1} {v'_2}^{k_2} \ldots {v'_n}^{k_n}$$

Möglichkeiten der Verkettung innerhalb der Theilsummen. Es handelt sich also noch um die Bestimmung der Anzahl der Eintheilungen. Dabei können wir voraussetzen, es seien hinter einander k_1 leere Klammern mit je einem Platze, k_2 mit je zwei Plätzen u. s. f. aufgeschrieben, und die Art der Ausfüllung der Plätze sei zu bestimmen. Die $(n+1)$ Elemente können auf $(n+1)!$ Arten auf die Plätze vertheilt werden. Da die ersten k_1 Klammern unter sich, die zweiten k_2 unter sich beliebig vertauscht werden können, so kommen nur

$$\frac{(n+1)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

verschiedene Arten in Betracht. Und weil es endlich auf die Anordnung der Elemente in einer Theilsumme nicht ankommt (denn diese Aenderungen sind schon in den v' berücksichtigt), so ist beim

Auftreten jeder Theilsumme von q Elementen noch durch $q!$ zu dividiren. Wir haben also im Ganzen den Factor

$$\frac{(n+1)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!\,(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\ldots(n!)^{k_n}}$$

an (β) anzufügen. Folglich ist

$$(12)\qquad v'_{n+1}=\sum\frac{(n+1)!\,v_1'^{k_1}v_2'^{k_2}\ldots v_n'^{k_n}}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!\,(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\ldots(n!)^{k_n}}$$
$$(k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n+1).$$

Für die Substitution

$$v'_n=n!\,w_n$$

nimmt (12) die bequemere Gestalt an

$$(12\text{a})\qquad w_{n+1}=\sum\frac{w_1^{k_1}w_2^{k_2}\ldots w_n^{k_n}}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$$
$$(k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n+1).$$

Dabei werden die ersten Werthe der w die folgenden: $w_1=1$, $w_2=\frac{1}{2}$, $w_3=\frac{2}{3}$, $w_4=\frac{13}{12}$, $\cdots$ werden. Setzen wir jetzt

$$h(z)=z+w_2z^2+w_3z^3+w_4z^4+\cdots,$$

dann wird

$$\frac{h^\nu(z)}{\nu!}=\sum\frac{w_1^{k_1}w_2^{k_2}w_3^{k_3}\ldots}{k_1!\,k_2!\,k_3!\ldots}z^{k_1+2k_2+3k_3+\cdots}$$
$$(k_1+k_2+k_3+\cdots=\nu),$$

wobei die Summe auf alle $k_1, k_2, k_3, \ldots$ zu erstrecken ist, welche die angegebene Bedingungsgleichung befriedigen. Weiter folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{h^\nu(z)}{\nu!}=\sum\frac{w_1^{k_1}w_2^{k_2}w_3^{k_3}\ldots}{k_1!\,k_2!\,k_3!\ldots}z^{k_1+2k_2+3k_3+\cdots},$$

wobei die Summe auf alle Systeme $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ausgedehnt werden muss. Ordnen wir nach den Exponenten von z, so kommt heraus

$$(\gamma)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{h^\nu(z)}{\nu!}=\sum\frac{w_1^{k_1}w_2^{k_2}w_3^{k_3}\ldots}{k_1!\,k_2!\,k_3!\ldots}z^{q+1}$$
$$(k_1+2k_2+3k_3+\cdots=q+1).$$

Die Lösungen der in Klammern gesetzten Bedingungsgleichungen stimmen mit denen überein, die sich in (12a) für $n=q$ ergeben; nur dass hier auch noch

$$k_1=0,\quad k_2=0,\ldots k_q=0,\quad k_{q+1}=1$$

zugelassen ist. Folglich ist der Coefficient von z^{q+1} gleich

$$w_{q+1}+\frac{w_{q+1}^1}{1!}=2w_{q+1}.$$

Noch ist auf das Anfangsglied z^1 zu achten, weil w_0 nicht definirt ist. Man sieht, es wird

$$\frac{h(z)}{1!}+\frac{h^2(z)}{2!}+\frac{h^3(z)}{3!}+\cdots=\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{2}{3}z^3+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(z^2+z^3+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3!}(z^3+\cdots)+\cdots$$
$$=z+z^2+\frac{4}{3}z^3+\cdots$$
$$=z+2w_2z^2+2w_3z^3+\cdots,$$

und demnach ist (γ) zu schreiben

$$e^{h(z)}-1=2h(z)-z$$
$$e^{h(z)}-2h(z)-1+z=0. \tag{13}$$

Dies $h(z)$ ist die erzeugende Function für die w_λ. Schröder geht (l. c.) ausführlich auf die Lösung von (13) ein. Wir verzichten darauf, um nicht zu tief in analytische Betrachtungen uns verlieren zu müssen.

Capitel 10.

Dreier-Systeme. Das Steiner'sche Dreier-Problem.

§ 129. Im Jahre 1852 stellte J. Steiner die folgende Aufgabe*), zu welcher ihn geometrische Betrachtungen, die sich auf die Doppeltangenten der Curven vierten Grades bezogen, etwa 6 Jahre vorher geführt hatten. Das Problem lautet:

(a) Welche Zahl N von Elementen hat die Eigenschaft, dass sich die Elemente so zu dreien ordnen lassen, dass je zwei in einer, aber nur in einer Verbindung vorkommen? Wie viel wesentlich verschiedene Anordnungen, d. h. solche, die nicht durch eine blosse Permutation der Elemente aus einander hervorgehen, giebt es bei jeder Zahl?

(b) Wenn ferner die Elemente sich so zu vieren verbinden lassen sollen, dass je drei freie Elemente, d. h. solche, welche nicht schon einen der vorigen Dreier (a) bilden, immer in einem und nur in einem Vierer vorkommen, und dass auch keine drei Elemente eines solchen Vierers einem der vorigen Dreier angehören; entsteht daraus keine neue Bedingung für die Zahl N?

*) Journ. f. Math. 45 (1853) p. 181 = Werke II, p. 435.