Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Erster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1841.

et Arc Sin $x = x \cdot \left(\frac{4}{9\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \frac{5}{18} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2 E'}}\right)\right)$,

$$E_1 = (1+\sqrt{\tfrac{3}{5}})^2 \text{ et } E' = (1-\sqrt{\tfrac{3}{5}})^2$$

sont encore très exactes, puisque les corrections sont $\frac{-15}{10080} \cdot x^{11}$ et $+\frac{x^7}{344064}$. La formule Arc. Sin. $x = \frac{x}{9} \cdot \left(4 + \frac{5}{\sqrt{1-\frac{3}{5} x^2}}\right)$ est plus simple, mais elle exige une correction un peu plus grande $(+\frac{1}{140} \cdot x^7 + \ldots)$. Néanmoins elle donne Arc. Sin. $(0{,}1) = 0{,}100167\cdot420$, ou il manque moins qu'une unité decimale du IX^e ordre.

XXVII.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt, mit Bezug auf einige Abhandlungen der Herren Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan und Duhamel in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. IV.

Von

dem Herausgeber.

In den Novis Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. VII. p. 203 findet man eine Abhandlung von Segner, in welcher derselbe eine recurrirende Auflösung für die folgende, nach seiner eignen Angabe ihm von Euler mitgetheilte Aufgabe giebt:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein beliebiges Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt.

In dem Summarium Dissertationum, quas continet novorum Commentariorum T. VII. wird bei der Angabe des Inhalts dieser Abhandlung erinnert, dass a summo quodam Geometra *) die Bemerkung gemacht worden sei, dass die von Segner berechnete Tafel nur bis zu dem Funfzehneck richtig sei, und zugleich wird ohne Beweis eine schöne, von demselben grossen Geometer gefundene ganz independente Formel zur Auflösung des in Rede stehenden Problems, so wie auch eine bis zum Fünfundzwanzigeck berechnete Tafel mitgetheilt.

In neuester Zeit ist diese Aufgabe von den Herren Lamé, Rodrigues, Binet und Catalan, so wie auch in gewisser Beziehung von Herrn Duhamel, wieder aufgenommen, und die Untersuchung vorzüglich darauf gerichtet worden, genügende Beweise für die von Euler gegebene ganz independente Auflösung zu finden, wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben darf, dass die Herren Binet und Catalan auf ganz verschiedenen Wegen auch zu einer bis jetzt noch völlig unbekannten Relation gelangt sind. Alle diesen Gegenstand betreffende Abhandlungen findet man in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville. T. III. et IV.

Der vorliegende Aufsatz hat nun zunächst den Zweck, die genannten Herren darauf aufmerksam zu machen, dass, was denselben völlig entgangen zu sein scheint, schon ein älterer trefflicher Mathematiker, Nicolaus Fuss, in den Novis Actis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. IX. p. 243. eine weit allgemeinere Aufgabe, die ihm nach seiner eignen Angabe von Johann Friedrich Pfaff vorgelegt worden war, augelöst hat, nämlich die Aufgabe:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt.

Die von Fuss für diese allgemeinere Aufgabe gegebene Auflösung, welche ebenfalls nur recurrirend zu der gesuchten Grösse gelangt, will ich jetzt in der Kürze mittheilen.

Zuerst ist klar, dass nicht jedes $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke getheilt werden kann, sondern dass, wenn dies möglich sein soll, zwischen den Zahlen n und m eine bestimmte Relation Statt finden muss, und man wird sich durch eine ganz einfache Betrachtung sogleich überzeugen, dass nur entweder $n=m$, oder, indem k eine beliebige positive ganze Zahl, die Null eingeschlossen, bezeichnet,

$$n=(m-1)+k(m-2)+(m-1)=(k+2)m-2(k+1)$$

sein kann. Aus der letzten Formel erhält man $n=m$ für $k=-1$, und es kann also nur

$$n=(k+2)\ m-2(k+1)$$

sein, für $k=-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$ Setzt man $k+2=i$, also $k+1=i-1$, so kann nur

---

*) Auf jeden Fall Euler.

$$n = im - (2i - 2)$$

sein, für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, d. h. für jedes positive ganze i, mit Ausschluss der Null.

