D'après ces relations, on voit que les fonctions hyperboliques définies comme au § I, et les fonctions circulaires, définies comme en trigonométrie, sont des cas particuliers des fonctions générales définies par les séries (a), (b), ou (c), (d) et les relations (g), et l'on s'explique la similitude de leurs propriétés. (*A continuer*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur le nombre de manières dont on peut décomposer un polygone convexe en triangles, par des diagonales.* M. Catalan nous a signalé, à propos de l'article de M. l'abbé Gelin sur ce sujet (*Mathesis*, t. III, pp. 108-110), des travaux remarquables qui ont paru en 1838 et 1839, dans le *Journal de Liouville* et qui nous permettent de donner une bibliographie assez étendue de la question.

Elle fut posée à Segner, au siècle dernier, par l'illustre Euler. Segner, fit connaître pour la résoudre, dans le tome VII des *Novi Commentarii* de S. Pétersbourg, 1758-1761, p. 203-210 (publié en 1761), une méthode qui revient à l'emploi de la formule

$$P_{n+1} = P_n + P_3 P_{n-1} + P_4 P_{n-2} + \cdots + P_{n-1} P_3 + P_n. \qquad (1)$$

La démonstration de Segner est, au fond, la même que celle de M. l'abbé Gelin, pour cette formule.

Dans l'analyse (p. 13-15) du tome VII des *N. C.*, qui est en tête du volume, on donne, sans démonstration, p. 14, la formule plus simple, due sans doute à Euler,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \qquad (2)$$

En 1838, Terquem (*) étant parvenu à l'identité des deux formules (1) et (2), au moyen des propriétés des factorielles, proposa à Liouville d'en chercher une autre démonstration. Liouville soumit la question à divers géomètres : Lamé, alors, lui en communiqua une qui fut publiée dans le *Journal de Liouville*, t. III (1838), p. 505-508. M. Gelin a retrouvé cette

---

(*) Nous ignorons si Terquem a publié cette démonstration.

démonstration, sans se douter, pas plus que nous, qu'elle fût vieille déjà de près d'un demi-siècle.

M. Catalan déduisit d'innombrables conséquences des formules (1) et (2), dans deux articles publiés dans le même recueil, t. III, p. 508-518 (1838), t. IV, p. 95-99 (1839).

Ensuite, O. Rodrigues démontra directement la formule (2) aussi dans le *Journal de Liouville*, t. III, p. 547-548. Cette démonstration directe est moins simple que la démonstration indirecte de Lamé.

Binet, dans le t. IV, p. 79-90, a tiré analytiquement la formule (2) de la formule (1) d'une manière assez compliquée(*). Il trouve aussi la nouvelle formule

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \text{etc.} = 0 \qquad (3)$$

à laquelle M. Catalan est arrivé d'une manière plus simple (t. IV, p. 91-94) dans un article où il établit, en outre, autrement que Rodrigues et Lamé, l'équivalence des formules (1) et (2). (P. M.)

2. *Sur le théorème de Crelle*. Au sujet du théorème de Crelle, cité dans *Mathesis*, t. III, p. 196-197, voici un renseignement bibliographique d'un certain intérêt, que j'ai retrouvé dans les *Nouvelles Annales*, t. XIV, 1855, p. 115.

W. Loof, directeur du gymnase ducal de Gotha, a publié dans les *Archives de Grunert* pour 1851, p. 54, un tableau des diviseurs des nombres composés du chiffre 1 seulement. En voici un extrait :

$$111 = \text{m}.\,37;\quad 1111 = \text{m}.\,101;\quad 11111 = \text{m}.\,41;$$
$$[1111\ldots(26)] = \text{m}.\,859;\quad [1111\ldots.(32)] = \text{m}.\,353;$$
$$[1111\ldots.(34)] = \text{m}.\,103;\quad [1111\ldots.(42)] = 127;\quad [1111\ldots(60)] = \text{m}.\,61.$$

(H. Brocard).

3. *Sur les combinaisons avec répétition*. La méthode exposée dans *Mathesis*, t. III, p. 197-198, se trouve aussi dans l'*Algèbre* de Novi.

(*) Au moyen des fonctions génératrices. A cause de cela, nous ne pensons pas qu'elle soit absolument à l'abri de toute objection. Voir aussi Bertrand, *Calcul différentiel*, n° 342, p. 342.