# SOLVTIO QVAESTIONIS, QVOT MODIS POLYGONVM *n* LATERVM IN POLYGONA *m* LATERVM, PER DIAGONALES RESOLVI QVEAT.

Auctore
*NICOLAO FVSS.*

*Conuentui exhib. die 9 Sept. 1793.*

§. 1.

In litteris a Clarissimo Pfaff Helmstadio die $15^{mo}$ mensis proxime superioris ad me datis, quibus acutissimus iste Geometra plura insignia inuenta, integrationem potissimum formularum differentialium irrationalium spectantia, beneuole mecum communicare voluit, mentio quoque fit Problematis: quot modis *n*gonum in *m*gona per diagonales resoluere liceat? cuius solutionem generalem se consecutum significabat Cl. Pfaff, quaerendo ex me, num mihi, praeter casum $m = 3$, solutio aliqua huius quaestionis innotuerit. Cum igitur, praeter hunc casum memoratum, olim a Segnero in Tomo VII. nouorum Commentariorum tractatum, nulla mihi innotuerit solutio huius Problematis maxime curiosi, abstinere non potui, quominus ipse, quomodo inuestigatio ista in genere suscipienda sit, tentarem. Methodum a me adhibitam, conatuumque meorum successus hic exhibere constitui.

§. 2. Propoſitum igitur ſit Polygonum $n$ laterum, per diagonales, vtcunque, ſiue ex eodem angulo, ſiue ex diuerſis angulis ductas, in Polygona $m$ laterum diuidendum; atque ſtatim intelligitur, certam relationem inter numeros $m$ et $n$ ſubſiſtere debere, quo diuiſio ſuccedat, ita vt, quomodocunque ea inſtituatur, nulla figura remaneat, cuius numerus laterum minor fuerit quam $m$. Ex hac enim conditione manifeſto ſequitur, litteram $n$ alios valores recipere non poſſe, praeter $m$, $2m - 2$, $3m - 4$, $4m - 6$, $5m - 10$, et in genere $im - (2i - 2)$, denotante $i$ numerum quemcunque integrum poſitiuum; qui ſcilicet numeri progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuius termini creſcunt differentia $m - 2$. Si enim Polygono cuicunque $m$gonum iungatur, bina latera contigua in diagonalem abeunt, et laterum noui Polygoni ex hac coniunctione orti numerus tantum increſcit numero $m - 2$.

§. 3. Examinemus nunc accuratius, ſeriem horum Polygonorum $2m - 2$, $3m - 4$, $4m - 6$, $5m - 8$ . . . . . $im - (2i - 2)$ laterum, atque ante omnia videamus quot diagonales ad cuiuslibet reſolutionem in $m$gona requirantur. Perſpicuum autem eſt ad $(2m - 2)$gonum in duo $m$gona diuidendum vnica tantum diagonali opus eſſe; duabus vero pro reſolutione $(3m - 4)$goni in tria $m$gona; tribus porro pro reſolutione $(4m - 6)$goni in quatuor $m$gona. Atque in genere $i - 1$ diagonales requirentur ad $[im - (2i - 2)]$gonum in $i$ $m$gona reſoluendum. Perinde autem eſt, ſiue hae diagonales ex vno eodemque angulo, ſiue ex diuerſis angulis educantur, eorum numerus ſemper erit $i - 1$. Si enim $i$ $m$gona inuicem iungantur, $i - 1$ laterum paria $i - 1$ diagonales efficiunt, et Polygoni, ex $i$ illis $m$gonis compoſiti, numerus laterum erit $im - 2(i - 1)$, vti requiritur.

§. 4.

§. 4. Praemiſſis his obſeruationibus, nulla difficultate obnoxiis, diſpiciamus quot diuerſis modis in Polygono propoſito $im - (\;i - 2)$ laterum $i - 1$ diagonales ita ducere liceat, vt Polygonum in $i$ $m$gona diuidatur. Hunc in finem vocetur iſte reſolutionum numerus.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Pro} & m \text{ - - - gono} & = \mathrm{A}, \\
\text{- -} & 2m - 2 \text{ - - -} & = \mathrm{B}, \\
\text{- -} & 3m - 4 \text{ - - -} & = \mathrm{C}, \\
\text{- -} & 4m - 6 \text{ - - -} & = \mathrm{D}, \\
\text{- -} & \text{- - - - - - -} & , \\
\text{- -} & \text{- - - - - - -} & , \\
\text{Pro} & [(i-3)m - (2i-8)] \text{ gono} & = \mathrm{W}, \\
\text{- -} & [(i-2)m - (2i-6)] \text{ - - -} & = \mathrm{X}, \\
\text{- -} & [(i-1)m - (2i-4)] \text{ - - -} & = \mathrm{Y}, \\
\text{- -} & [im - (2i-2)] \text{ - - - -} & = \mathrm{Z},
\end{array}
$$