Aus der Betrachtung, durch welche man zu den Formeln

$$n = m \text{ oder } n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ gelangt, geht zugleich auch unmittelbar hervor, dass die Anzahl der Diagonalen, welche zur Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlich sind, respective 0, $k+1$, und dass die Anzahl der $m$ecke, welche man dadurch erhält, respective 1, $k+2$ ist. Setzt man also allgemein

$$n = (k+2)m - 2(k+1)$$

für $k = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $k+1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein $k+2$. Wird also

$$n = im - (2i - 2)$$

für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gesetzt, so ist die Anzahl der zu der Zerlegung des $n$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen allgemein $i - 1$, und die Anzahl der $m$ecke, welche man durch diese Zerlegung erhält, ist allgemein i.

Wir wollen nun für

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots i$$

die Anzahl der Zerlegungen der entsprechenden Vielecke in lauter $m$ecke, d. h. die Anzahl der Zerlegungen eines

$$m\text{ecks}, (2m-2)\text{ecks}, (3m-4)\text{ecks}, \ldots \{im - (2i-2)\}\text{ecks}$$

in lauter $m$ecke, respective durch

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots A_i$$

bezeichnen, und wollen zuvörderst bloss **eine** Winkelspitze, die im Allgemeinen durch K bezeichnet werden mag, eines $\{im - (2i-2)\}$ecks betrachten.

Aus der Winkelspitze K lassen sich offenbar zwei Diagonalen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks ausziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$m\text{eck und ein } \{(i-1)m - (2i-4)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_1 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-1} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_1 A_{i-1}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Von der Winkelspitze K aus lassen sich ferner zwei Diagonalen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(2m-2)\text{eck und ein } \{(i-2)m - (2i-6)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_2 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-2} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus offenbar $2A_2 A_{i-2}$ Zerlegungen unsers $\{im - (2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Ferner lassen sich von der Winkelspitze K aus zwei Diagonalen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ziehen, von deren jeder dasselbe in ein

$$(3m-4)\text{eck und ein } \{(i-3)m-(2i-8)\}\text{eck}$$

getheilt wird. Da nun A_2 die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, A_{i-3} die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist; so ergeben sich hieraus $2A_2\ A_{i-3}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Ist nun i eine ungerade, also die Anzahl $i-1$ der zur Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine gerade Zahl; so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf zwei von K ausgehende Diagonalen kommen, von deren jeder unser $\{im-(2i-2)\}$eck in ein

$$\{\tfrac{1}{2}(i-1)m-(i-3)\}\text{eck und ein } \{\tfrac{1}{2}(i+1)m-(i-1)\}\text{eck}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}(i-1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des erstern in lauter $m$ecke, $A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ die Anzahl der Zerlegungen des letztern in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $2A_{\frac{1}{2}(i-1)}$ $A_{\frac{1}{2}(i+1)}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Wenn dagegen i eine gerade, also die Anzahl $i-1$ der zur Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke nöthigen Diagonalen eine ungerade Zahl ist, so wird man, auf die obige Weise fortgehend, immer endlich auf eine von K ausgehende Diagonale kommen, von welcher unser $\{im-(2i-2)\}$eck in zwei

$$\{\tfrac{1}{2}im-(i-2)\}\text{ecke}$$

getheilt wird, und da nun $A_{\frac{1}{2}i}$ die Anzahl der Zerlegungen dieses $\{\frac{1}{2}im-(i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist, so ergeben sich hieraus $A_{\frac{1}{2}i}\ A_{\frac{1}{2}i}$ Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke.

Die Anzahl aller auf die obige Weise sich ergebenden Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke ist folglich

$$2A_1\ A_{i-1}+2A_2\ A_{i-2}+2A_3\ A_{i-3}+\ldots+2A_{\frac{1}{2}(i-1)}\ A_{\frac{1}{2}(i+1)}$$

oder

$$2A_1\ A_{i-1}+2A_2\ A_{i-2}+2A_3\ A_{i-3}+\ldots+2A_{\frac{1}{2}(i-2)}A_{\frac{1}{2}(i+2)}+A_{\frac{1}{2}i}\ A_{\frac{1}{2}i},$$

jenachdem i eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, und also, wie leicht in die Augen fallen wird, für jedes gerade oder ungerade i

