d'où

$$y_1 = \pm \frac{Rx_1}{\sqrt{(a - x_1)^2 - R^2}},$$

valeur égale à celle de y qu'on déduit de (4) pour $x = 0$.

M. Bastin résout la même question en représentant S successivement par les équations :

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 - \lambda x\,[(x - a)\cos\delta + y \sin\delta - R] = 0,$$
$$(x - a')^2 + y^2 - R'^2 - \lambda' x\,[(x - a')\cos\delta' + y \sin\delta' - R'] = 0,$$
$$y^2 - x^2 - a^2 + R^2 + x(px + qy + r) = 0;$$

il identifie d'abord les deux premières équations, ce qui donne

$$\delta' = \pm\,\delta, \quad \lambda' = \pm\,\lambda = \pm\,\frac{2(a - a')}{(R \pm R') + (a - a')\sin\delta};$$

puis la première avec la troisième, etc.

×NOMBRE DE MANIÈRES DE DÉCOMPOSER UN POLYGONE CONVEXE EN TRIANGLES PAR LES DIAGONALES,

par M. l'abbé Gelin, professeur au Collège St-Quirin, à Huy.

Désignons par P_n le nombre de manières de décomposer un polygone convexe de n côtés en triangles par les diagonales. On aura $P_3 = 1$.

Soit d'abord $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}$ un polygone convexe de $n + 1$ côtés. Un côté quelconque A_1A_2 faisant partie de toutes les décompositions du polygone en triangles entre dans P_{n+1} décompositions.

D'autre part, le côté A_1A_2 entre dans toutes les décompositions dont font partie les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_5, \ldots A_1A_2A_{n+1}$, auxquels il sert de base commune.

Or le triangle $A_1A_2A_3$ entre dans toutes les décompositions dont est susceptible le polygone $A_1A_3A_4 \ldots A_{n+1}$, qui a un côté de moins que le polygone proposé, c'est-à-dire dans P_n décompositions.

Ensuite, le triangle $A_2A_3A_4$ pouvant avoir P_3 ou une décomposition, et le polygone $A_1A_4A_5 \ldots A_{n+1}$, qui a deux côtés de moins que le polygone proposé, pouvant en avoir P_{n-1}, le triangle $A_1A_2A_4$ entre dans P_3P_{n-1} décompositions.

De même, le quadrilatère $A_2A_3A_4A_5$ pouvant avoir P_4 décompositions, et le polygone $A_1A_5A_6 \ldots A_{n+1}$, qui a trois côtés de moins que le polygone proposé, pouvant en avoir P_{n-2}, le triangle $A_1A_2A_3$ entre dans P_4P_{n-2} décompositions. Et ainsi de suite.

On a donc, pour le nombre total de manières de décomposer le polygone proposé en triangles,

$$P_{n+1} = P_n + P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \cdots + P_{n-1}P_3 + P_n. \qquad (1)$$

Soit maintenant $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un polygone convexe de n côtés. Une diagonale quelconque A_1A_k partage ce polygone en deux autres, dont l'un $A_1A_2A_3 \ldots A_k$, de k côtés, est susceptible de P_k décompositions, et l'autre $A_1A_kA_{k+1} \ldots A_n$, de $n - k + 2$ côtés, est susceptible de P_{n-k+2} décompositions. Or, chacune des décompositions du polygone $A_1A_2A_3 \ldots A_k$ peut être associée à chacune des décompositions du polygone $A_1A_kA_{k+1} \ldots A_n$. Donc la diagonale A_1A_k peut entrer dans P_kP_{n-k+2} décompositions différentes. Faisant $k = 3, 4, 5, \ldots n - 1$, on trouve que les diagonales A_1A_3, A_1A_4, $A_1A_5, \ldots A_1A_{n-1}$, menées d'un même sommet A_1, entrent respectivement dans P_3P_{n-1}, P_4P_{n-2}, $P_5P_{n-3}, \ldots P_{n-1}P_3$ décompositions.

Comme il y a n sommets, mais que chaque diagonale aboutit à deux sommets, et que, d'ailleurs, chaque décomposition renferme $n - 3$ diagonales, on voit que l'on a, pour le nombre total de décompositions dont est susceptible le polygone $A_1A_2A_3 \ldots A_n$,

$$P_n = \frac{n}{2(n-3)}(P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \cdots + P_{n-1}P_3). \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) donnent

$$P_n = \frac{n}{2(n-3)}(P_{n+1} - 2P_n),$$

d'où

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n}P_n. \qquad (3)$$

Si, dans cette troisième formule, on remplace n successivement par $3, 4, 5, \ldots n - 2$, $n - 1$, on obtient

$$P_4 = \frac{6}{3}P_3, \qquad P_5 = \frac{10}{4}P_4, \qquad P_6 = \frac{14}{5}P_5,$$

. . . .

$$P_{n-1} = \frac{4n-14}{n-2} P_{n-2}, \qquad P_n = \frac{4n-10}{n-1} P_{n-1}.$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre, et observant que $P_3 = 1$, on a

$$P_n = \frac{6.10.14\ldots.(n-10)}{3.4.4\ldots.(n-1)} = 2^{n-3} \times \frac{1.3.5\ldots.(2n-5)}{2.3.4\ldots.(n-1)}\text{(*)}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

×Question 137.

(Voir, t. II, p. 137.)

Si, dans une circonférence O, *on inscrit un triangle* ABC, *dont le sommet* A *est fixe et dont les côtés* AB, AC *vérifient la relation*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = K^2,$$

K *étant une constante donnée, le lieu du milieu de* BC *est une droite perpendiculaire à* OA. (V. Jamet.)

Solution par MM. de Rocquigny *et* Polet. Soient M le milieu de BC, D et F les points où les droites AM et AO rencontrent la seconde fois la circonférence. Joignons D, F et menons MP perpendiculaire à OA.

On a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{MB}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2AM\cdot MD;$$

d'où

$$K^2 = 2AM(AM + MD) = 2AM\cdot AD.$$

(*) Il y a une solution, moins simple, de la même question, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Bourget, tome II, page 325.

(**) Rectifications : La question 164, page 91-92, a été aussi résolue par MM. S. B. de Reims et de Rocquigny. A la page 92, ligne 7, lire $\varphi(n+2)$ au lieu de $\varphi(n)$. La question 176, page 69-70, a été aussi résolue par MM. Bastin et Gillet.

La méthode attribuée à M. Antomari, p. 32, se trouve déjà, sous une forme plus générale, dans un article remarquable de M. Ed. Lucas. (*Nouv. Corr. mathém.*, t. IV, pp. 170-171.)