inſtituaturque primo enumeratio pro Polygoni propoſiti angulo quolibet A. Ex hoc igitur angulo A manifeſto duas diagonales educere licet, a quarum vtraque Polygonum ita diuiditur, vt ex vna parte reperiatur $m$gonum, ex altera vero $[(i-1)m - (2i-4)]$gonum, quorum illud, per hypotheſin, A modis, hoc vero Y modis diuerſis in $m$gona reſolui poterit, ita vt hoc modo 2 A Y reſolutionum modi oriantur. Tum vero ex eodem angulo A duplici modo diagonalis ita educi poterit, vt ad vnam eius partem reperiatur $(2m - 2)$-gonum, ad alteram vero $[(i-2)m - (\;i-6)]$-gonum, quorum illud B modis, hoc vero X modis reſolutionem in $m$gona admittit, vnde 2 B X reſolutiones naſcuntur. Ex eodem porro angulo itidem duplici modo diagonalem ducere licet, ita vt ab vtraque Polygonum in duo secetur, $(3m-4)$gonum, nimirum, C resolutiones, et $[(i-3)m-(2i-8)]$-gonum, W resolutiones admittens; vnde $2\,CW$ resolutiones prodeunt. Hoc modo progrediendo tandem, si $i$ fuerit numerus impar, peruenietur ad par medium diagonalium, $m$gonum medium includens, et resolutionum numerus hinc oriundus per duplum productum ex duabus litteris ordine sequentibus, veluti $2\,MN$, exprimetur. Sin autem $i$ fuerit numerus par, peruenieiur tandem ad vnicam diagonalem mediam, Polygonum propositum in duo $[\frac{1}{2}im-(i-2)]$gona secantem, quorum si vtrumque M resolutiones permittere statuatur, numerus resolutionum hinc oriundorum erit $M^2$, ita vt, vbi productum ex binis valorum A, B, C, D, - - - - W, X, Y, abeat in quadratum, hoc quadratum semel sumendum, siue coefficiens 2 delendus sit.

§. 5. Quod si nunc hos omnes resolutionum modos in vnam summam colligamus, numerus omnium omnino resolutionum, quas consideratio solius anguli A suppeditat, ita exprimetur:

$$2\,AY + 2\,BX + 2\,CW + 2\,DV + \text{etc.}$$

quorum terminorum numerus erit $\frac{i}{2}$, quando $i$ est numerus par; $\frac{i-1}{2}$ vero, quoties $i$ fuerit numerus impar. Hic igitur numerus si ducatur in numerum angulorum, tum vero, ne singulae diagonales bis in computum veniant, per binarium diuidatur, prodibit numerus omnium modorum ex hac enumeratione oriundorum ita expressus:

$$\frac{im-(2i-2)}{2}(2\,AY + 2\,BX + 2\,CW + 2\,DV + \text{etc.}).$$

Hic autem probe notandum est, in ista enumeratione omes illas $i-1$ diagonales, quae ad singulas resolutiones Polygoni

goni propoſiti in $m$gona requiruntur, vnamquamque ſeorſim, in computum ductam fuiſſe, cum omnibus ſuis combinationibus; ita vt ſinguli reſolutionis modi $i-1$ vicibus in numero illo inuento contineantur. Facta igitur diuiſione per $i-1$, verus numerus omnium reſolutionum inter ſe diverſorum erit

$$Z = \frac{im-(2i-2)}{2i-2}(2AY + 2BX + 2CW + 2DV + \text{etc.})$$

§. 6. Tribuamus nunc litterae $i$ ſucceſſiue valores 1, 2, 3, 4, memores eorum quae ſupra circa valores pares impareſque numeri $i$ obſeruata ſunt. Poſtremae autem denominationes ſupra §. 4. introductae pro variis ipſius $i$ valoribus ſequentes ſubibunt mutationes:

Si $i=1$, Z abit in A,

Si $i=2$, $\left\{\begin{array}{l} Z \text{ abit in } B \\ Y \text{ - - - } A \end{array}\right\}$,

Si $i=3$, $\left\{\begin{array}{l} Z \text{ abit in } C \\ Y \text{ - - - } B \\ X \text{ - - - } A \end{array}\right\}$,

Si $i=4$, $\left\{\begin{array}{l} Z \text{ abit in } D \\ Y \text{ - - - } C \\ X \text{ - - - } B \\ W \text{ - - - } A \end{array}\right\}$,

etc. etc.

quibus notatis, riteque ſubſtitutis, expreſſio noſtra generalis pro numero reſolutionum Polygoni indefiniti $n$, ſiue $im-(2i-2)$ laterum, in $m$gona, in §. praecedente inventa, ſequentes nobis ſubminiſtrat, pro variis Polygonis, reſo-

resoluendis in $m$gona, valores litterarum A, B, C, D, etc. quibus resolutionum numeros indicauimus:

Pro $m$ - - - gono $A = 1$,

- - $(2m - 2)$ - - - $B = (m - 1) A^2$,

- - $(3m - 4)$ - - - $C = \frac{3m - 4}{4} \cdot 2 AB$,

- - $(4m - 6)$ - - - $D = \frac{4m - 6}{6} (2 AC + B^2)$,

- - $(5m - 8)$ - - - $E = \frac{5m - 8}{8} (2 AD + 2 BC)$,

- - $(6m - 10)$ - - - $F = \frac{6m - 10}{10} (2 AE + 2 BD + C^2)$,

- - $(7m - 10)$ - - - $G = \frac{7m - 12}{12} (2 AF + 2 BE + 2 CD)$,

- - $(8m - 14)$ - - - $H = \frac{8m - 14}{14} (2 AG + 2 BF + 2 CE + D^2)$,

- - $(9m - 16)$ - - - $I = \frac{9m - 16}{16} (2 AH + 2 BG + 2 CF + 2 DE)$,

etc. etc.

quorum igitur valorum, lege perspicua progredientium, quisque per praecedentes determinatur.

§. 7. Subsidio harum expressionum, concinnitate in hoc argumento inexpectata praeditarum, facile erit tabulam condere, quae pro variis ipsius $m$ valoribus numerum resolutionum $n$goni in $m$gona numerice exhibeat.

Ta-

# TABVLA

exhibens numerum refolutionum $[im-(2i-2)]$goni in $m$gona, ab $i=1$ vsque ad $i=10$.

| Polygona refoluenda. | Polygona refoluentia. $m=3$ | $m=4$ | $m=5$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | 1 | 1 | 1 |
| $2m-2$ | 2 | 3 | 4 |
| $3m-4$ | 5 | 12 | 22 |
| $4m-6$ | 14 | 55 | 140 |
| $5m-8$ | 42 | 273 | 969 |
| $6m-10$ | 132 | 1428 | 7084 |
| $7m-12$ | 429 | 7752 | 53820 |
| $8m-14$ | 1430 | 43263 | 420732 |
| $9m-16$ | 4862 | 246675 | 3362260 |
| | $m=6$ | $m=7$ | $m=8$ |
| $m$ | 1 | 1 | 1 |
| $2m-2$ | 5 | 6 | 7 |
| $3m-4$ | 35 | 51 | 70 |
| $4m-6$ | 285 | 506 | 819 |
| $5m-8$ | 2530 | 5481 | 10472 |
| $6m-10$ | 23751 | 62832 | 141778 |
| $7m-12$ | 231880 | 749398 | 1997688 |
| $8m-14$ | 2330445 | 9203634 | 28989675 |
| $9m-16$ | 239503[illegible]5 | 115607310 | 430321633 |

## Additamentum.

§. 8. Conſideretur hoc Polynomium indefinitum:

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots . Zx^i,$$

cuius poteſtatem $(m-1)^{mam}$ ponamus

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Dabitur enim vtique eiusmodi relatio inter coëfficientes A, B, C, D, etc. vt haec aequalitas locum habere queat. Quaeramus igitur iſtam relationem, quod, vti conſtat, facillime praeſtabitur, ſumendo differentialia logarithmica, quibus inter ſe aequatis reperietur

$$B = (m-1)A^2,$$
$$C = \frac{3m-4}{2} AB,$$
$$D = \frac{4m-6}{3} AC + \frac{2m-3}{3} B^2,$$
$$E = \frac{5m-8}{4} AD + \frac{5m-8}{4} BC,$$
$$F = \frac{6m-10}{5} AE + \frac{6m-10}{5} AD + \frac{3m-5}{5} C^2,$$
$$G = \frac{7m-12}{6} AF + \frac{7m-12}{6} BE + \frac{7m-12}{6} CD,$$

etc. etc.

primum autem coëfficientem A vnitati eſſe aequalem ipſa poſitio $(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.})^{m-1}$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

ſtatuendo $x = 0$, declarat. Hae determinationes cum iis quas ſupra §. 5. inuenimus, perfecte congruunt. Hinc igitur intelligitur, numerum reſolutionum $[im - (2i-2)]$-goni in $m$gona eſſe coëfficientem poteſtatis $x^{i-1}$ in Polynomio

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots . Zx^i,$$

ad

ad poteſtatem $m - 1$ eleuato; quae proprietas egregie conuenit cum principiis in doctrina de Combinationibus ſtabilitis, quibus ſolutionem noſtram Problematis propoſiti ſtatim ſuperſtruere licuiſſet, niſi methodus ſupra adhibita, euidentia aeque ac breuitate longe praeſtantiſſima, quaſi ſponte ſe obtuliſſet. Interim tamen hunc conſenſum obſervaſſe intereſt, etiamſi ſolutio noſtra tali confirmatione minime egeat.