$$A_1\ A_{i-1}+A_2\ A_{i-2}+A_3\ A_{i-3}+\ldots+A_{i-2}\ A_2+A_{i-1}\ A_1,$$

oder, mit Hülfe einer leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung,

$$\Sigma_{x=1,\ y=i-1}^{x=i-1,\ y=1} A_x\ A_y.$$

Da nun $im-(2i-2)$ die Anzahl der Winkelspitzen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks ist, die obigen Betrachtungen sich aber offenbar bei jeder einzelnen Winkelspitze anstellen lassen; so ist

$$\{im-(2i-2)\}\ \Sigma_{x=1,\ y=i-1}^{x=i-1,\ y=1} A_x\ A_y$$

die Anzahl der sich auf die in Rede stehende Weise ergebenden Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks, und es frägt sich nun bloss noch, ob unter diesen Zerlegungen nicht vielleicht identische vorkommen, welche Frage auf folgende Art beantwortet werden kann.

Denken wir uns irgend eine bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke; so erscheint dieselbe in der obigen Aufzählung offenbar in Bezug auf eine jede der in ihr vorkommenden Diagonalen, d. h. weil die Anzahl der zu der Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke erforderlichen Diagonalen $i-1$ ist, $i-1$ Mal. Ferner ist aber z. B. die Diagonale KL sowohl bei der Winkelspitze K, als auch bei der Winkelspitze L in Betrachtung, oder sowohl von K nach L, als auch von L nach K gezogen worden, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt, dass die in Rede stehende bestimmte Zerlegung unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke in der obigen Aufzählung $2(i-1)$ Mal vorkommt, und da dies nun natürlich von einer jeden solchen Zerlegung gilt, so ist klar, dass

$$\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\Sigma_{x=1,\, y=i-1}^{x=i-1,\, y=1} A_x\, A_y$$

die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen Zerlegungen unsers $\{im-(2i-2)\}$ecks in lauter $m$ecke, oder dass, weil nach dem Obigen die Anzahl dieser Zerlegungen durch A_i bezeichnet wird,

$$A_i=\frac{im-(2i-2)}{2i-2}\Sigma_{x=1,\, y=i-1}^{x=i-1,\, y=1} A_x\, A_y$$

ist.

Aus dieser Formel ergeben sich, da offenbar $A_1=1$ ist, die folgenden Gleichungen zur Berechnung der Grössen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ...:

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,(A_1A_2+A_2A_1),$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(A_1A_3+A_2A_2+A_3A_1),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\,(A_1A_4+A_2A_3+A_3A_2+A_4A_1),$$

u. s. w.

oder

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\,A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\,.\,2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\,(2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5 = \frac{5m-8}{8}\,(2A_1A_4 + 2A_2A_3),$$

$$A_6 = \frac{6m-10}{10}\,(2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3),$$

$$A_7 = \frac{7m-12}{12}\,(2A_1A_6 + 2A_2A_5 + 2A_3A_4),$$

u. s. w.

deren Gesetz ganz deutlich vor Augen liegt.

Mit Hülfe dieser Gleichungen hat Fuss die folgende Tafel berechnet.

i	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1	1	1	1
2	2	3	4
3	5	12	22
4	14	55	140
5	42	273	969
6	132	1428	7084
7	429	7752	53820
8	1430	43263	420732
9	4862	246675	3362260
i	$m=6$	$m=7$	$m=8$
1	1	1	1
2	5	6	7
3	35	51	70
4	285	506	819
5	2530	5481	10472
6	23751	62832	141778
7	231880	749398	1997688
8	2330445	9203634	28989675
9	23950355	115607310	430321633

Wenn man aus den obigen recurrirenden Formeln die Grössen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ... nach der Reihe entwickelt, so erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = \frac{m-1}{1},$$

$$A_3 = \frac{(m-1)\,(3m-4)}{1\,.\,2},$$

$$A_4 = \frac{(m-1)\,(4m-5)\,(4m-6)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$A_5 = \frac{(m-1)\,(5m-6)\,(5m-7)\,(5m-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

u. s. w.

woraus man durch Induction schliesst, dass allgemein für $i > 2$

$$A_i = \frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,(i-1)}$$

ist, und es würde nun darauf ankommen, diese von Fuss nicht angegebene ganz independente Formel allgemein zu beweisen, welches Stoff zu einer nicht uninteressanten Untersuchung geben dürfte. Für $i=1$ und $i=2$ ist nach dem Obigen

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{m-1}{1}.$$

Setzen wir $im-(2i-2)=n$, so erhalten wir

$$i = \frac{n-2}{m-2},$$

und folglich $i = n-2$ für $m=3$. Also ist nach dem Obigen für $m=3$ und $n-2>2$, d. i. $n>4$,

$$A_{n-2} = \frac{2n(n+1)\,(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(n-3)}.$$

Für $n=3$ und $n=4$ ist nach dem Obigen, immer unter der Voraussetzung, dass $m=3$ ist,

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2.$$

Nach Euler ist für den Fall $m=3$ allgemein

$$A_{n-2} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\ldots(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\ldots(n-1)},$$

und es wird nun darauf ankommen, die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem vorher gefundenen Ausdrucke von A_{n-2} zu beweisen, d. h. zu zeigen, dass für $n>4$ allgemein

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(n-3)} = \frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\ldots(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\ldots(n-1)}$$

ist, welches sehr leicht auf folgende Art geschehen kann.

Ist die vorstehende Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(n-3)} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-5)\,.\,2^{n-2}}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots(n-1)}$$

richtig, und umgekehrt. Ist aber die letzte Gleichung richtig, so ist auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(2n-5) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-3)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-5)\,.\,2^{n-2}$$

richtig, und umgekehrt. Wenn aber die letzte Gleichung richtig ist, so ist offenbar auch die Gleichung

$$2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(2n-5) = 2\,.\,2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-6)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-5),$$

d. i. die Gleichung

$$2 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (2n-5) = 2 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (2n-5)$$

richtig, und umgekehrt. Weil nun die letzte Gleichung eine identische Gleichung ist, so ist hierdurch offenbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{2n(n+1)\,(n+2)\,..\,(2n-5)}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-3)} = \frac{2 . 6 . 10 . 14 . 18 \ldots (4n-10)}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots (n-1)}$$

für $n > 4$ bewiesen.

Aus der Gleichung

$$A_{n-2} = \frac{2 . 6 . 10 . 14 . 18 \ldots (4n-10)}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots (n-1)}$$

ergiebt sich für $n = 3$ und $n = 4$ respective

$$A_1 = 1 \text{ und } A_2 = 2,$$

wie es nach dem Obigen sein muss; daher ist die für den Fall $m = 3$ von Euler gegebene Gleichung ganz allgemein, und lässt sich, wie man sieht, aus dem Obigen ohne Schwierigkeit ableiten.

Euler hat mittelst seiner Formel die folgende Tafel berechnet:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1\\
A_2 &= 2\\
A_3 &= 5\\
A_4 &= 14\\
A_5 &= 42\\
A_6 &= 132\\
A_7 &= 429\\
A_8 &= 1430\\
A_9 &= 4862\\
A_{10} &= 16796\\
A_{11} &= 58786\\
A_{12} &= 208012\\
A_{13} &= 742900\\
A_{14} &= 2674440\\
A_{15} &= 9694845\\
A_{16} &= 35357670\\
A_{17} &= 129644790\\
A_{18} &= 477638700\\
A_{19} &= 1767263190\\
A_{20} &= 6564120420\\
A_{21} &= 24466267020\\
A_{22} &= 91482563640\\
A_{23} &= 343059613650
\end{aligned}$$

Der vorliegende Aufsatz ist lediglich geschrieben, nicht um den in Rede stehenden interessanten Gegenstand zu erschöpfen, sondern vielmehr um zu einer neuen Untersuchung desselben anzuregen, welche uns auch nach den von den oben genannten trefflichen französischen Mathematikern mitgetheilten Untersuchungen noch sehr nöthig und in jeder Beziehung wünschenswerth zu sein scheint. Vorzüglich würde es natürlich auf die Auffindung eines ganz allgemeinen Beweises für die oben von uns gegebene Gleichung

$$A_i = \frac{(m-1)(im-i-1)(im-i-2)(im-i-3)\ldots(im-(2i-2))}{1.2.3.4\ldots(i-1)}$$

ankommen, und diese Gleichung würde entweder aus den von Fuss gefundenen recurrirenden Formeln durch allgemeine Schlüsse abzuleiten oder unabhängig von diesen Formeln zu beweisen sein. In letzterer Beziehung dürfte es vielleicht angemessen sein, zu untersuchen, ob die von den genannten französischen Mathematikern in dem Falle $m=3$ angewandten Methoden nicht vielleicht einer Verallgemeinerung fähig sind, zu welcher Untersuchung ich namentlich die genannten Herren selbst hier aufzufordern mir erlauben möchte. Da übrigens Fuss ausdrücklich bemerkt, dass ihm von Pfaff geschrieben worden sei, dass auch er eine allgemeine Auflösung unsers Problems gefunden habe, so würde sich Herr Professor Dr. Gartz in Halle die Mathematiker gewiss sehr verbinden, wenn er in den, wie wir wissen, in seinen Händen befindlichen nachgelassenen Papieren Pfaffs nachsuchen wollte, ob sich in denselben einige, der öffentlichen Mittheilung werthe Aufzeichnungen über diesen Gegenstand befinden. In dem Archive wird denselben sehr gern eine Stelle eingeräumt werden.

Fuss macht am Ende seines Aufsatzes noch die folgende nicht unbeachtet zu lassende Bemerkung. Man setze

$$Z = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots$$

und

$$Z^{m-1} = C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots\ldots;$$

so ist

$$(m-1)\,l(1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots)$$
$$= l(C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \ldots),$$

und folglich, wenn man differentiirt,

$$(m-1)\frac{A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots\ldots}{1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots}$$
$$= \frac{C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \ldots\ldots}{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots\ldots},$$

woraus sich ohne alle Schwierigkeit die folgenden Gleichungen ergeben:

$$C_1 = \frac{(m-1)A_1C}{1},$$

$$C_2 = \frac{(m-2)A_1C_1 + (2m-2)A_2C}{2},$$

$$C_3 = \frac{(m-3)\ A_1C_2 + (2m-3)\ A_2C_1 + (3m-3)\ A_3C}{3},$$

$$C_4 = \frac{(m-4)\ A_1C_3 + (2m-4)\ A_2C_2 + (3m-4)\ A_3C_1 + (4m-4)\ A_4C}{4},$$

u. s. w.

Offenbar muss nun $C=1$ sein, und wenn man

$$C=A_1,\ C_1=A_2,\ C_2=A_3,\ C_3=A_4,\ \ldots.$$

setzt; so werden die obigen Gleichungen

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\ A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\ 2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\ (2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\ (2A_1A_4+2A_2A_3),$$

$$A_6=\frac{6m-10}{10}\ (2A_1A_5+2A_2A_4+A_3A_3),$$

$$A_7=\frac{7m-12}{12}\ (2A_1A_6+2A_2A_5+2A_3A_4),$$

u. s. w.

Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar, dass die oben durch

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots.$$

bezeichneten Grössen die Coefficienten in der Entwickelung der Function Z in eine Reihe sind, welche den beiden Bedingungen

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots,$$
$$Z^{m-1}=A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4+\ldots,$$

d. h. welche der Gleichung

$$Z^{m-1}=\frac{Z-1}{x},$$

oder der Gleichung

$$Z^{m-1}-\frac{1}{x}\ Z+\frac{1}{x}=0$$

genügt, und man kann also die in Rede stehenden Grössen auch finden, wenn man die Function Z in eine Reihe entwickelt.

Von dieser schon von Fuss dem Wesentlichen nach angegebenen Methode der Entwickelung der Grössen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ ist die von Herrn Binet in dem Falle $m=3$ angewandte Methode nicht verschieden. In diesem Falle geht nämlich die obige allgemeine Gleichung in die quadratische Gleichung

$$Z^2-\frac{1}{x}\ Z+\frac{1}{x}=0$$

über, und durch Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich

$$Z=\frac{1}{2x}(1\pm\sqrt{1-4x}),$$

wo man aber offenbar das untere Zeichen nehmen, und folglich

$$Z=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$$

setzen muss, weil offenbar

$$\frac{1}{2x}(1+\sqrt{1-4x})$$

für $x=0$ nicht der Einheit gleich werden kann, wie es wegen der Gleichung

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots.$$

erforderlich ist.

Entwickelt man nun $\sqrt{1-4x}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhält man

$$Z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\,.\,4+\frac{1}{2\,.\,4}\,.\,4^2x+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,4^3x^2+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,.\,4^4x^3+\ldots\right\},$$

und folglich

$$A_{n-2}=\frac{1}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\ldots(2n-2)}\,.\,4^{n-1},$$

also, weil $4^{n-1}=2^{2(n-1)}$ ist,

$$A_{n-2}=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(n-1)}\,.\,2^{n-2},$$

oder

$$A_{n-2}=\frac{2\,.\,6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\ldots(4n-10)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\ldots(n-1)},$$

welches ganz die von Euler für den Fall $m=3$ gegebene Formel ist, welche wir schon oben auf anderm Wege gefunden haben.

$$C_3=\frac{(m-3)\ A_1C_2+(2m-3)\ A_2C_1+(3m-3)\ A_3C}{3},$$

$$C_4=\frac{(m-4)\ A_1C_3+(2m-4)\ A_2C_2+(3m-4)\ A_3C_1+(4m-4)\ A_4C}{4},$$

u. s. w.

Offenbar muss nun $C=1$ sein, und wenn man

$$C=A_1,\ C_1=A_2,\ C_2=A_3,\ C_3=A_4,\ \ldots$$

setzt; so werden die obigen Gleichungen

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{2m-2}{2}\ A_1A_1,$$

$$A_3=\frac{3m-4}{4}\ 2A_1A_2,$$

$$A_4=\frac{4m-6}{6}\ (2A_1A_3+A_2A_2),$$

$$A_5=\frac{5m-8}{8}\ (2A_1A_4+2A_2A_3),$$

$$A_6=\frac{6m-10}{10}\ (2A_1A_5+2A_2A_4+A_3A_3),$$

$$A_7=\frac{7m-12}{12}\ (2A_1A_6+2A_2A_5+2A_3A_4),$$

u. s. w.

Hieraus, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt sich nun unmittelbar, dass die oben durch

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ \ldots$$

bezeichneten Grössen die Coefficienten in der Entwickelung der Function Z in eine Reihe sind, welche den beiden Bedingungen

$$Z=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots,$$

$$Z^{m-1}=A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4+\ldots,$$

d. h. welche der Gleichung

$$Z^{m-1}=\frac{Z-1}{x},$$

oder der Gleichung

$$Z^{m-1}-\frac{1}{x}\ Z+\frac{1}{x}=0$$

genügt, und man kann also die in Rede stehenden Grössen auch finden, wenn man die Function Z in eine Reihe entwickelt.

Von dieser schon von Fuss dem Wesentlichen nach angegebenen Methode der Entwickelung der Grössen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ ist die von Herrn Binet in dem Falle $m=3$ angewandte Methode nicht verschieden. In diesem Falle geht nämlich die obige allgemeine Gleichung in die quadratische Gleichung

$$Z^2-\frac{1}{x}\ Z+\frac{1}{x}=0$$

über, und durch Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich

$$Z = \frac{1}{2x}(1 \pm \sqrt{1-4x}),$$

wo man aber offenbar das untere Zeichen nehmen, und folglich

$$Z = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$$

setzen muss, weil offenbar

$$\frac{1}{2x}(1 + \sqrt{1-4x})$$

für $x = 0$ nicht der Einheit gleich werden kann, wie es wegen der Gleichung

$$Z = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots.$$

erforderlich ist.

Entwickelt man nun $\sqrt{1-4x}$ nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhält man

$$Z = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}.4 + \frac{1}{2.4}.4^2 x + \frac{1.3}{2.4.6}.4^3 x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.4^4 x^3 + \ldots.\right\},$$

und folglich

$$A_{n-2} = \frac{1}{2}.\frac{1.3.5.7\ldots(2n-5)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)}.4^{n-1},$$

also, weil $4^{n-1} = 2^{2(n-1)}$ ist,

$$A_{n-2} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-5)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}.2^{n-2},$$

oder

$$A_{n-2} = \frac{2.6.10.14.18\ldots(4n-10)}{2.3.4.5.6\ldots(n-1)},$$

welches ganz die von **Euler** für den Fall $m = 3$ gegebene Formel ist, welche wir schon oben auf anderm Wege gefunden haben.